Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курсовая работа
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Различные методы численного решения задачи Коши”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной курсовой работе было проведено сравнение семейства методов Рунге-Кутты и конечно-разностных методов для решения задачи Коши на примере метода Рунге-Кутты 4-го порядка и метода Адамса 4-го порядка.

В качестве результатов работы представлены и проанализированы зависимости абсолютной погрешности решения задачи Коши от шага интегрирования.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'(x) = f(x, y)$$

Решением данного уравнения является семейство интегральных кривых, то есть функция следующего вида:

$$y = y(c, x)$$

Задача Коши состоит в том, чтобы выделить такое значение c, чтобы функция y удовлетворяла наперёд заданному начальному условию:

$$y(x_0) = y_0$$

Решая данную задачу численно, в качестве решения мы получим табличную функцию. Будем считать, что данная функция задана на равномерной сетке, Для методов Рунге-Кутты в общем случае это может быть и не так, но для метода Адамса это - обязательное условие.

Идея методов Рунге-Кутты заключается в поиске очередного значения функции y в следующем виде:

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x + \delta x_i, y + \delta y_i) = y_k + h\sum_{i=1}^{l} \rho_i K_i$$

Где $h = x_{k+1} - x_k$.

При этом параметр l (стадийность, то есть количество вычислений функций для нахождения очередного значения y) мы выбираем так, чтобы обеспечить желаемый порядок точности метода, а исходя из этого выбора, мы вычисляем значения коэффициентов ρ_i, а также сдвиги от предыдущей точки δx_i, δy_i.

Метод вычисления этих значений можно описать так: представим δx_i и δy_i следующим образом:

$$\delta x_i = \alpha_i h$$

$$\delta y_i = h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} K_j$$

Разложим $y(x + h)$ в окрестности точки до некоторого порядка s:

$$y(x + h) = y(x) + \sum_{i=1}^{s} \frac{h^i}{i!} y^{(i)}(x) + O(h^{s+1}) = y(x) + \Delta_s y(x) + O(h^{s+1})$$

Сделаем замену $x = x_k$, $x + h = x_{k+1}$, $y(x_k) = y_k$, тогда, для метода 4 порядка, получим:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta_4 y + O(h^5) = y_k + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x + \alpha_i h,\ y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} K_j)$$

Значения ρ_i, α_i, $\beta_{i,j}$ выбираются из условия:

$$\Delta_s y - h \sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x + \alpha_i h,\ y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} K_j) = O(h^{s+1})$$

Для метода Рунге-Кутты четвертого порядка выберем параметр $l = 4$.

Стоит отметить, что при выборе такой стадийности уравнений, вытекающих из условия выше, получается меньше, чем количество неизвестных, и, соответственно, решений получается несколько. Здесь был выбран самый известный и общепринятый метод Рунге-Кутты 4-го порядка:

$$K_1 = f(x_k, y_k)$$

$$K_2 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} K_1)$$

$$K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_2)$$

$$K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3)$$

$$\rho_1 = \rho_4 = \frac{1}{6}$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \frac{2}{6}$$

Коэффициенты для методов Рунге-Кутты удобно представлять в виде таблицы Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & & & & \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \\
\alpha_l & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{l,l-1} & \\
\hline
 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{l-1} & \rho_l
\end{array}$$

Ниже представлена таблица для демонстрируемого метода:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Итоговое выражение для y_{k+1} получается следующим:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Стоит отметить, что стадийность не обязательно брать равной 4, так как порядок точности метода зависит от порядка, до которого мы раскладываем $y(x + h)$ в ряд Тейлора, однако стадийность l должна быть не ниже необходимого порядка точности.

Теперь рассмотрим метод Адамса, который относится к классу конечно-разностных методов.

Общий вид формул в конечно-разностных методах:

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f(x_{k-j}, y_{k-j})$$

Где $a_j,\ b_j$ − константы, $a_0 \neq 0,\ a_r \neq 0,\ r$ − шаговость метода.

Методы Адамса - частный случай конечно-разностных методов, где

$$a_0 = 1,\ a_1 =- 1,\ a_j = 0\ \forall j\ \geq 2$$

Тогда формула для y_k примет вид:

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{r} b_j f(x_{k-j},\ y_{k-j})$$

Выведем r-шаговый метод Адамса:

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x,\ y)$ по x на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx\ =\ y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x)dx$$

Аппроксимируем функцию $F(x)$ с помощью полинома в форме Лагранжа по $m = r - 1$ точкам:

$$F(x)\ =\ L_m(x)\ +\ R_m(x)$$

Подставляем в уравнение:

$$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_m(x)dx\ +\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx$$

Воспользуемся равномерностью сетки ($x\ =\ x_0 + ht$), по которой мы интегрируем. Тогда, пренебрегая остатком, получим:

$$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{r-1}}^{x_r} L_m(x)dx\ =\ y_{k-1} + \int_{r-1}^{r} L_m(x_0 + ht)dt$$

Формула для полинома Лагранжа на равномерной сетке:

$$L_m(x_0 + ht) = \sum_{j=0}^{m} F_j \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \frac{\varpi(t)}{t-j}$$

Где

$$\varpi(t) = \prod_{j=0}^{m} (t - j)$$

Итоговое представление:

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \int_{r-1}^{r} \frac{\varpi(t)}{t-j} dt\right) F_j = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{m} \beta_j F_j$$

Найдем коэффициенты для $r = 4$:

$$\beta_0 = \frac{(-1)^{3-0}}{(3-0)!0!} \int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-0} dt = \frac{-9}{24}$$

$$\beta_1 = \frac{(-1)^{3-1}}{(3-1)!1!} \int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-1} dt = \frac{37}{24}$$

$$\beta_2 = \frac{(-1)^{3-2}}{(3-2)!2!} \int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-2} dt = \frac{-59}{24}$$

$$\beta_3 = \frac{(-1)^{3-3}}{(3-3)!3!} \int_3^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-3} dt = \frac{55}{24}$$

Заметим, что из начального условия мы имеем только 1 стартовую точку, а для 4-шагового метода Адамса их необходимо 4. Для нахождения стартовых (разгонных) точек, можно использовать метод Рунге-Кутты 4-го порядка

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе была исследована зависимость погрешности численного решения задачи Коши от шага интегрирования при применении метода Адамса и Рунге-Кутты 4-х порядков. Исследования проводились на примере следующей задачи Коши:

$$y' = 2x - 3 + y \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

При этом промежуток интегрирования выбран следующий: $[0,\ 6]$.

Для того, чтобы решить задачу Коши, необходимо найти семейство интегральных кривых $y = y(c,\ x)$, удовлетворяющих уравнению (1). Это семейство называется общим решением.

Общим решением уравнения (1) является[1]:

$$y = 1 - 2x + Ce^{x}$$

Теперь нам нужно выделить одну кривую $y^{*}(x)$, которая будет удовлетворять условию (2).

Подставим $y(0) = 0$, тогда получим:

$$0 = 1 - 0 + C \Rightarrow C = -1$$

Окончательное аналитическое решение нашей задачи Коши:

$$y^{*}(x) = 1 - 2x - e^{x}$$

Погрешность решения для каждого метода вычислялась как максимальное абсолютное отклонение табличной функции, полученной в результате работы метода и заданной на равномерной сетке на отрезке [0, 6], от нашего аналитического решения, вычисляемого в узлах той же сетки, то есть:

$$\delta = max_{j = 1,2,...,n}\{|y^{*}(x_{j}) - y_{j}|\}$$

Где $x_{j} = jh$ (h - шаг интегрирования, $h = \frac{6-0}{n}$, n - количество разбиений равномерной сетки (не считая первый узел))

В проводимом исследовании шаг интегрирования уменьшался от 2^{2} до 2^{-18} с шагом уменьшения в 2 раза.

Результаты исследования показаны на рисунке 1:

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 176 с. — С. 11, задача 63.

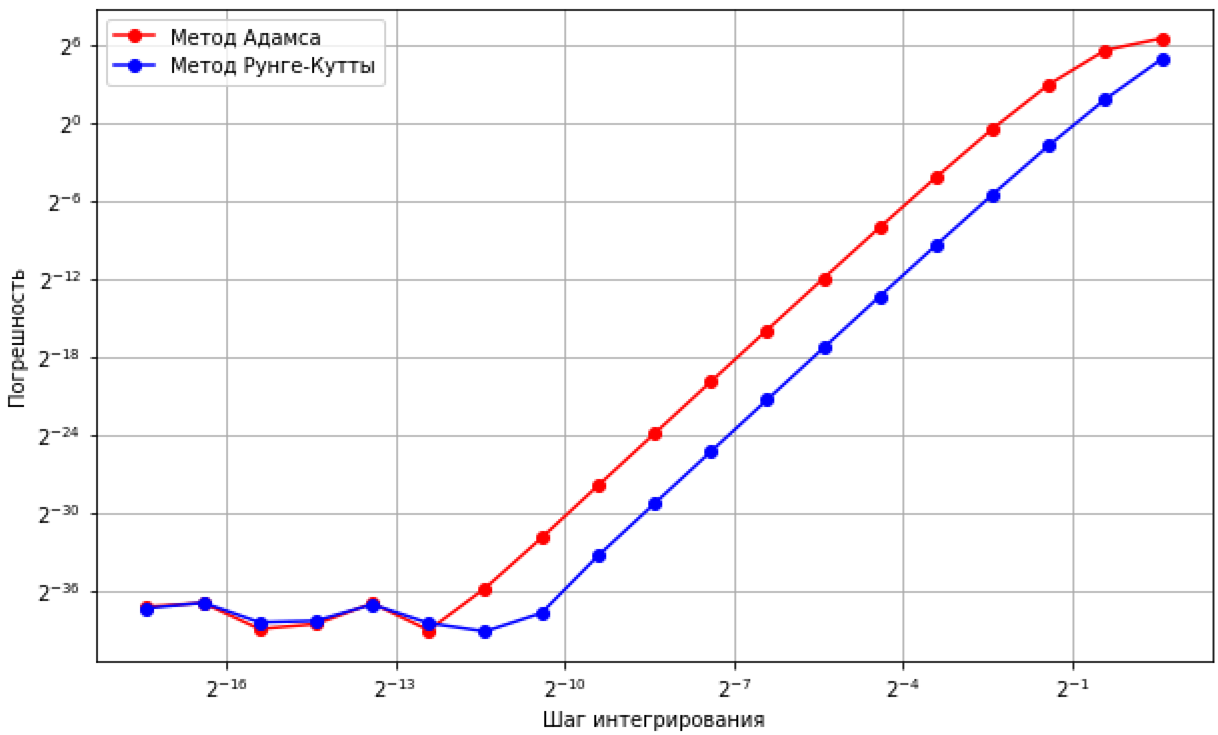

Рис. 1 Зависимость погрешности решения задачи Коши от шага интегрирования

На данном рисунке видно, что при уменьшении шага интегрирования в 2^{3} раза погрешность метода Рунге-Кутты уменьшается в 2^{12} раз, то есть в соответствии с порядком точности 4. Исходя из параллельности двух кривых на отрезке $[2^{-10}, 2^{-1}]$, можно сделать вывод, что метод Адамса имеет тот же самый порядок точности. При шаге интегрирования менее 2^{-11} достигается предел машинной точности для метода Рунге-Кутты, а для метода Адамса - при шаге интегрирования менее 2^{-12}. Также обратим внимание, что метод Рунге-Кутты при одном и том же шаге интегрирования дает погрешность примерно в 2^{6} раза меньшую, чем метод Адамса.

ВЫВОД

В ходе курсовой работы были сравнены метод Рунге-Кутты 4 порядка и метод Адамса 4-го порядка для численного решения задачи Коши. Можно сделать следующие выводы:

- При увеличении шага интегрирования в 2 раза погрешность решения в исследуемом методе увеличивается в 2^4 раз для обоих методов, что соответствует теоретическому порядку точности.
- При шаге интегрирования менее 2^{-11} достигается предел машинной точности для метода Рунге-Кутты, но при этом для достижения машинной точности методу Адамса требуется шаг интегрирования 2^{-12}
- Метод Рунге-Кутты при том же шаге интегрирования дает погрешность примерно в 2^6 раза меньшую, чем метод Адамса.