Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа № 1
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Интерполяционные полиномы приближения табличных функций”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной лабораторной работе было проведено исследование метода интерполяции табличных функций с помощью интерполяционного полинома в форме Ньютона. Оно было проведено для функций с непрерывной производной и с разрывом производной в одной из точек, а также для двух типов сетки - равномерной и чебышевской.

В качестве результатов работы представлены графики поведения полинома в форме Ньютона для малого количества узлов сетки, а также зависимости погрешности от количества узлов для обеих функций и обеих сеток.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть дана сеточная функция $(x^h, y^h), x^h \subset [a, b]$. Задача интерполяции состоит в том, чтобы найти такую функцию $f(x)$, что выполняется критерий интерполирования, то есть:

$$\forall x_i \in x^h:\ f(x_i) = y_i$$

Задача интерполяции может решаться, например, построением полинома в форме Ньютона, который ищется в следующем виде:

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{j=1}^{n} [y_0, \dots, y_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$$

Данная формула выводится из полинома в форме Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k=0,\, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Проблема полинома Лагранжа состоит в том, что при добавлении нового узла все коэффициенты приходится вычислять заново. Сделаем так, чтобы при добавлении нового узла нам было необходимо только лишь добавить новое слагаемое, то есть

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + Q_{n+1}(x)$$

Для этого распишем полином в форме Лагранжа следующим образом:

$$L_n(x) = L_0 + (L_1 - L_0) + \dots + (L_n - L_{n-1}) = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_n$$

Где L_{i+1}получается из L_i путем добавления одной новой точки в сетку, по которой строится указанный полином.

Из условий интерполирования:

$$Q_k(x_i) = L_k(x_i) - L_{k-1}(x_i) = y_i - y_i = 0, \ i = 0, 1, \ldots, k-1$$

Так как x_i − корень $Q_k(x), \ i = 0, 1, .., k - 1,$ то Q_kпредставимо в виде:

$$Q_k(x) = \gamma_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

Коэффициент γ_kищется алгебраически при подстановке x_k в формулу для Q_k, получаем в итоге:

$$\gamma_k = \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} \left(y_k - \sum_{j=0}^{k-1} y_j \prod_{i=0, i\neq j}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_j - x_i}\right) = \frac{y_k}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{y_j}{(x_k - x_j)\prod\limits_{i=0, i\neq j}^{k-1}(x_j - x_i)}$$

В правой дроби выносим минус из скобки $(x_k - x_i)$ перед дробью и вносим эту скобку под символ $\prod$, получаем:

$$\gamma_k = \frac{y_k}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{y_j}{\prod\limits_{i=0, i\neq j}^{k}(x_j - x_i)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j}{\prod\limits_{i=0, i\neq j}^{k}(x_j - x_i)}$$

По методу математической индукции, можно доказать, что:

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{y_j}{\prod\limits_{i=0, i\neq j}^{k}(x_j - x_i)} = [y_0, y_1, \ldots, y_k]$$

Где $[y_i, \ldots, y_j]$ - разделенная разность, которая определяется как:

$$[y_i, ..., y_j] = \frac{[y_{i+1}, ..., y_j] - [y_i, ..., y_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

$$[y_k] = y_k$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе были проведены два исследования. Первое заключалось в том, чтобы продемонстрировать поведение полинома на примере небольшого количества узлов. Во втором исследовании была исследована зависимость погрешности интерполяции от количества узлов сетки. Сеточные функции для интерполяции определяются на интервале $[-4, 5]$ по следующим непрерывным функциям:

1. $f(x) = 3x - 14 + e^{-x}$ - Гладкая функция
2. $g(x) = |x - ln(2)|sin(x) + 1$ - Функция с разрывом производной

Заметим, что у функции $g(x)$ разрыв производной (излом) происходит в точке $x = -ln(2)$.

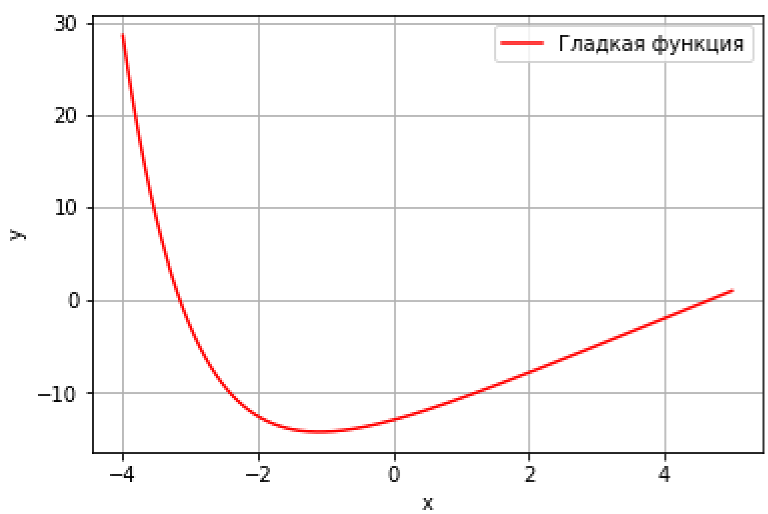

Рис. 1 График f(x)

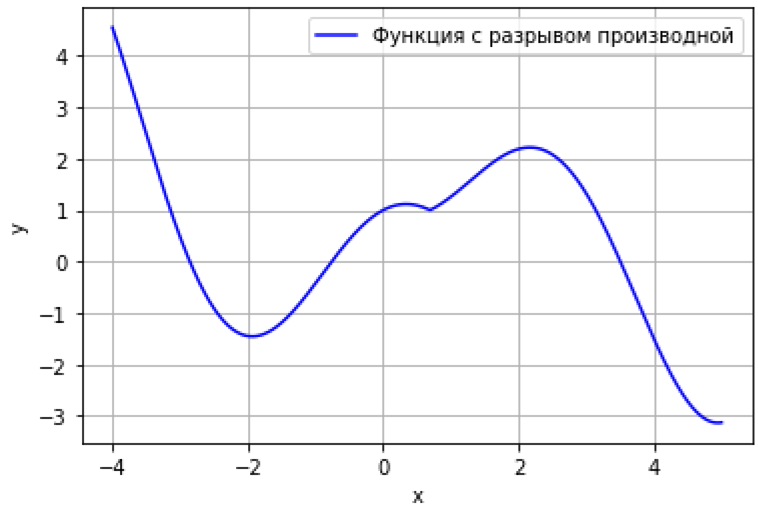

Рис. 2 График $g(x)$

Для демонстрации поведения интерполяционного многочлена Ньютона были рассмотрены чебышевская и равномерная сетка с числом узлов, равным 2, 4, 6, 8. Результаты приведены на рис.3-6.

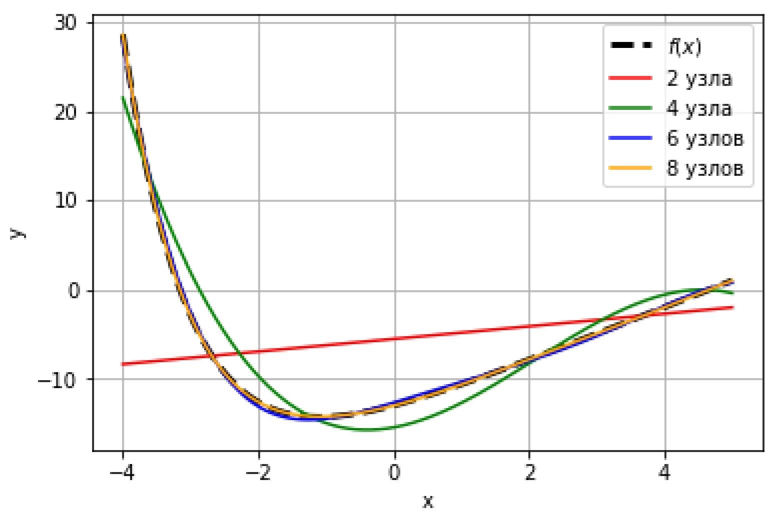

Рис. 3 Графики полиномов Ньютона при малом числе узлов, гладкая функция, чебышевская сетка

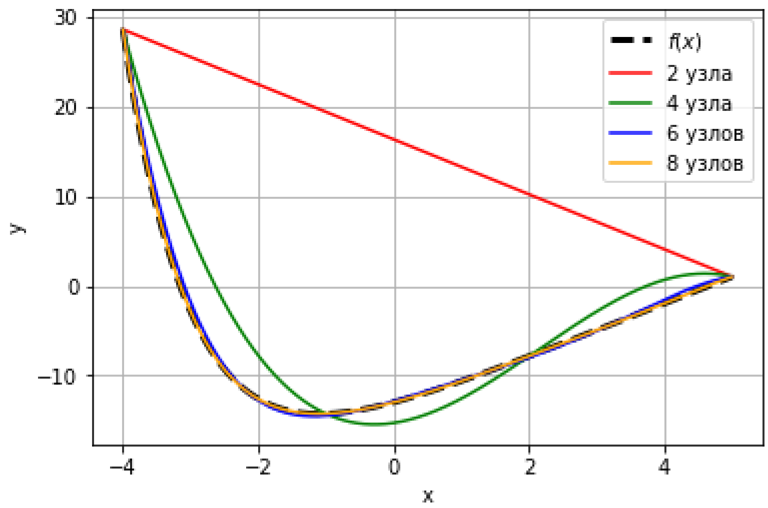

Рис. 4 Графики полиномов Ньютона при малом числе узлов, гладкая функция, равномерная сетка

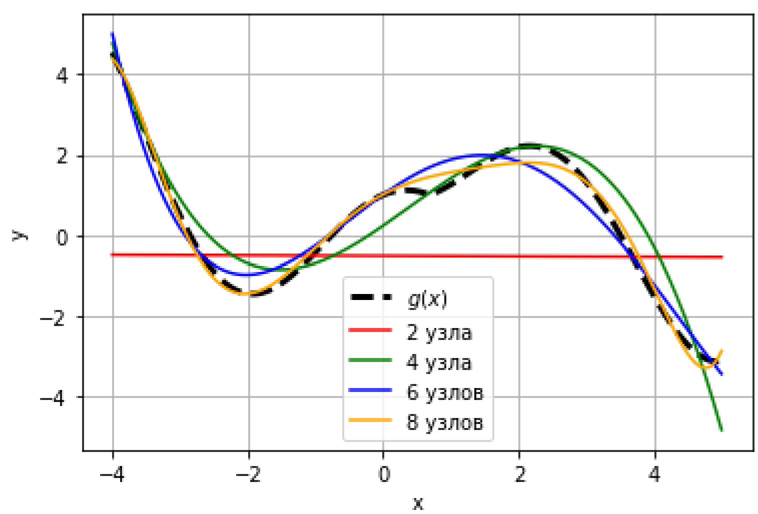

Рис. 5 Графики полиномов Ньютона при малом числе узлов, функция с разрывом производной, чебышевская сетка

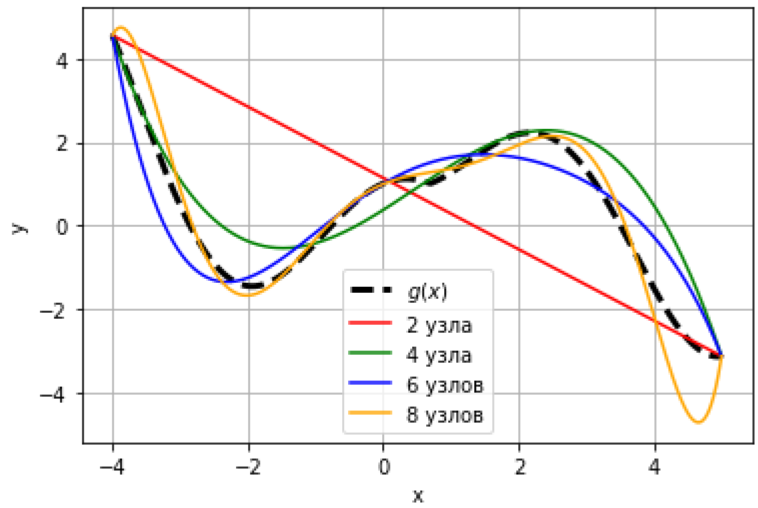

Рис. 6 Графики полиномов Ньютона при малом числе узлов, функция с разрывом производной, равномерная сетка

На рисунках 2 и 3 видно, что полиномы построенные на 6 и 8 узлах фактически накладываются друг на друга. Это показывает, что для гладких и слабо осциллирующих функций полиномы Ньютона дают хорошее приближение довольно быстро. При этом по рисункам 4 и 5, можно заметить, что для достижения сопоставимой точности полинома Ньютона для сильно осциллирующих функций и для функций с разрывом производной требуется большее число узлов.

В следующей части лабораторной работы была исследована зависимость погрешности интерполирования от количества узлов сетки. Исследование проводилось для двух типов сетки (чебышевская и равномерная) и для двух функций: гладкой и с разрывом производной. Погрешность была рассчитана следующим образом: На интервале [-4, 5] строилась равномерная сетка, состоящая из 10n узлов (где n - количество узлов на исследуемой сетке), и в каждом узле вычислялась разница между интерполяционным полиномом и исследуемой функцией, а погрешность определялась как максимум такой разницы в каждой сетке, то есть за погрешность интерполяции мы берём следующее выражение:

$$\Delta = max\{|P(x_i) - h(x_i)|\},\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ 10n - 1$$

Где h(x) - исследуемая функция.

Зависимость погрешности интерполяции от количества узлов в сетке для обеих функций и обеих сеток приведена на рисунке 7:

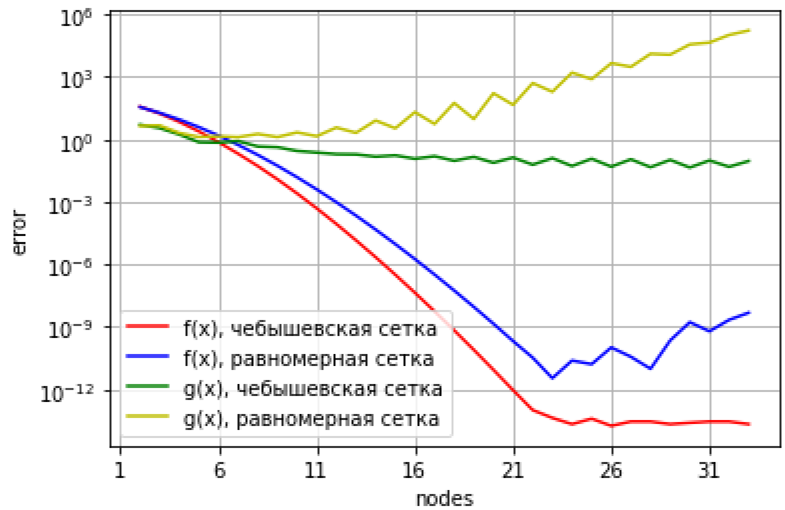

Рис. 7 Погрешность интерполирования обеих функций в логарифмическом масштабе

На данном рисунке видно, что погрешность интерполирования убывает при увеличении количества узлов, однако, начиная с количества узлов, равное 23, для чебышевской сетки погрешность выходит “на плато” (связано, вероятно, с достижением предела машинной точности), в то время как погрешность для равномерной сетки и вовсе начинает увеличиваться, что связано, вероятно, с неограниченным увеличением верхней оценки погрешности на концах интервала интерполирования (эффект Рунге) и накоплением погрешности вычисления при суммировании и перемножении большого количества чисел с плавающей точкой

Также на рисунке видно, что функция с разрывом производной интерполируется с меньшей точностью: в то время, как для чебышевской сетки погрешность медленно убывает, для равномерной сетки она начинает неограниченно возрастать начиная с 10 узлов

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован метод интерполяции с помощью полиномов Ньютона. На основании результатов исследования можно сделать несколько выводов:

- Равномерная сетка дает большую погрешность чем чебышевская сетка. Однако, равномерная сетка строится проще.
- Метод интерполяции с помощью полиномов Ньютона дает меньшую погрешность на функциях с непрерывной производной.

- Начиная с 20 узлов, дальнейшее увеличение количества узлов на интервале бессмысленно ввиду достижения предела машинной точности