Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа № 6
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Конечно-разностные методы решения задачи Коши”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной лабораторной работе было проведено исследование метода Адамса 4-го порядка для численного решение задачи Коши.

В качестве результатов работы представлены зависимости абсолютной погрешности решения задачи Коши от шага интегрирования

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'(x) = f(x, y)$$

Решением данного уравнения является семейство интегральных кривых, то есть функция следующего вида:

$$y = y(c, x)$$

Задача Коши состоит в том, чтобы выделить такое значение c, чтобы функция y удовлетворяла наперёд заданному начальному условию:

$$y(x_0) = y_0$$

Решая данную задачу численно, в качестве решения мы получим табличную функцию. Будем считать, что данная функция задана на равномерной сетке.

Общий вид формул в конечно-разностных методах:

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f(x_{k-j}, y_{k-j})$$

Где $a_j,\ b_j$ − константы, $a_0 \neq 0,\ a_r \neq 0,\ r$ − шаговость метода.

Методы Адамса - частный случай конечно-разностных методов, где

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_j = 0\ \forall j \geq 2$$

Тогда формула для y_k примет вид:

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{r} b_j f(x_{k-j}, y_{k-j})$$

Выведем r-шаговый метод Адамса:

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по x на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} F(x)dx$$

Аппроксимируем функцию $F(x)$ с помощью полинома в форме Лагранжа по $m = r - 1$ точкам:

$$F(x) = L_m(x) + R_m(x)$$

Подставляем в уравнение:

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} L_m(x)dx + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx$$

Воспользуемся равномерностью сетки ($x = x_0 + ht$), по которой мы интегрируем. Тогда, пренебрегая остатком, получим:

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{r-1}}^{x_r} L_m(x)dx = y_{k-1} + \int\limits_{r-1}^{r} L_m(x_0 + ht)dt$$

Формула для полинома Лагранжа на равномерной сетке:

$$L_m(x_0 + ht) = \sum_{j=0}^{m} F_j \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \frac{\varpi(t)}{t-j}$$

Где

$$\varpi(t) = \prod_{j=0}^{m} (t - j)$$

Итоговое представление:

$$y_k = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{m} (\frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{\varpi(t)}{t-j} dt)F_j = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{m} \beta_j F_j$$

Найдем коэффициенты для $r = 4$:

$$\beta_0 = \frac{(-1)^{3-0}}{(3-0)!0!}\int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-0}dt = \frac{-9}{24}$$

$$\beta_1 = \frac{(-1)^{3-1}}{(3-1)!1!}\int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-1}dt = \frac{37}{24}$$

$$\beta_2 = \frac{(-1)^{3-2}}{(3-2)!2!}\int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-2}dt = \frac{-59}{24}$$

$$\beta_3 = \frac{(-1)^{3-3}}{(3-3)!3!}\int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-3}dt = \frac{55}{24}$$

Заметим, что из начального условия мы имеем только 1 стартовую точку, а для 4-шагового метода Адамса их необходимо 4. Для нахождения стартовых (разгонных) точек, можно использовать метод Рунге-Кутты 4-го порядка:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе была исследована зависимость погрешности численного решения задачи Коши от шага интегрирования. Исследования проводились на следующей задачи Коши:

$$y' = 2x - 3 + y$$

$$y(0) = 0$$

При этом промежуток выбран следующий: $[0,\ 6]$

Аналитическим решением данного уравнения является функция[1]:

$$y = 1 - 2x + Ce^x$$

Подставим $y(0) = 0$, тогда получим:

$$0 = 1 - 0 + \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C} = -1$$

Точное аналитическое решение нашей задачи Коши:

$$y^*(x) = 1 - 2x - e^x$$

Погрешность решения вычислялась как максимальное абсолютное отклонение табличной функции, полученной в результате работы метода от нашего аналитического решения, то есть:

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 176 с. — С. 11, задача 63.

$$\delta = max_{j=1,2,...,n}\{|y^*(x_j) - y(x_j)|\}$$

Где $x_j = jh$ (h - шаг интегрирования, $h = \frac{6-0}{n}$)

На каждой итерации в проводимом исследовании шаг интегрирования уменьшался от 2^2 до 2^{-18} в 2 раза (параметр n, используемый в формулах выше, увеличивался в 2 раза).

Результаты исследования показаны на рисунке 1:

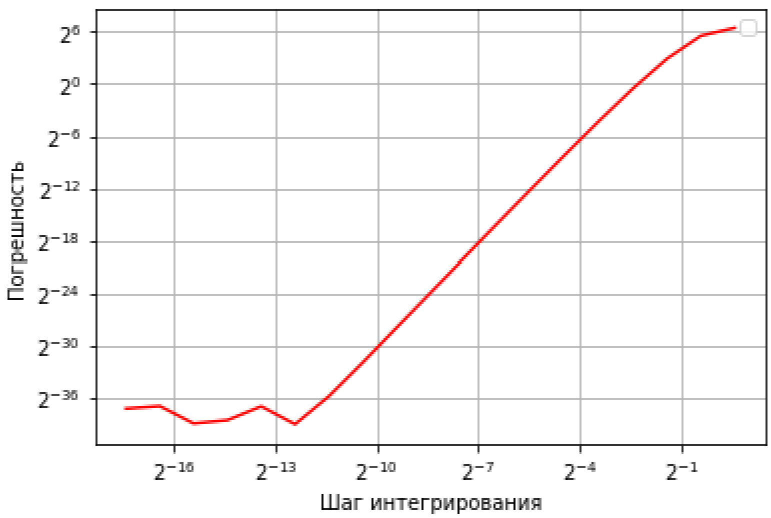

Рис. 1 Зависимость погрешности решения задачи Коши от шага интегрирования

На данном рисунке видно, что при уменьшении шага интегрирования в 2 раза погрешность интегрирования уменьшается в 2^4 раза, то есть порядок точности метода равен 4, при шаге интегрирования менее 2^{-12} достигается предел машинной точности

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован метод Адамса 4 порядка для численного решения задачи Коши. Можно сделать следующие выводы:

- При увеличении шага интегрирования в 2 раза погрешность решения в исследуемом методе увеличивается в 2^4 раз
- При шаге интегрирования менее 2^{-12} достигается предел машинной точности