Приближение табличных функций

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

7 февраля 2025 г.

Содержание

Постановка задачи

$(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$

$x^h := \{x_i\}_{i=0}^n$ — сетка, $y^h := \{y_i\}_{i=0}^n$ — сеточная функция.

1. $x_i < x_{i+1}$ — упорядоченная сетка
2. $x_i = x_0 + ih$ — равномерная сетка

Пусть табличная функция задана парой элементов (x^h, y^h).
Требуется построить функцию $\phi(x)$, которая удовлетворяет критерию близости

$$\phi(x) \approx (x^h, y^h) \tag{1}$$

и $\phi(x) \in C^{(k)}([a, b])$, где $[a, b]$ — отрезок, содержащий все x_i.

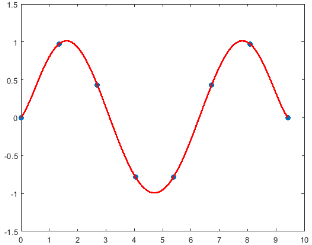
Критерии близости

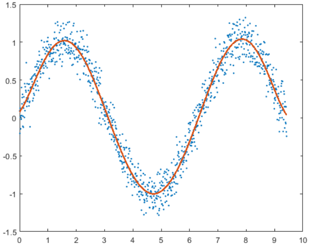
1. критерий интерполирования:

$$\phi(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n. \tag{2}$$

2. критерий сглаживания:

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i (\phi(x_i) - y_i)^2 \to \min, \rho_i > 0. \tag{3}$$





Зачем решать задачу аппроксимации?

1. табличная функция получена в результате эксперимента и необходимо вычислить значения функции (значения производных функции) в других (промежуточных) точках
2. компактное представление данных: вместо (x^h, y^h) имеем $\phi(x)$
3. упрощение вычисления ”сложных” функций: заменяем более ”простой”
   - $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_a^b P_n(x)dx$

Основной подход к решению задачи аппроксимации

Выберем некоторое множество $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^m$, $\phi_j(x) \in C^{(k)}([a,b])$ — базисные функции. Построим обобщённый полином

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x), \tag{4}$$

где a_j определяются исходя из критерия близости $\phi(x)$ к (x^h, y^h).

(1) Функции $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^m$ должны быть линейно независимыми (для обеспечения единственности, если решение существует).

Определение

Функции $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^m$ называются линейно независимыми, если

$$\phi(x) = 0, \forall x \quad \Leftrightarrow \quad a_j = 0, j = 0, \ldots, m. \tag{5}$$

(2) Множество базисных функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{m}$ должно принадлежать системе Φ, где $\Phi = \{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — пространство полных функций.

Дает надежду (но не обеспечивает!) на то, что процесс приближения будет сходиться.

Определение

Множество $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ называется полным в X, если $\forall f \in X \, \forall \epsilon > 0 \; \exists m, a_j$

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x) \right\|_X \leq \epsilon. \tag{6}$$

Примеры

1. $\phi_j(x) = x^j \Rightarrow \phi(x)$ — алгебраический полином.

Теорема Вейерштрасса

Любую непрерывную функцию можно приблизить полиномом с вещественными коэффициентами.

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} = \{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots\}$
$\Rightarrow \phi(x)$ — тригонометрический полином.

Содержание

Существование и единственность интерполяционного полинома

Пусть $\phi_j(x) = x^j$. Тогда $\phi(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j = P_m(x)$.

Задана табличная функция $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$.

Потребуем выполнения условий интерполяции $\phi(x_i) = y_i$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_m x_0^m = y_0 \\ \ldots = \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_m x_n^m = y_n \end{cases} \tag{7}$$

СЛАУ (7) имеет единственное решение, если

1. $n = m$, т.е. степень полинома на единицу меньше, чем количество точек.
2. x_i попарно различны.

Упражнение

x_i попарно различны $\Leftrightarrow$ определитель СЛАУ (7) не равен 0.

Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Задана табличная функция $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$.
Построим итерполяционный полином $P_n(x)$: $P_n(x_i) = y_i$.
Будем искать $P_n(x)$ в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_i(x), \tag{8}$$

где $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

$\Phi_i(x) = \alpha_i \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x - x_k)$ — i-й базисный полином Лагранжа.

$\Phi_i(x_i) = 1 = \alpha_i \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k) \Rightarrow \alpha_i = \ldots \Rightarrow \Phi_i(x) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$

Интерполяционный полином в форме Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \tag{9}$$

Введем понятие корневого полинома $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k). \tag{10}$$

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^{n} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x - x_k) \Rightarrow \omega'(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k) \Rightarrow \Phi_i(x) = \tfrac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}$$

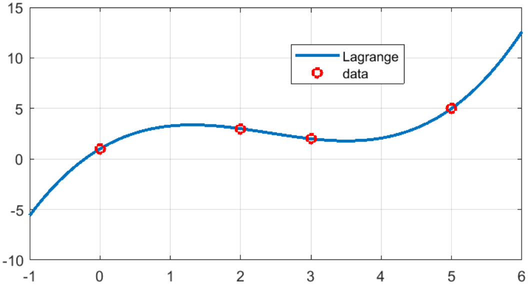
$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}. \tag{11}$$

Пример

$$x^h = \{0, 2, 3, 5\}, y^h = \{1, 3, 2, 5\}.$$

$$L_3(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} + 2\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 5\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}$$

$$L_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$$



Интерполяционный полином Лагранжа для равноотстоящих узлов

Рассмотрим сетку с равноотстоящими узлами: $x_i = x_0 + ih, i = 0, \ldots, n$.
$x = x_0 + th, t \in [0, n]$.
$x - x_k = h(t - k), x_i - x_k = h(i - k)$

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(t-0)(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)}{(i-0)(i-1)\ldots1(-1)\ldots(i-n)} \frac{t-i}{t-i} = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i}\omega(t)}{i!\,(n-i)!\,(t-i)}, \tag{12}$$

где $\omega(t) = \prod_{k=0}^{n}(t-k)$.
Коэффициенты при y_i не зависят от $y(x)$, не зависят от h и не зависят от длины отрезка $[a, b]$ $\Rightarrow$ могут быть вычислены заранее.

Погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

1. Ошибка метода: интерполяционный многочлен $L_n(x)$ совпадает с $y(x)$ в узлах x_i, но в остальных точках — нет.
2. Неустранимая погрешность: значения y_i могут оказаться приближенными.
3. Погрешность округления.

Упражнение

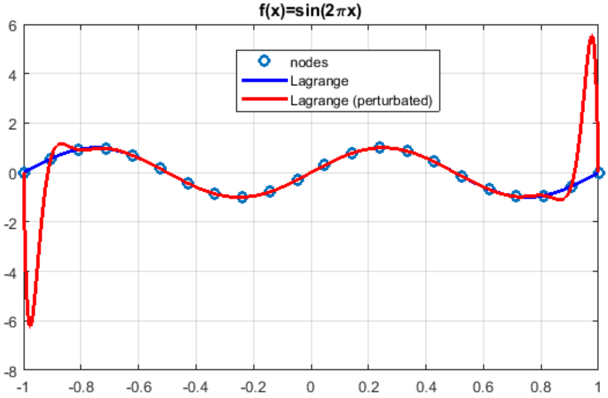
Для какой функции $y(x)$ ошибка метода будет равна 0?

Неустойчивость интерполяционного полинома. Пример

$y(x) = \sin(2\pi x), x \in [-1, 1]$

Равномерная сетка, 22 узла

$|y(x_i) - \widetilde{y}(x_i)| \leq 10^{-4}$



Оценка погрешности интерполяционного полинома в форме Лагранжа

Предположим, что $y(x) \in C^{(n+1)}([a,b])$ и $x^h \subset [a,b]$.
$R_n(x) = y(x) - P_n(x)$ — ошибка интерполяции.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(x) = y(x) - L_n(x) - k\omega(x), \tag{13}$$

где k — некоторая константа, $\omega(x)$ — корневой полином.

$\psi(x_i) = 0,\ i = 0, \ldots, n.$
Подберем k так, чтобы $\psi(x) = 0$, где x — точка, для которой производится оценка:

$$k = \frac{y(x) - L_n(x)}{\omega(x)}. \tag{14}$$

$\psi(x) \in C^{(n+1)}([a,b])$ и имеет $n+2$ различных корня.
$\Rightarrow \psi'(x)$ имеет $n+1$ корень $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \psi^{(n+1)}(x)$ имеет 1 корень, $x = \eta, \eta \in [a,b]$.

$\psi^{(n+1)}(\eta) = y^{(n+1)}(\eta) - 0 - k(n+1)! = 0 \Rightarrow$

$$k = \frac{y^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}. \tag{15}$$

Ошибка интерполяции:

$$y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega(x), \forall x \in [a,b]. \tag{16}$$

Полагая $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |y^{(n+1)}(x)|$,

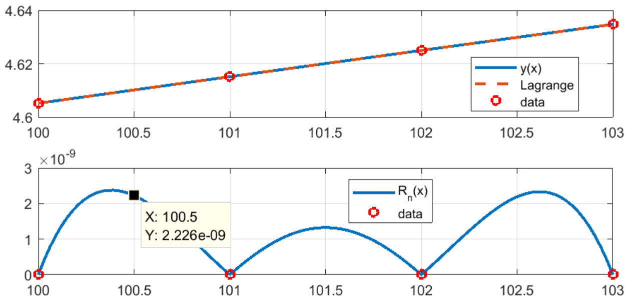
$$|y(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \forall x \in [a,b]. \tag{17}$$

Пример

С какой точностью можно вычислить $\ln(100.5)$ по формуле Лагранжа, если известны значения $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$ и $\ln(103)$.

$n = 3, a = 100, b = 103.$
$y(x) = \ln(x), y^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, M_4 = \frac{6}{100^4}.$

$$|\ln(100.5) - L_3(100.5)| \leq \frac{6}{100^4 \cdot 4!} 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1.5 \cdot 2.5 \approx 2.3 \cdot 10^{-9}.$$

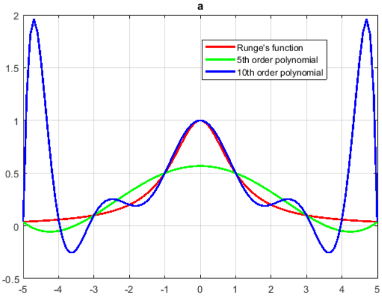


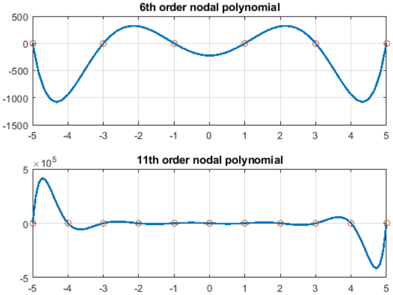
Недостаток полиномиальной интерполяции на равномерной сетке

Функция Рунге

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5] \tag{18}$$

С увеличением n отклонение между $L_n(x)$ и $f(x)$ растет.





Выбор узлов интерполирования. Чебышевская сетка

Ошибка интерполяции (16) зависит от $f^{(n+1)}(\eta)$ и от $\omega(x)$:

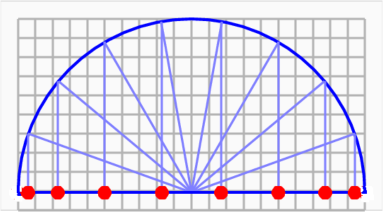
$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)| \tag{19}$$

Как выбрать узлы x_i, чтобы ошибка интерполяции была наименьшей?

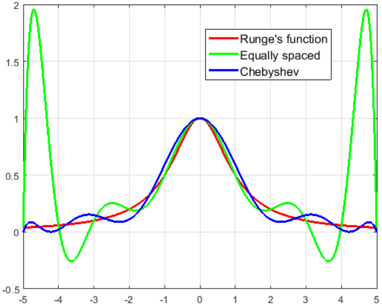
$\max\limits_{x\in[a,b]} |\omega(x)| \to \min \Rightarrow$ узлы — корни полинома Чебышева

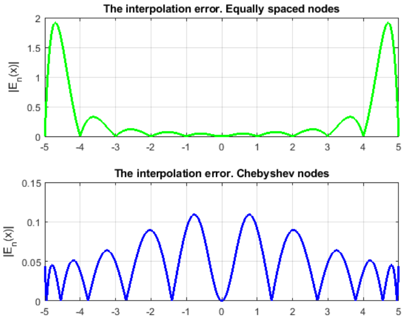
$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n}\right), i = 0, \ldots, n-1 \tag{20}$$

$$[-1,1] \to [a,b] : x_i \to \frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}$$



Равномерная и Чебышевская сетка





Конечные разности

Пусть $x^h = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ - упорядоченная сетка и $x_i = x_0 + ih$.

Тогда конечная разность 1-го порядка в узле x_k, $k = 0, \dots, n-1$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \tag{21}$$

а конечная разность m-го порядка

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k, \tag{22}$$

Пример

$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$
$\Delta^3 y_0 = \dots$

Разделённые разности

$x^h = \{x_i\}_{i=0}^n, y^h = \{y_i\}_{i=0}^n.$

Разделённая разность 1-го порядка, вычисленная по двум узлам x_{k_1}, x_{k_2}

$$[y_{k_1}, y_{k_2}] = \frac{y_{k_2} - y_{k_1}}{x_{k_2} - x_{k_1}}, \tag{23}$$

а разделённая разность m-го порядка, вычисленная по узлам $x_{k_0}, \dots, x_{k_m}$

$$[y_{k_0}, \dots, y_{k_m}] = \frac{[y_{k_1}, \dots, y_{k_m}] - [y_{k_0}, \dots, y_{k_{m-1}}]}{x_{k_m} - x_{k_0}}. \tag{24}$$

Разделенная разность n-го порядка равна

$$[y_{k_0}, \ldots, y_{k_n}] = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_{k_j}}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_{k_j} - x_{k_i})}. \tag{25}$$

Доказательство (по ММИ)

База индукции: $[y_{k_0}, y_{k_1}] = \frac{y_{k_1} - y_{k_0}}{x_{k_1} - x_{k_0}} = \frac{y_{k_0}}{x_{k_0} - x_{k_1}} + \frac{y_{k_1}}{x_{k_1} - x_{k_0}}$.

Индукционный переход. Пусть (25) верно для $n = m - 1$. Покажем, что (25) верно для $n = m$.

$$[y_{k_0}, \ldots, y_{k_m}] = \frac{[y_{k_1}, \ldots, y_{k_m}] - [y_{k_0}, \ldots, y_{k_{m-1}}]}{x_{k_m} - x_{k_0}} = \frac{1}{x_{k_m} - x_{k_0}} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{y_{k_j}}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} (x_{k_j} - x_{k_i})} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y_{k_j}}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m-1} (x_{k_j} - x_{k_i})} \right).$$

1. $j=0$: $-\dfrac{1}{x_{k_m}-x_{k_0}}\dfrac{y_{k_0}}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{m-1}(x_{k_j}-x_{k_i})}$
2. $j=m$: $\dfrac{1}{x_{k_m}-x_{k_0}}\dfrac{y_{k_m}}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{m-1}(x_{k_j}-x_{k_i})}$
3. $j\neq 0, j\neq m$: $\dfrac{1}{x_{k_m}-x_{k_0}}\left(\dfrac{y_{k_j}}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}(x_{k_j}-x_{k_i})}-\dfrac{y_{k_j}}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{m-1}(x_{k_j}-x_{k_i})}\right)=\dfrac{y_{k_j}}{x_{k_m}-x_{k_0}}\left(\dfrac{(x_{k_j}-x_{k_0})-(x_{k_j}-x_{k_m})}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{m}(x_{k_j}-x_{k_i})}\right)$

Следствие

Разделенная разность - симметричная функция своих аргументов.

Связь между конечными разностями и разделенными разностями

Пусть x^h - упорядоченная сетка и $x_i = x_0 + ih$. Тогда

$$[y_0, \dots, y_m] = \frac{\Delta^m y_0}{m!\, h^m}. \tag{26}$$

Доказательство (по ММИ)

База индукции: $[y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{1! h^1}$.

Индукционный переход. Пусть (26) верно для $n = m - 1$. Покажем, что (26) верно для $n = m$.

$$[y_0, \dots, y_m] = \frac{[y_1, \dots, y_m] - [y_0, \dots, y_{m-1}]}{x_m - x_0} = \frac{\frac{\Delta^{m-1} y_1}{(m-1)! h^{m-1}} - \frac{\Delta^{m-1} y_0}{(m-1)! h^{m-1}}}{\underbrace{x_m - x_0}_{hm}}. \tag{27}$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона

Нужно увеличить степень интерполяционного полинома на единицу $\Rightarrow$ при использовании формулы Лагранжа все слагаемые в (12) нужно вычислить заново ☹.

$$x_0 \Rightarrow L_0(x) = y_0$$
$$x_0, x_1 \Rightarrow L_1(x)$$
$$x_0, \ldots, x_n \Rightarrow L_n(x)$$

$$L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + \ldots + (L_n - L_{n-1}) = Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n$$
$$Q_k(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x)$$

$$Q_k(x_i) = 0, i = 0, \ldots, k-1 \Rightarrow Q_k(x) = \gamma_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

$$Q_k(x_k) = \gamma_k \prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i) = L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} \left(y_k - \sum_{j=0}^{k-1} y_j \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_j - x_i} \right) = \frac{y_k}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} - \sum_{j=0}^{k-1} y_j \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} \frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1}(x_k - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1}(x_j - x_i)} =$$

$$\frac{y_k}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{y_j}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_j - x_i)} = [y_0, \ldots, y_k].$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона (для неравных промежутков)

$$L_n(x) = P_n(x) = y_0 + [y_0, y_1](x - x_0) + [y_0, y_1, y_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + [y_0, \ldots, y_n] \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i). \tag{28}$$

- На одной и той же сетке рассматривается множество функций $\Rightarrow$ полином Лагранжа.
- Задача рассматривается для одной и той же функции на разных сетках $\Rightarrow$ полином Ньютона.

Нужно увеличить степень интерполяционного полинома на единицу $\Rightarrow$ при использовании формулы Ньютона (28) достаточно добавить к $P_n(x)$ лишь одно слагаемое

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + [y_0, \dots, y_n, y_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{29}$$

- С точки зрения вычислительной устойчивости полином Лагранжа предпочтительней.

Остаточный член формулы Ньютона

Пусть $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ - узлы интерполяции, $x \neq x_i$ - точка, в которой производится оценка.
Добавим x к узлам интерполяции.
$P_{n+1}(x) = y$.
$P_{n+1}(x) = P_n(x) + [y_0, \dots, y_n, y] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

$$R_n(x) = y - P_n(x) = [y_0, \dots, y_n, y]\omega(x). \tag{30}$$

Интерполяционная формула Ньютона для равных промежутков

Пусть x^h - упорядоченная равномерная сетка. $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n, h > 0$.
$x = x_0 + th, t \in [0, n]$.
$x - x_i = h(t - i)$
$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} h(t-0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} h(t-0)h(t-1) + \dots$

Интерполяционная формула Ньютона для интерполирования вперед

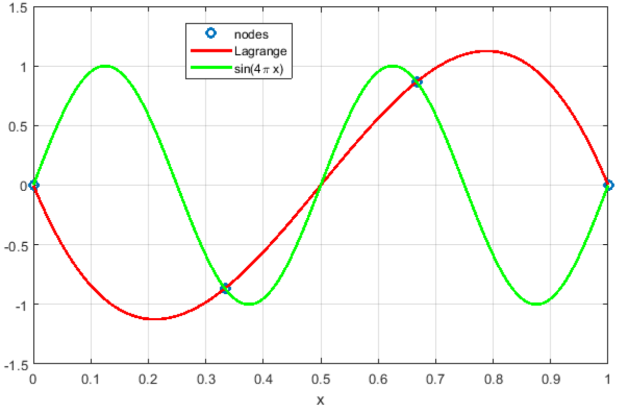
$$P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\dots(t-n+1). \quad (31)$$

Интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад

$$P_n(x_n + qh) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q+1)\dots(q+n-1), \quad (32)$$

где $q = (x - x_n)/h$.

Полином Лагранжа для функции $f(x) = \sin(4\pi x)$ на интервале $[0, 1]$ с 4 равноотстоящими узлами.



Интерполяция с кратными узлами. Полином Эрмита

$x_i \in x^h$ - кратный узел порядка p для сеточной функции y_h, если в этом узле заданы $(y_i, y_i', \ldots, y_i^{(p-1)})$.

Простейший случай - полином Эрмита, у которого все узлы кратности 2

$$\begin{cases} P_m(x_i) = y_i \\ P_m'(x_i) = y_i', i = 0, \ldots, n \end{cases} \tag{33}$$

Можно построить полином степени $m = 2n + 1$. Будем искать в виде

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} (y_j \phi_j(x) + y_j' \psi_j(x)), \tag{34}$$

где $\phi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ - полиномы степени не выше $2n + 1$.

Условия на $\phi_j(x)$ и $\psi_j(x)$

$$\begin{cases} \phi_j(x_i) = \delta_{ij} \\ \phi_j'(x_i) = 0, \forall i \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \psi_j(x_i) = 0, \forall i \\ \psi_j'(x_i) = \delta_{ij} \end{cases} \tag{35}$$

Каждый полином имеет n корней кратности 2 и один корень кратности 1.

$$\psi_j(x) = \gamma_j(x - x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i)^2$$

$$\psi_j'(x) = \gamma_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i)^2 + \gamma_j(x - x_j) \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i)^2 \right)_x'$$

$$\psi_j'(x_j) = \gamma_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)^2 = 1 \Rightarrow \gamma_j = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)^2} \Rightarrow \psi_j(x) = (x - x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2$$

$$\phi_j(x) = (\alpha_j x + \beta_j) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2$$
$$\phi_j(x_j) = 1 \Rightarrow \alpha_j x_j + \beta_j = 1$$

$$\phi_j'(x) = \alpha_j \prod + (\alpha_j x + \beta_j)(\prod)_x'$$
$$\phi_j'(x_j) = \alpha_j + (\prod)_{x=x_j}' = 0 \Rightarrow \alpha_j = -(\prod)_{x=x_j}'$$

$$\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2\right)_x' = \left(\frac{2(x-x_0)}{(x_j-x_0)^2} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j\\ i\neq 0}}^{n} \left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2 + \ldots + \frac{2(x-x_k)}{(x_j-x_k)^2} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j\\ i\neq k}}^{n} \left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$\alpha_j = -(\prod)_{x=x_j}' = -\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} \frac{2}{x_j-x_k}$$

$$\beta_j = 1 - \alpha_j x_j \Rightarrow \alpha_j x + \beta_j = \alpha_j x + (1 - \alpha_j x_j) = 1 + \alpha_j (x - x_j)$$

$$\phi_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j) \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}\right) \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)^2$$

Покажем единственность.
От противного. Пусть существуют $H_{2n+1}^{(1)}(x)$ и $H_{2n+1}^{(2)}(x)$.
$Q_{2n+1}(x) = H_{2n+1}^{(1)}(x) - H_{2n+1}^{(2)}(x)$ имеет $n + 1$ корень кратности 2 (в силу условий интерполяции).
Но $Q_{2n+1}(x)$ - полином степени не выше $2n + 1 \Rightarrow Q_{2n+1}(x) \equiv 0$.

Теорема

Если $f(x) \in C^{(2n+2)}([a,b])$, то справедлива формула для остаточного члена полинома Эрмита

$$R_{2n+2}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\omega^2(x), \tag{36}$$

где $\eta \in [a,b]$, $\omega(x)$ - корневой полином.

Замечания

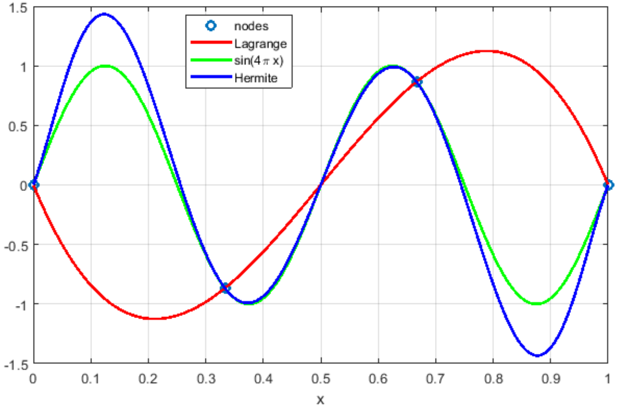
1. Техника построения интерполяционного полинома с узлами разной кратности аналогична, но необходимо учесть кратность узлов.
2. Если сетка имеет N узлов с учётом их кратности, то можно построить интерполяционный полином степени $N-1$ и

   $$R_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\eta)}{N!}\Omega(x), \tag{37}$$

   где $\Omega(x)$ - корневой полином с учётом кратности узлов.

Пример

Лагранжева и Эрмитова интерполяция для функции $f(x) = \sin(4\pi x)$ на интервале $[0, 1]$ с 4 равноотстоящими узлами.



О сходимости интерполяционного процесса

Всегда ли можно добиться повышения точности интерполяции путем увеличения числа узлов?

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, x_i^{(k)} \in [a, b].$$

Метод интерполяции сходится, если

$$\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{38}$$

О сходимости интерполяционного процесса

Существует ли единая для всех непрерывных на $[a, b]$ функций стратегия выбора узлов, гарантирующая сходимость?

Теорема Фабера

$\forall X\, \exists f \in C([a, b])\colon \max\limits_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$

Теорема

Пусть X - матрица с чебышевскими узлами. Тогда $\forall f \in C^{(1)}([a, b])$ $\max\limits_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Содержание

Interpolation

Objective

Given $n+1$ pairs (x_i, y_i), derive a simple function $\phi(x)$, that passes through all the points

$$\phi(x_i) = y_i, i = 0, \ldots, n. \tag{39}$$

- $\phi(x)$ is an algebraic polynomial $\Rightarrow$ *polynomial interpolation*
- $\phi(x)$ **is only locally a polynomial** $\Rightarrow$ ***spline interpolation***

Spline

Definition

Let $x_0, \ldots, x_n$ be $n+1$ distinct nodes of $[a,b]$, with $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
The function $S_k^\nu(x)$ on the interval $[a,b]$ is a *spline* of degree k relative to the nodes x_i if

$$S_k^\nu|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k, i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{40}$$

$$S_k^\nu \in C^{k-\nu}([a,b]). \tag{41}$$

$x_1, \ldots, x_{n-1}$ are *internal* nodes, ν is a defect of spline.

Remark

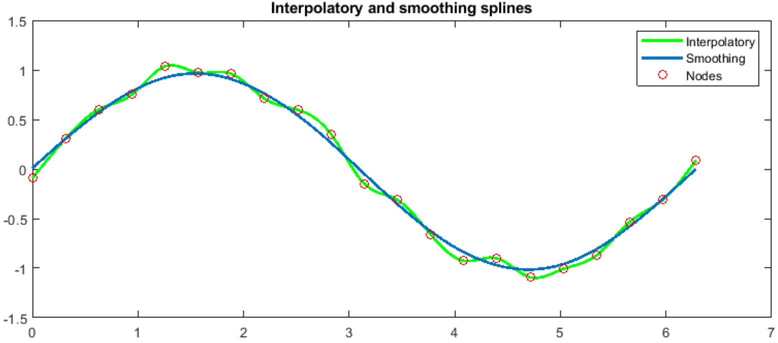
Discontinuity in the $k-\nu+1, \ldots, k$-th derivative is possible at the internal nodes. These nodes are called *active* nodes.

Interpolatory and Smoothing Splines

1. Interpolatory spline (csape in MATLAB):

$$S_k^{\nu}(x_i) = f(x_i), i = 0, \ldots, n$$

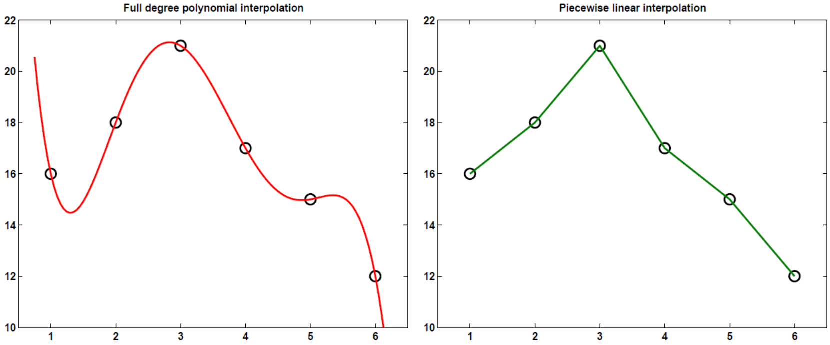
2. Smoothing spline (csaps in MATLAB).



Example

$S_1^1(x)$ is a piecewise linear interpolant

$$S_1^1(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} = P_1(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), i = 0, \ldots, n-1 \tag{42}$$



Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial

If function values $\{y_i\}$ and first derivative values $\{y_i'\}$ at a set of data points $\{x_i\}$ are known, then

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i, H_3(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ H_3'(x_i) = y_i', H_3'(x_{i+1}) = y_{i+1}' \end{cases}$$

Use (34) to define $H_3(x)$.

$S_3^2(x)$ is a piecewise cubic interpolant. $S_3^2(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} = H_3(x)$

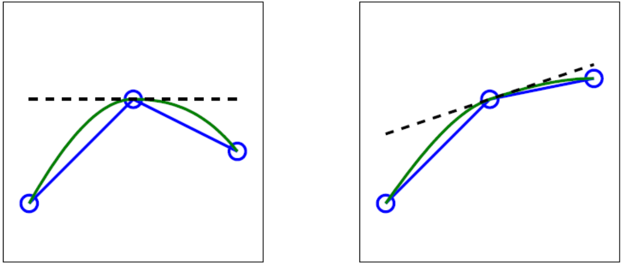
If derivative values are not given, we need to define slopes d_i somehow!

Shape-preserving piecewise cubic Hermite interpolation

Let δ_i denote the first divided difference $[y_i, y_{i+1}]$

- if δ_{i-1} and δ_i have opposite signs or if either of them is zero, then $d_i = 0$
- if δ_{i-1} and δ_i have the same sign and two intervals have the same length

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_{i-1}} + \frac{1}{\delta_i}\right) \tag{43}$$



Interpolatory Quadratic Spline

$S_2^1(x)$ is a piecewise quadratic interpolant and $S_2^1|_{[x_{i-1},x_i]} = g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$.

$$\begin{cases} g_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ g_i(x_i) = y_i \end{cases} i = 1, \dots, n \text{ and } g_i'(x_i) = g_{i+1}'(x_i), i = 1, \dots, n-1$$

$$\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \\ g_1(x_1) = y_1 \\ g_1'(x_0) = d_0 \end{cases} \Rightarrow a_1, b_1, c_1 \Rightarrow g_1'(x_1) \Rightarrow \begin{cases} g_2(x_1) = y_1 \\ g_2(x_2) = y_2 \\ g_2'(x_1) = g_1'(x_1) \end{cases} \Rightarrow a_2, b_2, c_2 \Rightarrow \dots \tag{44}$$

Not-a-knot spline

$$\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \\ g_1(x_1) = y_1 \\ g_1(x_2) = y_2 \end{cases} \Rightarrow a_1, b_1, c_1 \Rightarrow g_1'(x_2) \Rightarrow \begin{cases} g_3(x_2) = y_2 \\ g_3(x_3) = y_3 \\ g_3'(x_2) = g_1'(x_2) \end{cases} \Rightarrow a_3, b_3, c_3 \Rightarrow \dots \tag{45}$$

Interpolatory Cubic Spline

Let S_k^ν be an interpolatory spline.
$k = 3, \nu = 1 \Rightarrow S_3^1|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_3$ and $S_3^1 \in C^2([a,b])$.

Input: nodes $\{x_i\}_{i=0}^n$ and corresponding function values $\{y_i\}_{i=0}^n$.

$$S_3^1(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, & x \in [x_0, x_1] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, & x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \tag{46}$$

Goal: find $4n$ coefficients a_i, b_i, c_i and $d_i, i = 1, \dots, n$.

Interpolatory Cubic Spline

$g(x) := S_3^1(x)$, $g_i(x) := S_3^1(x)|_{[x_{i-1},x_i]}$

$g(x) \in C^2([a,b]) \Rightarrow$ for all internal nodes x_i, $i = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{cases} g_i(x_i) = g_{i+1}(x_i) & (47a) \\ g_i'(x_i) = g_{i+1}'(x_i) & (47b) \\ g_i''(x_i) = g_{i+1}''(x_i) & (47c) \end{cases}$$

$g(x)$ is an interpolatory spline $\Rightarrow$

$$g_1(x_0) = y_0 \text{ and } g_i(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, n \tag{48}$$

(47) and (48): $3(n-1) + n + 1 = 4n - 2$ conditions $\Rightarrow$ 2 conditions are lacking.

Interpolatory Cubic Spline

$M_i := g''(x_i), i = 0, \ldots, n$

$g_i(x) \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow g_i''(x) \in \mathbb{P}_1$ is a linear function.
$g_i''(x_{i-1}) = M_{i-1}$ and $g_i''(x_i) = M_i \Rightarrow$

$$g_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{49}$$

where $h_i = x_i - x_{i-1}$.
Integrate (49) twice:

$$g_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_i(x - x_{i-1}) + \widetilde{C}_i \tag{50}$$

Interpolatory Cubic Spline

Conditions (47a) and (48) $\Rightarrow$

1. $g_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + \widetilde{C}_i \Rightarrow$

$$\widetilde{C}_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \tag{51}$$

2. $g_i(x_i) = y_i = M_i\frac{h_i^2}{6} + C_i h_i + \widetilde{C}_i \Rightarrow$

$$C_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \tag{52}$$

Interpolatory Cubic Spline

Continuity of the first derivatives at the internal nodes (condition (47b)) $\Rightarrow$

$$\underbrace{M_i\frac{h_i}{2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_i-M_{i-1})}_{g_i'(x_i)}=\underbrace{-M_i\frac{h_{i+1}}{2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1}-M_i)}_{g_{i+1}'(x_i)} \quad (53)$$

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1}=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right),i=1,\dots,n-1 \quad (54)$$

$n+1$ unknowns: $M_0, M_1, \dots, M_n$
$n-1$ equations
$\Rightarrow$ 2 conditions are lacking

Interpolatory Cubic Spline. Two lacking conditions

- *natural spline*

$$g''(a) = g''(b) = 0 \Leftrightarrow M_0 = M_n = 0 \tag{55}$$

- *clamped spline*: specify the slope at the ends of the spline, e.g.

$$\begin{cases} g'(a) = f'(a) \\ g'(b) = f'(b) \end{cases} \tag{56}$$

- *not-a-knot spline*: enforce continuity of $g'''(x)$ at x_1 and x_{n-1}

$$\begin{cases} g_1'''(x_1) = g_2'''(x_1) \\ g_{n-1}'''(x_{n-1}) = g_n'''(x_{n-1}) \end{cases} \tag{57}$$

- $g''(a) = M_0 = f''(a), g''(b) = M_n = f''(b)$

Interpolatory Cubic Spline

Algorithm

1. solve linear system consisting of $n-1$ equations (54) + 2 conditions ((55) or (56) or (57)) with Thomas algorithm $\rightarrow \{M_i\}_{i=0}^{n}$.
2. find $\{\widetilde{C}_i\}_{i=0}^{n-1}$ and $\{C_i\}_{i=0}^{n-1}$ using (51) and (52) respectively.

Theorem

Let $f \in C^4([a,b])$ and S_3^1 be the cubic spline interpolating f. Then $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - S_3^1(x)| \leq Ch^4, \tag{58}$$

where $h = \max_i h_i$ and $C = \frac{5}{384} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Spline S_3^1 uniformly converges to f as h tends to zero.

Минимизирующее свойствао кубического интерполяционного естественного сплайна

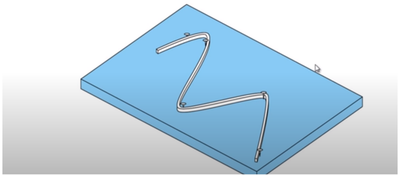
$$W_2^2([a,b]) \subset C^{(2)}([a,b]), \forall u \in W_2^2([a,b]) \; \exists \pi(u) = \int\limits_a^b (u''(x))^2 dx < \infty$$

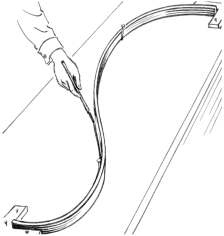
Minimum energy principle

$\forall u \in W_2^2([a,b]) : u(x_i) = y_i$ естественный кубический интерполяционный сплайн g является единственной функцией, сообщающей минимум функционалу π, т.е.

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx \leq \int_a^b (u''(x))^2 dx. \tag{59}$$

The concept of spline is using a thin , flexible strip (called a spline) to draw smooth curves through a set of points.





Минимизирующее свойство кубического интерполяционного естественного сплайна

$$\pi(u-g)=\int\limits_a^b(u''-g'')^2dx=\int\limits_a^b(u'')^2dx+\int\limits_a^b(g'')^2dx-2\int\limits_a^b u''g''dx\pm\int\limits_a^b(g'')^2dx=$$
$$\pi(u)-\pi(g)+2\int\limits_a^b g''(g''-u'')dx$$

$$\int\limits_a^b g''(g''-u'')dx=g''(g'-u')|_a^b-\int\limits_a^b g^{(3)}(g'-u')dx=\sum_{i=1}^n\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}g_i^{(3)}(u'-g_i')dx=$$
$$\sum_{i=1}^n 6a_i(u-g_i)|_{x_{i-1}}^{x_i}=0$$

$$\pi(u-g)=\pi(u)-\pi(g)\Rightarrow\pi(g)=\pi(u)-\pi(u-g)\leq\pi(u)$$

Минимизирующее свойство кубического интерполяционного естественного сплайна

Покажем единственность (от противного).

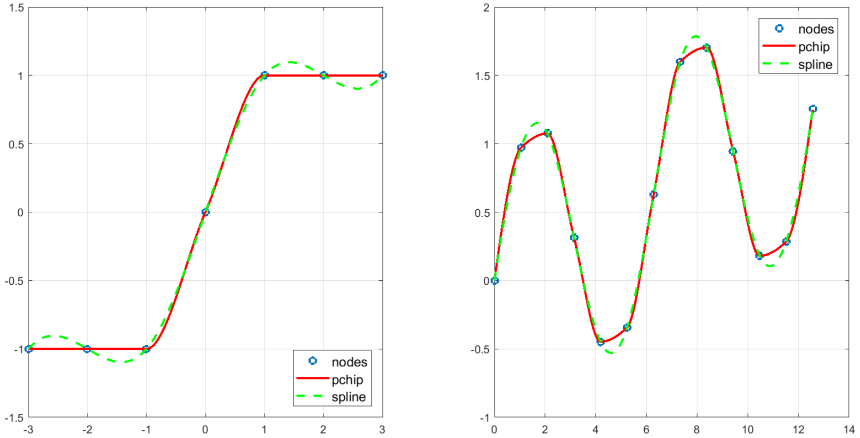
$\pi(u) = \pi(g) \Rightarrow \pi(u-g) = 0$

$\pi(u-g) = \int\limits_a^b (u'' - g'')^2 dx \Rightarrow u'' - g'' = 0$

$u(x) = g(x) + c_1 x + c_2$

$u(x_i) = g(x_i) = y_i, i = 0, \ldots, n, n \geq 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$

Piecewise Cubic Hermite Interpolation and Cubic Spline



Exercise

Make a plot of your hand. Start with

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

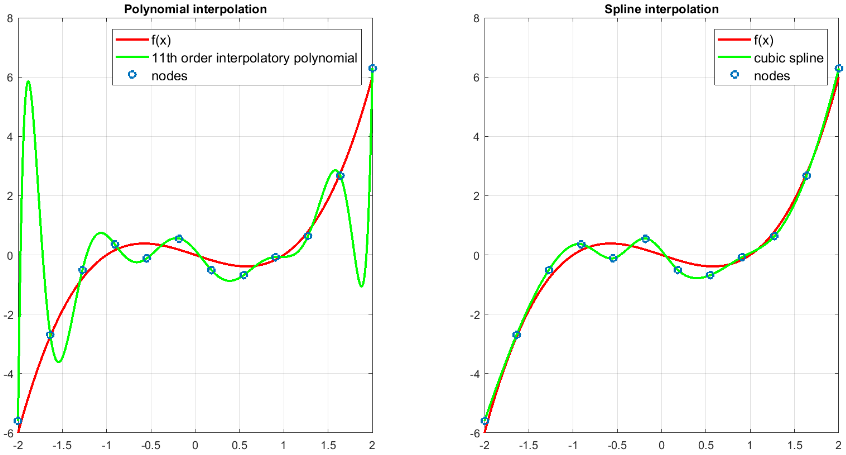
Place your hand on the computer screen. Use the mouse to select a few dozen points outlining your hand. Terminate the ginput with a carriage return. Now think of x and y as two functions of an independent variable s that goes from one to the number of points you collected. You can interpolate both functions on a finer grid t

```
n = length(x);
s = (1:n)';
t = (1:.05:n)';
```

Use spline and pchip functions. Plot the results. Which do you prefer?

Содержание

Polynomial Interpolation and Spline Interpolation



Errors in data $\Rightarrow$ interpolation is a bad choice.

Least squares Method. Problem Statement

Let $n+1$ data points $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ are given. Find a function $\phi(x)$

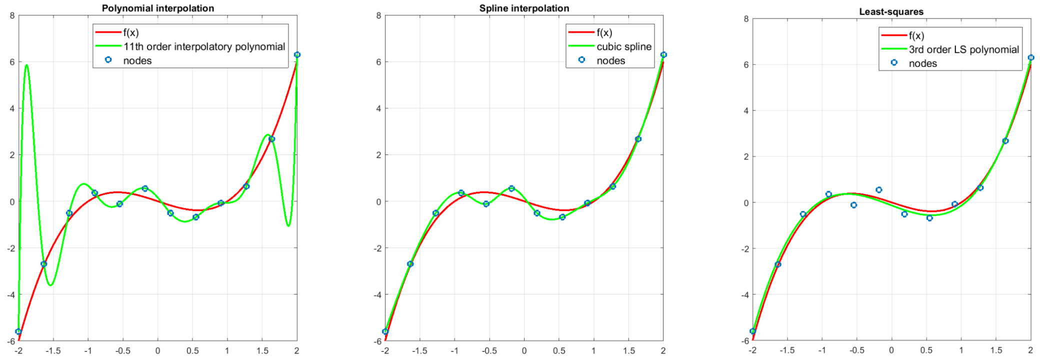
$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x), \tag{60}$$

which minimizes the weighted sum of squared residuals

$$S(\phi) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i (\phi(x_i) - y_i)^2 \xrightarrow[\{a_j\}]{} \min . \tag{61}$$

$S(\phi) = S(a_0, \dots, a_m)$ is the objective function, or the error functional.
$\{\rho_i\}$ are weights, $\rho_i > 0, \forall i = 0, \dots, n$.

Interpolation versus Least Squares



$$S(a_0,\ldots,a_m)=\sum_{i=0}^{n}\rho_i\left(\phi(x_i)-y_i\right)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_k}=0, k=0,\ldots,m & (62)\\ \left\{\dfrac{\partial^2 S}{\partial a_k \partial a_l}\right\}_{k,l}>0, k,l=0,\ldots,m & (63)\end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{n}\rho_i(\phi(x_i)-y_i)\frac{\partial\phi(x_i)}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{n}\rho_i\phi(x_i)\phi_k(x_i)-2\sum_{i=0}^{n}\rho_i y_i\phi_k(x_i)$$

$$\phi(x_i)=\sum_{j=0}^{m}a_j\phi_j(x_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}=2\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=0}^{n}\rho_i\phi_j(x_i)\phi_k(x_i)-2\sum_{i=0}^{n}\rho_i y_i\phi_k(x_i)$$

$\{\phi_j(x_i)\}_{i=0}^{n} = \phi_j^h \in \mathbb{R}^{n+1}$

Dot product with positive weights

$$(y^h, z^h) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i y_i z_i. \tag{64}$$

$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{m} a_j(\phi_j^h, \phi_k^h) - 2(y^h, \phi_k^h)$

System of linear equations with unknowns $a_0, \ldots, a_m$

$$\sum_{j=0}^{m} (\phi_j^h, \phi_k^h) a_j = (y^h, \phi_k^h), k = 0, \ldots, m \tag{65}$$

$\frac{\partial^2 S}{\partial a_k \partial a_l} = 2(\phi_l^h, \phi_k^h)$

$$G = \begin{pmatrix} (\phi_0^h, \phi_0^h) & (\phi_1^h, \phi_0^h) & \dots & (\phi_m^h, \phi_0^h) \\ (\phi_0^h, \phi_1^h) & (\phi_1^h, \phi_1^h) & \dots & (\phi_m^h, \phi_1^h) \\ \dots & \dots & \dots & \\ (\phi_0^h, \phi_m^h) & (\phi_1^h, \phi_m^h) & \dots & (\phi_m^h, \phi_m^h) \end{pmatrix}$$ is the Gram matrix.

- $\det(G) \neq 0 \Leftrightarrow \phi_0^h, \phi_1^h, \dots, \phi_m^h$ are linearly independent.
- $G > 0 \Leftrightarrow \phi_0^h, \phi_1^h, \dots, \phi_m^h$ are linearly independent.

$\phi_0^h, \phi_1^h, \dots, \phi_m^h$ are linearly independent $\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{m} c_j \phi_j^h = 0 \Rightarrow c_j = 0.$

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \phi_j^h = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{m} c_j \phi_j(x_i) = 0, \forall i = 0, \dots, n \Leftrightarrow Q_m(x_i) = 0, \forall i = 0, \dots, n, \qquad (66)$$

where $Q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j \phi_j(x)$.

Множество функций $\phi_j(x)$ будет линейно независимым на сетке x^h, если не существует обобщённого полинома отличного от 0, такого, что все узлы сетки являются его корнями.

$\phi_j(x) = x^j, j = 0, \dots, m$
$Q_m(x_i) = 0, i = 0, \dots, n$
Если $m < n + 1$, то сеточные функции всегда линейно независимы.

$$(\phi_j^h, \phi_k^h) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i x_i^j x_i^k = \sum_{i=0}^{n} \rho_i x_i^{j+k}$$
$$(y^h, \phi_k^h) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i y_i x_i^k$$

Матрица СЛАУ становится плохо обусловленной (приближается к матрице Гильберта) при $n \to \infty$. Можно использовать многочлены Чебышева.

Polynomial Least Squares. Second-order polynomial

Let $\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ is a second-order polynomial and $\rho_i = 1$.

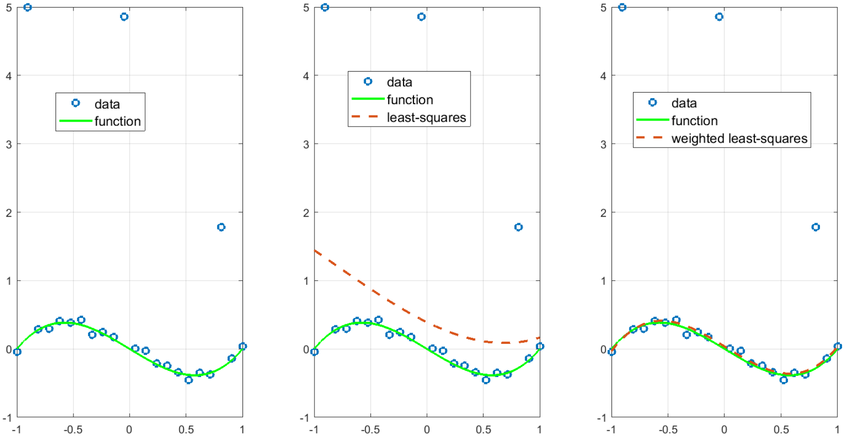
System of linear equations with respect to unknown coefficients a_0, a_1, a_2:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right) \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i\right) \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right) a_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i\right) \end{cases}$$

Выбор весовых коэффициентов

$\tilde{y}_i = y_i + \epsilon_i$ - известно значение с погрешностью.

Если известно ϵ_i, то $\rho_i = \frac{1}{\epsilon_i^2 + \epsilon}$, $\epsilon > 0$

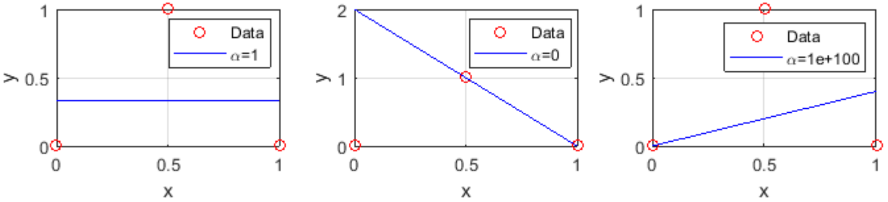


Пример

$$y(x) = \sin(\pi x)$$
$$x^h = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}, y^h = \{0, 1, 0\}, \rho_0 = \alpha, \rho_1 = \rho_2 = 1$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = a_0(\alpha) + a_1(\alpha)x = \frac{2}{1+5\alpha} + \frac{2}{1+5\alpha}(\alpha - 1)x$$

1. $\alpha = 1$ - все точки равноправны
2. $\alpha = 0$ - не учитывается первая точка
3. $\alpha = \infty$ - учитывается только первая точка



Содержание

Сглаживающий кубический сплайн (smoothing cubic spline)

Комбинация сплайнов и МНК:

$$J(u) = (1-p)\underbrace{\int\limits_a^b (u''(x))^2 dx}_{\text{сглаживание}} + p\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \rho_i (u(x_i) - y_i)^2}_{\text{приближение к данным}} \to \min, \tag{67}$$

где $u \in W_2^2([a,b])$, $\rho_i \geq 0$, $p \in [0,1]$.

Компромисс между двумя требованиями:

- приближение к заданным значениям
- получение гладкой функции.

Выбор p - какая из целей наиболее важна.

Утверждение

Пусть $u_\star(x)$ сообщает минимум (67). Тогда $u_\star(x)$ - естественный кубический сплайн, но не обязательно интерполяционный.

Доказательство

$J(u) = \pi(u) + S(u)$

$u_\star^h = \mu^h = \{\mu_i\}_{i=0}^n$
По x^h, μ^h построим интерполяционный естественный сплайн $g(x)$.
$g(x_i) = \mu_i = u_\star(x_i) \Rightarrow$

$$\pi(g) \leq \pi(u_\star). \tag{68}$$

$J(u_\star) \leq J(g)$ и $S(u_\star) = S(g) \Rightarrow$

$$\pi(u_\star) \leq \pi(g). \tag{69}$$

(68), (69) $\Rightarrow g(x) = u_\star(x)$.

(54) $\Leftrightarrow$

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}M_i+\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=\frac{1}{h_i}y_{i-1}-\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)y_i+\frac{1}{h_{i+1}}y_{i+1}, i=1,\dots,n-1 \tag{70}$$

Пусть $m=[M_1,\dots,M_{n-1}]^\top$, $\mu^h=[y_0,\dots,y_n]^\top$. Тогда (70) $\Leftrightarrow Am=H\mu^h$.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & & & \\ & \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \frac{h_{n-1}}{6} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}}+\frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

$[x_{i-1}, x_i]$: $g''(x) = g_i''(x) = M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}(x - x_{i-1})$

$$\int\limits_a^b (g''(x))^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g_i''(x))^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}(x - x_{i-1})\right)^2 dx =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} \left(M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}(x - x_{i-1})\right)^3 \frac{h_i}{M_i - M_{i-1}} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{3} \frac{1}{M_i - M_{i-1}} \left(M_i^3 - M_{i-1}^3\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{3} \left(M_{i-1}^2 + M_{i-1}M_i + M_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{3} \left(M_{i-1}^2 + \frac{1}{2}M_{i-1}M_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{3} \left(\frac{1}{2}M_{i-1}M_i + M_i^2\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_{i+1}}{3} M_i \left(M_i + \frac{1}{2}M_{i+1}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{3} M_i \left(\frac{1}{2}M_{i-1} + M_i\right) =$$

$$0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{h_{i+1}}{3} M_i \left(M_i + \frac{1}{2}M_{i+1}\right) + \frac{h_i}{3} M_i \left(\frac{1}{2}M_{i-1} + M_i\right)\right] + 0 =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_i \left[\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3}\right) M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1}\right] = (Am, m)$$

$J(u) = (Am, m) + \sum_{i=0}^{n} \rho_i(\mu_i - y_i)^2 \to \min$
$J(u) = Q(\mu_0, \dots, \mu_n) \to \min$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J(u)}{\partial \mu_k} = 0, k = 0, \dots, n & (71) \\ \left\{ \dfrac{\partial^2 J(u)}{\partial \mu_k \partial \mu_l} \right\}_{k,l} > 0, k, l = 0, \dots, n & (72) \end{cases}$$

$\frac{\partial J(u)}{\partial \mu_k} = \frac{\partial}{\partial \mu_k}(Am, m) + 2\rho_k(\mu_k - y_k)$

$\frac{\partial}{\partial \mu_k}(Am, m) = \left(\frac{\partial(Am)}{\partial \mu_k}, m\right) + \left(Am, \frac{\partial m}{\partial \mu_k}\right) = 2\left(\frac{\partial(Am)}{\partial \mu_k}, m\right) = 2\left(\frac{\partial(H\mu_h)}{\partial \mu_k}, m\right) =$
$2\left(\frac{\partial \mu_h}{\partial \mu_k}, H^\top m\right) = 2(H^\top m)_k$ - k-я компонента.

$$(H^\top m)_k + \rho_k(\mu_k - y_k) = 0, k = 0, \dots, n \qquad (73)$$

Пусть $P = diag\{\rho_i\} \Rightarrow \exists P^{-1} = diag\{\rho_i^{-1}\}$.
(73) в матричной форме:

$$H^\top m + P\mu^h = Py^h \Leftrightarrow P^{-1}H^\top m + \mu^h = y^h \Leftrightarrow HP^{-1}H^\top m + \underbrace{H\mu^h}_{Am} = Hy^h \tag{74}$$

$$(HP^{-1}H^\top + A)m = Hy^h \tag{75}$$

Матрица СЛАУ (75) симметричная и положительно определенная $\Rightarrow \exists!$ решение.

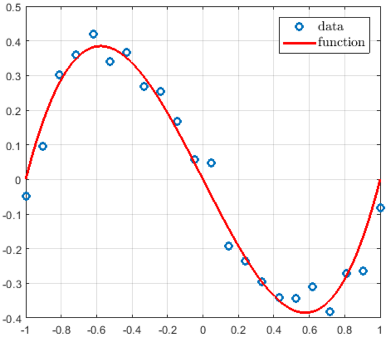
$\mu^h = y^h - P^{-1}H^\top m$.
Выполнение условия (72) проверить самотстоятельно!

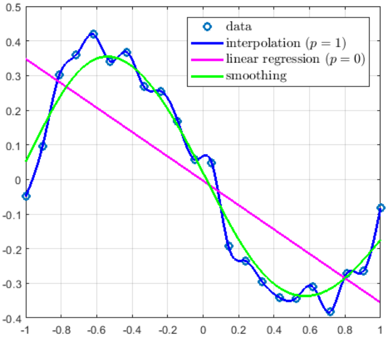
Замечания

1. Матрица СЛАУ (75) пятидиагональная.
2. Нет свободы выбора граничных условий.

Smoothing Cubic Spline

$p = 0$: smoothing spline $\to$ the least-squares straight line fit to the data.
$p = 1$: natural cubic spline.





MATLAB

1. interp1 - 1-D data interpolation
2. pchip - piecewise cubic hermite interpolating polynomial
3. csape - cubic spline interpolation with end conditions
4. csapi - cubic spline interpolation with not-a-knot end conditions
5. spline - cubic spline data interpolation
6. csaps - cubic smoothing spline
7. polyfit - polynomial curve fitting
8. fit - curve fitting

Упражнения

1. Построить интерполяционный полином Лагранжа.
   $x^h = \{0, 2, 3, 5\}, y^h = \{1, 3, 2, 5\}$.
2. С какой точностью можно вычислить $\sin(\frac{\pi}{12})$ по формуле Лагранжа, если известны значения $\sin(0)$, $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\sin(\frac{\pi}{4})$ и $\sin(\frac{\pi}{3})$?
3. $x^h = \{1, 1.1, 1.4\}, y^h = \{1.3, 1.0, 0.1\}$. Построить интерполяционный полином Ньютона и вычислить его значение в точке $x = 1.3$.
4. Доказать, что (64) удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения, если все $\rho_i > 0$.
5. Построить МНК-модель $\phi(x) = a\exp(x) + b\exp(-x)$ для заданной табличной функции

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	1.194	0.43	0.103	0.322	1.034