Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа № 5
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Методы Рунге-Кутты численного решения задачи Коши”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной лабораторной работе было проведено исследование метода Рунге-Кутты 4-го порядка для численного решения задачи Коши.

В качестве результатов работы представлены графики зависимости абсолютной погрешности решения задачи Коши от шага интегрирования

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'(x) = f(x, y)$$

Решением данного уравнения является семейство интегральных кривых, то есть функция следующего вида:

$$y = y(c, x)$$

Задача Коши состоит в том, чтобы выделить такое значение c, чтобы функция y удовлетворяла наперёд заданному начальному условию:

$$y(x_0) = y_0$$

Решая данную задачу численно, в качестве решения мы получим табличную функцию. Будем считать, что данная функция задана на равномерной сетке, хотя в общем случае это может быть и не так.

Идея методов Рунге-Кутты заключается в поиске очередного значения функции y в следующем виде:

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x + \delta x_i, y + \delta y_i) = y_k + h\sum_{i=1}^{l} \rho_i K_i$$

Где $h = x_{k+1} - x_k$

При этом параметр l (стадийность, то есть количество вычислений функций для нахождения очередного значения y) мы выбираем сами, а исходя из этого выбора и необходимого порядка метода, мы вычисляем значения коэффициентов ρ_i, а также шаги от предыдущей точки δx_i, δy_i.

Метод вычисления этих значений можно описать так: представим δx_i и δy_i следующим образом:

$$\delta x_i = \alpha_i h$$

$$\delta y_i = h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} K_j$$

Разложим $y(x + h)$ в окрестности точки до некоторого порядка s:

$$y(x + h) = y(x) + \sum_{i=1}^{s} \frac{h^i}{i!} y^{(i)}(x) + O(h^{s+1}) = y(x) + \Delta_s y(x) + O(h^{s+1})$$

Воспользуемся равномерностью сетки ($x = x_k$, $x + h = x_{k+1}$), тогда:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta_s y + O(h^{s+1}) = y_k + h \sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x + \alpha_i h,\ y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} K_j)$$

Значения ρ_i, α_i, $\beta_{i,j}$ выбираются из условия:

$$\Delta_s y - h \sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x + \alpha_i h,\ y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} K_j) = O(h^{s+1})$$

Для метода Рунге-Кутты четвертого порядка выберем параметр $l = 4$, при этом коэффициенты получаются следующие:

$$K_1 = f(x_k, y_k)$$

$$K_2 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} K_1)$$

$$K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_2)$$

$$K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3)$$

$$\rho_1 = \rho_4 = \frac{1}{6}$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \frac{2}{6}$$

Тогда итоговое выражение для y_{k+1}получается следующим:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Стоит отметить, что шаговость не обязательно брать равной 4, так как порядок точности метода зависит от порядка, до которого мы раскладываем $y(x + h)$ в ряд тейлора, однако l должен быть не ниже необходимого порядка точности.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе была исследована зависимость погрешности численного решения задачи Коши от шага интегрирования. Исследования проводились на следующей задаче:

$$y' = 2x - 3 + y$$

$$y(0) = 0$$

При этом промежуток выбран следующий: $[0,\ 6]$

Общим решением данного уравнения является[1]:

$$y = 1 - 2x + Ce^x$$

Подставим $y(0) = 0$, тогда получим:

$$0 = 1 - 0 + \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C} = -1$$

Окончательное аналитическое решение нашей задачи Коши:

$$y^*(x) = 1 - 2x - e^x$$

Погрешность решения вычислялась как максимальное абсолютное отклонение табличной функции, полученной в результате работы метода от нашего аналитического решения, то есть:

$$\delta = max_{j = 1,2,\dots,n}\{|y^*(x_j) - y(x_j)|\}$$

Где $x_j = jh$ (h - шаг интегрирования, $h = \frac{6-0}{n}$)

На каждой итерации в проводимом исследовании шаг интегрирования уменьшался от 2^2 до 2^{-18} в 2 раза (параметр n, используемый в формулах выше, увеличивался в 2 раза).

Результаты исследования показаны на рисунке 1:

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 176 с. — С. 11, задача 63.

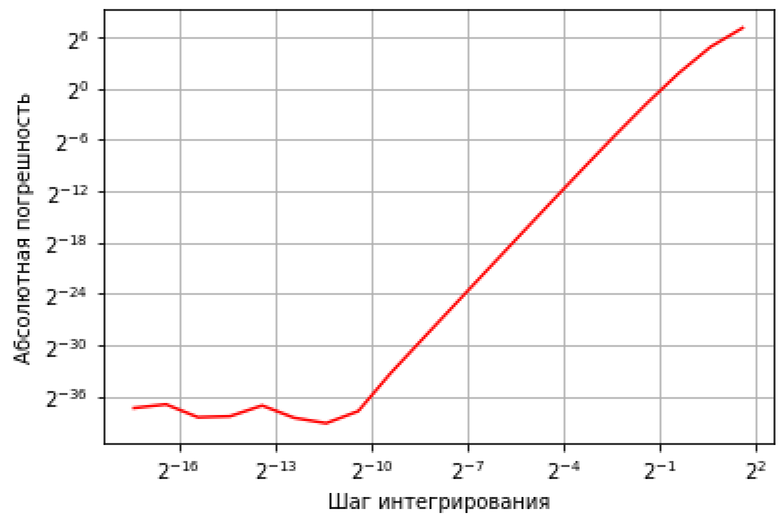

Рис. 1 Зависимость погрешности решения задачи Коши от шага интегрирования

На данном рисунке видно, что при уменьшении шага интегрирования в 2 раза погрешность уменьшается в 2^4 раз, то есть в соответствии с порядком точности 4 при увеличении шага интегрирования, при шаге интегрирования менее 2^{-10} достигается предел машинной точности

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован метод Рунге-Кутты 4 порядка для численного решения задачи Коши. Можно сделать следующие выводы:

- При увеличении шага интегрирования в 2 раза погрешность решения в исследуемом методе увеличивается в 2^4 раз
- При шаге интегрирования менее 2^{-10} достигается предел машинной точности