

# Численное интегрирование

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

29 марта 2024 г.

# Содержание

Постановка задачи

Квадратурные формулы интерполяционного типа

Правило Рунге

Квадратурные формулы наивысшего порядка точности

Квадратурные формулы смешанного типа

## Постановка задачи

Представим определённый интеграл на промежутке  $[a, b]$  функции  $F(x)$  в виде

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx. \quad (1)$$

Формулы вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (2)$$

называются квадратурными формулами.

$A_k$  и  $x_k \in [a, b]$  - коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

Если  $F(x)$  имеет интегрируемые особенности, то за счет  $p(x)$  их можно выделить.

# Как строить квадратурные формулы?

$$n, p(x), [a, b] \rightarrow A_k, x_k, k = 1, \dots, n$$

Нужно сформулировать критерий для нахождения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$ .

## Определение

Число  $m$  называется алгебраическим порядком точности квадратурной формулы (2), если

1. квадратурная формула точна для всех полиномов степени  $m$  и ниже
2. существует хотя бы один полином степени  $m + 1$ , для которого она не точна.

## Утверждение (доказать самостоятельно!)

Для того, чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности  $m$ , необходимо и достаточно, чтобы она была точна для полиномов  $x^j, j = 0, \dots, m$ .

# Система определяющих уравнений

Условия на весовую функцию  $p(x)$

1.  $p(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$

2.  $c_k = \int_a^b p(x)x^k dx < \infty$

Если алгебраический порядок точности равен  $m$ , то

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \dots + A_n = c_0 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = c_1 \\ \dots = \dots \\ A_1x_1^m + A_2x_2^m + \dots + A_nx_n^m = c_m \end{cases} \quad (3)$$

1. классификация квадратурных формул
2. построение квадратурных формул

# Классификация квадратурных формул

1. Узлы и коэффициенты не фиксируются  $\Rightarrow$  алгебраический порядок точности  $2n - 1$ .  
Квадратурные формулы наивысшего порядка точности, или квадратурные формулы Гаусса.
2. Если все узлы  $x_i$  заданы (и разные), т.е.  $n$  параметров зафиксировано  $\Rightarrow$  гарантированный алгебраический порядок точности  $n - 1$ .  
Квадратурные формулы интерполяционного типа.
3. Зафиксировано  $r$  параметров,  $0 < r < n \Rightarrow$  гарантированный алгебраический порядок точности  $2n - 1 - r$ .  
Квадратурные формулы смешанного типа.

Пример.  $\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$

$$c_0 = \int_{-1}^1 1 \cdot dx = 2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = 0.$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times a_2 \\ \times a_1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$h=2 \Rightarrow m=2n-1=3$$

$$C_k = \int_{-1}^1 x^k dx, \quad k=0, \dots, 3$$

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2) = x^2 - a_1 x + a_2$$

$$\begin{cases} 2a_2 + 0 \cdot a_1 + 1 \cdot \frac{2}{3} = A_1 \cdot \omega(x_1) + A_2 \cdot \omega(x_2) = 0 \\ 0 \cdot a_2 + \frac{2}{3} a_1 + 1 \cdot 0 = A_1 x_1 \omega(x_1) + A_2 x_2 \omega(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \omega(x) = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow A_1 = A_2 = 1$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

# Квадратурные формулы с постоянной весовой функцией

Пусть  $p(x) \equiv 1$ .

$n, [-1, 1] \rightarrow A_k, x_k, k = 1, \dots, n$

1.  $[-1, 1] \rightarrow [a, b], t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_k\right) \quad (4)$$

2. Обобщенные формулы.

Разобьем  $[a, b]$  на  $N$  равных частей:  $H = \frac{b-a}{N}$  и  $T_i = a + iH, i = 0, \dots, N$ .

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^N \int_{T_{i-1}}^{T_i} f(t) dt \approx \sum_{i=1}^N \frac{H}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{T_{i-1} + T_i}{2} + \frac{T_i - T_{i-1}}{2}x_k\right) = \frac{H}{2} \sum_{j=1}^M \overline{A}_j f(\bar{x}_j), \quad (5)$$

$$M = nN.$$

Чем больше узлов и коэффициентов, тем точнее результат.

## Устойчивость квадратурных формул

Пусть для вычисления  $\int_a^b p(x)f(x)dx$  используется квадратурная формула

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (6)$$

Пусть  $A_k, x_k$  вычислены точно, но  $f(x)$  вычисляется с погрешностью

$$f(x_k) \approx \tilde{f}(x_k), |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)| \leq \epsilon \quad (7)$$

$$|S_n(f) - S_n(\tilde{f})| = \left| \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) - \sum_{k=1}^n A_k \tilde{f}(x_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |A_k| |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)| \leq \epsilon \sum_{k=1}^n |A_k|. \quad (8)$$

1.  $A_k > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n |A_k| = \sum_{k=1}^n A_k = c_0 = \int_a^b p(x)dx$  - ограничено для  $\forall n$ .

2.  $A_1 < 0, |A_1| < c, \forall n$  и  $A_k > 0, k = 2, \dots, n \Rightarrow \sum_{k=1}^n |A_k| = \sum_{k=2}^n A_k - A_1 = \sum_{k=1}^n A_k - 2A_1$

# Содержание

Постановка задачи

Квадратурные формулы интерполяционного типа

Правило Рунге

Квадратурные формулы наивысшего порядка точности

Квадратурные формулы смешанного типа

# Квадратурные формулы интерполяционного типа

Заданы  $n$  параметров. Если  $x_i$  заданы и различны, то коэффициенты  $A_i$  можно найти из системы определяющих уравнений (3).

$x_i \in [a, b]$ . Построим табличную функцию  $(x_i, f(x_i)), i = 1, \dots, n \rightarrow$  построим интерполяционный полином  $L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Phi_k(x)$ .

$$f(x) = L_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \Rightarrow$$

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)L_{n-1}(x)dx + \int_a^b p(x)R_{n-1}(x)dx =$$

$$\int_a^b p(x) \sum_{k=1}^n f(x_k) \Phi_k(x) dx + \int_a^b p(x)R_{n-1}(x)dx = \underbrace{\sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b p(x) \Phi_k(x) dx}_{A_k} + \underbrace{\int_a^b p(x)R_{n-1}(x)dx}_{R_n(f)}$$

Коэффициенты и узлы квадратурной формулы связаны

$$A_k = \int_a^b p(x) \Phi_k(x) dx, \quad (9)$$

где  $\Phi_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}.$

Остаточный член квадратурной формулы

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) R_{n-1}(x) dx = \frac{1}{n!} \int_a^b p(x) f^{(n)}(\xi(x)) \omega(x) dx, \quad (10)$$

где  $\omega(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j).$

## Определение

Квадратурная формула, узлы и коэффициенты которой связаны формулой (9), называются интерполяционной.

## Теорема (о порядке точности $n - 1$ или выше)

Для того чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности  $n - 1$  или выше, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной.

## Доказательство

Необходимость.

Пусть алгебраический порядок точности  $n - 1$  или выше.

$$\Phi_k(x) \text{ - полином степени } n - 1 \Rightarrow \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j\Phi_k(x_j) = A_k.$$

Достаточность.

$$P_{n-1}(x) \rightarrow \left( x_i, P_{n-1}(x_i) \right), i = 1, \dots, n.$$

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n P_{n-1}(x_k) \Phi_k(x)$$

$$L_{n-1}(x) \equiv P_{n-1}(x)$$

$$\int_a^b p(x) P_{n-1}(x) dx \equiv \int_a^b p(x) L_{n-1}(x) dx = \int_a^b p(x) \sum_{k=1}^n P_{n-1}(x_k) \Phi_k(x) dx =$$

$$\sum_{k=1}^n P_{n-1}(x_k) \int_a^b p(x) \Phi_k(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k P_{n-1}(x_k)$$

# Квадратурные формулы Ньютона-Котеса (Newton-Cotes Formulae)

Квадратурные формулы интерполяционного типа, для которых выполнено 2 дополнительных условия:

$$1. \ p(x) \equiv 1$$

$$2. \ x_k = a + h(k - 1), \ h = \frac{b-a}{n-1}$$

$$A_k = \int_a^b \Phi_k(x) dx, \text{ где } \Phi_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$x = a + ht, t \in [0, n - 1] \Rightarrow$$

$$x - x_j = a + ht - (a + h(j - 1)) = h(t - j + 1), x_k - x_j = h(k - j)$$

$$A_k = h \int_0^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{t-j+1}{k-j} dt$$

$$\bar{\omega}(t) = \prod_{j=0}^{n-1} (t - j)$$

$$A_k = h \int_0^{n-1} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-k+1} \frac{dt}{(k-1)(k-2)\dots(1)(-1)\dots(-(n-k))} = h \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{n-1} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-k+1} dt = h H_n^{(k)}$$

$H_n^{(k)}$  - коэффициенты Ньютона-Котеса. Не зависят от интервала!

$$R_n(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n)}(\xi(x)) \omega(x) dx$$

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j) = h^n t(t-1)\dots(t-n+1) = h^n \bar{\omega}(t)$$

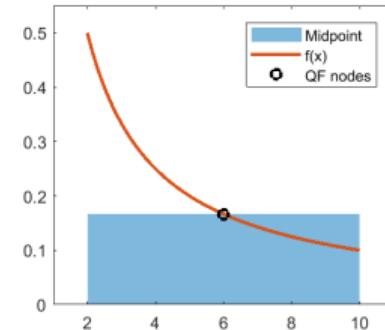
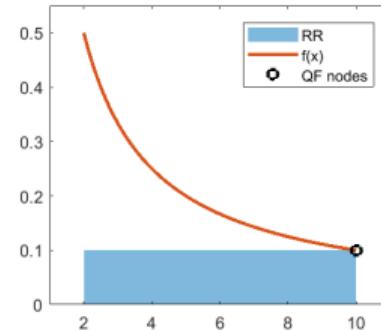
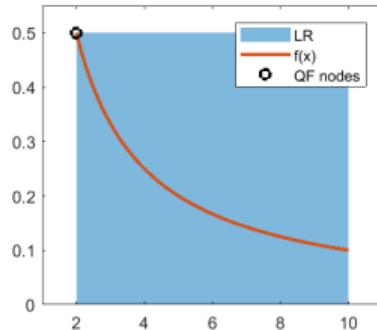
$$R_n(f) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^{n-1} f^{(n)}(\xi(x(t))) \bar{\omega}(t) dt$$

## Формулы прямоугольников, $n = 1$

$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(x_1), L_0(x) = f(x_1) \Rightarrow$  формулы прямоугольников

$$S_1(f) = (b - a)f(x_1). \quad (11)$$

1.  $x_1 = a$  - формула левых прямоугольников (the left rectangle rule).
2.  $x_1 = b$  - формула правых прямоугольников (the right rectangle rule).
3.  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  - формула средних прямоугольников (the midpoint formulae).



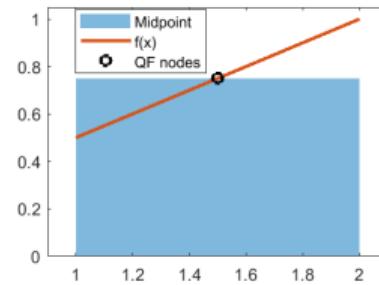
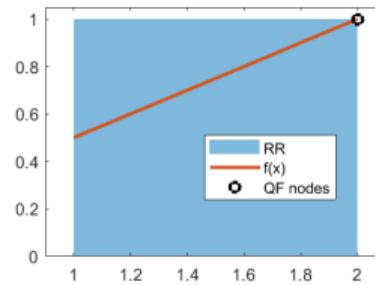
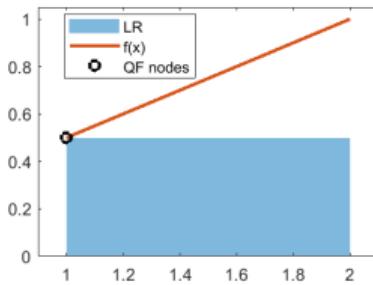
$f \in C^1([a, b]) \Rightarrow$  для формулы левых и правых прямоугольников

$$R_1^L(f) = \frac{f'(\xi)}{2}(b - a)^2, \xi \in (a, b). \quad (12)$$

$$R_1^R(f) = -\frac{f'(\xi)}{2}(b - a)^2, \xi \in (a, b). \quad (13)$$

$f \in C^2([a, b]) \Rightarrow$  для формулы средних прямоугольников

$$R_1^M(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b - a)^3, \xi \in (a, b). \quad (14)$$

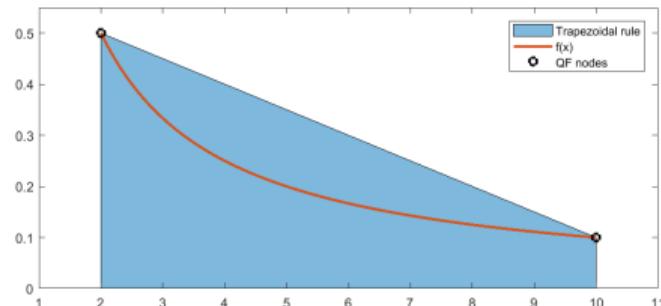


## Формула трапеций (the trapezoidal rule), $n = 2$

$$x_1 = a, x_2 = b, h = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) = h \left( \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) \right). \quad (15)$$

$$H_2^{(1)} = H_2^{(2)} = \frac{1}{2}.$$



# Остаточный член квадратурной формулы трапеций

$$R_2(f) = \frac{h^3}{2!} \int_0^1 f''(\xi(x(t))) \underbrace{t(t-1)}_{\text{не меняет знак}} dt = \frac{h^3}{2!} f''(\eta) \int_0^1 t(t-1) dt = -\frac{h^3}{12} f''(\eta), \eta \in (a, b)$$

## Замечания

1. Формула трапеций точна для постоянных и линейных функций, т.е. алгебраический порядок точности равен 1.
2. Если  $f''$  знакопостоянна на  $[a, b]$ , то квадратурная формула трапеций дает значение с избытком/недостатком для выпуклых/вогнутых функций.

## Формула Симпсона (the Cavalieri-Simpson Formula), $n = 3$

$$x_1 = a, x_2 = a + h = \frac{a+b}{2}, x_3 = a + 2h = b, h = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left( H_3^{(1)}f(a) + H_3^{(2)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + H_3^{(3)}f(b) \right). \quad (16)$$

$$H_3^{(2)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{n-1} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-k+1} dt = \frac{(-1)^1}{1!1!} \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-1} dt = - \left( \frac{t^3}{3} - t^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$H_3^{(1)} = H_3^{(3)} = \frac{1}{3} \text{ (получить самостоятельно)}$$

$$S_3(f) = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)) = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (17)$$

## Формула Симпсона. Алгебраический порядок точности

Гарантированный алгебраический порядок точности равен 2.

$$Q_3(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3.$$

$$\int_a^b Q_3(x) dx = \frac{1}{4} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4 \Big|_a^b = 0.$$

$$S_3(Q_3) = \frac{b-a}{6} \left(Q_3(a) + 4Q_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + Q_3(b)\right) = 0.$$

$$P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = a_0Q_3(x) + P_2(x)$$

Формула Симпсона (17) точна для любого полинома третьей степени  $\Rightarrow$  алгебраический порядок точности равен 3.

## Остаточный член квадратурной формулы Симпсона

Возьмем сетку  $x^h = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$ . Построим сеточную функцию  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .

Дополним значением производной функции в точке  $x = \frac{a+b}{2}$ .

Построим интерполяционный полином  $H_3(x)$ .

$$f(x) = H_3(x) + R_3(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b H_3(x) dx + \int_a^b R_3(x) dx = S_3(f) + R_3(f)$$

$$R_3(f) = \int_a^b R_3(x) dx = \frac{1}{4!} \int_a^b f^{(IV)}(\xi(x)) \Omega(x) dx, \quad (18)$$

где  $\Omega(x) = (x - a)(x - \frac{a+b}{2})^2(x - b)$ .

$$R_3(f) = \frac{f^{(IV)}(\eta)}{4!} \int_a^b \Omega(x) dx = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\eta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\eta) \quad (19)$$

## Формула 3/8, $n = 4$

$$h = \frac{b-a}{3}, x_1 = a, x_2 = a + h, x_3 = a + 2h, x_4 = a + 3h$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)) = S_4(f). \quad (20)$$

Остаточный член простейшей формулы 3/8

$$R_4(f) = ch^5 f^{(IV)}(\eta) \quad (21)$$

Алгебраический порядок точности формулы  $S_4(f)$  такой же, что и у формулы  $S_3(f)$ , но число вычислений функции на 1 больше.

## Замечания

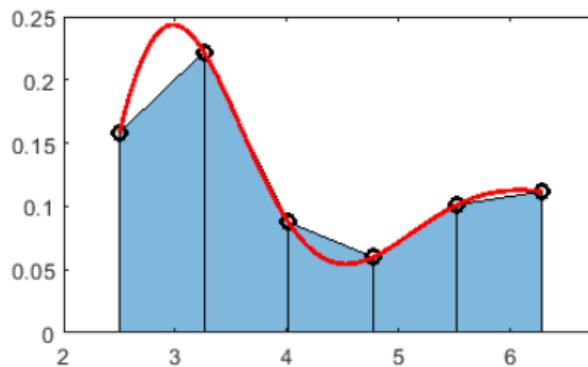
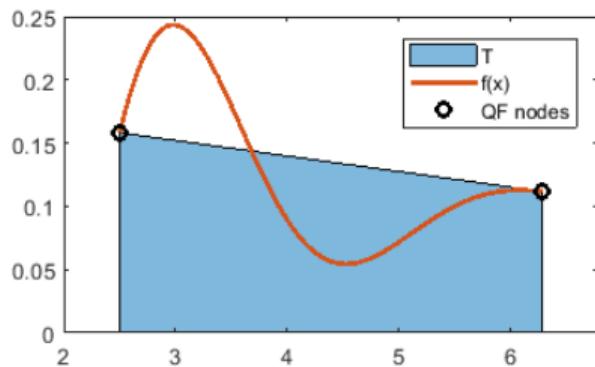
1. Формулы Ньютона-Котеса для нечетных  $n$  имеют алгебраический порядок точности на 1 больше, чем ожидаемый.
2. При  $n > 8$  появляются отрицательные коэффициенты  $\Rightarrow$  неустойчивость  $\Rightarrow$  использование больших  $n$  для повышения точности нецелесообразно.

# Обобщённая формула трапеций (the composite trapezoidal formula)

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $N$  интервалов длиной  $h = \frac{b-a}{N}$

Пусть  $H$  - длина элементарного промежутка, на котором применяется простейшая формула. В данном случае  $H = h$ .

$$\bar{x}_k = a + kh, k = 0, \dots, N.$$



## Обобщённая формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N \int_{\bar{x}_{k-1}}^{\bar{x}_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N \frac{h}{2}(f(\bar{x}_{k-1}) + f(\bar{x}_k)) = \sum_{k=1}^N \frac{h}{2}(f(\bar{x}_{k-1}) + f(\bar{x}_k)).$$

Обобщённая формула трапеций

$$S_{2,N}(f) = \frac{h}{2} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(\bar{x}_k) \right). \quad (22)$$

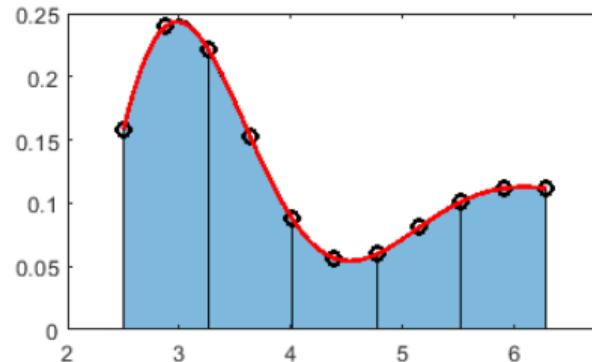
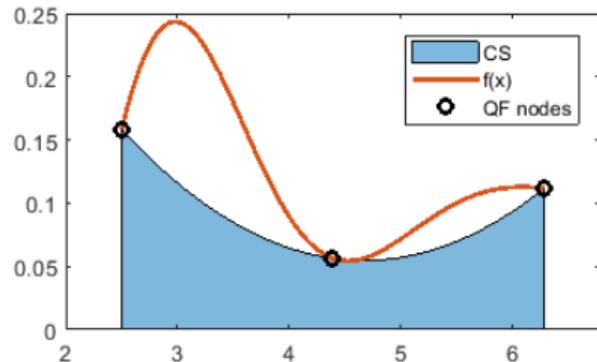
$R_2(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi) \Rightarrow$  остаточный член обобщённой формулы

$$R_{2,N}(f) = \sum_{k=1}^N -\frac{h^3}{12}f''(\xi_k) = -\frac{h^3}{12}N \underbrace{\sum_{k=1}^N f''(\xi_k)}_{(b-a)f''(\eta)} = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta). \quad (23)$$

# Обобщённая формула Симпсона

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $2N$  интервалов длиной  $h = \frac{b-a}{2N}$ ,  $H = 2h$ .

$$\bar{x}_k = a + kh, k = 0, \dots, 2N.$$



## Обобщённая формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N \int_{\bar{x}_{2k-2}}^{\bar{x}_{2k}} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N \frac{h}{3} (f(\bar{x}_{2k-2}) + 4f(\bar{x}_{2k-1}) + f(\bar{x}_{2k})).$$

Обобщённая формула Симпсона

$$S_{3,N}(f) = \frac{h}{3} \left( f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^N f(\bar{x}_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(\bar{x}_{2k}) \right). \quad (24)$$

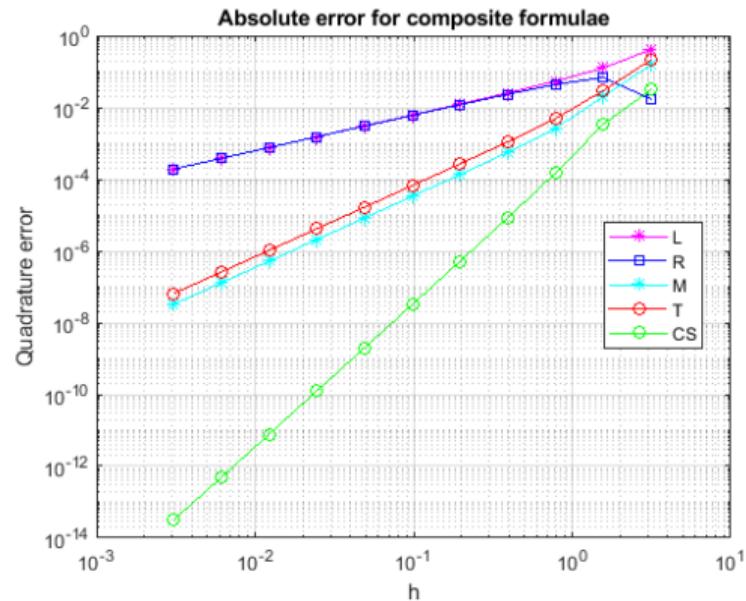
$R_3(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi) \Rightarrow$  остаточный член обобщённой формулы

$$R_{3,N}(f) = \sum_{k=1}^N -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi_k) = -\frac{h^5}{90} N \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^{(IV)}(\xi_k)}_{=} = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(IV)}(\eta). \quad (25)$$

# Пример

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} xe^{-x} \cos(2x) dx$$

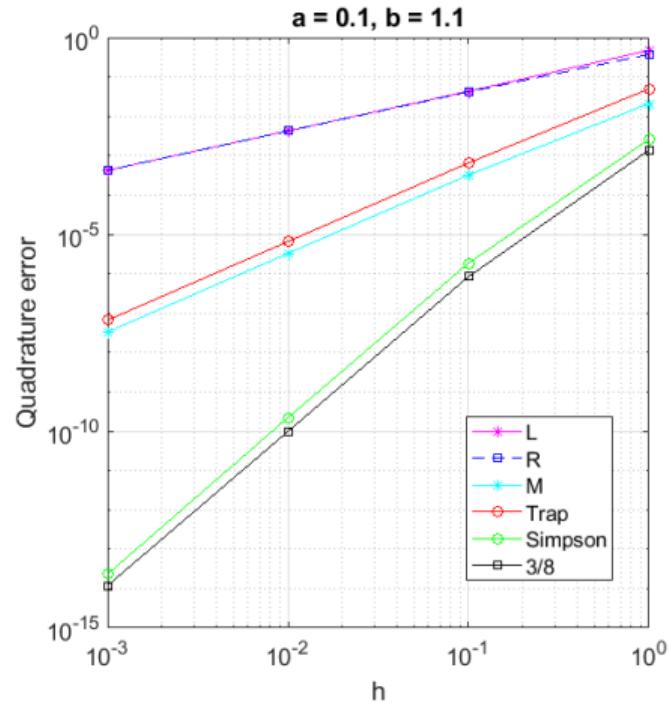
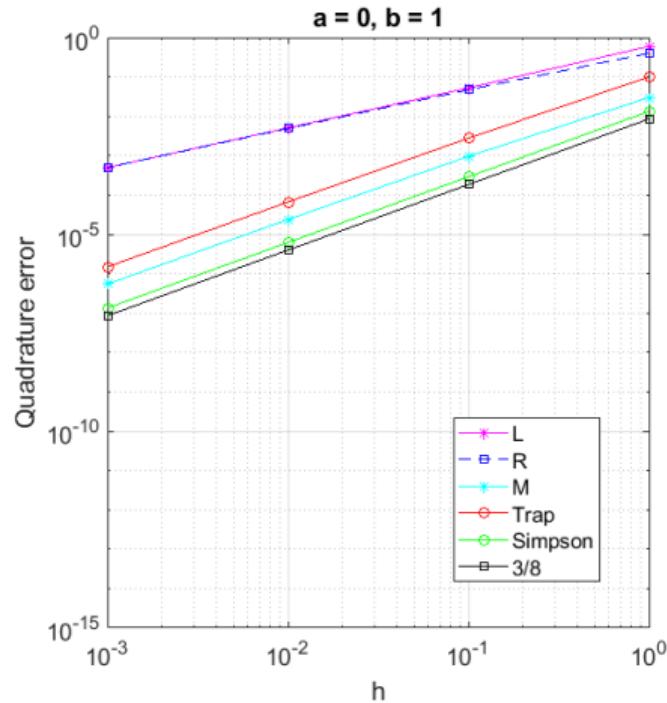
$$h = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \dots$$



m	L	R	M	T	CS
1	0.4067	0.0170	0.1528	0.2118	0.0313
2	0.1269	0.0679	0.0198	0.0295	0.0034
4	0.0535	0.0439	0.0026	0.0048	1.4814e-04
8	0.0254	0.0233	5.6072e-04	0.0011	8.4451e-06
16	0.0124	0.0119	1.3462e-04	2.6769e-04	5.1594e-07
32	0.0062	0.0060	3.3316e-05	6.6536e-05	3.2064e-08
64	0.0031	0.0030	8.3080e-06	1.6610e-05	2.0012e-09
128	0.0015	0.0015	2.0757e-06	4.1510e-06	1.2503e-10
256	7.6206e-04	7.5998e-04	5.1884e-07	1.0377e-06	7.8137e-12
512	3.8077e-04	3.8025e-04	1.2971e-07	2.5941e-07	4.8774e-13
1024	1.9032e-04	1.9019e-04	3.2426e-08	6.4852e-08	3.1333e-14

# Случай недостаточно гладкой функции

$$\int_a^b x^{\frac{2}{3}} dx$$



# Содержание

Постановка задачи

Квадратурные формулы интерполяционного типа

Правило Рунге

Квадратурные формулы наивысшего порядка точности

Квадратурные формулы смешанного типа

## Правило Рунге для оценки погрешности интеграла

Как вычислить интеграл с наперёд заданной точностью?

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_{n,N}(f) \right| < \epsilon. \quad (26)$$

Структура остаточного члена обобщённой квадратурной формулы Ньютона-Котеса

$$R_{n,N}(f) = \alpha_m h^m f^{(m_1)}(\eta) = c_m h^m. \quad (27)$$

Пусть  $N_1, N_2$  - два разбиения отрезка  $[a, b]$ ,  $k$  - количество внутренних точек

$$H_i = \frac{b-a}{N_i}, h_i = \frac{H_i}{k+1}, i = 1, 2. \quad (28)$$

$$\int_a^b f(x) dx = S_{n,N_1}(f) + c_m^{(1)} h_1^m$$

$$\int_a^b f(x) dx = S_{n,N_2}(f) + c_m^{(2)} h_2^m$$

Пусть  $N_2 > N_1 \gg 1 \Rightarrow f^{(m_1)}(\eta)$  - "среднее" значение производной  $\Rightarrow c_m^{(1)} = c_m^{(2)} = c_m$ .

$$0 = S_{n,N_1}(f) - S_{n,N_2}(f) + c_m(h_1^m - h_2^m) \Rightarrow c_m h_2^m \left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^m - 1 \right] = S_{n,N_2}(f) - S_{n,N_1}(f)$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow$$

$$c_m h_2^m = \frac{S_{n,N_2}(f) - S_{n,N_1}(f)}{\left( \frac{N_2}{N_1} \right)^m - 1}. \quad (29)$$

На практике:  $N_2 = 2N_1 = N$ .

Условие достижения требуемой точности  $\epsilon$

$$\frac{|S_{n,2N}(f) - S_{n,N}(f)|}{2^m - 1} \leq \epsilon. \quad (30)$$

Для формулы трапеций  $m = 2$ , для формулы Симпсона  $m = 4$ .

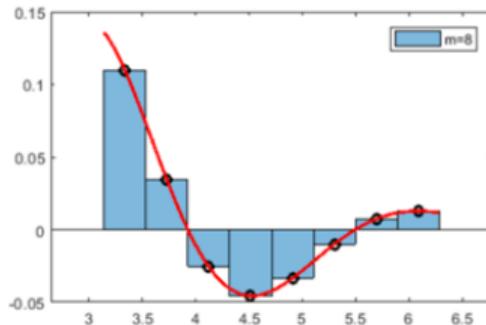
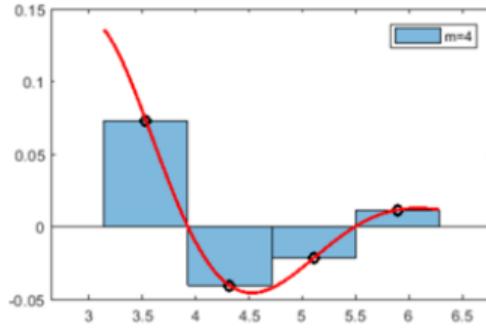
# Пример

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} xe^{-x} \cos(2x) dx$$

The composite midpoint formula

with  $h = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \dots$

m	I_M	I	QE	QE_estimate
1	-0.1330	0.0198	0.1528	0
2	2.2049e-17	0.0198	0.0198	0.0443
4	0.0172	0.0198	0.0026	0.0057
8	0.0193	0.0198	5.6072e-04	6.9197e-04
16	0.0197	0.0198	1.3462e-04	1.4203e-04
32	0.0198	0.0198	3.3316e-05	3.3768e-05
64	0.0198	0.0198	8.3080e-06	8.3361e-06
128	0.0198	0.0198	2.0757e-06	2.0774e-06
256	0.0198	0.0198	5.1884e-07	5.1895e-07
512	0.0198	0.0198	1.2971e-07	1.2971e-07
1024	0.0198	0.0198	3.2426e-08	3.2426e-08



# Содержание

Постановка задачи

Квадратурные формулы интерполяционного типа

Правило Рунге

Квадратурные формулы наивысшего порядка точности

Квадратурные формулы смешанного типа

## Квадратурные формулы Гаусса-Кристоффеля

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = S_n(f) \quad (31)$$

За счет выбора узлов и коэффициентов можно ожидать алгебраический порядок точности  $2n - 1$ .

Определим корневой полином  $\omega(x)$  степени  $n$

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j) = x^n + a_0 x^{n-1} + \dots + a_n = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j \quad (32)$$

## Теорема

Не существует квадратурной формулы, алгебраический порядок точности которой выше  $2n - 1$ .

### Доказательство

От противного.

Рассмотрим  $Q_{2n}(x) = \omega^2(x) \Rightarrow S_n(Q_{2n}(x)) = S_n(\omega^2(x)) = 0$ .

$\int\limits_a^b p(x)\omega^2(x)dx \neq 0$ . Противоречие.

### Определение

$f(x)$  и  $g(x)$  ортогональны на  $[a, b]$  с весом  $p(x) \geq 0$ , если

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx = (f, g)_p = 0. \quad (33)$$

## Теорема (о порядке точности $2n - 1$ )

Для того, чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности  $2n - 1$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$1. A_k = \int_a^b p(x) \Phi_k(x) dx$$

$$2. \int_a^b p(x) \omega(x) P_{n-1}(x) dx = 0, \forall P_{n-1}(x).$$

## Доказательство

*Необходимость.* Пусть  $S_n(f)$  имеет алгебраический порядок точности  $2n - 1$ .

Условие на коэффициенты  $A_k$  выполнено в силу теоремы о порядке точности  $n - 1$ .

$$\forall P_{n-1}(x) \rightarrow Q_{2n-1}(x) = P_{n-1}(x) \omega(x)$$

$$\int_a^b p(x) Q_{2n-1}(x) dx = S_n(Q_{2n-1}(x)) = 0. \quad (34)$$

*Достаточность.*

Пусть условия на коэффициенты и узлы выполнены.

$$\forall Q_{2n-1}(x) = P_{n-1}(x)\omega(x) + R_m(x), m < n.$$

$$Q_{2n-1}(x_k) = R_m(x_k), k = 1, \dots, n$$

$$\int_a^b p(x)Q_{2n-1}(x)dx = \int_a^b p(x)P_{n-1}(x)\omega(x)dx + \int_a^b p(x)R_m(x)dx = S_n(R_m(x)) = \sum_{k=1}^n A_k Q_{2n-1}(x_k).$$

**Замечание**

Теорема ничего не говорит о существовании  $\omega(x)$ .

## Теорема

$$\exists! \omega(x): \int_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x).$$

## Доказательство

Будем искать корневой полином в виде  $\omega(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$ .

$$(\omega, P_{n-1})_p = 0 \Leftrightarrow (\omega, x^k)_p = 0, k = 0, \dots, n-1.$$

$$\int_a^b p(x) \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j x^k dx = - \int_a^b p(x) x^n x^k dx, k = 0, \dots, n-1$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j \int_a^b p(x) x^j x^k dx = - \int_a^b p(x) x^n x^k dx, k = 0, \dots, n-1. \quad (35)$$

(35) - СЛАУ относительно  $b_0, \dots, b_{n-1}$ .

Покажем, что однородная СЛАУ имеет только нулевое решение.

От противного. Пусть  $\exists (b_0^*, \dots, b_{n-1}^*)^\top \neq 0$ .

$$Q_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j^* x^j$$

$$\int_a^b p(x) x^k Q_{n-1}(x) dx = 0, k = 0, \dots, n-1 \quad (36)$$

Домножим (36) на  $b_k^*$  и вычислим сумму по всем  $k$

$$\int_a^b p(x) \left( \sum_{k=0}^{n-1} b_k^* x^k \right) Q_{n-1}(x) dx = 0 \quad (37)$$

$$\int_a^b p(x) Q_{n-1}^2(x) dx = 0. \text{ Противоречие.}$$

## Теорема

Все корни  $\omega(x)$ :

$$\int_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x) \quad (38)$$

вещественны, различны и принадлежат отрезку  $[a, b]$ .

## Доказательство

Покажем, что  $\omega(x)$  имеет по крайней мере 1 вещественный корень нечетной кратности, который принадлежит  $[a, b]$ .

От противного.

$$\int_a^b p(x)x^0\omega(x)dx \neq 0. \text{ Противоречие.}$$

$x_1, x_2, \dots, x_m$  - все различные вещественные корни нечетной кратности, принадлежащие  $[a, b]$ .

Нужно показать, что  $m = n$ .

От противного. Пусть  $m < n$ .

$$P_m(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i).$$

$Q_{n+m}(x) = P_m(x)\omega(x)$  - не меняет знак на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b p(x)P_m(x)\omega(x)dx \neq 0. \quad (39)$$

Противоречие.

### Замечание

Квадратурные формулы Гаусса существуют для  $\forall n$ .

## Теорема

Все  $A_k$  квадратурных формул Гаусса положительны.

## Доказательство

$A_k = \int_a^b p(x) \Phi_k(x) dx$ , где  $\Phi_k(x)$  - базисный полином Лагранжа степени  $n - 1$ .

$$(\Phi_k(x))^2 = Q_{2n-2}^{(k)}(x) \Rightarrow$$

$$\int_a^b p(x) Q_{2n-2}^{(k)}(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j Q_{2n-2}^{(k)}(x_j) = \sum_{j=1}^n A_j (\Phi_k(x_j))^2 = A_k. \quad (40)$$

$p(x)Q_{2n-2}^{(k)}(x)$  не меняет знак на  $[a, b] \Rightarrow A_k > 0$ .

## Замечание

Получили еще одно выражение для  $A_k = \int_a^b p(x) (\Phi_k(x))^2 dx$ .

# Оценка погрешности квадратурных формул Гаусса

Предположим, что  $f(x) \in C^{(2n)}([a, b])$ .

Построим табличную функцию  $(x_k, f(x_k), f'(x_k)) \rightarrow H_{2n-1}(x)$  - интерполяционный полином Эрмита.

$$f(x) = H_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x)$$

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \underbrace{\int_a^b p(x)H_{2n-1}(x)dx}_{=S_n(H_{2n-1})=S_n(f)} + \int_a^b p(x)R_{2n-1}(x)dx. \quad (41)$$

Остаточный член квадратурной формулы Гаусса

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)R_{2n-1}(x)dx = \int_a^b p(x) \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \omega^2(x)dx = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta) \int_a^b p(x) \omega^2(x)dx \quad (42)$$

# Системы ортогональных полиномов

$[a, b], p(x) \geq 0 \rightarrow \omega(x) = x^n + \dots, \forall n$ , который ортогонален любому полиному степени  $n - 1$  с весом  $p(x)$ .

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  - система ортогональных полиномов, если

$$(P_n, P_m)_p = \int_a^b p(x)P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (43)$$

где  $P_n(x) = a_nx^n + b_nx^{n-1} + \dots$

$a_n$  - подбирается из условия ортонормированности.

Система ортогональных многочленов является полной  
⇒ любой полином  $Q_m$  можно разложить по ортогональным полиномам

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(m)} P_j(x), \quad (44)$$

$$\Rightarrow (P_n, Q_{n-1})_p = 0, \forall Q_{n-1}$$

Любые три соседних ортогональных полинома связаны рекуррентным соотношением

$$P_{n+1}(x) = q_1^{(n)}(x)P_n(x) + q_0^{(n)}(x)P_{n-1}(x), \quad (45)$$

где  $q_1^{(n)}, q_0^{(n)}$  - известные полиномы 1й и 0й степени соответственно.

## Формула Родрига

$P_n(x) = \frac{c_n}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n} [p(x)Y(x)], Y(x) \in C^{(n)}([a, b])$  - производящая функция.

1.  $[a, b], p(x) = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta, \alpha, \beta > -1.$

$Y(x) = (x - a)^n (b - x)^n \Rightarrow$  полином Якоби

$$I_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{c_n}{(x - a)^\alpha (b - x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (x - a)^{\alpha+n} (b - x)^{\beta+n} \right] \quad (46)$$

2.  $[a, b] = [-1, 1], \alpha = \beta = -\frac{1}{2}, p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$I_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = c_n T_n(x)$  - полином Чебышева.

3.  $\alpha = \beta = 0, p(x) \equiv 1 \Rightarrow$  полином Лежандра

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} [(x - a)^n (b - x)^n]. \quad (47)$$

$$[a, b] = [-1, 1] \Rightarrow P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^n]$$

# Методика построения квадратурных формул Гауссовского типа

1. выбор  $[a, b], p(x), n$
2. найти  $\omega(x)$ :  $\int_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x)$ 
  - ▶ формула Родрига
  - ▶ формула (35)
  - ▶  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ , ортогонализировать по Граму-Шмидту.
  - ▶ формула (45)
3. решить  $\omega(x) = 0 \Rightarrow x_k, k = 1, \dots, n$
4. найти  $A_k$ 
  - ▶ система определяющих уравнений (3)
  - ▶  $A_k = \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx$
  - ▶  $A_k^{(n)} = \frac{a_n}{a_{n-1}P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)}, a_n$  - старший коэффициент  $P_n$ .

$$\text{I. } \textcircled{1} \quad p(x) = 1, \quad [-1, 1], \quad h = 3$$

$$\textcircled{2} \quad P_3(x) = C_3 \frac{d^3}{dx^3} [(1-x^2)^3] = C_3 \frac{d^3}{dx^3} [1 - 3 \cdot 1 \cdot x^2 + 3 \cdot 1 \cdot x^4 - x^6] = C_3 \cdot [3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x^3]$$

$$\textcircled{3} \quad w(x) = dP_3(x) = 0 \Rightarrow 3x - 5x^3 = x(3 - 5x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\textcircled{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-1}^{+1} x^0 dx = 2 \end{array} \right. \longrightarrow A_2 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_3$$

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = \int_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{2}{3} \Rightarrow 2A_1 x_1^2 = 2A_1 \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{5}{9} = A_3$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \frac{1}{9} \left[ 5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}}) \right].$$

$$\text{I} \text{.1) } P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, [-1,1], n=4$$

$$\text{② } \omega(x) = \omega T_n(x) = \omega \cos(n \arccos(x))$$

$$\text{③ } x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), k=1, n$$

$$\text{④ } A_k = \frac{a_n}{a_{n-1} P_n'(x_k) P_{n-1}(x_k)}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_k(x) dx \stackrel{x=\cos\varphi}{=} \int_0^\pi \frac{1}{\sin\varphi} \cos(h\varphi) \cos(k\varphi) (-\sin\varphi) d\varphi = \dots = \begin{cases} 0, & h \neq k \\ \pi, & h = k = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & h = k \neq 0 \end{cases}$$

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 2^{n-1} x^n + \dots \right)$$

Упрощение!

$$A_k = 2 \frac{1}{\frac{2}{\pi} T_{n-1}(x_k) T_n'(x_k)} = \frac{\pi}{T_{n-1}(x_k) T_n'(x_k)} = \frac{\pi}{n}$$

$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$  — формула Эрмита.

# Содержание

Постановка задачи

Квадратурные формулы интерполяционного типа

Правило Рунге

Квадратурные формулы наивысшего порядка точности

Квадратурные формулы смешанного типа

## Квадратурные формулы смешанного типа

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (48)$$

Пусть  $r$  - количество зафиксированных параметров. Тогда

- ▶  $r = n$  - квадратурные формулы интерполяционного типа
- ▶  $r = 0$  - квадратурные формулы наивысшего порядка точности
- ▶  $0 < r < n$  - квадратурные формулы смешанного типа

$x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_1}}$  - зафиксированные узлы

$A_{l_1}, \dots, A_{l_{r_2}}$  - зафиксированные коэффициенты

$r = r_1 + r_2 \Rightarrow 2n - r$  неизвестных

$\Rightarrow 2n - r - 1$  - ожидаемый алгебраический порядок точности.

## Теорема (о порядке точности $2n - 1 - r$ )

Для того, чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности  $2n - 1 - r$ , необходимо и достаточно, чтобы

1.  $A_k = \int_a^b p(x) \Phi_k(x) dx$
2.  $\int_a^b p(x) \omega(x) P_{n-r-1}(x) dx = 0, \forall P_{n-r-1}(x).$

## Доказательство

Аналогично теореме о порядке точности  $2n - 1$ . Самостоятельно.

## Квадратурные формулы с фиксированными узлами

$$r_2 = 0, r = r_1.$$

$x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$  - зафиксированные узлы. Тогда корневой полином

$$\omega(x) = q(x)\tilde{\omega}(x), \quad (49)$$

где  $q(x) = \prod_{j=1}^r (x - x_{k_j})$  - известный полином,  $\tilde{\omega}(x)$  - полином степени  $n - r$ .

$$\int_a^b p(x)\omega(x)P_{n-r-1}(x)dx = \int_a^b \underbrace{p(x)q(x)}_{\tilde{p}(x)} \tilde{\omega}(x)P_{n-r-1}(x)dx = \int_a^b \tilde{p}(x)\tilde{\omega}_m(x)P_{m-1}(x)dx \quad (50)$$

Если  $\tilde{p}(x)$  не меняет знак на  $[a, b]$ , то такая квадратурная формула всегда существует.

# Квадратурные формулы Маркова

$\tilde{p}(x)$  не будет менять знак на  $[a, b]$ , если

1. фиксируется левый конец или правый конец отрезка  $[a, b]$
2. фиксируется левый и правый конец отрезка  $[a, b]$

На практике:  $p(x) \equiv 1$ .

1. Формулы Радо

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \quad & \tilde{p}(x) = x - a \Rightarrow \tilde{\omega}(x) = \alpha I_{n-1}^{(1,0)}(x) \\ \blacktriangleright \quad & \tilde{p}(x) = b - x \Rightarrow \tilde{\omega}(x) = \alpha I_{n-1}^{(0,1)}(x)\end{aligned}$$

2. Формулы Лобатто:  $\tilde{p}(x) = (x - a)(b - x) \Rightarrow \tilde{\omega}(x) = \alpha I_{n-2}^{(1,1)}(x)$

Приближенное вычисление.  $n=2$ ,  $[-1,1]$ ,  $x=-1$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx A_1 \cdot f(-1) + A_2 \cdot f(x_2)$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x) &= P(x)Q(x) = (x - (-1)) \Rightarrow \tilde{W}(x) = \frac{C_1}{x+1} \cdot \frac{d}{dx} \left[ (1+x)^2 (1-x) \right] = \frac{C_1}{x+1} \left[ 2(1+x)(1-x) - (1+x)^2 \right] = \\ &= C_1 (1-3x) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ A_2 \cdot (-1) + A_2 \cdot \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \left[ f(-1) + 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

## Квадратурные формулы с фиксированными коэффициентами

Зафиксируем  $n - 1$  коэффициент:  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$   
⇒ ожидаемый алгебраический порядок точности равен  $n$ .

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = A \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (51)$$

Система (3) примет вид

$$\begin{cases} A + A + \dots + A = c_0 \\ Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_n = c_1 \\ Ax_1^2 + Ax_2^2 + \dots + Ax_n^2 = c_2 \\ \dots = \dots \\ Ax_1^n + Ax_2^n + \dots + Ax_n^n = c_n \end{cases} \quad (52)$$

# Квадратурные формулы Чебышева

Из первого уравнения системы (52)

$$nA = c_0 \Rightarrow A = \frac{c_0}{n} \quad (53)$$

$$s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{c_k}{A}, k = 1, \dots, n$$

Корневой полином будем искать в виде

$$\omega(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (54)$$

$$\omega(x_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \omega(x_i) = s_n + a_1s_{n-1} + \dots + a_{n-1}s_1 + na_n = 0 \quad (55)$$

$$a_n = -\frac{1}{n}[s_n + a_1 s_{n-1} + \dots + a_{n-1} s_1] \quad (56)$$

(56) верно для любого  $n = 1, 2, \dots \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 = -s_1 \\ a_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + a_1 s_1) \\ a_3 = -\frac{1}{3}(s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1) \\ \dots = \dots \end{cases} \quad (57)$$

## Замечания

1. Нет гарантии, что корни  $x_i$  вещественны, различны и принадлежат  $[a, b]$ .
2. Если  $p(x) \equiv 1$ , то квадратурная формула существует и устойчива для  $n = 1, \dots, 7, 9$ .
3.  $p(x) \equiv 1$  позволяет строить обобщенные формулы  $\Rightarrow$  можно повысить точность.

Формула Тейлора.  $f(x) = 1$ ,  $[-1, 1]$ ,  $n=3$

$$A = \frac{C_0}{n} = \frac{2}{3}$$

$$S_1 = \frac{C_1}{A} = \int_{-1}^{+1} x dx / A = 0$$

$$S_2 = \frac{C_2}{A} = \int_{-1}^{+1} x^2 dx / A = \frac{2/3}{2/3} = 1$$

$$S_3 = \frac{C_3}{A} = \frac{0}{2/3} = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = -\frac{1}{2}(1 + 0 \cdot 0) = -\frac{1}{2} \\ a_3 = -\frac{1}{3}(0 + 0 \cdot 1 + (-\frac{1}{2}) \cdot 0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega(x) = x^3 - \frac{1}{2}x = x(x^2 - \frac{1}{2}) \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \frac{2}{3} \left[ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(0) + f(\frac{1}{\sqrt{2}}) \right]$$

# Квадратурные формулы с фиксированными узлами и коэффициентами

Пусть  $p(x) \equiv 1, [-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (58)$$

$$x_1 = -1, x_n = 1 \Rightarrow r_1 = 2$$

$$A_1 = -A_n = B \Rightarrow r_2 = 1$$

$r = 3 \Rightarrow$  ожидаемый алгебраический порядок точности равен

$$2n - 1 - r = 2n - 4 = 2(n - 2) = 2m.$$

Квадратурные формулы Ралстона

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx B[f(-1) - f(1)] + \sum_{k=1}^m B_k f(x_k) \quad (59)$$

Доказано, что квадратурные формулы Ралстона существуют всегда, причем парами.

ФОРМУЛА РАСПОДОНА.  $m=1$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx B \cdot [f(-1) - f(1)] + B_1 f'(x_1)$$

$$\begin{cases} B \cdot [(-1)^0 - (1)^0] + B_1 \cdot x_1^0 = c_0 = 2 \Rightarrow B_1 = 2 \\ B \cdot [(-1)^1 - (1)^1] + B_1 \cdot x_1^1 = c_1 = 0 \Rightarrow -2B + 2 \cdot \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Rightarrow B = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ B \cdot [(-1)^2 - (1)^2] + B_1 \cdot x_1^2 = c_2 = 2/3 \Rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \pm \frac{1}{\sqrt{3}} [f(-1) - f(1)] + 2 \cdot f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

# Обобщённые формулы Ралстона

Пусть отрезок разбит на  $N$  частей.

Квадратурная формула	Количество вычислений функции	Алгебраический порядок точности
Формула трапеций	$N + 1$	1
Формула Ралстона, 3 узла	$N + 2$	2
Формула Симпсона	$2N + 1$	3
Формула Ралстона, 4 узла	$2N + 2$	4
Формула Гаусса, 2 узла	$2N$	3
Формула Гаусса, 3 узла	$3N$	5
Формула Ралстона, 5 узлов	$3N + 2$	6

При одном и том же объеме вычислений квадратурные формулы Ралстона дают наибольший алгебраический порядок точности.

## Упражнения

1. Вывести формулы остаточного члена для формул (простейших и обобщённых) прямоугольников и формулы 3/8.
2. Простейшая формула трапеций для интеграла  $\int_0^2 f(x)dx$  даёт значение 4, а простейшая формула Симпсона - 2. Чему равно  $f(1)$ ?
3. Простейшая формула трапеций для интеграла  $\int_0^2 f(x)dx$  даёт значение 5, а простейшая формула средних прямоугольников - 4. Какой результат получится, если применить простейшую формулу Симпсона?
4. Пусть  $h = \frac{b-a}{3}$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$  и  $x_2 = b$ . Определите алгебраический порядок точности квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2).$$

5. Определите  $x_0$ ,  $x_1$  и  $c_1$  так, чтобы квадратурная формула

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(x_0) + c_1f(x_1)$$

имела максимально возможный алгебраический порядок точности.

6. Показать, что  $A_k$  в квадратурной формуле Эрмита равно  $\frac{\pi}{n}$ .
7. Доказать теорему о порядке точности  $2n - 1 - r$ .
8. Построить квадратурную формулу Лобатто для случая  $n = 3$  и интервала  $[-1, 1]$ .
9. Определите  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  так, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

имела алгебраический порядок точности 3.