Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа № 2
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Интерполяционные сплайны приближения табличных функций”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной лабораторной работе было проведено исследование метода интерполяции табличной функции с помощью эрмитова сплайна. Оно было проведено для двух функций: с непрерывной производной и с разрывом производной в одной из точек, а также для двух типов сетки - равномерной и чебышевской.

В качестве результатов работы представлены графики поведения эрмитова сплайна для малого количества узлов сетки, а также зависимости погрешности от количества узлов для обеих функций и обеих сеток.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть дана сеточная функция $(x^h,\ y^h),\ x^h \subset [a, b]$. Задача интерполяции состоит в том, чтобы найти такую функцию $f(x)$, что выполняется критерий интерполирования, то есть:

$$\forall x_i \in x^h:\ f(x_i) = y_i$$

Задача интерполяции в данной лабораторной работе решалась путем построения сплайна, который определяется как кусочно-заданная функция, причём на интервале $[x_i,\ x_{i+1}],\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ n - 1$ задается некоторый полином. В нашем случае, на каждом интервале задается полином в форме Эрмита, построенный по двум краевым точкам интервала и имеющий степень 3. Обозначается это как:

$$S_3^{\ 2}(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} = H_3(x)$$

Здесь 3 в нижнем индексе слева - степень сплайна (то есть степень всех задаваемых полиномов), а 2 в верхнем индексе - дефект сплайна, то есть разность между степенью сплайна и степенью гладкости сплайна (то есть, максимальная степень производной от сплайна, которая является непрерывной).

Элемент (звено) эрмитова сплайна на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ задается как:

$$H_3(x) = y_i\varphi_i(x) + y'_i\psi_i(x) + y_{i+1}\varphi_{i+1}(x) + y'_{i+1}\psi_{i+1}(x)$$

Где $\{\varphi,\ \psi\}$ — базисные функции эрмитова полинома, которые находятся из следующих условий (критерий интерполирования):

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

$$\varphi'_j(x_i) = 0 \ \forall i$$

$$\psi_j(x_i) = 0 \ \forall i$$

$$\psi'_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

Опуская громоздкие алгебраические преобразования, напишем аналитические представления для этих функций:

$$\varphi_i(x) = (1 - 2(x - x_i)\frac{1}{x_i - x_{i+1}})(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}})^2$$

$$\psi_i(x) = (x - x_i)(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}})^2$$

$$\varphi_{i+1}(x) = (1 - 2(x - x_{i+1})\frac{1}{x_{i+1} - x_i})(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i})^2$$

$$\psi_{i+1}(x) = (x - x_{i+1})(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i})^2$$

Значение сплайна в произвольной точке x вычисляется путем нахождения отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, в котором лежит данная точка (например, бинарным поиском), далее вычисляется значение интерполяционного полинома, построенного на этом отрезке

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе были проведены два исследования. Первое заключалось в том, чтобы продемонстрировать поведение сплайна на примере небольшого количества узлов. Во втором исследовании была исследована зависимость погрешности интерполяции от количества узлов сетки. Сеточные функции для интерполяции определяются на интервале $[-4, 5]$ по следующим непрерывным функциям:

1. $f(x) = 3x - 14 + e^{-x}$ - Гладкая функция
2. $g(x) = |x + ln(2)|sin(x) + 1$ - Функция с разрывом производной

Заметим, что у функции $g(x)$ разрыв производной (излом) происходит в точке $x = -ln(2)$.

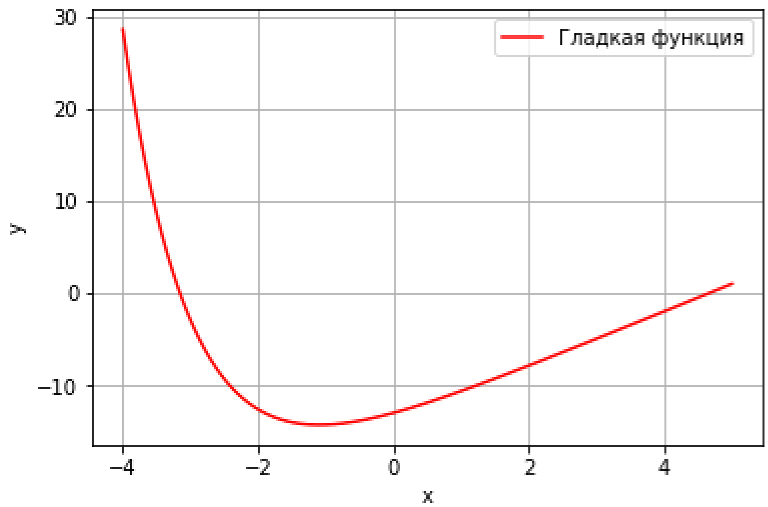

Рис. 1 График f(x)

Рис. 2 График $g(x)$

Для демонстрации поведения интерполяционного сплайна Эрмита были рассмотрены чебышевская и равномерная сетка с числом узлов, равным 2, 4, 6, 8. Результаты приведены на рис.3-6

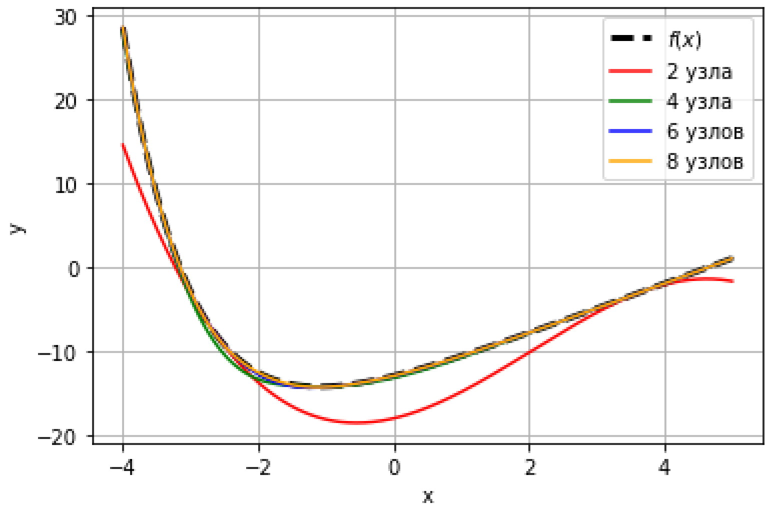

Рис. 3 Графики сплайнов Эрмита при малом числе узлов, гладкая функция, чебышевская сетка

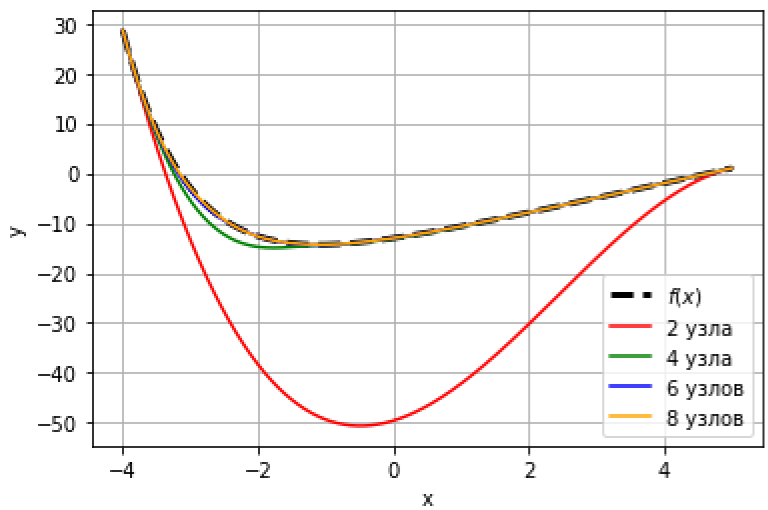

Рис. 4 Графики сплайнов Эрмита при малом числе узлов, гладкая функция, равномерная сетка

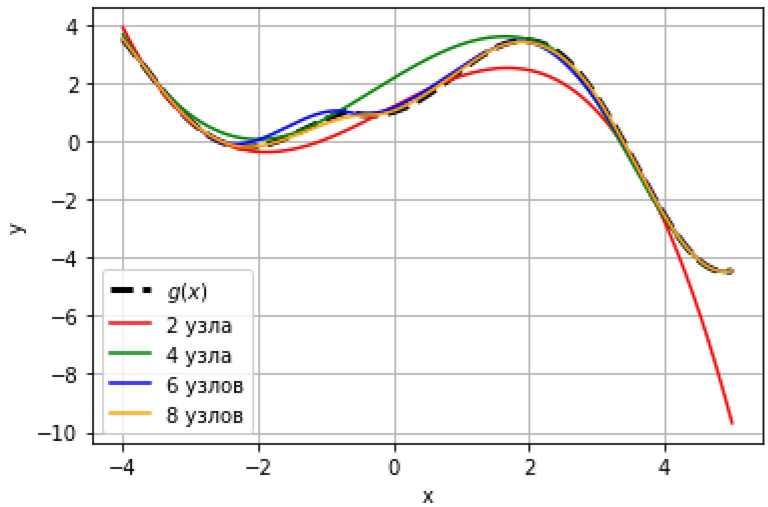

Рис. 5 Графики сплайнов Эрмита при малом числе узлов, функция с разрывом производной, чебышевская сетка

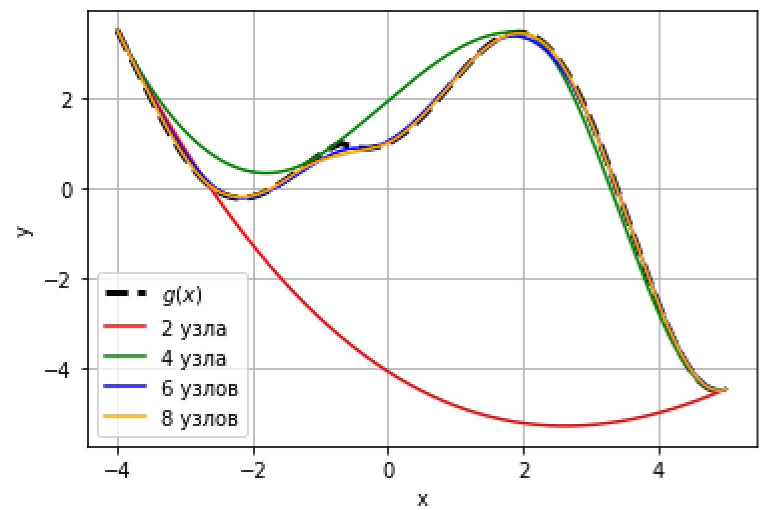

Рис. 6 Графики сплайнов Эрмита при малом числе узлов, функция с разрывом производной, равномерная сетка

На рисунках 2 и 3 видно, что полиномы построенные на 6 и 8 узлах фактически накладываются друг на друга. Это показывает, что для гладких и слабо осциллирующих функций сплайн эрмита дает хорошее приближение довольно быстро. При этом по рисункам 4 и 5, можно заметить, что для достижения сопоставимой точности для сильно осциллирующих функций и для функции с разрывом производной требуется большее число узлов.

В следующей части лабораторной работы была исследована зависимость погрешности интерполирования от количества узлов сетки. Исследование проводилось для двух разных типов сетки (равномерная и чебышевская) и для двух разных функций: гладкой и с разрывом производной на интервале интерполирования.

Погрешность определялась как максимальное отклонение построенного сплайна от заданной функции на равномерной сетке, которая в 10 раз плотнее, чем исследуемая, то есть погрешность для каждого количества узлов n определялась следующим выражением:

$$\delta = max_{j=0,1,...,10n-1}\{|P(y_j) - h(y_j)|\}$$

Где h(x) - исследуемая функция, $y_j = a + j\frac{b-a}{10n-1}$.

На каждой итерации исследования количество узлов сетки, на которой строится интерполяционный сплайн, изменялось от 2 до 2^{20} с шагом 2 (то есть увеличивалось в 2 раза)

Зависимость погрешности интерполирования от количества узлов в сетке для обеих исследуемых функций и обеих сеток представлена на рисунке 6:

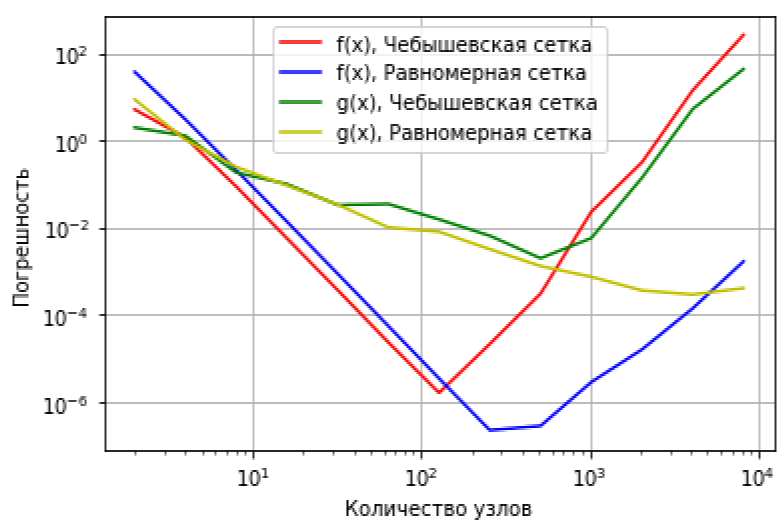

Рис. 6 Погрешность интерполирования обеих функций в зависимости от количества узлов сетки

На данном рисунке видно, что погрешность имеет степенную зависимость от количества узлов в сетке, причем при увеличении количества узлов на 10, погрешность падает на 10^4, то есть порядок точности метода равен 4 для гладкой функции, в то время как функция с разрывом производной интерполируется с меньшей точностью: и для чебышевской, и для равномерной сетки алгебраическая точность равна примерно 1. При числе узлов более 10^3 Наблюдается неограниченное увеличение погрешности.

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован метод интерполяции с помощью сплайна Эрмита. На основании результатов исследования можно сделать несколько выводов:

- Тип сетки практически не влияет на точность интерполяции сплайнами Эрмита в отличие от интерполяции полиномами.
- Метод интерполяции с помощью сплайна Эрмита дает на несколько порядков меньшую погрешность на функциях с непрерывной производной.
- При интерполяции гладкой функции при помощи сплайна Эрмита погрешность интерполяции имеет степенную зависимость от количества узлов сетки, причём порядок точности метода равен 4.
- При интерполяции функции с разрывом производной при помощи сплайна Эрмита погрешность интерполяции имеет степенную зависимость от количества узлов сетки, причём порядок точности метода равен 1