Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа № 3
по дисциплине "Численные методы"
На тему: "Квадратурные формулы численного интегрирования”

Выполнил студент гр.5030102/30002 Воронцов А.А.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург
2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной лабораторной работе было проведено исследование численного интегрирования функции с помощью метода средних прямоугольников. Оно было проведено для двух функций: с непрерывной производной и с разрывом производной в одной из точек

В качестве результатов работы представлены графики зависимости абсолютной погрешности вычисления интеграла от количества разбиений интервала интегрирования

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть дана некоторая функция $F(x)$, $x \in [a, b]$. Задача численного интегрирования состоит в том, чтобы приближенно найти значение следующего интеграла:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

Где $\rho(x)$ $-$ некоторая весовая функция, за счёт которой можно выделить интегрируемые особенности функции $F(x)$ (например, разрыв). Задача численного интегрирования в данной лабораторной работе решалась путем использования метода средних прямоугольников, формула для которой является частным случаем формулы Ньютона-Котеса.

Квадратурные формулы - это формулы, вида:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Получим квадратурную формулу интерполяционного типа, где интегрируемая функция аппроксимируется интерполяционным полиномом. В данном подсемействе квадратурных формул мы сами можем выбирать узлы, в которых мы вычисляем значение функции $f(x)$, весовую функцию, параметр n (в сумме), а также форму интерполяционного полинома. На основе выбора наших параметров мы получим различные значения весовых коэффициентов A_k.

Построим табличную функцию $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, ..., n$ и построим по этой табличной функции интерполяционный полином в форме Лагранжа: $L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi_k(x)$.

Пренебрегая остатком полинома в форме Лагранжа, получим $f(x) = L_{n-1}(x)$, а тогда

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)L_{n-1}(x)dx = \int_a^b \rho(x)\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\int_a^b \rho(x)\Phi_k(x)dx$$

Отсюда видно, что $A_k = \int_a^b \rho(x)\Phi_k(x)dx$

Метод средних прямоугольников относится к семейству формул Ньютона-Котеса, где за весовую функцию берут константу, а сетка берётся равномерная

Пусть $\rho(x) = 1,\ x_k = a + kh$, где $h = \frac{b-a}{n}$ - длина отрезка, $k = 0, \ldots, n-1$

Тогда $x = x(t) = a + ht,\ t \in [0, n]$

Получим:

$$x_k - x_j = h(k - j)$$

$$x - x_j = h(t - j)$$

И, в итоге, получим выражение для A_k:

$$A_k = \int_a^b \Phi_k(x)dx = \int_a^b \prod_{j=0, j\neq k}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_k - x_j}dx = h\int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n-1} \frac{t-j}{k-j}dt$$

Метод прямоугольников - частный случай, когда $n = 1$, то есть полином в форме Лагранжа строится по одной точке:

$$L_0 = \Phi_0 y_0$$

Для того, чтобы критерий интерполирования выполнялся, необходимо, чтобы $\Phi_0 = 1$, тогда:

$$A_0 = \int_a^b \Phi_0(x)dx = \int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(x_0),\ x_0 \in [a, b]$$

В нашем случае, мы используем метод средних прямоугольников, где за x_0берут середину отрезка, то есть

$$x_0 = \frac{b-a}{2}$$

Алгебраический порядок точности метода средних прямоугольников (то есть максимальная степень полиномов, для которых функция будет точна) равен 1, так как метод средних прямоугольников (в сравнении с методами левых и правых прямоугольников) обладает повышенным порядком точности

Также для уменьшения погрешности используют обобщенные квадратурные формулы, то есть отрезок интегрирования разбивают на некоторое количество отрезков и на каждом из них применяют метод выше:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} h_i f(x_i) = h \sum_{i=1}^{N} f(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

Где

$$h = \frac{b-a}{N}, T_i = a + ih, i = 0, \dots, N - 1$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной работе были проведено одно исследование - зависимость погрешности вычисления интеграла от количества разбиений отрезка интегрирования. Исследования проводились на двух функциях - гладкой и с разрывом производной

1. $f(x) = 2sin(x)$ - Гладкая функция, отрезок интегрирования: $[0, \pi]$
2. $g(x) = |x - e|cos(x)$ - Функция с разрывом производной, отрезок интегрирования: $[0, 2\pi]$

Заметим, что у функции $g(x)$ разрыв производной (излом) происходит в точке $x = e$.

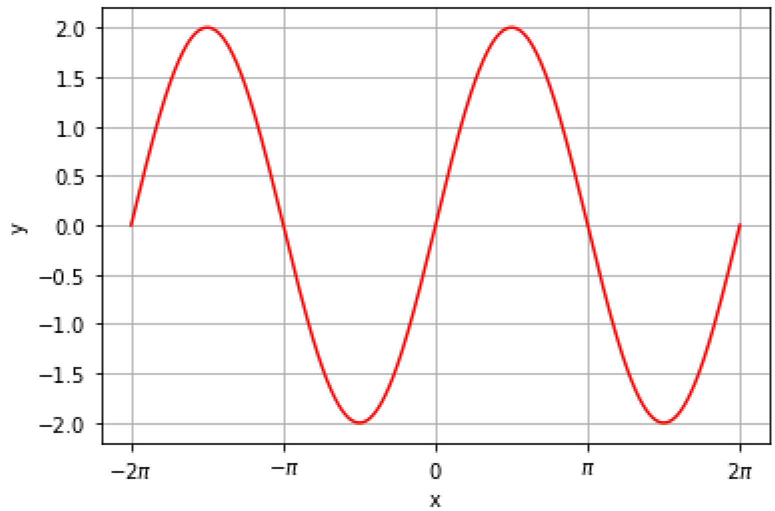

Рис. 1 График f(x)

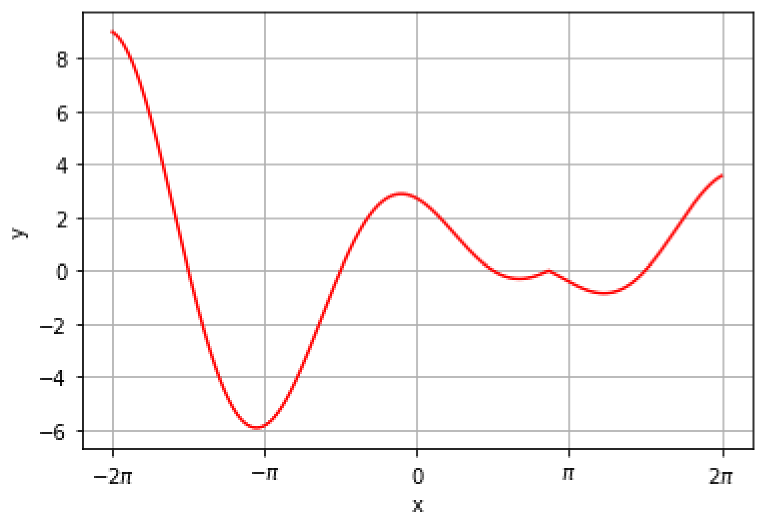

Рис. 2 График $g(x)$

Погрешность рассчитывалась как абсолютная разность между полученным по нашему методу значением интеграла и аналитическим значением интеграла, полученным вручную по формуле Ньютона - Лейбница

Вычислим интеграл от первой функции:

$$\int_{0}^{\pi} 2sin(x)dx = -2(cos(\pi) - cos(0)) = 4$$

Интеграл от второй функции вычисляется несколько труднее:

$$\int_{0}^{2\pi} |x - e|cos(x)dx = \int_{0}^{e}(e - x)cos(x)dx + \int_{e}^{2\pi}(x - e)cos(x)dx$$

Вычислим каждый интеграл по отдельности:

$$\int_{0}^{e}(e - x)cos(x)dx = e\int_{0}^{e} cos(x)dx - \int_{0}^{e} xcos(x)dx = esin(e) - \int_{0}^{e} xcos(x)dx$$

Второй получившийся интеграл вычислим по частям

$$\int_{0}^{e} xcos(x)dx = xsin(x)\Big|_{0}^{e} - \int_{0}^{e} sin(x)dx = esin(e) + cos(e) - 1$$

Получим в итоге:

$$\int_{0}^{e}(e - x)cos(x)dx = 1 - cos(e)$$

Вычислим оставшийся интеграл аналогично:

$$\int_{e}^{2\pi}(x - e)cos(x)dx = \int_{e}^{2\pi} xcos(x)dx - e\int_{e}^{2\pi} cos(x)dx = \int_{e}^{2\pi} xcos(x)dx + esin(e)$$

$$\int_{e}^{2\pi} xcos(x)dx = xsin(x)\Big|_{e}^{2\pi} - \int_{e}^{2\pi} sin(x)dx = - esin(e) + 1 - cos(e)$$

Получили:

$$\int_{e}^{2\pi}(x - e)cos(x)dx = 1 - cos(e)$$

Значение второго интеграла:

$$\int_{0}^{2\pi} |x - e|cos(x)dx = 2 - 2cos(e)$$

Результаты исследования показаны на рисунке 3:

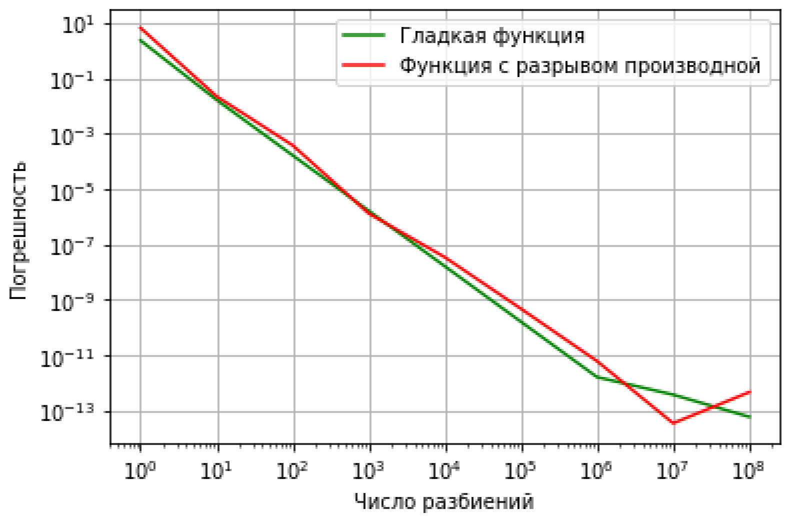

Рис. 3 Зависимость погрешности интегрирования от числа разбиений отрезка интегрирования для гладкой функции и функции с разрывом производной

На данном рисунке видно, что при увеличении числа разбиений в 10 раз, погрешность вычисления падает в 10^2 раза, то есть погрешность интегрирования убывает в соответствии с порядком точности 2 как для гладкой функции, так и для функции с разрывом производной, что отличается от теоретического порядка точности. При числе разбиений более 10^6 достигается предел машинной точности

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован метод средних прямоугольников для численного интегрирования. На основании результатов исследования можно сделать несколько выводов:

- Действительный порядок точности метода средних прямоугольников равен 2, что отличается от теоретического
- Погрешности интегрирования для функции с разрывом производной и для гладкой функции отличаются на константу почти для любого числа разбиений
- При числе разбиений более 10^6 достигается предел машинной точности