Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа № 4
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Формулы Гаусса численного интегрирования”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной лабораторной работе было проведено исследование численного интегрирования функции с помощью построенной формулы Гауссовского типа по трем узлам. Оно было проведено для двух функций: с непрерывной производной и с разрывом производной в одной из точек

В качестве результатов работы представлены графики зависимости абсолютной погрешности вычисления интеграла от количества разбиений интервала интегрирования

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть дана некоторая функция $F(x)$, $x \in [a, b]$. Задача численного интегрирования состоит в том, чтобы приближенно найти значение следующего интеграла:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

Где $\rho(x)$ — некоторая весовая функция, за счёт которой можно выделить интегрируемые особенности функции $F(x)$ (например, разрыв). Задача численного интегрирования в данной лабораторной работе решалась путем построения квадратурных формул Гауссовского типа.

Квадратурные формулы - это формулы, вида:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Квадратурные формулы Гауссовского типа позволяют получить наивысший алгебраический порядок точности по сравнению с другими квадратурными формулами. Такая точность достигается за счет специального выбора узлов x_k, в которых будет вычисляться функция $f(x)$ и выбора коэффициентов A_k. В данной лабораторной работе была использована формула для трёх узлов (то есть $n = 3$). Получим эту формулу:

Выберем способ вывода квадратурной формулы Гаусса, где мы за весовую функцию берём $\rho(x) = 1$. Сделаем замену в интеграле:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2},\ dx = \frac{b-a}{2}dt$$

Тогда искомый интеграл примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt$$

Сделано это с целью более удобного нахождения (промежуток интегрирования сводится к [-1, 1]) корневого полинома, корни которого и являются узлами квадратурных формул Гаусса.

По теореме о порядке точности $2n - 1$, необходимо и достаточно, чтобы искомый полином удовлетворял следующему равенству:

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0 \ \forall P_{n-1}(x)$$

То есть корневой полином $\omega(x)$ должен быть ортогонален любому полиному степени n-1

При этом:

$$A_k = \int_{-1}^{1} p(x)\Phi_k(x)dx$$

Где $\Phi_k(x)$ - базисный полином Лагранжа

При таком промежутке интегрирования в качестве корневого полинома удобнее всего взять полином в форме Лежандра, который с точностью до константы c_n можно определить следующим образом:

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}((1 - x^2)^n)$$

В нашем случае $n = 3$ и тогда полином Лежандра принимает следующий вид:

$$P_3(x) = c_3 \frac{d^3}{dx^3}((1 - x^2)^3) = c_3 \frac{d^3}{dx^3}(1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) = c_3(72x - 120x^3)$$

Отсюда видно, что один из корней нашего полинома равен нулю (обозначим его $x_2 = 0$)

Остальные корни находятся из простого квадратного уравнения:

$$120x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = \frac{72}{120} = \frac{3}{5},\ x_{1,3} = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}$$

В итоге мы получили следующие узлы: $\{x_1,\ x_2,\ x_3\} = \{-\sqrt{\frac{3}{5}},\ 0,\ \sqrt{\frac{3}{5}}\}$

Веса $A_1,\ A_2,\ A_3$ можно найти из системы определяющих уравнений:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \int\limits_{-1}^{1} x^0 dx = 2$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \int\limits_{-1}^{1} x^1 dx = 0$$

$$A_1{x_1}^2 + A_2{x_2}^2 + A_3{x_3}^2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Принимая во внимание, что $x_2 = 0$, а $x_1 = -x_2$, из второго уравнения получаем, что $A_1 = A_3$, а из третьего уравнения $\frac{6}{5}A_1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$

Подставляя A_1 и A_3 в первое уравнение, получаем, что $A_2 + \frac{10}{9} = 2 \Leftrightarrow A_2 = \frac{8}{9}$

В итоге мы получили следующую квадратурную формулу:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

Принимая во внимание нашу предыдущую замену, получаем окончательное представление квадратурной формулы Гаусса для нашего интеграла:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{18}(5f(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}) + 9f(\frac{a+b}{2}) + 5f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}))$$

Для увеличения точности, мы будем использовать обобщённые квадратурные формулы, то есть разбивать промежуток интегрирования $[a,\ b]$ на части равномерной сеткой.

Пусть n - количество отрезков, на которые мы разбиваем промежуток интегрирования, тогда длина каждого отрезка $h = \frac{b-a}{n}$

Пусть a_i, b_i - левая и правая граница i-го отрезка соответственно ($i = 0, ..., n - 1$). Тогда получим:

$$a_i = a + ih, \; b_i = a + (i + 1)h$$

$$b_i - a_i = h$$

Тогда наша формула примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx = \frac{h}{18} \sum_{i=0}^{n-1} \left(5f\left(\frac{a_i+b_i}{2} - \frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 9f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) + 5f\left(\frac{a_i+b_i}{2} + \frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе были проведено одно исследование - зависимость погрешности вычисления интеграла от количества разбиений отрезка интегрирования. Исследования проводились на двух функциях - гладкой и с разрывом производной

1. $f(x) = 3sin(x)$ - Гладкая функция, отрезок интегрирования: $[0, \pi]$
2. $g(x) = |x - e|cos(x)$ - Функция с разрывом производной, отрезок интегрирования: $[0, 2\pi]$

Заметим, что у функции $g(x)$ разрыв производной (излом) происходит в точке $x = e$.

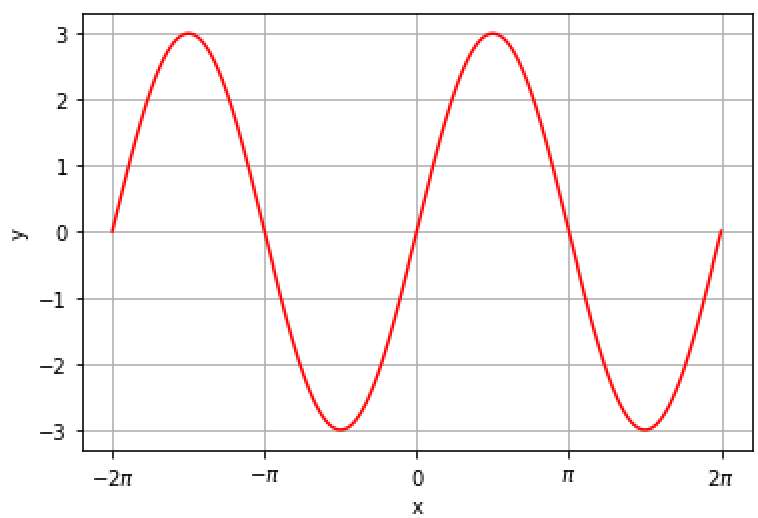

Рис. 1 График f(x)

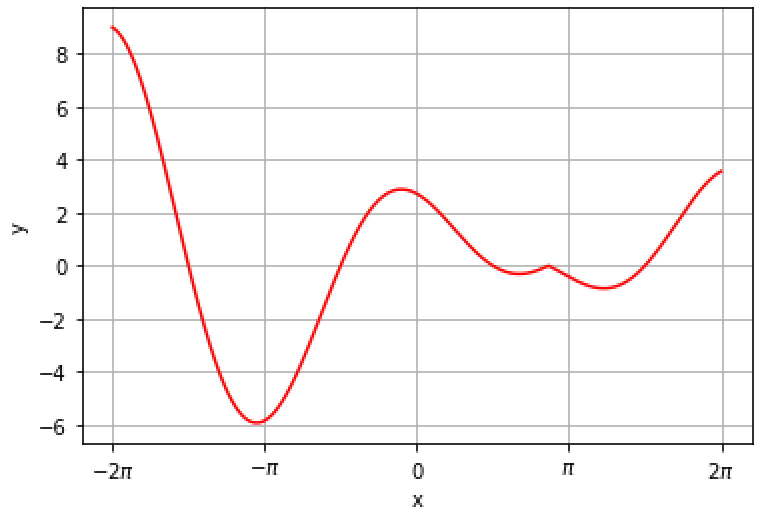

Рис. 2 График $g(x)$

Погрешность рассчитывалась как абсолютная разность между полученным по методу значением интеграла и аналитическим значением интеграла:

$$\delta = |I^* - I|$$

Где I^* - точное значение интеграла, полученное вручную по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$

Вычислим интеграл от первой функции:

$$\int_0^{\pi} 3sin(x)dx = -3(cos(\pi) - cos(0)) = -3 \cdot (-2) = 6$$

Интеграл от второй функции вычисляется несколько труднее:

$$\int_0^{2\pi} |x - e|cos(x)dx = \int_0^{e} (e - x)cos(x)dx + \int_e^{2\pi} (x - e)cos(x)dx$$

Вычислим каждый интеграл по отдельности:

$$\int_{0}^{e}(e - x)cos(x)dx = e\int_{0}^{e}cos(x)dx - \int_{0}^{e}xcos(x)dx = esin(e) - \int_{0}^{e}xcos(x)dx$$

Второй получившийся интеграл вычислим по частям

$$\int_{0}^{e}xcos(x)dx = xsin(x)\Big|_{0}^{e} - \int_{0}^{e}sin(x)dx = esin(e) + cos(e) - 1$$

Получим в итоге:

$$\int_{0}^{e}(e - x)cos(x)dx = 1 - cos(e)$$

Вычислим оставшийся интеграл аналогично:

$$\int_{e}^{2\pi}(x - e)cos(x)dx = \int_{e}^{2\pi}xcos(x)dx - e\int_{e}^{2\pi}cos(x)dx = \int_{e}^{2\pi}xcos(x)dx + esin(e)$$

$$\int_{e}^{2\pi}xcos(x)dx = xsin(x)\Big|_{e}^{2\pi} - \int_{e}^{2\pi}sin(x)dx = - esin(e) + 1 - cos(e)$$

Получили:

$$\int_{e}^{2\pi}(x - e)cos(x)dx = 1 - cos(e)$$

Окончательный ответ:

$$\int_{0}^{2\pi}|x - e|cos(x)dx = 2 - 2cos(e)$$

Количество разбиений на каждой итерации изменялось от 1 до 2^{20} с шагом увеличения в 2 раза.

Результаты исследования показаны на рисунке 3:

Рис. 3 Зависимость погрешности интегрирования от числа разбиений отрезка интегрирования для гладкой функции и функции с разрывом производной

Заметим на графике, что при изменении числа разбиений с 2^2 до 2^5 погрешность упала на 2^{18}, что говорит о том, что данный метод имеет порядок точности 6 для гладкой функции, но для функции с разрывом производной порядок точности можно только оценить: он примерно равен 2. При числе разбиений более 2^8достигается предел машинной точности для гладкой функции, для функции с разрывом производной достижение машинной точности требует числа разбиений более 2^{20}

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован метод численного интегрирования на основе квадратурных формул Гауссовского типа. На основании результатов исследования можно сделать несколько выводов:

- При увеличении числа разбиений в 2 раза погрешность интегрирования в исследуемом методе уменьшается в 2^6 раз для гладкой функции, для функции с разрывом производной при увеличении числа разбиений в 2 раза погрешность уменьшается примерно на 2^2
- При числе разбиений более 2^8 достигается предел машинной точности, в то время как для функции с разрывом производной требуется количество разбиений более 2^{20}