Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа № 7
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Методы решения краевых задач”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной лабораторной работе было проведено исследование метода конечных разностей для решения краевой задачи.

В качестве результатов работы представлены зависимости абсолютной погрешности решения краевой задачи от шага интегрирования

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x)$$

Решением данного уравнения является семейство интегральных кривых, то есть функция следующего вида:

$$y = y(c_1, c_2, x)$$

Краевая задача состоит в том, чтобы выделить такие значения c_1, c_2, чтобы функция y удовлетворяла заданным граничным условиям:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B$$

И при этом $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$ и $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$

Решая данную задачу численно, в качестве решения мы получим табличную функцию.

В данной лабораторной работе был использован метод конечных разностей

Для начала рассмотрим вид начальных условий, где $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, то есть:

$$y(a) = A$$

$$y(b) = B$$

Введем равномерную сетку на $[a, b]$: $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$

Распишем ОДУ в узлах сетки:

$$p_k y''_k + q_k y'_k + r_k y_k = f_k$$

Аппроксимируем производные через конечно-разностные выражения, чтобы исключить производные первого и второго порядка из уравнения и выразить их через значения функций. Так мы получим вместо дифференциального уравнения - СЛАУ относительно значений функций на заданной нами сетке.

Для этого разложим $y(x + h)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)$$

И $y(x - h)$:

$$y(x - h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)$$

Отсюда выразим $y'(x)$ и $y''(x)$ и получим центральные разности:

$$y'(x) = \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Сделаем замену:

$$y(x) = y_k$$

$$y(x + h) = y_{k+1}$$

$$y(x - h) = y_{k-1}$$

и подставим в ОДУ. Сгруппировав по y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, получим:

$$(p_k - \frac{q_k}{2}h)y_{k-1} + (h^2 r_k - 2p_k)y_k + (p_k + \frac{q_k}{2}h)y_{k+1} = h^2 f_k,\ k = 1, 2,..., n - 1$$

Вместе с граничными условиями, получим трехдиагональную СЛАУ из n+1 уравнений

$$y_0 = A$$

$$(p_k - \frac{q_k}{2}h)y_{k-1} + (h^2 r_k - 2p_k)y_k + (p_k + \frac{q_k}{2}h)y_{k+1} = h^2 f_k,\ k = 1, 2,..., n - 1$$

$$y_n = B$$

Если же $\alpha_1 \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$, то, если мы требуем второго порядка точности у метода конечных разностей, возникает следующая проблема : первая производная аппроксимируется через узлы, находящиеся не на промежутке, на котором мы решаем краевую задачу:

$$y'(a) = \frac{y(a+h) - y(a-h)}{2h}$$

$$y'(b) = \frac{y(b+h) - y(b-h)}{2h}$$

Тогда мы не сможем просто подставить заданные нам граничные условия в первую и последнюю строку СЛАУ.

Решается это путем подбора другого выражения для $y(x)$ - односторонние конечные разности. Разложим в ряд Тейлора функции $y(x + h)$ и $y(x + 2h)$ в окрестности x:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3)$$

$$y(x + 2h) = y(x) + 2hy'(x) + 2h^2y''(x) + O(h^3)$$

Далее выражаем $y'(x)$ следующим образом:

$$4y(x + h) - y(x + 2h) = 3y(x) + 2hy'(x) + O(h^3)$$

$$y'(x) = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} + O(h^2)$$

Подставляем $x = a$ и заменяем

$$y(a) = y_0$$

$$y(a + h) = y_1$$

$$y(a + 2h) = y_2$$

Отбросив остаток, получаем:

$$y'_0 = \frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}$$

Но возникает новая проблема: подставив это выражение в граничное условие, получившаяся СЛАУ не будет трехдиагональной, так как для нее требуется, чтобы в первой и последней строке было только лишь два ненулевых элемента (крайние слева и крайние справа соответственно).

Для того, чтобы привести получившуюся СЛАУ к трехдиагональному виду, из первой строчки y_2 исключается с помощью выражения из второй строки в СЛАУ:

$$a_1y_0 + b_1y_1 + c_1y_2 = d_1$$

$$y_2 = \frac{d_1-a_1y_0-b_1y_1}{c_1}$$

Но, если c_1 равен нулю, то мы можем просто поменять местами две первые строки, не прибегая к исключению

Подставив в граничные условия, получим первую строку СЛАУ с двумя единственными ненулевыми коэффициентами:

$$\alpha_0y_0 + \alpha_1\frac{-3y_0+4y_1-\frac{d_1-a_1y_0-b_1y_1}{c_1}}{2h} = A$$

Аналогично проделываем и с правой границей:

$$y(x - h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3)$$

$$y(x - 2h) = y(x) - 2hy'(x) + 2h^2y''(x) + O(h^3)$$

$$4y(x-h) - y(x-2h) = 3y(x) - 2hy'(x) + O(h^3)$$

$$y'(x) = \frac{3y(x)-4y(x-h)+y(x-2h)}{2h} + O(h^2)$$

$$y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}$$

$$a_{n-1}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} + c_{n-1}y_n = d_{n-1}$$

$$y_{n-2} = \frac{d_{n-1} - b_{n-1}y_{n-1} - c_{n-1}y_n}{a_{n-1}}$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + \frac{d_{n-1} - b_{n-1}y_{n-1} - c_{n-1}y_n}{a_{n-1}}}{2h} = B$$

Аналогично, если $a_{n-1} = 0$, то последнюю и предпоследнюю строку можно поменять местами, не прибегая к исключению.

Окончательно, матрица СЛАУ имеет вид (при $c_1 \neq 0,\ a_{n-1} \neq 0$):

$$(\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} + \frac{a_1\alpha_1}{2hc_1})y_0 + (\frac{2\alpha_1}{h} + \frac{\alpha_1 b_1}{2hc_1})y_1 = A + \frac{\alpha_1 d_1}{2hc_1}$$

$$(p_k - \frac{q_k}{2}h)y_{k-1} + (h^2 r_k - 2p_k)y_k + (p_k + \frac{q_k}{2}h)y_{k+1} = h^2 f_k,\ k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(-\frac{2\beta_1}{h} - \frac{b_{n-1}\beta_1}{2ha_{n-1}})y_{n-1} + (\beta_0 + \frac{3\beta_1}{2h} - \frac{\beta_1 c_{n-1}}{2ha_{n-1}})y_n = B - \frac{\beta_1 d_{n-1}}{2ha_{n-1}}$$

Данная СЛАУ является трехдиагональной и решается методом прогонки

Но на практике обычно поступают следующим образом: после подстановки односторонних разностей в граничные условия получим выражения следующего вида:

$$a_0 y_0 + b_0 y_1 + c_0 y_2 = A$$

$$a_n y_{n-2} + b_n y_{n-1} + c_n y_n = B$$

Из строки, составленной из левого граничного условия, вычтем вторую строку СЛАУ, умноженную на $\frac{c_0}{c_1}$, из строки, составленной из правого граничного условия, вычтем $(n - 1)$-ю строку СЛАУ, умноженную на $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Тогда мы получим следующую СЛАУ (при $a_{n-1} \neq 0,\ c_1 \neq 0$):

$$(a_0 - \frac{a_1 c_0}{c_1})y_0 + (b_0 - \frac{b_1 c_0}{c_1})y_1 = A - \frac{d_1 c_0}{c_1}$$

$$(p_k - \frac{q_k}{2}h)y_{k-1} + (h^2 r_k - 2p_k)y_k + (p_k + \frac{q_k}{2}h)y_{k+1} = h^2 f_k,\ k = 1, 2, ..., n - 1$$

$$(b_n - \frac{b_{n-1} a_n}{a_{n-1}})y_{n-1} + (c_n - \frac{c_{n-1} a_n}{a_{n-1}})y_n = B - \frac{d_{n-1} a_n}{a_{n-1}}$$

При $c_1 = 0$ и $a_{n-1} = 0$ можно просто поменять местами две соответствующие строки (первую со второй, или предпоследнюю с последней соответственно)

Данная СЛАУ также является трехдиагональной и решается методом прогонки

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе была исследована зависимость погрешности численного решения краевой задачи от шага интегрирования. Исследования проводились на примере следующей краевой задачи, При этом промежуток выбран следующий: $[0,\ 4]$:

$$(2x + 1)y'' + (2x - 1)y' - 2y = x(x + 1)$$

$$y(0) + 2y'(0) = 1$$

$$y(4) + 2y'(4) = 1$$

Аналитическим решением данного уравнения является функция[1]:

$$y(x) = c_1(2x + 1) + c_2 e^{-x} + \frac{x^2+1}{2}$$

Подставим граничные условия, тогда, решив систему, получим:

$$c_1 = -\frac{e^{-4}+31}{22-6e^{-4}}$$

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 176 с. — С. 67, задача 703.

$$c_2 = 3c_1 - \frac{1}{2}$$

Точное аналитическое решение нашей краевой задачи:

$$y^*(x) = -\frac{e^{-4}+33}{22-6e^{-4}}(2x + 1) - (3\frac{e^{-4}+33}{22-6e^{-4}} + \frac{1}{2})e^{-x} + \frac{x^2+1}{2}$$

Погрешность решения вычислялась как максимальное абсолютное отклонение табличной функции, полученной в результате работы метода от нашего аналитического решения во всех вычисленных значениях табличной функции, то есть:

$$\delta = max_{j=1,2,...,n-1}\{|y^*(x_j) - y(x_j)|\}$$

Где $x_j = jh$ (h - шаг интегрирования, $h = \frac{4-0}{n}$)

В проводимом исследовании шаг интегрирования уменьшался от 2^2 до 2^{-20} с шагом уменьшения в 2 раза (параметр n, используемый в формулах выше, увеличивался в 2 раза).

Результаты исследования показаны на рисунке 1:

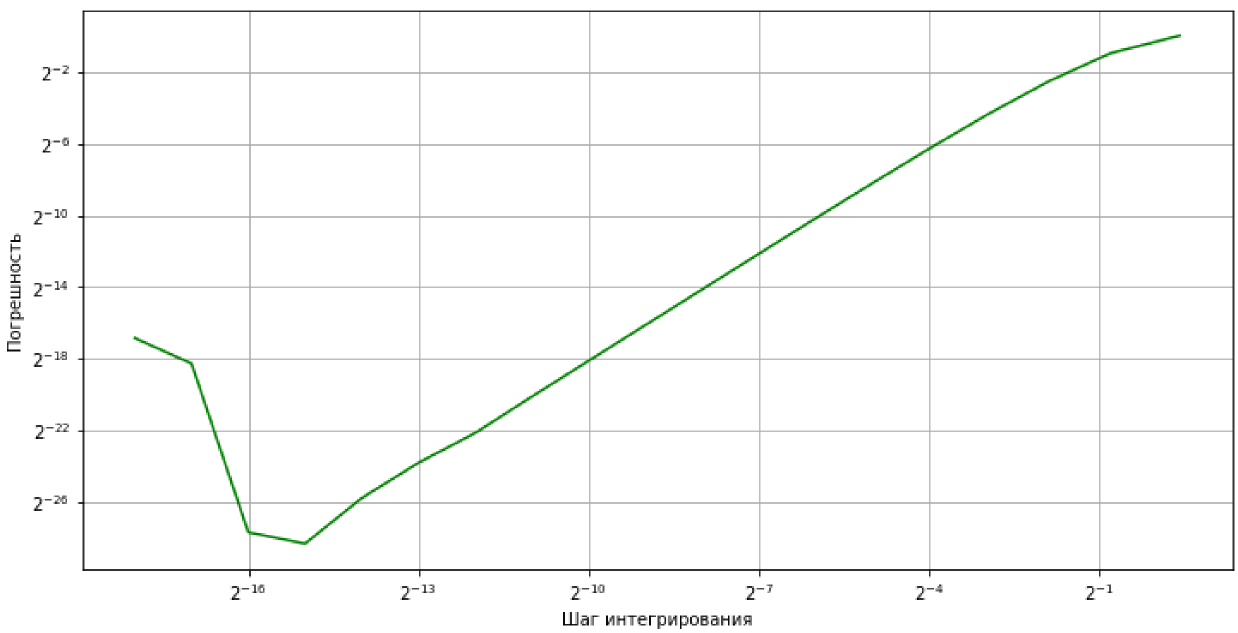

Рис. 1 Зависимость погрешности решения краевой задачи от шага интегрирования

На данном рисунке видно, что при уменьшении шага интегрирования в 2^6 раза погрешность интегрирования уменьшается в 2^{12} раза, то есть порядок точности метода равен 2, при шаге интегрирования менее 2^{-15} достигается предел машинной точности

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован метод конечных разностей 2-го порядка для численного решения краевой задачи. Можно сделать следующие выводы:

- При уменьшении шага интегрирования в 2 раза погрешность решения в исследуемом методе уменьшается в 2^2 раз
- При шаге интегрирования менее 2^{-15} достигается предел машинной точности