ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В рамках этой главы мы разберем несколько ключевых методов решения тригонометрических уравнений. Вас ждут-дожидаются 22 экзаменационных задания: попытайтесь одолеть их самостоятельно, а затем осмыслите приведенные решения. По каждому номеру вы найдете лаконичные и строгие выкладки, а также словесные комментарии, в которых акцентирую внимание на важных деталях, объясняю, что привело к успеху и почему. Отбору корней в тригонометрических уравнениях посвящены последние две страницы этой статьи, а справочные материалы вы найдете в конце книги. Учтите, что для успеха на экзамене тригонометрические формулы не просто нужно держать в голове — их следует понимать и уметь применять, вас очень продвинет вперед умение выводить эти тождества. Итак, освежите в памяти, как решать простейшие тригонометрические уравнения, уделите должное внимание теории в целом, и приступим к разбору задач!

I. Сведение к квадратным уравнениям

Пример 1

$\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0.$

Пусть $\sin x = t$, *тогда*

$t^2 + 4t + 3 = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-1, \\ \sin x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Стоит лишь заметить, что слева квадратный трехчлен относительно синуса, сделать соответствующую замену, как решения легко находятся. Но помните, что $|\sin x| \le 1$, *а значит, некоторые корни могут оказаться посторонними. При желании можно не вводить новую переменную, а решать уравнение сразу относительно тригонометрической функции. Далее так и будем поступать.*

Пример 2

$5\sin 3x - 2\cos^2 3x = -4.$

$5\sin 3x - 2(1-\sin^2 3x) + 4 = 0,$

$$2\sin^2 3x + 5\sin 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x=-2, \\ \sin 3x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ 3x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \\ x=-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},\ -\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$

Классика жанра! Используется основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$ *С его помощью удается все «причесать» к синусам. То, что аргумент у нас* $3x$, *не помеха: соответствующие серии решений делятся на три, дабы получить «чистенький» икс. Обратите внимание: для двух различных серий решений используется всего лишь одна целочисленная переменная — это полностью корректно, но впереди будут и такие задачи, в которых различные переменные необходимы.*

Пример 3

$$\operatorname{ctg}^4 x-2\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-3=0.$$

$$\operatorname{ctg}^4 x-2\operatorname{ctg}^2 x-3=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}^2 x=3,\\ \operatorname{ctg}^2 x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Несмотря на то, что по формулам приведения знак тангенса должен был смениться, у нас как был минус, так и остался. Его «съел» квадрат тангенса: минус на минус дает плюс — помните? Кстати, вы заметили, как здесь красиво устроены серии решений? Их удается записать всего лишь одной фразой. Уравнения, подобные тем, что во второй строке, называются биквадратными, и, уверен, вы знаете, что с ними делать.

Пример 4

$$\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1.$$

$$\sin x+2\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x+1,$$

$$\sin x+\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x+1,$$

$$\sin x+1-2\sin^2 x=1,$$

$$\sin x\left(1-2\sin x\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\left(-1\right)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\ \pi n,\ \left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\in\mathbb{Z}.$$

Не вздумайте использовать здесь формулы приведения! С таким аргументом не пройдет. Зато формулы суммы аргументов годятся как никогда лучше. Корни уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ *записаны одной цельной конструкцией, но это ради экономии места, не более: для простейших уравнений с синусом рекомендую писать серии решений развернуто. В нашем случае вот так:*

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Эта форма прозрачна и удобна для дальнейшей работы: пересечение найденных решений с ОДЗ, отбор корней на данном промежутке и т.д.

II. Группировка и разложение на множители

Пример 5

$$\operatorname{ctg}^2 x+\left(1+\sqrt{3}\right)\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}=0.$$

$$\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}=0,$$

$$\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+1\right)+\sqrt{3}\left(\operatorname{ctg} x+1\right)=0,$$

$$\left(\operatorname{ctg} x+1\right)\left(\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x=-1,\\ \operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Не знаю, как вам, а мне эта задача нравится! Ее можно было бы отнести к предыдущей главе, ведь уравнение является квадратным изначально, и можно управиться с помощью дискриминанта или теоремы Виета — пробовали? Но с помощью группировки множителей удается решить задачу быстрей. Впрочем, оставлю это здесь:

$$1)\ D=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}=1-2\sqrt{3}+3=\left(1-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$2)\ \begin{cases}t_1\cdot t_2=\sqrt{3},\\ t_1+t_2=-1-\sqrt{3}.\end{cases}$$

Пример 6

$$2\operatorname{tg} x\cdot\sin x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x+8\sin x-4\sqrt{2}=0.$$
$$\operatorname{tg} x(2\sin x-\sqrt{2})+4(2\sin x-\sqrt{2})=0,$$
$$(\operatorname{tg} x+4)(2\sin x-\sqrt{2})=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-4,\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\operatorname{arctg}4+\pi n\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right., \ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}4+\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Группируем слагаемые так, чтобы получить в левой части произведение, а справа ноль — это существенно упростило бы задачу. К успеху здесь приводят различные варианты группировки, главное — пробовать. В этот раз простора хватило на две серии решений для уравнения с синусом. Кстати, подумайте, нет ли в этом примере ограничений на нашу переменную: вы ведь не забываете про ОДЗ?

Пример 7

$$2\cos x+\sin^2 x=2\cos^3 x.$$
$$2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)+\sin^2 x=0,$$
$$2\cos x\sin^2 x+\sin^2 x=0,$$
$$\sin^2 x\left(2\cos x+1\right)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x=0,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right., n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Надеюсь, вы справились с этой задачкой! Вновь разложение на множители можно провернуть по-разному, было бы желание. Еще больше надежд возлагаю на то, что, решая частные случаи простейших тригонометрических уравнений, вы обращаетесь не к памяти, а представляете или рисуете тригонометр. Например, для $\sin x=0$ *достаточно отметить две точки числовой окружности, у которых ординаты равны нулю, а далее записать соответствующие серии решений. Одной фразой, как вы уже поняли, это можно сделать, используя «πn» (n ∈ ℤ): такая периодичность возникает благодаря тому, что точки на окружности — диаметрально противоположные.*

Пример 8

$$\cos 2x-2\cos x+2\sin x=0.$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos x+2\sin x=0,$$
$$\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)-2\left(\cos x-\sin x\right)=0,$$
$$\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x-2\right)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\cos x,\\ \cos x+\sin x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Симпатичное уравнение! Вы поняли, почему сумма $\sin x+\cos x$ *не может равняться двум? Поскольку* $|\sin x|\le 1$ *и* $|\cos x|\le 1,$ *то двоечку можно получить только в случае* $\sin x=\cos x=1.$ *Но это противоречит чуть ли не всему на свете! Например, тому, что* $\sin^2 x+\cos^2 x=1.$ *В этой задаче нам попалось уравнение вида* $\sin x=\cos x$ *— предлагаю для начала просто нарисовать тригонометр и спросить себя, в каких точках окружности косинус равен синусу. Иными словами, у каких точек единичной окружности абсцисса равна ординате? Ну а о другом подходе мы поговорим в следующей главе!*

III. Сведение к однородным уравнениям

Пример 9

$$2\sin x-3\cos x=0,\ \left|\div\cos x\neq 0\right.$$
$$2\operatorname{tg}x-3=0,$$
$$\operatorname{tg}x=\frac{3}{2},$$
$$x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$
$$\textit{Ответ}:\ \operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=0$ *называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Если a или b равно нулю, то конструкция совсем тривиальная, а если эти коэффициенты отличны от нуля, то выручает деление обеих частей уравнения на* $\cos x\neq 0$. *Как результат — простейшее уравнение на тангенс. Подумайте, что было бы в случае деления на* $\sin x\neq 0$? *То, что наш делитель отличен от нуля в первом шаге алгоритма, доказывается от противного — рассмотрим это ниже. Вы также можете освежить в памяти метод вспомогательного аргумента, который здесь служит достойной альтернативой.*

Пример 10

$$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0,\ \left|\div\cos^2 x\neq 0\right.$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{3\sin\cos x}{\cos^2 x}+\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$$
$$\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x+2=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=1,\\ \operatorname{tg}x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n\\ x=\operatorname{arctg}2+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$
$$\textit{Ответ}:\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ — *так выглядит однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Алгоритм решения снова весьма прост: если* $a\neq 0$, *делим все на* $\cos^2 x\neq 0$. *Кстати, а что делать, если* $a=0$? *Вы это, уверен, знаете. Лучше поговорим про доказательство того, почему же все-таки этот косинус не ноль: если бы вдруг он был нулем, то уравнение приняло бы вид* $\sin^2 x=0$. *Но синус и косинус одного аргумента не могут одновременно равняться нулю* $(\sin^2 x+\cos^2 x=1)$, *значит, мы пришли к противоречию. Косинус, равный нулю, не является решением исходного уравнения, на него смело можно делить.*

Пример 11

$$3\sin^2 x-0{,}5\sin 2x=2.$$
$$3\sin^2 x-0{,}5\cdot 2\sin x\cos x=2\cdot 1,$$
$$3\sin^2 x-\sin x\cos x=2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x),$$
$$3\sin^2 x-\sin x\cos x=2\sin^2 x+2\cos^2 x,$$
$$2\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin^2 x,\ \left|\div\sin^2 x\neq 0\right.$$
$$2\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}x-1=0,$$
$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{2},\\ \operatorname{ctg}x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2}+\pi n\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$
$$\textit{Ответ}:\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\pi n,-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Используя известные тождества, «причесываем» уравнения до стандартной формы, с которой работали в прошлом номере. Обратите внимание на то, что любое число можно представить с помощью суммы квадратов синуса и косинуса — основное тригонометрическое тождество на то и называется основным. Разнообразия ради в этот раз поделили на квадрат синуса: как видите, ничего криминального в этом нет. На всякий случай оставлю это здесь:

$$1)\ \operatorname{tg}x=2\ \Leftrightarrow\ \operatorname{ctg}x=\frac{1}{2},$$
$$2)\ \operatorname{arctg}2=\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}.$$

IV. Работа с тригонометрическими неравенствами и ОДЗ

Пример 12

$\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 0.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \dfrac{\pi n}{2} \end{array}\right. \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой существует. Не забудьте про «существует» и про то, что тангенс и котангенс существуют не всегда. Рекомендую писать ОДЗ сразу отдельно и полностью, но здесь и далее все подобные ограничения мы будем учитывать в рамках равносильного перехода. Ради экономии места, как вы поняли.

Пример 13

$$\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$$

$$\begin{cases} \sin x(2\sin x - 1) = 0, \\ 2\cos x - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right. \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi n, \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Обязательно находите, в каких точках обнуляется знаменатель и учитывайте это при записи итогового ответа. В нынешнем номере легко заметить, что ОДЗ «выбивает» серию $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 14

$$\frac{\cos^2 x + \sin 2x}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x(\cos x + 2\sin x) = 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Совет будет простой: иллюстрируйте свое решение с помощью тригонометра, чтобы не ошибиться — отмечаем закрашенными точками корни уравнения из числителя, а затем выбираем те из них, что располагаются в первой или второй четвертях и, стало быть, удовлетворяют условию $\sin x > 0.$

V. Решаем, тренируемся, получаем хороший балл

Пример 15

$15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}.$

$5^{\cos x}\cdot 3^{\cos x}-3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}=0,$

$3^{\cos x}\cdot(5^{\cos x}-5^{\sin x})=0,$

$$\left[\begin{array}{l}3^{\cos x}=0,\\ 5^{\cos x}=5^{\sin x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \ \cos x=\sin x \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \operatorname{tg} x=1 \ \Leftrightarrow \ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Самое ценное знание для этой задачи состоит в том, что трижды пять — пятнадцать. Ну а с однородными уравнениями первой степени мы уже в хороших отношениях. В ходе решения использовано то, что показательная функция принимает только положительные значения. То есть при желании еще на первых шагах можно было делить обе части уравнения на $3^{\cos x}$. *Поскольку осталось еще несколько пустых строк для комментариев, оставлю это здесь:*

$$\sin x=\cos x \ \Leftrightarrow \ \sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos x=0 \ \Leftrightarrow \ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x-\frac{\pi}{4}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Пример 16

$\log_2(\cos x+\sin 2x+8)=3.$

$\cos x+\sin 2x+8=2^3,$

$\cos x+2\sin x\cos x+8=8,$

$\cos x(1+2\sin x)=0,$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Логарифм в этой задаче никакой серьезной нагрузки не несет, расслабьтесь! Достаточно знать соответствующее определение. Конечно, не стоит забывать и про ограничения, связанные с логарифмами: основание — больше нуля и не равно единице, аргумент — больше нуля. Но, заметьте, в нашем случае эти условия выполняются «автоматически» по ходу решения: основание логарифма равно двум, и с ним все хорошо, а аргумент положителен, поскольку третьей строкой мы написали, что он должен равняться восьми. То есть те значения икс, что мы указали в ответе, заведомо дадут положительный аргумент исходного логарифма — такие вот дела!

Пример 17

$7\operatorname{tg}^2 x-\dfrac{1}{\cos x}+1=0.$

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$$

$$\frac{7(1-\cos^2 x)-\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$$

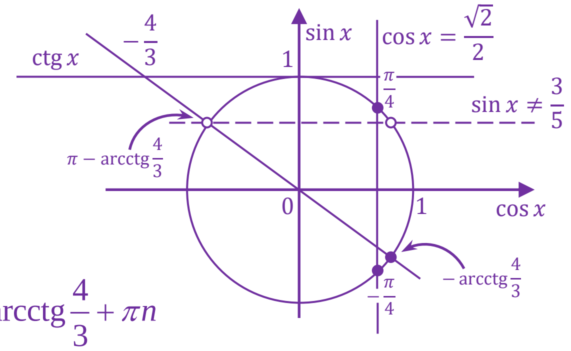
$$\begin{cases}-6\cos^2 x-\cos x+7=0,\\ \cos^2 x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \cos x=-\dfrac{7}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \ x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Нередко с тангенсом становится приятней работать, если записать его в виде отношения синуса к косинусу. Для сложения дробей необходим общий знаменатель — это, хочется верить, все помнят. И, наконец, не забудем правило из 13-го номера: дробь равна нулю $\Leftrightarrow$ *числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.*

Пример 18

$$\frac{\left(\operatorname{ctg}x+\frac{4}{3}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sin x-\frac{3}{5}}=0.$$



$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=-\frac{4}{3},\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.\\ \sin x\neq\frac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+\pi n\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\neq\arcsin\frac{3}{5}+2\pi k\\ x\neq\pi-\arcsin\frac{3}{5}+2\pi k\end{array}\right.\end{cases},\ n,k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$

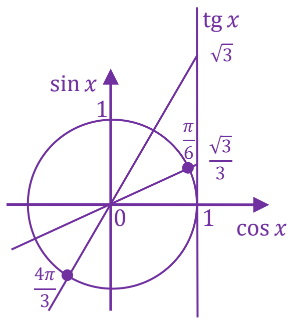
Ответ: $-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Интересная ситуация с «отсевом» корней! Совет будет таков: изобразите решения соответствующих уравнений и неравенств на тригонометре, тогда легче будет видеть, кто лишний, а кто нет. В этом примере может возникнуть сомнение, совпадают ли $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$ *и* $\pi-\arcsin\frac{3}{5}$, *но вспомните египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Он прямоугольный. Попробуйте выразить синус и котангенс острого угла при катете длины 4 по определению, и вы поймете, что исследуемые обратные тригонометрические выражения совпадают.*

Пример 19

$$|\cos x|=2\cos x-\sqrt{3}\sin x.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\geq 0,\\ \cos x=2\cos x-\sqrt{3}\sin x,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ -\cos x=2\cos x-\sqrt{3}\sin x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\geq 0,\\ \operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ \operatorname{tg}x=\sqrt{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}.$$



Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Хорошая задача! Здесь не просто два случая — один с плюсом, другой с минусом — мы должны учесть, для каких значений $\cos x$ *как мы будем раскрывать модуль. Для положительных или нуля — так, для отрицательных — этак. В общем, речь идет о совокупности двух систем. Тригонометрические неравенства можно и нужно решать с помощью тригонометра: косинус положителен в первой и четвертой четвертях, а во второй и третьей — отрицателен. Напомню для интересующихся, что аналитический ответ, например, к неравенству* $\cos x>0$ *выглядит так:* $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$

Пример 20

$$\log_9\left(3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2\right)=x.$$

$$3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\left(1-\sin^2 x\right)-2=9^x,$$

$$6\sin^2 x+5\sqrt{2}\sin x-8=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\end{array}\right., n\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}: \frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Похожая конструкция у нас уже была в 16-ом примере, не так ли? Надеюсь в связи с этим, что с нынешней задачкой вы справились: главное — не побояться «страшненького» дискриминанта и по-честному найти корни квадратного уравнения, далее — дело техники. Заметьте, что в этот раз формальное нахождение ОДЗ было бы несколько громоздким: $3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2>0$. *Но, как и раньше, это условие выполнено в ходе решения: второй строкой мы приравниваем аргумент к положительному выражению* 9^x.

Пример 21

$$\frac{\sin x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=4\cos^2\frac{x}{2}.$$

$$\begin{cases}\sin x-4\cos^2\dfrac{x}{2}\sin^2\dfrac{x}{2}=0,\\ \sin^2\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x-2\sin^2 x=0,\\ \dfrac{x}{2}\neq \pi n, n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\left(1-2\sin x\right)=0,\\ x\neq 2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi m\\ x=(-1)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m\end{array}\right., m\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\ \pi+2\pi m,\ x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$$

В этом нетрудном номере есть одна важная деталь: работая со знаменателем дроби, важно найти ограничения на «чистую» переменную x, а не останавливаться на полпути. Таким образом удается учесть ОДЗ без каких-либо проблем. Особенно, если все закрашенные и выколотые точки вы будете отмечать на одном и том же тригонометре.

Пример 22

$$\begin{cases}2\sin x-5\cos y=7,\\ 5\sin x+\cos y=4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos y=4-5\sin x,\\ 2\sin x-5\cdot(4-5\sin x)=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos y=4-5\sin x,\\ 27\sin x=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos y=4-5\cdot 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ y=\pi+2\pi k\end{cases}, n, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\textit{Ответ}:\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi k\right), n,k\in\mathbb{Z}.$$

Напоследок, порядка ради, рассмотрим систему тригонометрических уравнений. Вспомните два школьных аналитических метода: метод подстановки и метод сложения. В этой задаче легко выразить из второго уравнения косинус, после чего сделать подстановку в первое уравнение и получить часть ответа. Кстати, ответ принято давать в скобках, как и координаты точек, либо системой. В этой задаче особенно важно показать независимость x и y, используя разные целочисленные переменные — в нашем случае n *и* k.

VI. Отбор корней из данного промежутка

В каждом примере ниже будет общее условие: для указанной серии решений отобрать все корни, принадлежащие данному промежутку. Сделать это нетрудно, но ваша главная цель в другом — освойте, как можно больше подходов к решению подобного рода задач.

Пример 1

$$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \left[-\pi;\pi\right].}$$

$$-\pi\le\frac{\pi}{6}+\pi n\le\pi,\ \left|\div\pi\right.$$

$$-1\le\frac{1}{6}+n\le1,$$

$$-1-\frac{1}{6}\le n\le1-\frac{1}{6},$$

$$-\frac{7}{6}\le n\le\frac{5}{6},$$

Т.к. еще $n\in\mathbb{Z}$, *то* $n=-1;\ 0.$

Значит, искомые корни: $-\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}.$

Итак, у нас есть серия решений и промежуток $\left[-\pi;\pi\right]$, *из которого и предстоит отобрать корни. Запишем то условие, что корни принадлежат указанному отрезку, с помощью двойного неравенства, а затем решим его. Работаем одновременно с каждой частью этого двойного неравенства: смело можно делить на положительное число π, также можно переносить слагаемые из одной части в другую, меняя знак на противоположный. Наша цель — ограничить переменную «эн» двумя числами и, вспомнив о целочисленности, найти все ее возможные значения. Получив «эн», делаем подстановку в исходную серию решений, дабы найти икс, и именно этот результат мы указываем в ответе. Высший пилотаж — записать корни в порядке возрастания, но это необязательно. Обязательно — попытаться решить следующий пример разобранным способом.*

Пример 2

$$\boxed{x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \left[0;2\pi\right].}$$

$$0\le-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le2\pi,\ \left|\div\pi\right.$$

$$0\le-\frac{1}{2}+2n\le2,$$

$$\frac{1}{2}\le2n\le\frac{5}{2},\ \left|\div2\right.$$

$$\frac{1}{4}\le n\le\frac{5}{4},$$

С учетом целочисленности: $n=1.$

Значит, $x=\frac{3\pi}{2}.$

$$0\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\le2\pi,\ \left|\div\pi\right.$$

$$0\le\frac{1}{2}+2n\le2,$$

$$-\frac{1}{2}\le2n\le\frac{3}{2},\left|\div2\right.$$

$$-\frac{1}{4}\le n\le\frac{3}{4},$$

Т.к. вдобавок $n\in\mathbb{Z}$, *то* $n=0.$

Стало быть, $x=\frac{\pi}{2}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}.$

Такие серии корней могли получиться, например, при решении уравнения $\cos x=0$. *И, отбирая корни с помощью двойных неравенств, вам предстоит работать с каждой серией в отдельности. Как обычно, не забудьте, найдя подходящие значения целочисленной переменной, определить требуемые корни: в ответе пишем именно их.*

Пример 3

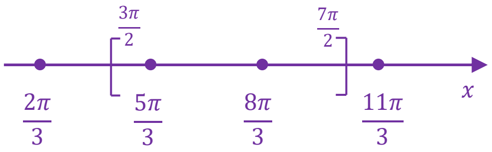
$$\boxed{x = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right].}$$

при $n = 0: \quad x = \frac{2\pi}{3},$

при $n = 1: \quad x = \frac{5\pi}{3},$

при $n = 2: \quad x = \frac{8\pi}{3},$

при $n = 3: \quad x = \frac{11\pi}{3}.$



Ответ: $\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}.$

Вот еще один метод отбора корней: более простой и не менее строгий. Последовательно подставляем целые значения вместо «эн» в нашу серию решений, чтобы получить конкретные икс. Чем больше «эн», тем больше корень. Иными словами, функция $x(n) = \frac{2\pi}{3} + \pi n \ (n \in \mathbb{Z})$ *является монотонно возрастающей. Значение аргумента* $n = 0$ *дало корень меньший левой границы отрезка, а значит, нет смысла брать еще меньшие «эн» — будем двигаться вправо: возьмем* $n = 1$, $n = 2$ *и найдем корни. Как видим, они удовлетворяют указанному отрезку. Но взяв* $n=3$, *мы получаем слишком большой икс, из этого следует, что нет смысла разыскивать подходящие корни, подставляя все бо́льшие и бо́льшие «эн». Вот и все, задача решена!*

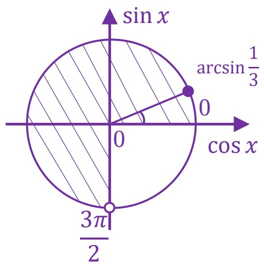
Пример 4

$$\boxed{x = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \left[0; \frac{3\pi}{2}\right).}$$

$\arcsin\frac{1}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \arcsin\frac{1}{3} \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right).$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}.$



Иногда корнями служат нетабличные «арк-числа». Как производить отбор в этом случае? Нужно твердо помнить определения обратных тригонометрических функций и уметь находить ключевые числа на тригонометре. В нашем номере хватает понимания того, в какой четверти находится $\arcsin\frac{1}{3}$ *(в первой, ясное дело). Единственный корень на указанном полуинтервале получаем при* $n = 0$.

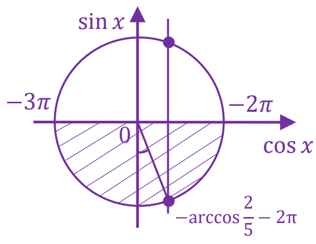
Пример 5

$$\boxed{x = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi n,\ n \in Z; [-3\pi; -2\pi].}$$

$-\arccos\frac{2}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\arccos\frac{2}{5} - 2\pi \in [-3\pi; -2\pi].$

Ответ: $-\arccos\frac{2}{5} - 2\pi.$



Не у всех получается безошибочно отбирать корни на тригонометре. Но в качестве «фильтра» он легок в применении. В заключительном примере нетрудно заметить, что одна из серий решений заведомо не даст подходящих корней. Кстати, не забудьте в своих решениях отмечать на числовой окружности данный промежуток и подходящте корни!