

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Руководство к обучению по материалам канала «Элементарная Математика»

Все лекции и практические занятия находятся в плейлисте ТРИГОНОМЕТРИЯ по ссылке: [плейлист ТРИГОНОМЕТРИЯ](#)

Видео об устройстве плейлиста можно посмотреть [по ссылке](#).

Начать изучение тригонометрии следует с Лекции 1 ([ссылка на Лекцию 1](#)). В лекции рассматриваются тригонометрические функции острого угла. Всегда можно построить прямоугольный треугольник с заданным острым углом, и, пользуясь этим треугольником, мы определим синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла через стороны прямоугольного треугольника. Эти определения в дальнейшем широко используются в геометрии.

Далее рассмотрим некоторые свойства этих понятий (или лучше сказать функций), а также найдем значения этих функций для стандартных (30° , 45° и 60°) острых углов.

В Лекции 2 (которая состоит из двух частей) мы займемся развитием понятия угла.

Первую часть ([ссылка на первую часть Лекции 2](#)) начнем с определения центрального угла (и это вновь имеет пересечение с курсом Геометрия), далее дадим определение угла в 1 градус и в 1 радиан. Посмотрим как связаны эти две меры. Построим тригонометрическую окружность и вместе с ней соответствие всех углов, отмечаемых на ней, и точек числовой прямой. В дальнейшем, при выполнении заданий по попаданию ответами к уравнению в некий интервал (что любят давать на ЕГЭ) нам это пригодится.

Наконец дадим определения основных тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, котангенс) для произвольного угла.

Во второй части ([ссылка на вторую часть Лекции 2](#)) еще раз уделим внимание тригонометрической окружности и в частности покажем, как на ней можно легко удовлетворять линейным неравенствам (на примере неравенства $\sin x - \cos x > 0$).

Полезным будет до этого [познакомиться с линейной функцией](#).

Лекция 3 познакомит со свойствами тригонометрических функций произвольного угла, также научит по заданной тригонометрической функции находить другие. В этой же лекции будут получены две основные формулы тригонометрии $\sin(\alpha + \beta)$ - синус суммы двух углов и $\cos(\alpha + \beta)$ - косинус суммы.

[ссылка на Лекцию 3](#)

Лекция 4 состоит из двух частей и эта лекция очень важна! В ней мы выводим следствия из основных формул.

В первой части ([ссылка на первую часть Лекции 4](#)) получены 16 следствий для синуса и косинуса, среди которых синус и косинус разности двух углов, синус и косинус двойного и тройного угла, формулы преобразования суммы и разности двух синусов (двух косинусов, а также синуса и косинуса) в произведение, преобразования произведения синусов, косинусов или синуса и косинуса в сумму или разность, формулы приведения и формулы понижения степени.

Во второй части ([ссылка на вторую часть Лекции 4](#)) продолжаем выводить следствия из основных формул, и теперь для тангенса.

Кроме того, будут получены формулы половинного аргумента и показаны наиболее скользкие моменты их применения (неграмотное применение этих формул приводит к ошибкам).

Задание к этой лекции - научиться выводить все полученные формулы. Не забывать! И от того, насколько серьёзно Вы отнесётесь к этому заданию зависит Ваш успех в овладении тригонометрией.

Лекция 5. Решение простейших тригонометрических уравнений. И в ней три части.

В первой части ([ссылка на первую часть Лекции 5](#)) мы научимся решать уравнения вида $\sin x = a$. Дадим определение арксинуса, покажем почему общее решение имеет вид $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, рассмотрим частные случаи и познакомимся с графиком функции $y = \arcsin x$.

Для построения графика функции $y = \arcsin x$ рекомендуется всесторонне изучить обратную функцию, для чего имеется три видео.

В первом из них дается определение обратной функции, показывается как по уравнению функции $y = f(x)$ получить уравнение обратной функции, а также дается и условие существования обратной функции ([ссылка на видео](#)).

Во втором видео изучаются свойства обратной функции ([ссылка на вторую часть видео об обратной функции](#)).

В третьей части показано, как по графику исходной функции построить график обратной функции, что собственно и используется при построении графика функции $y = \arcsin x$ ([ссылка на третью часть видео об обратной функции](#)).

Вторая часть Лекции 5 ([ссылка на вторую часть Лекции 5](#)) познакомит с решением простейших уравнений вида $\cos x = a$. По схеме из первой части дадим определение арккосинуса, покажем почему общее решение рассматриваемого простейшего уравнения имеет вид $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим частные случаи и познакомимся с графиком функции $y = \arccos x$.

Третья часть Лекции 5 ([ссылка на третью часть Лекции 5](#)) познакомит с решением простейших уравнений вида $\tan x = a$ и $\cot x = a$ по аналогичной схеме.

Отдельное внимание уделено методу введения вспомогательного угла. И это Лекция 6!

[ссылка на Лекцию 6](#)

В Лекции 7 строятся графики основных тригонометрических функций и указываются их свойства.

[ссылка на Лекцию 7](#)

Следующие три лекции вновь тесно связаны с предыдущим материалом.

Лекция 8 ([ссылка на Лекцию 8](#)) - построение графика функции $y = \arcsin(\sin x)$. В качестве примера вычисляется $\arcsin(\sin 100)$. И далее строится график функции $y = \arctan(\tan x)$.

Лекция 9 ([ссылка на Лекцию 9](#)) - построение графика функции $y = \arccos(\cos x)$. Рассмотрен способ построения, основанный на свойствах функции.

Лекция 10 ([ссылка на Лекцию 10](#)) - построение графика функции $y = \arccos(\sin x)$. Показаны два простых способа построения этого графика на основе предыдущих лекций.

Лекция 11 показывает, как можно вычислить значения основных тригонометрических функций для углов, кратных 3° .
[ссылка на Лекцию 11](#)

Лекция 12 открывает некоторые другие закономерности в тригонометрии, знание которых порой существенно облегчает проверку условий, возникающих в процессе решения примеров. Лекция будет полезна тем, кто имеет достаточно хороший уровень и хочет его дополнительно усилить.
[ссылка на Лекцию 12](#)

Практическая часть представлена разбором следующих заданий.

1. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

[Решение.](#)

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = 2$.

[Решение.](#)

3. Решить уравнение $\cos(\pi\sqrt{x-4}) \cdot \cos(\pi\sqrt{x}) = 1$.

[Решение.](#)

4. Решить уравнение $\sin^4 x + \sin^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 x$.

[Решение.](#)

5. Решить уравнение $\cos^3 3x + \sin^5 3x = 1$.

[Решение.](#)

6. Вычислить $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

[Решение.](#)

7. Вычислить $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$.

[Решение.](#)

8. Решить уравнение $x + \frac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \cdot \sin 2x) = \frac{\pi}{12}$.

[Решение.](#)

9. Решить неравенство $3\sin(2\arccos x) - 2\cos(\arcsin x) \geq 0$.

[Решение.](#)

10. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \frac{\pi}{4} \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = \frac{5\pi^2}{64} \end{cases}$$

Для каждого решения (x, y) определить, какое из чисел больше:

$2y - 3x$ или $\sqrt[4]{2} - 0,5$.

[Решение.](#)

11. Решить уравнение $|1 - 2\cos x + \sin x| + 2\cos x + 1 + \cos 2x = 0$.

[Решение.](#)

12. Решить уравнение

$$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x \cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x \sin 2x - 162.$$

[Решение.](#)

13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{15\sin x + 6} + \sqrt{21\cos y - 15\sin x} = 5 \\ \sqrt{21\cos y + 2} + 2\sqrt{21\cos y - 15\sin x} = 7 \end{cases}$$

[Решение.](#)

14. Решить неравенство $2\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) \geq -x - 3$.

[Решение.](#)

15. Решить уравнение $\cos 6x - 4\cos 5x + \cos 4x - 5\cos x + 7 = 0$.

[Решение.](#)

16. Решить уравнение

$$(x-1)^6(\sin 4x + \sin 4)^{\frac{1}{6}} + (x+1)^6(\sin 2 - \sin 2x)^{\frac{1}{6}} = 0.$$

[Решение.](#)

17. Решить уравнение $\sqrt{3\sin 2x} = 2\sin 2x + \sin x + \cos x - 1$.

[Решение.](#)

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sin(\arccos 5x) = a + \arcsin(\sin(7x - 3))$ имеет единственное решение.

[Решение.](#)

19. Решить неравенство $\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x$.

[Решение.](#)

20. Найдите все решения неравенства $\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}$,
удовлетворяющие условию $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right)$.

[Решение.](#)

21. Решить в целых числах $\sin \frac{6x^2}{x^2 - 1} + \sin \frac{2x^2 - 6x - 2}{x^2 - 1} > 0$.

[Решение.](#)

22. Решить уравнение $\frac{1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 2x} = 0$.

[Решение.](#)

23. Решить уравнение $\operatorname{tg} 4x \cdot \cos 7x = \sin 7|x|$.

[Решение.](#)

24. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\operatorname{ctg} 3x + \sin^2 x - \frac{1}{4}} = \sin \frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[Решение.](#)

25. Решить уравнение

$$\sin \left(\frac{2x + 1}{x} \right) + \sin \left(\frac{2x + 1}{3x} \right) - 3\cos^2 \left(\frac{2x + 1}{3x} \right) = 0.$$

[Решение.](#)

26. Решить уравнение $(1 - \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$.

[Решение.](#)

27. Найдите все значения x , при которых числа $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$,

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)}, 7^{\sin\left(5x - \frac{3\pi}{4}\right)}$$
 в указанном порядке составляют

возрастающую геометрическую прогрессию.

[Решение.](#)

28. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos\left(\pi\sqrt{x}\sqrt{\frac{6}{x}-x-4}\right)+3\sin\left(\pi x\sqrt{\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x}-1}\right)=\sqrt{2}.$$

[Решение.](#)

29. Решить уравнение $x + \frac{1}{9}\arcsin(2\cos 7x \cdot \cos 2x - \sin 16x) = \frac{\pi}{18}$.

[Решение.](#)

30. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \sqrt{2\cos x} = 0$.

[Решение.](#)

31. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left| \cos \frac{\pi(x+y)}{4} \right| + \left| 1 + \cos \frac{\pi(x-y)}{4} \right| = 0 \\ \sqrt{4 - |x| - |y+4|} = \sqrt{4 - |x| - |y+4|} \end{cases}$$

[Решение.](#)

32. Вычислить $\operatorname{arctg} \sqrt{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

[Решение.](#)

33. Вычислить $\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg} \frac{19}{22} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{2}\right)$.

[Решение.](#)

34. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$$

[Решение.](#)

35. Решить уравнение $|\cos 2x \cdot \sin 6x| + |\cos 6x \cdot \sin 2x| = \sin \frac{3\pi}{11}$.

[Решение.](#)

36. Решить уравнение $\sqrt{-\sin 4x} \cdot \log_3 \left(\operatorname{tg} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = 0$.

[Решение.](#)

37. Решить уравнение

$$\left| -\cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} + \frac{1}{4} \right| = \left| \cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} - \frac{1}{4} \right|.$$

[Решение.](#)

38. Решить уравнение $\cos \left(\pi \left(x + 7\sqrt{x} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(4x + \sqrt{x} \right) \right) = 1$.

[Решение.](#)

39. Для каждого значения параметра α решить уравнение $4 \cos x \sin \alpha + 2 \sin x \cos \alpha - 3 \cos \alpha = 2\sqrt{7}$.

[Решение.](#)

40. Решить уравнение $x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x$.

[Решение.](#)

41. Решить уравнение $\arcsin \left(\frac{6x - 7}{2x - 1} \right) = 2\pi - \pi x$.

[Решение.](#)

42. Решить уравнение $4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}$.

[Решение.](#)

43. Сравнить два числа: $\frac{2\pi}{5}$ и $\arccos \frac{3}{10}$.

[Решение.](#)

44. а) Решите уравнение $\frac{4}{\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} - \frac{11}{\cos x} + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

[Решение.](#)

45. а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

[Решение.](#)

46. а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(3\cos 2x - 2\cos^2 x + 5) = -2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

[Решение.](#)

47. а) Решите уравнение $4\sin^4 x + 7\cos^2 x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

[Решение.](#)

48. а) Решите уравнение $\sin x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

[Решение.](#)

49. а) Решите уравнение $\left((0,04)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

[Решение.](#)

50. а) Решите уравнение $(2\sin^2 x - \cos x - 1) \cdot \log_3(-0,2\sin x) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; 7\pi]$.

[Решение.](#)

51. а) Решить уравнение $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$.

б) Указать решения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

[Решение.](#)

52. а) Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2} + 1)\operatorname{ctgx}$.

б) Указать все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

[Решение.](#)

53. а) Решить уравнение $\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0$.

б) Указать все корни, принадлежащие отрезку $[-2; 0]$.

[Решение.](#)

54. Найдите все значения b , при каждом из которых уравнение $\frac{\sin x - b\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{b + 2}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

[Решение.](#)

55. Найдите все решения уравнения

$$2\cos\frac{x}{3} + 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} = 2 - \sqrt{5}, \text{ удовлетворяющие условию}$$
$$\cos\frac{3x}{4} < 0.$$

[Решение.](#)

56. Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0$.

[Решение.](#)

57. Решить уравнение $\sin 3x - \sin 2x \cdot \cos x = 0$.

[Решение.](#)

58. Решить уравнение $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \sin x \cdot \left(\cos x - \frac{2}{3}\right)$.

[Решение.](#)

59. Найдите $\sin \frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ и $-\pi < \alpha < 0$. И сравните $\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$ и $\frac{3}{7}$.

[Решение.](#)

60. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin y| \sin y = \frac{|\cos x|}{\cos x} \\ |\cos x - 1|^2 + |\sin y|^2 = 4 \end{cases}$$

[Решение.](#)

61. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x - \sin y = 0 \\ 4\sin x + 2\cos y = 5 \end{cases}$$

[Решение.](#)

62. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\cos(x+y)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos y}{\cos(x+y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

[Решение.](#)

63. Найти все x из отрезка $[0; \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2} \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2} \end{cases}$$

[Решение.](#)

64. Найти все решения неравенства $\sqrt{6 - 10\cos x - \sin x} < \sin x - \cos x$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

[Решение.](#)