# Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

17 мая 2024 г.

# Содержание

# Постановка задачи

Дифференциальное уравнение $n$-го порядка

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $y(x)$ - неизвестная функция.

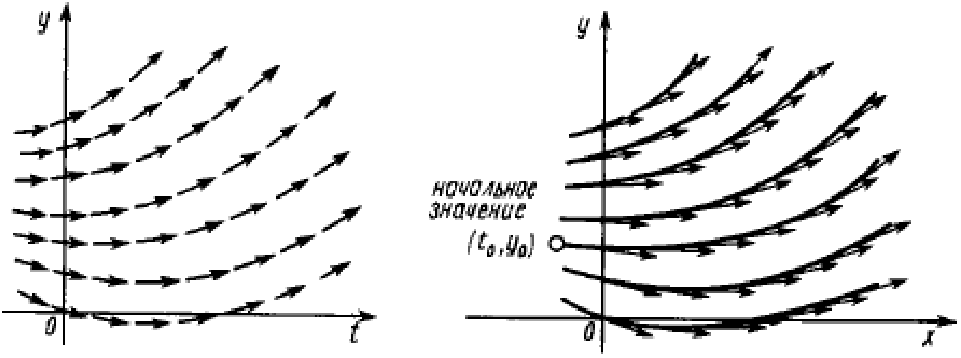
Уравнение (1), разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Общее решение: $y(x) = y(c_1, \ldots, c_n)$ - $n$-параметрическое семейство.

Пусть через любую точку проходит единственная интегральная кривая.
Чтобы выделить единственное решение, нужно задать $n$ условий.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 1-го порядка: $y' = f(x, y)$
$f(x, y)$ задаёт поле направлений.




а) б)

Пусть задача решается на конечном отрезке $[a, b]$.

1. Все условия заданы в одной точке $[a, b]$ $\rightarrow$ задача Коши, или задача с начальными условиями.
2. Условия заданы в разных точках $[a, b]$ $\rightarrow$ краевая задача.

## Пример

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b]. \tag{3}$$

1. $y(b) = \alpha_1, y'(b) = \alpha_2$ - задача Коши.
2. $y'(a) = \alpha_1, y(b) + y'(b) = \alpha_2$ - краевая задача.

# Задача Коши (the Cauchy problem, or the initial value problem)

Будем рассматривать задачу Коши для ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $D = \{(x,y) | a \le x \le b, -\infty < y < \infty\}$ и функция $f(x,y)$ непрерывна на $D$. Если $f$ удовлетворяет условию Липшица на $D$ по $y$, т.е.

$$\exists L > 0 : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \tag{5}$$

для любых $(x,y_1)$ и $(x,y_2)$ из $D$, то (4) имеет единственное решение $y^\star(x)$.

# Численные методы решения задачи Коши

$x^h = \{x_k\}_{k=0}^n$, $x_k = a + kh$ - равномерная сетка.

## Определение

Приближенное решение с точностью $\epsilon$ - табличная функция $y^h = \{y_k\}_{k=0}^n$, определенная на сетке $x^h \subset [a, b]$

$$|y_k - y^\star(x_k)| \leq \epsilon. \tag{6}$$

## Определение

Вычислительную формулу для нахождения $y_k$

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r}). \tag{7}$$

будем называть вычислительной схемой, или методом решения.

# Классификационные признаки

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r}).$$

1. $r = 1$ - одношаговая схема.
   $r > 1$ - многошаговая, или $r$-шаговая схема. Для старта нужны значения в $r-1$ точке.
2. $\Phi_f$ не содержит $y_k$ - явная схема.
   $y_k$ входит в $\Phi_f$ - неявная схема. На каждом шаге нужно решать уравнение относительно $y_k$.
3. Если $\Phi_f(\dots) = h \sum\limits_{j=0}^{r} b_j f(x_{k-j}, y_{k-j})$, то метод называется конечно-разностным.

Примеры методов:

- Явный метод Эйлера: $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$
- Неявный метод Эйлера: $y_k = y_{k-1} + hf(x_k, y_k)$
- Метод Адамса 2-го порядка: $y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}[3f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})]$

# Приведение уравнения $n$-го порядка к системе уравнений 1-го порядка

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Введем новые переменные

$$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x) \tag{8}$$

Тогда

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & // \quad f_1 \\ y_2' = y_3 & // \quad f_2 \\ \dots & \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & // \quad f_n \end{cases} \tag{9}$$

Задача Коши

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y), x \in [a, b] \\ Y(a) = Y_0 \end{cases} \tag{10}$$

$Y = [y_1, \dots, y_n]^\top, F = [f_1, \dots, f_n]^\top.$

# Пример

Осциллятор Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \mu(1-y^2)\frac{dy}{dx} + y = 0, \tag{11}$$

где $y = y(x)$ - координата точки.

$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x) \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \mu(1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{cases} \tag{12}$$

Начальные условия

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

# Содержание

- $y^\star(x)$ - точное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{14}$$

- $\{y_k\}_{k=0}^n$ - точное решение по вычислительной схеме

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-r}). \tag{15}$$

- $\{\tilde{y}_k\}_{k=0}^n$ - решение с учётом ошибок вычислений.

1. ошибка дискретизации = погрешность метода
$$\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k). \tag{16}$$
2. вычислительная ошибка
$$\delta_k = \tilde{y}_k - y_k. \tag{17}$$
3. полная ошибка
$$\Delta_k = \tilde{y}_k - y^\star(x_k). \tag{18}$$

Цель - получить решение с заданной точностью $\epsilon$: $|\Delta_k| \leq \epsilon$.

$$|\Delta_k| = |\tilde{y}_k - y^\star(x_k) \pm y_k| \leq |\epsilon_k| + |\delta_k|. \tag{19}$$

При уменьшении $h$

- ошибка дискретизации $\epsilon_k$ уменьшается
- вычислительная ошибка $\delta_k$ растет, т.к. увеличивается количество вычислений.

# Сходимость и устойчивость

Сходимость схемы определяется поведением ошибки дискретизации $\epsilon_k$.

## Определение

Вычислительная схема сходится, если $\epsilon_k \xrightarrow[\substack{h\to 0\\ kh=const}]{} 0$

Устойчивость схемы определяется поведением вычислительной ошибки $\delta_k$.

## Определение

Вычислительная схема называется устойчивой, если

$$|\delta_k| \leq C|\delta_{k_0}|, \qquad (20)$$

где $C$ не зависит от $h$, $k_0$ и $k = k_0 + m, m > 0$.
$k_0 h = const, kh = const.$

(20) - скорость роста вычислительной погрешности ограничена.

# Замечания

1. Ошибка аппроксимации

$$e_k = y^\star(x_k) - \Phi_f(h, x_k, y^\star(x_k), y^\star(x_{k-1}), \ldots, y^\star(x_{k-r})) \tag{21}$$

   показывает, насколько точное решение не удовлетворяет вычислительной схеме. Если $e_k = \mathcal{O}(h^{q+1})$, то вычислительная схема аппроксимирует ОДУ с порядком $q$.
2. Ошибка аппроксимации $e_k$ и ошибка дискретизации $\epsilon_k$ связаны между собой. $y^\star(x_k) = y_k - \epsilon_k$ подставить в (21)...
3. Следует различать устойчивость схемы и устойчивость решения ОДУ.

# Пример неустойчивой задачи

$$\begin{cases} y' = 2y - 2x + 1 - 2\sqrt{3}, x \in [0, 10] \\ y(0) = y_0 = \sqrt{3} \end{cases} \tag{22}$$

Общее решение: $y(x) = ce^{2x} + x + \sqrt{3}$.
Искомое частное решение: $y^{\star}(x) = x + \sqrt{3}$ и $y^{\star}(10) = 10 + \sqrt{3} = 11.73205081$.

Пусть $\tilde{y}_0 = y_0 + \delta, \delta \ll 1$
$\tilde{y}(x) = \delta e^{2x} + x + \sqrt{3} = \delta e^{2x} + y^{\star}(x)$
$\tilde{y}(10) = \delta e^{20} + 10 + \sqrt{3}$.

Если $\delta = 10^{-8}$, то $\Delta y(10) = 4.85165195$.
Ошибка, связанная с округлением исходных данных, более 40%.

# Содержание

# Метод Эйлера (the Euler method)

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{23}$$

Равномерная сетка: $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.
$x, x + h \in [a, b]$
Разложим в ряд Тейлора $y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2)$.

Пусть $x = x_k \Rightarrow y(x_k + h) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \mathcal{O}(h^2)$.
Отбросим $\mathcal{O}(h^2)$ и заменим $y(x_k)$ на $y_k$

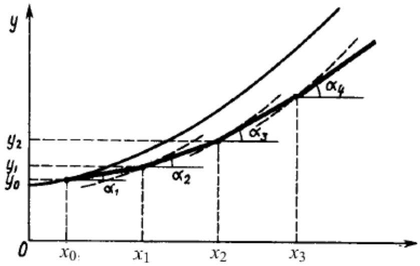
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \tag{24}$$

# Геометрическая интерпретация

1. в точке $x_0$ строится касательная к интегральной кривой

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \qquad (25)$$

2. $y_1$ - значение $y(x)$ в точке $x_1$




На каждом шаге переходим на новую интегральную кривую.

Метод Эйлера - явный, одношаговый метод.

# Устойчивость метода Эйлера

Вычисленное значение по схеме Эйлера (24)

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + hf(x_k, \tilde{y}_k). \tag{26}$$

Ошибка вычислений

$$\begin{aligned} |\delta_{k+1}| &= |\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}| = |\tilde{y}_k + hf(x_k, \tilde{y}_k) - y_k - hf(x_k, y_k)| \\ &\leq |\delta_k| + h|f(x_k, \tilde{y}_k) - f(x_k, y_k)| \leq |\delta_k| + hL|\delta_k| = (1 + hL)|\delta_k| \end{aligned} \tag{27}$$

Для любых допустимых $k$ и $m$

$$\begin{aligned} |\delta_{k+m}| &\leq (1 + hL)|\delta_{k+m-1}| \leq (1 + hL)^2|\delta_{k+m-2}| \leq \ldots \\ &\leq (1 + hL)^m|\delta_k| \leq e^{hLm}|\delta_k| = e^{(x_{k+m} - x_k)L}|\delta_k| \leq e^{(b-a)L}|\delta_k| \end{aligned} \tag{28}$$

Константа $C = e^{(b-a)L}$ не зависит от $h$, $k$ и $m$.

# Идея методов Рунге-Кутты

Задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$x, x + h \in [a, b]$

$$y(x+h) = y(x) + \underbrace{\frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \ldots + \frac{h^s}{s!}y^{(s)}(x)}_{\Delta_s y(x)} + \mathcal{O}(h^{s+1}) = y(x) + \Delta_s y(x) + \mathcal{O}(h^{s+1}) \tag{29}$$

$$\Delta_s y(x) = \tfrac{h}{1!}f(x, y) + \tfrac{h^2}{2!}\tfrac{d}{dx}f(x, y) + \ldots + \tfrac{h^s}{s!}\tfrac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}f(x, y)$$

Заменим $\Delta_s y(x)$ некоторой функцией $\delta_s y(x, h)$, которая удовлетворяет условию

$$\Delta_s y(x) = \delta_s y(x, h) + \mathcal{O}(h^{s+1}). \tag{30}$$

Будем искать $\delta_s y(x,h)$ в виде линейной комбинации значений $f$

$$\delta_s y(x,h) = h\sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x+\delta x_i, y+\delta y_i). \tag{31}$$

Подберем $l, \rho_i, \delta x_i, \delta y_i$ так, чтобы (30) выполнялось. Тогда

$$y(x+h) = y(x) + \delta_s y(x,h) + \mathcal{O}(h^{s+1}) \tag{32}$$

В (32) отбросим $\mathcal{O}(h^{s+1})$, $x \to x_k$, $x+h \to x_{k+1}$

$$y_{k+1} = y_k + \delta_s y(x,h). \tag{33}$$

$s$ - порядок метода, $l$ - шаговость, или стадийность метода.

# Как строить $\delta_s y(x,h)$?

Выбираем $l$. Будем искать $\delta_s y(x,h)$ в виде

$$\delta_s^l y(x,h) = h \sum_{i=1}^{l} \rho_i K_i, \tag{34}$$

где

$$\begin{cases} K_1 = f(x,y) \\ K_2 = f(x+\alpha_2 h, y + h\beta_{21}K_1) \\ K_3 = f(x+\alpha_3 h, y + h\beta_{31}K_1 + h\beta_{32}K_2) \\ \dots \\ K_l = f\left(x + \alpha_l h, y + h\displaystyle\sum_{j=1}^{l-1} \beta_{lj}K_j\right) \end{cases} \tag{35}$$

Тогда $y_{k+1} = y_k + h\sum\limits_{i=1}^{l} \rho_i K_i$.

Коэффициенты $\rho_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ выбираются из условия (30): обеспечение порядка аппроксимации $s$.
Их часто записывают в виде таблицы Бутчера

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & & & & \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \\
\alpha_l & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{l,l-1} & \\
\hline
 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{l-1} & \rho_l
\end{array}
$$

1. Метод Эйлера - одностадийный метод Рунге-Кутты 1-го порядка.
2. Классический 4-х стадийный метод Рунге-Кутты 4-го порядка

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(x_k, y_k) \\
K_2 &= f(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 &= f(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 &= f(x_k + h, y_k + hK_3)
\end{aligned}
$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

### Замечание

Метод Рунге-Кутты $s$-го порядка на каждом шаге совершает погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$. Стадийность $l$ - количество вычислений функции $f$ для расчета нового узлового значения $y_k$.

# Методы Рунге-Кутты 2-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{36}$$

Разложим в ряд Тейлора $y(x+h) = y(x) + \underbrace{\frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x)}_{\Delta_2 y(x)} + \mathcal{O}(h^3)$

$y'(x) = f(x,y)$
$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f'_x + ff'_y$

$$\Delta_2 y(x) = hf + \frac{h^2}{2}(f'_x + ff'_y) \tag{37}$$

Будем строить 2-х стадийный метод Рунге-Кутты ($l = 2$)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \\ \hline & \rho_1 & \rho_2 \end{array} \qquad \begin{cases} K_1 = f(x, y) \\ K_2 = f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} K_1) \end{cases} \tag{38}$$

$$\delta_2^2 y(x, h) = h[\rho_1 K_1 + \rho_2 K_2] = h[\rho_1 f(x, y) + \rho_2 f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} f(x, y))]$$
$$f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} f(x, y)) = f + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial x} + h\beta_{21} f \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\delta_2^2 y(x, h) = h(\rho_1 + \rho_2) f + h^2 \alpha_2 \rho_2 f'_x + h^2 \beta_{21} \rho_2 f f'_y + \mathcal{O}(h^3) \tag{39}$$

Коэффициенты выбираются из условия

$$\Delta_2 y(x) = \delta_2^2 y(x, h) + \mathcal{O}(h^3) \tag{40}$$

(37), (39) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 1 \quad //hf \\ \alpha_2 \rho_2 = \dfrac{1}{2} \quad //h^2 f'_x \\ \beta_{21} \rho_2 = \dfrac{1}{2} \quad //h^2 f f'_y \end{cases} \tag{41}$$

Число уравнений меньше числа неизвестных.
Пусть $\rho_2 = p \Rightarrow \rho_1 = 1 - p$ и $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2p}$

$x \to x_k, x + h \to x_{k+1} \Rightarrow$ общая формула методов Рунге-Кутты 2-го порядка

$$y_{k+1} = y_k + h(1-p) f(x_k, y_k) + hpf\left(x_k + \frac{h}{2p}, y_k + \frac{h}{2p} f(x_k, y_k)\right) \tag{42}$$

$p$ может быть любым (отличным от 0), однако...

- $x_k + \frac{h}{2p}$ лежит внутри $[x_k, x_k + h] \Rightarrow p \geq \frac{1}{2}$
- если $f(x, y) = f(x)$, то $y'(x) = f(x) \Rightarrow$

$$y(x_k + h) - y(x_k) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h(1-p)f(x_k) + hpf\left(x_k + \frac{h}{2p}\right) \qquad (43)$$

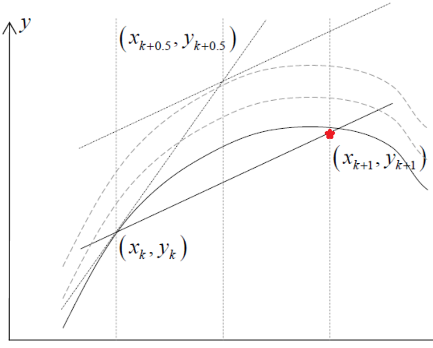
Получили квадратурную формулу.
$hp \geq 0$, $h(1-p) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq 1$.

В итоге

$$\frac{1}{2} \leq p \leq 1. \qquad (44)$$

# Модифицированный метод Эйлера, или метод средней точки ($p = 1$)

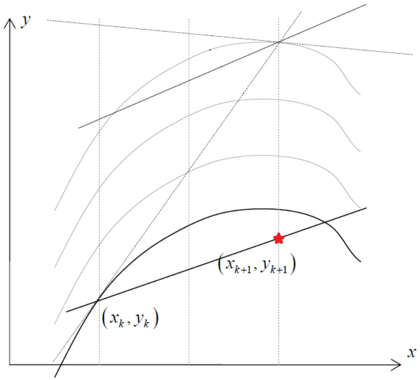
$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, \underbrace{y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \dfrac{h}{2}f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}), \quad x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \dfrac{h}{2} \end{cases}$$




Делаем шаг $\frac{h}{2}$ по методу Эйлера. Затем строим касательную в полученной точке и сдвигаем ее так, чтобы она проходила через $(x_k, y_k)$.

# Метод Эйлера-Коши, или метод Хойна ($p = \frac{1}{2}$)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} f\left(x_k + h, \underbrace{y_k + hf(x_k, y_k)}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h\dfrac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2} \end{cases}$$



# Практическое использование методов Рунге-Кутты

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$H = \frac{b-a}{N}$. Нужно получить сеточную функцию в узлах $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N$.

Пусть используется метод Рунге-Кутты $s$-го порядка. Шаг $H$ как правило большой $\Rightarrow$ локальная ошибка $\mathcal{O}(H^{s+1})$ будет большой.

Каждый шаг делят на $m$ частей $\Rightarrow$ шаг интегрирования $h = \frac{H}{m}$ и локальная погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$.

# Контроль локальной погрешности. Правило Рунге.

Если $y_k$ взять как точное, то $y^\star_{k+2}$ - точное значение, лежащее на интегральной кривой, которая проходит через $(x_k, y_k)$.

$$y^{(2h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + \epsilon^{(2h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + c^{(2h)}_k (2h)^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$
$$y^{(h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + \epsilon^{(h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + 2c^{(h)}_k h^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

Если $h$ мало, то $c^{(2h)}_k \approx c^{(h)}_k \approx c$

$$y^{(2h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + 2ch^{s+1}2^s + \mathcal{O}(h^{s+2})$$
$$y^{(h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + 2ch^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

$y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)} = 2ch^{s+1}(2^s - 1) + \mathcal{O}(h^{s+2})$
Оценка локальной погрешности метода

$$\epsilon_{k+2}^{(h)} \approx 2ch^{s+1} \approx \frac{y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)}}{2^s - 1} \tag{45}$$

- Если (45) меньше $\epsilon$, то метод дает желаемый результат.
- Если (45) сильно меньше $\epsilon$, то шаг можно увеличить.

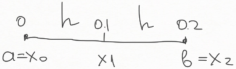
Можно сделать уточнение

$$\bar{y}_{k+2} = y_{k+2}^{(h)} - \frac{y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)}}{2^s - 1} \tag{46}$$

Поправка Ричардсона повышает порядок локальной погрешности на 1, т.е. $\mathcal{O}(h^{s+2})$.

$$\begin{cases} y' = 2x - 3y & x \in [0, 0.2] \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y^*(x) = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} e^{-3x}$$

М. Эйлера




$h = 0.1$

$y^*(0.2) \approx 0.58$

$$y_2^{(0.2)} = y_0 + 2h \cdot (2x_0 - 3y_0) = 1 + 2 \cdot 0.1 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = 0.4 \qquad \varepsilon_2^{(0.2)} = y_2^{(0.2)} - y^*(0.2) = -0.18$$

$$y_1^{(0.1)} = y_0 + h\,(2x_0 - 3y_0) = 0.7$$

$$y_2^{(0.1)} = y_1 + h \cdot (2x_1 - 3y_1^{(0.1)}) = 0.7 + 0.1 \cdot (2 \cdot 0.1 - 3 \cdot 0.7) = 0.51 \qquad \varepsilon_2^{(0.1)} = y_2^{(0.1)} - y^*(0.2) = -0.07$$

$$\frac{y_2^{(0.2)} - y_2^{(0.1)}}{2^1 - 1} = 0.4 - 0.51 = \boxed{-0.11}$$

$$\overline{y}_2 = y_2^{(0.1)} - \frac{y_2^{(0.2)} - y_2^{(0.1)}}{2^1 - 1} = 0.62 \qquad \overline{y}_2 - y^*(0.2) = 0.04$$

# Оценка погрешности и сходимость методов Рунге-Кутты

Пусть задача Коши

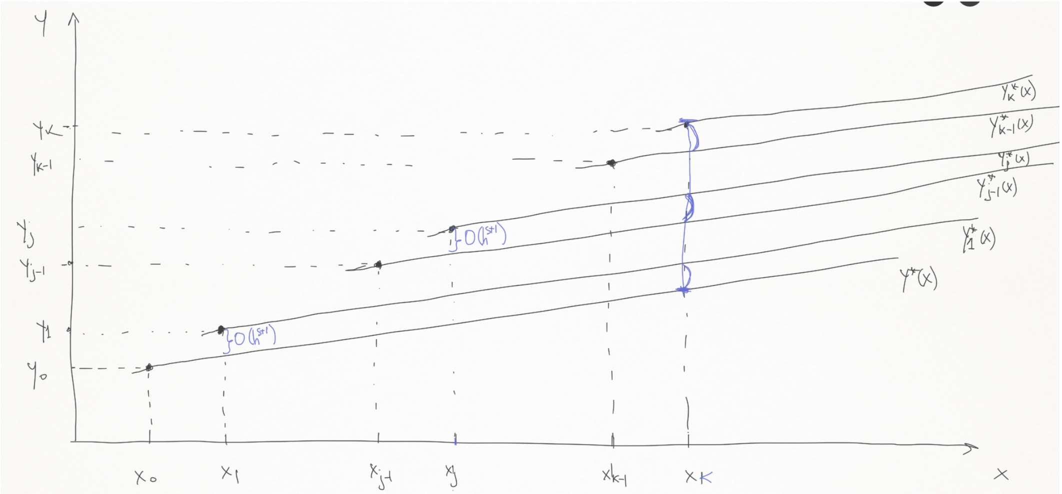
$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

решается $l$-стадийным методов Рунге-Кутты порядка $s$

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{l} \rho_i K_i, h = \frac{b-a}{n}. \tag{47}$$

Шаговая погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$.
Оценим погрешность метода

$$\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k). \tag{48}$$



$y$
$y_K$
$y_{K-1}$
$y_j$
$y_{j-1}$
$y_1$
$y_0$
$O(h^{s+1})$
$O(h^{s+1})$
$y_K^*(x)$
$y_{K-1}^*(x)$
$y_j^*(x)$
$y_{j-1}^*(x)$
$y_1^*(x)$
$y^*(x)$
$x_0$
$x_1$
$x_{j-1}$
$x_j$
$x_{K-1}$
$x_K$
$x$

$y_j^\star(x)$ - точное решение задачи Коши с начальным условием $y(x_j) = y_j$.

$$\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k) = y_k^\star(x_k) - y_0^\star(x_k) \pm \sum_{j=1}^{k-1} y_j^\star(x_k) =$$

$$y_k^\star(x_k) - y_{k-1}^\star(x_k) + y_{k-1}^\star(x_k) - y_{k-2}^\star(x_k) + \ldots + y_1^\star(x_k) - y_0^\star(x_k) = \sum_{j=1}^{k}(y_j^\star(x_k) - y_{j-1}^\star(x_k))$$

Оценим результирующую погрешность $y_j^\star(x_k) - y_{j-1}^\star(x_k)$ через начальную погрешность $y_j^\star(x_j) - y_{j-1}^\star(x_j)$.

$[t, T] \subset [a, b]$.
$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - не пересекаются.
Пусть $y_2(t) > y_1(t)$ (для определенности). Тогда $y_2(x) > y_1(x), \forall x$
$y_2' = f(x, y_2)$ и $y_1' = f(x, y_1)$
$(y_2 - y_1)' = f(x, y_2) - f(x, y_1) = f_y'(x, \tilde{y})(y_2 - y_1)$ и $y_1(x) \leq \tilde{y}(x) \leq y_2(x)$
$\frac{d(y_2 - y_1)}{y_2 - y_1} = f_y'(x, \tilde{y})dx$
$\ln(y_2 - y_1)|_t^T = \int\limits_t^T f_y'(x, \tilde{y})dx$
$y_2(T) - y_1(T) = (y_2(t) - y_1(t))e^{\int\limits_t^T f_y'(x,\tilde{y})dx}$

$$|y_2(T) - y_1(T)| \leq |y_2(t) - y_1(t)|e^{\int\limits_t^T |f_y'(x,\tilde{y})|dx} \leq |y_2(t) - y_1(t)|e^{L(T-t)}. \tag{49}$$

$$|\epsilon_k| \leq \sum_{j=1}^{k} |y_j^\star(x_k) - y_{j-1}^\star(x_k)| \leq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|y_j^\star(x_j) - y_{j-1}^\star(x_j)|}_{\text{локальная погрешность}} e^{L(x_k - x_j)} = \sum_{j=1}^{k} |c_j| h^{s+1} e^{L(x_k - x_j)} \quad (50)$$

$\forall j \ |c_j| \leq \bar{c} \Rightarrow$

$$|\epsilon_k| \leq h^{s+1} \bar{c} e^{L(x_k - x_0)} k = h^s \bar{c}(x_k - x_0) e^{L(x_k - x_0)} \leq h^s D, \quad (51)$$

где $D = \bar{c}(b-a)e^{L(b-a)}$

Методы Рунге-Кутты являются сходящимися, т.к.

$$\forall k |\epsilon_k| \leq D h^s \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ kh = const}]{} 0. \quad (52)$$

Порядок глобальной погрешности на 1 меньше чем порядок локальной погрешности.

# Содержание

# Конечно-разностные методы решения задачи Коши для ОДУ

Общий вид

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j \underbrace{f(x_{k-j}, y_{k-j})}_{f_{k-j}}, \tag{53}$$

$a_j, b_j$ - константы, $a_0 \neq 0$, $a_r \neq 0$.

- $r$ - шаговость метода, $r \geq 2$
- $b_0 = 0 \Rightarrow y_k = \Phi(h, x_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-r})$ - явная формула
  $b_0 \neq 0$ - неявная формула
- нужны стартовые (разгонные) точки
- $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_j = 0, j \geq 2$ - методы Адамса.

Способ получения: интегрирование уравнения $y' = f(x, y)$ по промежутку $[x_{k-p}, x_k]$ ($p \geq 1$) с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса.

## $p = 1$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k - y_{k-1} = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f(x, y(x))}_{F(x)} dx \tag{54}$$

1. формула левых прямоугольников $\rightarrow$ явный метод Эйлера

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \tag{55}$$

2. формула правых прямоугольников $\rightarrow$ неявный метод Эйлера

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_k, y_k) \tag{56}$$

3. формула трапеций

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)\right) \tag{57}$$

(57) - уравнение вида $x = \phi(x)$, где $x$ - это $y_k$. Зададим $y_k^{(0)}$ и

$$y_k^{(j+1)} = y_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(j)})\right), j = 0, 1, \ldots. \tag{58}$$

$|\phi'(x)| < 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{h}{2}f(x_k, y_k)\right)\right| = \frac{h}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq \frac{h}{2}L < 1 \Rightarrow h < \frac{2}{L}. \tag{59}$$

Сходимость можно обеспечить за счет выбора $h$. Меньше $h \Rightarrow$ быстрее сходимость.

$y_k^{(0)}$ - по явной формуле Эйлера

$$y_k^{(0)} = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}). \tag{60}$$

(58), (60) - метод Эйлера с итерационной обработкой.

## $p = 2$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x,y)$ по $[x_{k-2}, x_k]$

$$y_k = y_{k-2} + \int\limits_{x_{k-2}}^{x_k} f(x, y(x))dx \tag{61}$$

1. формула средних прямоугольников с шагом $2h$

$$y_k = y_{k-2} + 2hf(x_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-2} + 2hf_{k-1} \tag{62}$$

2. формула Симпсона

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}(f_{k-2} + 4f_{k-1} + f_k) \tag{63}$$

3. обобщенная формула трапеций (по двум промежуткам)

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{2}(f_{k-2} + 2f_{k-1} + f_k) \tag{64}$$

# Методы Адамса

Решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x,y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} F(x)dx. \tag{65}$$

Будем строить $r$-шаговый метод.

Идея: аппроксимируем $F(x)$ интерполяционным полиномом в форме Лагранжа.

$L_m(x)$ - интерполяционный полином по $\{\bar{x}_j, F_j\}_{j=0}^{m}$

- $m = r - 1$ - явная, или экстраполяционная формула
- $m = r$ - неявная, или интерполяционная формула

$F(x) = L_m(x) + R_m(x) \Rightarrow$

$$y_k = y_{k-1} + \underbrace{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} L_m(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx}_{I_2 - \text{пренебрежём}} . \tag{66}$$

Замена переменной $x = \bar{x}_0 + ht$

$$I_1 = \int\limits_{\bar{x}_{r-1}}^{\bar{x}_r} L_m(x)dx = h \int\limits_{r-1}^{r} L_m(\bar{x}_0 + ht)dt. \tag{67}$$

Интерполяционный полином в форме Лагранжа на равномерной сетке

$$I_1 = h \int_{r-1}^{r} \sum_{j=0}^{m} F_j \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-j} dt, \tag{68}$$

где $\bar{\omega}(t) = t(t-1)\dots(t-m) = \prod_{j=0}^{m}(t-j)$.

$$I_1 = h \sum_{j=0}^{m} \underbrace{\left[ \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \int_{r-1}^{r} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-j} dt \right]}_{\beta_j^{(r)}} F_j = h \sum_{j=0}^{m} \beta_j^{(r)} F_j.$$

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{m} \beta_j^{(r)} f_{k-r+j}. \tag{69}$$

- $m = r - 1$ - явная, или экстраполяционная формула

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{r-1} \underline{\beta}_j^{(r)} f_{k-r+j}, \tag{70}$$

где $\underline{\beta}_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-1-j}}{(r-1-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{t(t-1)\dots(t-r+1)}{t-j} dt.$

- $m = r$ - неявная, или интерполяционная формула

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{r} \bar{\beta}_j^{(r)} f_{k-r+j}, \tag{71}$$

где $\bar{\beta}_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-j}}{(r-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{t(t-1)\dots(t-r)}{t-j} dt.$

# Локальная погрешность

Остаточный член формулы Лагранжа

$$R_m(x) = \frac{F^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}\omega(x), \tag{72}$$

где $\omega(x) = \prod_{j=0}^{m}(x - x_j)$

$x_j = \bar{x}_0 + hj \Rightarrow \omega(x) \rightarrow h^{m+1}\bar{\omega}(t)$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx = h^{m+2}\int\limits_{r-1}^{r} \frac{F^{(m+1)}(\xi(x(t)))}{(m+1)!}\bar{\omega}(t)dt \\ &= \frac{h^{m+2}}{(m+1)!}\int\limits_{r-1}^{r} F^{(m+1)}(\eta(t))\bar{\omega}(t)dt = c_m h^{m+2}. \end{aligned} \tag{73}$$

- явная формула, $m = r - 1 \Rightarrow |\epsilon_k| \leq \underline{c}^{(r)} h^{r+1}$
- неявная формула, $m = r \Rightarrow |\epsilon_k| \leq \bar{c}^{(r)} h^{r+2}$

## Замечания

1. На практике неявные формулы предпочтительней (точнее, устойчивее). Но нужно решать уравнение.
2. Схема предиктор-корректор: сначала явная, затем неявная.
3. Для согласования локальной погрешности нужно использовать разношаговые схемы: шаговость явной схемы на 1 больше чем неявной.

# Метод неопределённых коэффициентов построения конечно-разностных формул

Пусть решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Общий вид конечно-разностного метода

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f_{k-j}. \tag{74}$$

Идея построения - получить наибольший порядок аппроксимации.

$y(x)$ - точное решение, подставим в (74).
Если разница $\mathcal{O}(h^{q+1})$, то порядок аппроксимации равен $q$

$$e_k = \sum_{j=0}^{r} a_j y(\underbrace{x_k - jh}_{x_{k-j}}) - h \sum_{j=0}^{r} b_j f(x_k - jh, y(x_k - jh)). \tag{75}$$

$$y(x_k - jh) = y(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-jh)^i + \mathcal{O}(h^{m+1})$$

$$f(x_k - jh, y(x_k - jh)) = y'(x_k - jh) = y'(x_k) + \frac{y''(x_k)}{1!}(-jh) + \ldots + \frac{y^{(m)}(x_k)}{(m-1)!}(-jh)^{m-1} + \mathcal{O}(h^m)$$

Подставим в (75)

$$e_k = \sum_{j=0}^{r} a_j \left[ y(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-jh)^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \right] - h \sum_{j=0}^{r} b_j \left[ \sum_{i=1}^{m} \frac{y^{(i)}(x_k)}{(i-1)!}(-jh)^{i-1} + \mathcal{O}(h^m) \right]$$

$$
\begin{aligned}
e_k &= y(x_k)\sum_{j=0}^{r} a_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r} a_j \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-1)^i j^i h^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r} b_j \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!} i(-1)^i j^{i-1} h^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \\
&= h^0 y(x_k)\underbrace{\sum_{j=0}^{r} a_j} + \sum_{i=1}^{m} h^i \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-1)^i \sum_{j=0}^{r}\underbrace{(j^i a_j + i j^{i-1} b_j)} + \mathcal{O}(h^{m+1})
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Для порядка аппроксимации $m$ нужно потребовать

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=0}^{r} a_j = 0 \\
\sum\limits_{j=0}^{r} (j^i a_j + i j^{i-1} b_j) = 0, i = 1, \ldots, m
\end{cases}
\tag{77}
$$

Перепишем (74), заменив $x_k$ на $x$ (произвольная точка)

$$\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j y(x-jh) = \sum_{j=0}^{r} b_j f(x-jh, y(x-jh)). \tag{78}$$

Конечно-разностая схема (78) аппроксимирует ОДУ $y'(x) = f(x,y)$, поэтому при $h \to 0$ левая часть $\to y'(x)$, а правая часть $\to f(x,y)$.

$\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j y(x-jh) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j (y(x) - jhy'(x) + \mathcal{O}(h^2)) \xrightarrow[h\to 0]{} y'(x)$, если

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{r} a_j = 0 \\ \sum\limits_{j=0}^{r} j a_j = -1 \end{cases} \tag{79}$$

$$\sum_{j=0}^{r} b_j f(x - jh, y(x - jh)) = \sum_{j=0}^{r} b_j f(x - jh, y(x) + \mathcal{O}(h)) =$$
$$\sum_{j=0}^{r} b_j \left(f(x,y) + (-jh)f'_x + \mathcal{O}(h)f'_y + \mathcal{O}(h^2)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x,y), \text{ если}$$

$$\sum_{j=0}^{r} b_j = 1. \tag{80}$$

(79), (80) - условия согласованности.

Не противоречат ли условия согласованности условиям (77)?

(77) при $i = 1$: $\sum\limits_{j=0}^{r}(ja_j + b_j) = 0$ - будет выполняться, если выполнено второе в (79) и (80).

СЛАУ уже неоднородная

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=0}^{r} a_j = 0 \\
\sum\limits_{j=0}^{r} j a_j = -1 \\
\sum\limits_{j=0}^{r} b_j = 1 \\
\sum\limits_{j=0}^{r} (j^i a_j + i j^{i-1} b_j) = 0, i = 2, \dots, m
\end{cases}
\tag{81}
$$

Локальная погрешность $\mathcal{O}(h^{m+1})$, порядок аппроксимации $m$.

# Замечания

1. Метод неопределенных коэффициентов можно использовать и для построения методов Адамса. Нужно взять $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_j = 0, j \geq 2$ и найти $b_j$.
   Если взять $b_0 = 0$, то получим явную схема, иначе - неявную.
2. Для обеспечения численной устойчивости примерно половину коэффициентов необходимо зафиксировать.
3. Метод неопределённых коэффициентов не покрывает все возможные конечно-разностные схемы. Если построили какую-то схему, то с помощью (81) можно проверить/определить порядок аппроксимации.
   Второе и третье условие в (81) получены искусственно, поэтому вместо них проверяется последнее в (81) при $i = 1$.

# Пример

$r = 2, b_0 = 0$

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} = h(b_1 f_{k-1} + b_2 f_{k-2}). \tag{82}$$

Будем строить схему с порядком аппроксимации $m = 3$. (81) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = -1 \\ b_1 + b_2 = 1 \\ a_1 + 2b_1 + 4a_2 + 4b_2 = 0 \leftarrow i = 2 \\ a_1 + 3b_1 + 8a_2 + 12b_2 = 0 \leftarrow i = 3 \end{cases} \tag{83}$$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{6}, a_1 = \frac{4}{6}, a_2 = -\frac{5}{6}, b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{1}{3}$

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 2h(2f_{k-1} + f_{k-2}). \tag{84}$$

Локальная погрешность $\mathcal{O}(h^4)$, порядок аппроксимации 3. Для всех ОДУ, решением которых является кубический полином, схема (84) даёт точный результат.

# Конечно-разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots + a_r y_{k-r} = b_k, \tag{85}$$

где $a_0 \neq 0$, $a_r \neq 0$,
$b_k = b(k)$ - известная функция целочисленного аргумента,
$y_k = y(k)$ - неизвестная функция целочисленного аргумента,
называется линейным конечно-разностным уравнением порядка $r$ с постоянными коэффициентами.

Если $b_k \equiv 0$, то уравнение называется однородным.

Общее решение (85)

$$y_k = \bar{y}_k + \tilde{y}_k, \tag{86}$$

где $\bar{y}_k$ - частное решение (85), $\tilde{y}_k$ - общее решение однородного уравнения.

# Общее решение однородного уравнения

Однородное уравнение имеет $r$ линейно независимых решений $\{\tilde{y}_k^{(j)}\}_{j=1}^{r}$.
Будем искать решение однородного уравнения в виде $y_k = z^k, z \neq 0$

$$a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_r z^{k-r} = 0 = z^{k-r} \underbrace{(a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \ldots + a_r)}_{P_r(z)}, \tag{87}$$

где $P_r(z)$ - характеристический полином конечно-разностного уравнения (85).

1. все корни $z_j$ различны $\Rightarrow z_1^k, \ldots, z_r^k$
2. корень $z_j$ имеет кратность $p \Rightarrow z_j^k, kz_j^k, \ldots, k^{p-1} z_j^k$

# Частное решение неоднородного уравнения

Пусть $b_k = Q_m(k)$ - полином степени $m$.

**Определение**

Если среди корней характеристического уравнения $P_r(z) = 0$ имеется корень $z_j = 1$, то такой корень называется существенным.

- если существенных корней нет

$$\bar{y}_k = R_m(k) = \beta_0 k^m + \ldots + \beta_m. \tag{88}$$

- если $z_j = 1$ - корень кратности $q$

$$\bar{y}_k = k^q R_m(k). \tag{89}$$

# Пример

Будем решать конечно-разностное уравнение

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = A(3k-4). \tag{90}$$

Характеристическое уравнение: $P_r(z) = z^2 + 4z - 5 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -5.$
Общее решение однородного уравнения

$$\tilde{y}_k = c_1(z_1)^k + c_2(z_2)^k = c_1 + c_2(-5)^k. \tag{91}$$

$A(3k-4)$ - полином степени 1, $z_1 = 1$ - существенный корень кратности 1

$$\bar{y}_k = k(\beta_0 k + \beta_1). \tag{92}$$

Подставим (92) в (90)

$$k(\beta_0 k+\beta_1)+4(k-1)(\beta_0(k-1)+\beta_1)-5(k-2)(\beta_0(k-2)+\beta_1)=A(3k-4) \quad (93)$$

$$12\beta_0 k+6\beta_1-16\beta_0=A(3k-4) \quad (94)$$

$\beta_0=\frac{A}{4}, \beta_1=0.$

Общее решение уравнения (90)

$$y_k=c_1+c_2(-5)^k+\frac{A}{4}k^2. \quad (95)$$

# Оценка погрешности явного метода Адамса

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Явный метод Адамса

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=1}^{r} b_j f_{k-j}, \quad f_{k-j} = f(x_{k-j}, y_{k-j}) \tag{96}$$

$y^\star(x)$ - точное решение

$$y^\star(x_k) = y^\star(x_{k-1}) + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f(x, y^\star(x))}_{L_{r-1}+R_{r-1}} dx = y^\star(x_{k-1}) + h \sum_{j=1}^{r} b_j f^\star_{k-j} + R_k, \tag{97}$$

где $f^\star_{k-j} = f(x_{k-j}, y^\star(x_{k-j}))$, $|R_k| \leq ch^{r+1} = g$.

Погрешность метода: $\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k)$.
Вычтем (97) из (96)

$$\epsilon_k = \epsilon_{k-1} + h\sum_{j=1}^{r} b_j(f_{k-j} - f^\star_{k-j}) - R_k \tag{98}$$

$$|\epsilon_k| \le |\epsilon_{k-1}| + h\sum_{j=1}^{r}|b_j||(f_{k-j} - f^\star_{k-j})| + g$$
$$|f_{k-j} - f^\star_{k-j}| = |f(x_{k-j}, y_{k-j}) - f(x_{k-j}, y^\star(x_{k-j}))| \le L|y_{k-j} - y^\star(x_{k-j})| = L|\epsilon_{k-j}|$$

$$|\epsilon_k| \le |\epsilon_{k-1}| + hL\sum_{j=1}^{r}|b_j||\epsilon_{k-j}| + g \tag{99}$$

На основе (99) построим конечно-разностное уравнение

$$E_k = E_{k-1} + hL\sum_{j=1}^{r}|b_j|E_{k-j} + g \tag{100}$$

Если удастся подобрать такое решение конечно-разностного уравнения (100)

$$|\epsilon_k| \leq E_k, \forall k, \tag{101}$$

то $E_k$ будет оценкой погрешности метода Адамса.
Решение уравнения (100)

$$E_k = c_1 z_1^k + \ldots + c_r z_r^k + E_k^\star. \tag{102}$$

Стартовые точки - другой метод $\Rightarrow \epsilon_0, \ldots, \epsilon_{r-1}$ - ”внешние” ошибки.

Пусть $\epsilon = \max\limits_{k=0,\ldots,r-1} |\epsilon_k|$. Выберем $c_1, \ldots, c_r$ так, чтобы

$$\epsilon \leq E_k, k = 0, \ldots, r-1 \tag{103}$$

и покажем, что в таком случае справедливо (101).

База индукции - неравенство (103).
Индукционный переход.
Пусть $|\epsilon_k| \leq E_k, k = 0, \ldots, m-1$. Покажем, что $|\epsilon_m| \leq E_m$

$$E_m \pm \epsilon_m = \underbrace{(E_{m-1} \pm \epsilon_{m-1})}_{I} + h \sum_{j=1}^{r} \underbrace{(|b_j| L E_{m-j} \pm b_j(f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}))}_{II} + \underbrace{g \mp R_m}_{III} \tag{104}$$

$I \geq 0$ по индукционному предположению.
$III \geq 0$, т.к. $|R_k| \leq g, \forall k$.
$|\epsilon_{m-j}| \leq E_{m-j} \Leftrightarrow L|\epsilon_{m-j}| \leq LE_{m-j} \Rightarrow |f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}| \leq LE_{m-j}$
$\Rightarrow LE_{m-j} \pm (f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}) \geq 0 \Rightarrow |b_j| LE_{m-j} \pm b_j(f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}) \geq 0.$

Покажем, что характеристический полином $P_r(z)$ уравнения (100) имеет корень на $(1, 1 + hLB)$, где $B = \sum\limits_{j=1}^{r} |b_j|$.

$P_r(1) = 1 - 1 - hLB < 0$

$P_r(1 + hLB) = (1 + hLB)^r - (1 + hLB)^{r-1} - hL \sum\limits_{j=1}^{r} |b_j|(1 + hLB)^{r-j} =$

$(1+hLB)^{r-1}hLB - hL\sum\limits_{j=1}^{r}|b_j|(1+hLB)^{r-j} = hL\sum\limits_{j=1}^{r}[(1+hLB)^{r-1}|b_j| - |b_j|(1+hLB)^{r-j}] > 0.$

$\exists z_1 \in (1, 1 + hLB)$: $P_r(z_1) = 0$. Тогда

$$E_k = c_1 z_1^k + E_k^\star \tag{105}$$

где $E_k^\star$ - частное решение, константы $c_2, \ldots, c_r$ положили равными 0.

$g$ - полином нулевой степени, 1 не является существенным корней $\Rightarrow E_k^\star = D$

$$D = D + hLBD + g \Rightarrow D = -\frac{g}{hLB} = -\frac{ch^r}{LB}. \tag{106}$$

Тогда решение уравнения (100)

$$E_k = c_1 z_1^k - \frac{ch^r}{LB}. \tag{107}$$

Выберем $c_1$ так, чтобы (103) было выполнено, т.е.

$$c_1 = \epsilon + \frac{ch^r}{LB}. \tag{108}$$

Подставим (108) в (107)

$$|\epsilon_k| \leq E_k = \left(\epsilon + \frac{ch^r}{LB}\right) z_1^k - \frac{ch^r}{LB} = \epsilon z_1^k + \frac{ch^r}{LB}(z_1^k - 1). \tag{109}$$

$z_1^k < (1 + hLB)^k \leq e^{khLB} = e^{(x_k - x_0)LB}$
Оценка погрешности явного метода Адамса

$$|\epsilon_k| \leq \epsilon e^{(x_k - x_0)LB} + \frac{ch^r}{LB}\left(e^{(x_k - x_0)LB} - 1\right). \tag{110}$$

Первое слагаемое - вклад ошибок в стартовых точках.
Второе слагаемое - накопление локальных погрешностей метода Адамса.
Если $\epsilon = \mathcal{O}(h^q)$, то $q$ должно быть больше $r$, т.к. итоговый порядок погрешности - минимум из $q$ и $r$.

# Устойчивость конечно-разностных схем решения задачи Коши

Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

решается конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f_{k-j}. \qquad (111)$$

Как накапливается вычислительная погрешность?
Как коэффициенты влияют на накопление вычислительной погрешности?

# Устойчивость конечно-разностных схем решения задачи Коши

- 0-устойчивость: изучение поведения ошибки при постоянной (конечной) длине отрезка. Количество вычислений растёт за счет уменьшения шага.
- Абсолютная устойчивость: решаем на $[0, T]$, $T$ может стремиться к бесконечности. Количество вычислений растет за счёт увеличения интервала.

# 0-устойчивость. Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = 2x, x \in [0, l] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Точное решение $y^\star(x) = x^2$.

$x_k = kh, k = 0, \dots, n, y^\star(x_k) = x_k^2$.
Будем решать конечно-разностным методом

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 2h(2f_{k-1} + f_{k-2}), \qquad (112)$$

который даёт точный результат для всех полиномов степени 3.

$$2h(2f_{k-1}+f_{k-2}) = 2h(4h(k-1)+2h(k-2)) = 4h^2(3k-4)$$

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 4h^2(3k-4) \tag{113}$$

Согласно (95) общее решение уравнения (113) ($A = 4h^2$)

$$y_k = c_1 + c_2(-5)^k + h^2k^2. \tag{114}$$

Пусть $y_0$ и $y_1$ заданы точно

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + h^2 0^2 \\ h^2 = c_1 - 5c_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

$\Rightarrow y_k = h^2k^2$, т.е. совпадает с точным, если все вычисления выполняются ТОЧНО.

На практике $y_1$ вычисляется, т.е.

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 + \epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + h^2 0^2 \\ h^2 + \epsilon = c_1 - 5c_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{\epsilon}{6}, c_2 = -\frac{\epsilon}{6}.$$

Если $\epsilon = \alpha h^q$, то численное решение

$$\tilde{y}_k = \frac{\alpha h^q}{6} - \frac{\alpha h^q}{6}(-5)^k + h^2 k^2. \tag{115}$$

$h^2 k^2 = x_k^2 = y^\star(x_k)$, $\frac{\alpha h^q}{6} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\frac{\alpha h^q}{6}(-5)^k \xrightarrow[h\to 0]{kh=const} \pm\infty$.

Чем мельче шаг $h$, тем больше погрешность. Схема накапливает ошибку, численно неустойчива.

Пусть $y_0, y_1$ заданы точно

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases}$$

НО каждое вычисление по схеме производится с ошибкой

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 4h^2(3k-4) + \delta. \tag{116}$$

Решим уравнение (116). Частное решение, отвечающее $\delta$, будем искать в виде $\beta k$

$$\beta k + 4\beta(k-1) - 5\beta(k-2) = \delta \Rightarrow \beta = \frac{\delta}{6}. \tag{117}$$

Тогда общее решение уравнения (116)

$$y_k = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2(-5)^k + h^2k^2 + \frac{\delta}{6}k. \tag{118}$$

Константы определим из начальных условий

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + h^2 0^2 \\ h^2 = \tilde{c}_1 - 5\tilde{c}_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0.$$

Решение уравнения (116)

$$y_k = h^2 k^2 + \frac{\delta}{6} k. \tag{119}$$

$$y_k \xrightarrow[h \to 0]{kh = const} ?$$

Первое слагаемое стремится к $y_k^\star$, а второе стремится к бесконечности. Схема имеет тенденцию к накоплению ошибки.

Не все схемы с хорошим порядком аппроксимации пригодны для практического использования.

Рассмотрим модельную задачу: $y' = 0$. Точное решение $y^\star = const$.
Будем решать конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = 0. \tag{120}$$

$y^\star = const$ удовлетворяет (120) в силу 1го условия согласованности.
При численном решении будем получать $\tilde{y}_k$

$$\tilde{y}_k = y_k^\star + \epsilon_k. \tag{121}$$

Подставив (121) в (120), получим конечно-разностное уравнение относительно $\epsilon_k$

$$\sum_{j=0}^{r} a_j \epsilon_{k-j} = 0. \tag{122}$$

Для поиска общего решения однородного уравнения (122) необходимо найти корни характеристического полинома (см. формулу (87))

$$P_r(z) = a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \ldots + a_r. \tag{123}$$

Если $z_j$ - корень кратности $p_j$, то ему соответствуют решения

$$z_j^k, kz_j^k, \ldots, k^{p_j-1} z_j^k. \tag{124}$$

## Корневое условие

Все корни характеристического полинома лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе единичного круга нет кратных корней.

## Утверждение (условие 0-устойчивости)

Для того чтобы конечно-разностная схема была 0-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось корневое условие.

# Теорема Далквиста

Конечно-разностная схема

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f_{k-j} \tag{125}$$

с порядком аппроксимации $q$ НЕ может быть устойчивой, если

- $q > r$ для явной схемы,
- $q > r + 1$ для неявной схемы и нечетного $r$,
- $q > r + 2$ для неявной схемы и четного $r$.

Все коэффициенты нельзя задать так, чтобы получить максимальный порядок аппроксимации. Часть коэффициентов должна быть зафиксирована из условия достижения 0-устойчивости.

# Абсолютная устойчивость

Рассмотрим модельную задачу: $y' = \lambda y$. Точное решение $y^\star(x) = ce^{\lambda x}$.
Если $Re(\lambda) < 0$, то $y^\star(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.
Будем решать конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j \lambda y_{k-j} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{r} (a_j - h\lambda b_j) y_{k-j} = 0. \tag{126}$$

Характеристический полином

$$\chi(z) = \sum_{j=0}^{r} (a_j - \lambda h b_j) z^{r-j} = 0. \tag{127}$$

Если корни (127) $z_j = z_j(\lambda h)$ удовлетворяют корневому условию, то схема (126) называется абсолютно устойчивой.

# Примеры

Одношаговые методы $\Rightarrow r = 1$

$$\chi(z) = (a_0 - \lambda h b_0) z + (a_1 - \lambda h b_1) = 0. \tag{128}$$

Явный метод Эйлера

$$y_k - y_{k-1} = h f(x_{k-1}, y_{k-1}) \tag{129}$$

$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = 0, b_1 = 1$

$$\chi(z) = (1 - \lambda h \cdot 0) z + (-1 - \lambda h \cdot 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 1 + \lambda h. \tag{130}$$

$|1 + \lambda h| < 1$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то

- $\lambda > 0$ - неравенство не может быть выполнено ни для какого $h > 0$,
- $\lambda < 0 \Rightarrow 0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}$.

Неявный метод Эйлера

$$y_k - y_{k-1} = hf(x_k, y_k) \tag{131}$$

$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = 1, b_1 = 0$

$$\chi(z) = (1 - \lambda h \cdot 1)z + (-1 - \lambda h \cdot 0) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{1 - \lambda h}. \tag{132}$$

$|1 - \lambda h| > 1.$
Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то

- $\lambda < 0$ - неравенство выполняется при любых $h > 0$,
- $\lambda > 0 \Rightarrow h \geq \frac{2}{\lambda}$.

Метод трапеций

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)\right) \tag{133}$$

$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{2}$

$$\chi(z) = \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) z + \left(-1 - \frac{\lambda h}{2}\right) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}. \tag{134}$$

$\lambda h = \alpha + \beta i \Rightarrow |\frac{2+\alpha+\beta i}{2-\alpha-\beta i}| < 1$
$\Rightarrow \sqrt{(2+\alpha)^2 + \beta^2} \leq \sqrt{(2-\alpha)^2 + \beta^2} \Rightarrow \alpha \leq 0.$

Если область абсолютной устойчивости включает в себя левую полуплоскость, то схема называется А-устойчивой.

# Замечания

1. В общем случае $y' = f(x, y)$ в роли параметра $\lambda$ фигурирует $f'_y(x, y)$
$$f(x, y) = f(x, y_k) + f'_y(x, y_k)(y - y_k) + \dots \tag{135}$$
2. В случае многошаговых методов характеристический полином имеет несколько корней. Для каждого корня определяется область устойчивости.
3. Анализ абсолютной устойчивости методов Рунге-Кутты более сложный.

# Содержание

# Постановка задачи

Рассмотрим линейное ОДУ 2го порядка с переменными коэффициентами

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{136}$$

$p(x), q(x), r(x), f(x) \in C([a, b])$.

Дифференциальный оператор $L = p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + r$. Тогда (136) $\Leftrightarrow L(y) = f$.

Общий вид граничных условий (ГУ)

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \tag{137}$$

$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

# Особенности решения краевых задач

Краевая задача = ДУ (136) + ГУ (137)

- может не иметь решения
- может иметь бесконечное число решений
- может иметь единственное решение

При решении краевой задачи

- либо ставят условия на коэффициенты уравнения для обеспечения единственности решения,
- либо выявляют ситуацию, когда решение не существует или не единственно.

Будем рассматривать методы, которые сводят краевую задачу с решению задачи Коши.

# Метод суперпозиции

Общее решение уравнения (136)

$$y(x) = u(x) + c_1 v(x) + c_2 w(x), \tag{138}$$

где $u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения,
$c_1 v(x) + c_2 w(x)$ - общее решение однородного уравнения.
$v(x)$ и $w(x)$ должны быть линейно независимыми.

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \\ L(w) = 0 \end{cases} \tag{139}$$

На $u, v, w$ сформулируем НУ так, чтобы автоматически выполнились ГУ (137).
Вместо краевой задачи будем решать 3 задачи Коши.

Зададим однородные НУ для $u(x)$

$$\begin{cases} u(a) = 0 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \tag{140}$$

Если НУ линейно независимы, то и решения будут линейно независимы. Зададим такие НУ для $v$ и $w$

$$\begin{cases} v(a) = 1 \\ v'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w(a) = 0 \\ w'(a) = 1 \end{cases} \tag{141}$$

(139) + (140) + (141) $\rightarrow u^h, v^h, w^h$ - сеточные функции.
Тогда $y^h = u^h + c_1 v^h + c_2 w^h$

Определим $c_1, c_2$ так, чтобы удовлетворить ГУ (137)

$$\begin{cases} \alpha_0[\underbrace{u(a)}_{=0} + c_1 \underbrace{v(a)}_{=1} + c_2 \underbrace{w(a)}_{=0}] + \alpha_1[\underbrace{u'(a)}_{=0} + c_1 \underbrace{v'(a)}_{=0} + c_2 \underbrace{w'(a)}_{=1}] = A \\ \beta_0[u(b) + c_1 v(b) + c_2 w(b)] + \beta_1[u'(b) + c_1 v'(b) + c_2 w'(b)] = B \end{cases} \qquad (142)$$

(142) - СЛАУ относительно $c_1, c_2$.

- Если нет решений, то и краевая задача не имеет решений.
- Если бесконечное число решений, то одну константу задаем произвольно и получаем параметрическое семейство.

Метод трудоёмкий, т.к. нужно решить 3 задачи Коши для ОДУ 2го порядка.

# Модификация метода суперпозиции

Сократим количество решаемых задач. Решение (136) будем искать в виде

$$y(x) = u(x) + cv(x), \tag{143}$$

где $u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения, $v(x)$ - решение однородного уравнения

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \end{cases} \tag{144}$$

Подберем НУ для $u$ и $v$ так, чтобы первое ГУ (137) выполнялись $\forall c$

$$\alpha_0[u(a) + cv(a)] + \alpha_1[u'(a) + cv'(a)] = A \tag{145}$$

(145) при $c = 0$: $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A$

$$\begin{cases} u(a) = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \\ u'(a) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \end{cases} \tag{146}$$

Тогда (145) с учетом (146)

$$c[\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a)] = 0 \tag{147}$$

Возьмём $\mu \neq 0$

$$\begin{cases} v(a) = \mu \alpha_1 \\ v'(a) = -\mu \alpha_0 \end{cases} \tag{148}$$

(153) + (146) + (148) $\to u^h, v^h$ - сеточные функции.
Тогда $y^h = u^h + c v^h$

Константу $c$ определим из второго ГУ (137)

$$\beta_0[u(b) + cv(b)] + \beta_1[u'(b) + cv'(b)] = B. \tag{149}$$

$c[\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)] = B - [\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)] \Rightarrow c = \dots$

Если множитель при $c$ равен 0, то ситуация зависит от правой части.

Метод суперпозиции имеет большую свободу выбора НУ для решения задач Коши. Модифицированный метод проще, т.к. нужно решать только 2 задачи Коши.

# Метод факторизации, или метод расщепления

Предположим, что существуют такие $s(x)$ и $t(x)$, что решение ОДУ 2го порядка

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{150}$$

может быть представлено как решение ОДУ 1го порядка

$$y'(x) = s(x)y(x) + t(x). \tag{151}$$

Если сконструируем функцию

$$y(x) = u(x) + cv(x), \tag{152}$$

для которой

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \end{cases} \tag{153}$$

то эта функция будет решением (150) $\Rightarrow$ она должна быть решением (151) $\forall c$.

Подставим (152) в (151): $u' + cv' = s(u + cv) + t, \forall c$

$$\begin{cases} u' = su + t \\ v' = sv \end{cases} \tag{154}$$

$v$ должно удовлетворять условию (153).
$v'' = s'v + sv' = s'v + s^2v$

$$\begin{aligned} L(v) &= pv'' + qv' + rv \\ &= p(s'v + s^2v) + q(sv) + rv \\ &= v(ps' + ps^2 + qs + r) = 0 \end{aligned} \tag{155}$$

$v \neq 0 \Rightarrow$ ОДУ 1го порядка относительно $s$

$$ps' + ps^2 + qs + r = 0. \tag{156}$$

$u$ должно удовлетворять условию (153).
$u'' = s'u + su' + t' = s'u + s(su + t) + t'$

$$\begin{aligned} L(u) &= pu'' + qu' + ru \\ &= p(s'u + s(su + t) + t') + q(su + t) + ru \\ &= u\underbrace{(ps' + ps^2 + qs + r)} + pst + pt' + qt = f \end{aligned} \tag{157}$$

ОДУ 1го порядка относительно $t$

$$pt' + pst + qt = f. \tag{158}$$

$(151) \Rightarrow y'(a) = s(a)y(a) + t(a)$
$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$
Если $\alpha_1 \neq 0$, то $y'(a) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} y(a) + \frac{A}{\alpha_1}$

$$\begin{cases} s(a) = -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \\ t(a) = \dfrac{A}{\alpha_1} \end{cases} \tag{159}$$

$(156) + (159) \to s^h$
$(158) + (159) \to t^h$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1[s(b)y(b) + t(b)] = B$$

$$y(b)[\beta_0 + \beta_1 s(b)] = B - \beta_1 t(b) \Rightarrow y(b) = \dots . \quad (160)$$

Если множитель при $y(b)$ равен 0, то ситуация зависит от правой части.

Если $\alpha_1 = 0$, но $\beta_1 \neq 0$, то можем привлечь ГУ на правом конце.

### Замечание

Если задачи Коши решаются численно, то получаем сеточные функции. Необходимо позаботиться, чтобы для вычисления $t^h$ были необходимые значения $s^h$. Аналогично для $y^h$.

Если $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} \tag{161}$$

Возьмем другое ОДУ для $y(x)$

$$z(x)y'(x) = y(x) + w(x), \tag{162}$$

где $z(x), w(x)$ - неизвестные функции.

Подставим (152) в (162): $z(u' + cv') = u + cv + w, \forall c$

$$\begin{cases} zu' = u + w \\ zv' = v \end{cases} \tag{163}$$

$v$ должно удовлетворять условию (153).
$z'v' + zv'' = v' \qquad \times z$
$z^2v'' = (1 - z')v'z = (1 - z')v$

$$\begin{aligned} z^2L(v) &= z^2[pv'' + qv' + rv] \\ &= p[(1 - z')v] + zqv + z^2rv \\ &= v[p(1 - z') + qz + rz^2] = 0 \end{aligned} \tag{164}$$

$v \neq 0 \Rightarrow$ ОДУ 1го порядка относительно $z$

$$p(1 - z') + qz + rz^2 = 0. \tag{165}$$

$u$ должно удовлетворять условию (153).

$z'u' + zu'' = u' + w' \quad |\times z$

$z' \underbrace{zu'} + z^2u'' = \underbrace{zu'} + zw'$

$z^2u'' = (1 - z')(u + w) + w'z$

$$\begin{aligned} z^2L(u) &= z^2[pu'' + qu' + ru] \\ &= p[(1 - z')(u + w) + w'z] + qz(u + w) + z^2ru \\ &= u\underbrace{[p(1 - z') + qz + rz^2]} + p(1 - z')w + pw'z + qzw = z^2f \end{aligned} \tag{166}$$

$(165) \Rightarrow p(1 - z') = -qz - rz^2$

$$-(qz + rz^2)w + pw'z + qzw = z^2 f \tag{167}$$

ОДУ 1го порядка относительно $w$

$$pw' - rzw = zf. \tag{168}$$

$(162) \Rightarrow z(a)y'(a) = y(a) + w(a)$
$y(a) = A$

$$\begin{cases} z(a) = 0 \\ w(a) = -A \end{cases} \tag{169}$$

$(165) + (169) \to z^h$, $(168) + (169) \to w^h$
$y(b) = B \to y^h$.

# Метод конечных разностей (МКР) решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b] \\ y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} \tag{170}$$

Построим равномерную сетку на $[a, b]$: $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Запишем ОДУ в узлах сетки

$$p_k y''(x_k) + q_k y'(x_k) + r_k y(x_k) = f_k, k = 0, \ldots, n \tag{171}$$

где $p_k = p(x_k)$, $q_k = q(x_k)$, $r_k = r(x_k)$, $f_k = f(x_k)$.

# Аппроксимация производных конечно-разностными выражениями

$$\begin{cases} y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \\ y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \end{cases} \tag{172}$$

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y''(x) + \mathcal{O}(h^4) \Rightarrow$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{173}$$

$$y(x+h) - y(x-h) = 2hy'(x) + \mathcal{O}(h^3) \Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{174}$$

В (173), (174) заменим $x$ на $x_k$ и подставим в (171)

$$p_k \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} + q_k \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} + r_k y(x_k) + \mathcal{O}(h^2) = f_k \qquad (175)$$

В (175) отбросим $\mathcal{O}(h^2)$, заменим $y(x_k)$ на $y_k$

$$p_k \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + q_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + r_k y_k = f_k, k = 1, \dots, n-1 \qquad (176)$$

ГУ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y_0 = A \\ y_n = B \end{cases} \qquad (177)$$

(176), (177) - СЛАУ $\to \{y_k\}_{k=0}^n$.

$$\begin{cases} \left(p_k - \frac{q_k}{2}h\right)y_{k-1} + (h^2 r_k - 2p_k)y_k + \left(p_k + \frac{q_k}{2}h\right)y_{k+1} = h^2 f_k, k = 1, \ldots, n-1 \\ y_0 = A \\ y_n = B \end{cases} \tag{178}$$

### Теорема

Если $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) \geq \frac{h}{2}|q(x)| \\ r(x) \leq 0 \end{cases} \tag{179}$$

то СЛАУ (178) имеет единственное решение и вычислительная погрешность $\mathcal{O}(h^2)$.

# Граничные условия общего вида

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b] \\ \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \tag{180}$$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow y'(x) = \tfrac{y(x+h)-y(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A. \tag{181}$$

Аналогично для 2го ГУ

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \tag{182}$$

(176), (181), (182) - МКР 1го порядка, ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(h)$.

$$\begin{cases} y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \dfrac{h^2}{2}y''(x) + \mathcal{O}(h^3) \\ y(x+2h) = y(x) + 2hy'(x) + 2h^2y''(x) + \mathcal{O}(h^3) \end{cases} \tag{183}$$

$4y(x+h) - y(x+2h) = 3y(x) + 2hy'(x) + \mathcal{O}(h^3)$

$$y'(x) = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{184}$$

$x \to x_0, x+h \to x_1, x+2h \to x_2$, отбросим $\mathcal{O}(h^2)$

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} \tag{185}$$

### Упражнение

Получить аналогичное соотношение для ГУ на правом конце.

$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \to$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A \qquad (186)$$

(176), (186), (...) - МКР 2го порядка, ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(h^2)$.

## Замечания

1. Матрица СЛАУ уже не трёхдиагональная. Для приведения к трёхдиагональному виду из 1го уравнения исключают $y_2$ с помощью 2го уравнения.
2. Если ДУ более высокого порядка, то нужно привлекать больше точек для аппроксимации производных.
3. Если ДУ нелинейное, то и система будет нелинейной.

# Упражнения

1. Решить дифференциальное уравнение $y' = x + y^2$ неявным методом Эйлера с шагом $h = 0.2$ на интервале $[1, 2]$ при условии $y(2) = 1$. По численному решению $y^h$ построить квадратичный сплайн с пропадающим узлом.
2. Пусть $t^2y'' + ty' - 4y = -3t$ и $y(2) = \frac{41}{4}$, $y'(2) = \frac{35}{4}$. Используя метод Хойна с шагом $h = 0.5$, аппроксимировать $y(1)$ и $y'(3)$.
3. Построить метод Адамса для $r = 3$ методом неопределённых коэффициентов.
4. Определить порядок аппроксимации формул (62), (63), (64) с помощью условий (81).
5. Являются ли методы Рунге-Кутты и методы Адамса 0-устойчивыми?