POMDP值函数的分段线性表示

> **导语**：POMDP信念在最优策略下的值函数为分段线性凸函数(PLWC)，其可以由直线/超平面所表示(也就是常说的α-vector)。本篇笔记通过讲一个简单的例子来理解为什么值函数可以由直线/超平面所表示，使用的资料链接如下。
>
> 英文资料链接：http://cs.brown.edu/research/ai/pomdp/tutorial/pomdp-vi-example.html

正文：

首先简单介绍一下POMDP模型：

A POMDP models an agent acting in a partially observable stochastic environment. It can be specified formally as a tuple (S, A, Z, T, O, R), where S is a set of states, A is a set of agent actions, and Z is a set of observations. When the agent takes action $a \in A$ in state $s \in S$, it moves to a new state $s' \in S$ with probability $T(s, a, s') = p(s'|s, a)$ and receives observation $z \in Z$ with probability $O(s', a, z) = p(z|s', a)$. It also receives a real-valued reward $R(s, a)$.

A POMDP agent does not know the true state, but receives observations that provide partial information on the state. The agent thus maintains a belief, represented as a probability distribution over S. It starts with an initial belief b_0. At time t, it updates the belief according to Bayes' rule, by incorporating information from the action a_t taken and the resulting observation o_t:

$$b_t(s') = \eta O(s', a_t, z_t) \sum_{s \in S} T(s, a_t, s') b_{t-1}(s), \tag{1}$$

where η is a normalizing constant. The belief $b_t = \tau(b_{t-1}, a_t, z_t) = \tau(\tau(b_{t-2}, a_{t-1}, z_{t-1}), a_t, z_t) = \cdots = \tau(\cdots\tau(\tau(b_0, a_1, b_1), a_2, b_2), \ldots, a_t, z_t)$ is a sufficient statistic that contains all the information from the history of actions and observations $(a_1, z_1, a_2, z_2, \ldots, a_t, z_t)$.

A *policy* $\pi : \mathcal{B} \mapsto A$ is a mapping from the belief space $\mathcal{B}$ to the action space A. It prescribes an action $\pi(b) \in A$ at the belief $b \in \mathcal{B}$. For infinite-horizon POMDPs, the *value* of a policy π at a belief b is the expected total discounted reward that the agent receives by executing π:

$$V_\pi(b) = \mathbf{E}\Big(\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(s_t, \pi(b_t)) \;\Big|\; b_0 = b\Big). \tag{2}$$

其中，最优策略下的值函数(即获得最高奖励的策略)根据贝尔曼方程计算：

$$V^*(b) = \max_{a \in A} \left\{ \sum_{s \in S} b(s) R(s, a) + \gamma \sum_{z \in Z} p(z \mid b, a) V^*(\tau(b, a, z)) \right\}, \tag{1}$$

为了简化讲解，我们定义一个简单的POMDP模型：**2个state，2个action，3个observation**

一 Horizon=1

首先我们考虑Horizon=1时的值函数(指**最优值函数**)。

由于Horizon=1，因此我们不需要考虑未来的汇报，只需要考虑即时的奖励即可，此时值函数的更新公式为：

$$V^*(b) = \max_{a \in A} \left\{ \sum_{s \in S} b(s) R(s, a) \right\}, \tag{2}$$

由于我们有**两个状态**和**两个动作**，因此有**四个独立的即时奖励值**，即 $R(s_1, a_1), R(s_1, a_2), R(s_2, a_1), R(s_2, a_2)$。

同时，因为信念(belief)为状态空间的概率分布，因此我们只需将belief中state的概率分布作为奖励的权重即可。

例如：令$R(s_1,a_1)=1, R(s_1,a_2)=0, R(s_2,a_1)=0, R(s_2,a_2)=1.5$。

如果我们的belief是[0.25 0.75]，那么在这个信念状态下执行动作a_1的值是：

$$0.25\times 1+0.75\times 0=0.25。$$

类似地，动作a_2的值为：

$$0.25\times 0+0.75\times 1.25=1.125。$$

因此，我们可以计算$b(s_1)$为任意值($0\leq b(s_1)\leq 1$)时，执行a_1,a_2所获得的价值($x=b(s_1)$)：

$$V(b,a_1)=\sum_{s\in S}b(s)R(s,a_1)=1\cdot x+0\cdot(1-x)=x \tag{3}$$

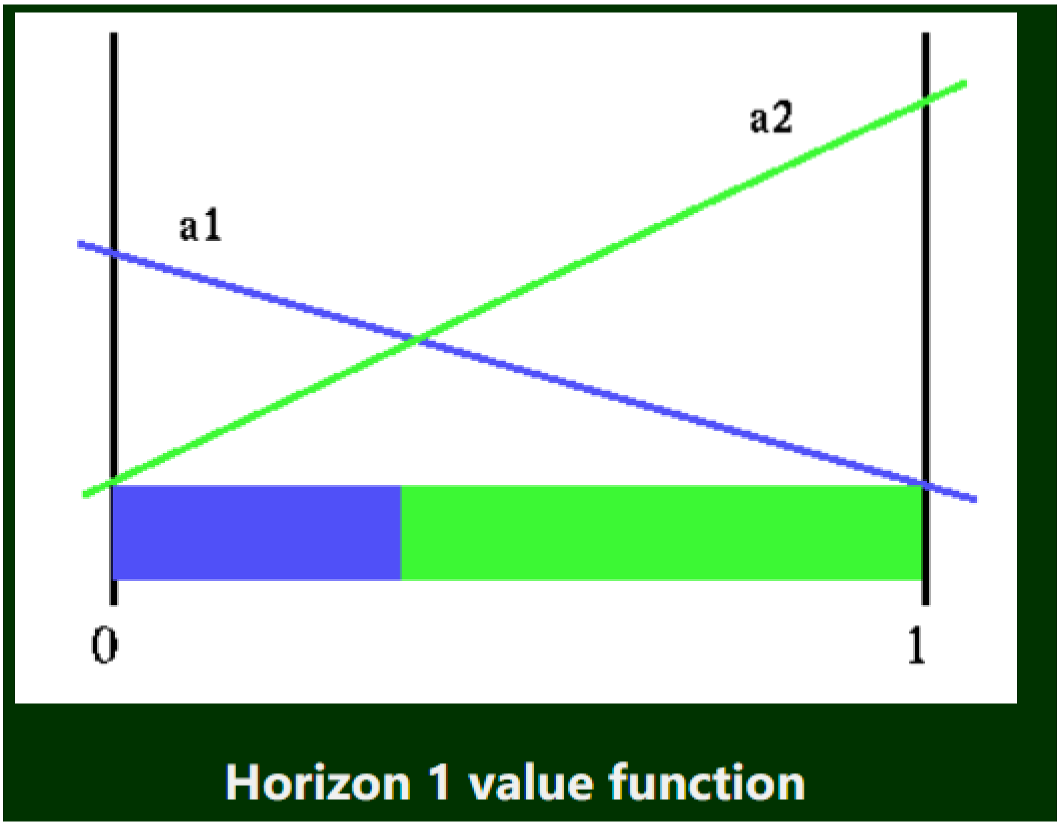
$$V(b,a_2)=\sum_{s\in S}b(s)R(s,a_2)=0\cdot x+1.5\cdot(1-x)=+1.5\cdot(1-x) \tag{4}$$

联立公式(1)(3)(4)可得：

$$V^*(b)=\max\{x,1.5\cdot(1-x)\}, \tag{5}$$

即最优值函数可以由两条直线所形成的分段函数所表示，如下图 (**其中蓝色直线为a_1的价值，绿色直线为a_2的价值，蓝色区域为行动a_1是最佳策略的所有信念状态，绿色区域为行动a_2是最佳策略的信念状态**)

(PS:**n个状态的概率分布可以用n-1维表示**，因此belief只需要用一维即可表示s_1和s_2的概率分布，其中横坐标$x=b(s_1)$)



二 Horizon=2

现在我们有了Horizon=1的价值函数，我们再来看一下Horizon=2时值函数如何计算。

我们的目标是，如何在执行两步动作的情况下(即Horizon=2)，找到信念状态对应的最高奖励。

为了展示值函数的构造细节，我们由浅入深将其分解为三步：

1. **当a和z给定时**，如何计算belief的价值。
2. **当a给定时**，如何计算belief的价值。
3. **如何计算belief对应的真实值函数。**

1.当a和z给定时，如何计算belief的价值。

当Horizon=2时，由公式(1)知，**belief对应的价值=即时奖励+下一步动作带来的奖励**，即(**为了简化描述，我们省略折扣因子**)：

$$V^*(b) = \max_{a\in A}\left\{\sum_{s\in S} b(s)R(s,a) + \sum_{z\in Z} p(z \mid b,a) V_{Horizon=1}(\tau(b,a,z))\right\}, \tag{6}$$

其中，$V_{Horizon=1}$为上文在Horizon=1时计算出的最优值函数。

因此，想要获得belief对应的最佳值函数，我们需要考虑两个action组成的所有可能的执行序列(即考虑所有的策略，然后选取最优的策略)。如同Horizon=1的情况一样，我们可以简单的计算出第一步动作对应的**即时奖励**，即：$\sum_{s\in S} b(s)R(s,a)$.

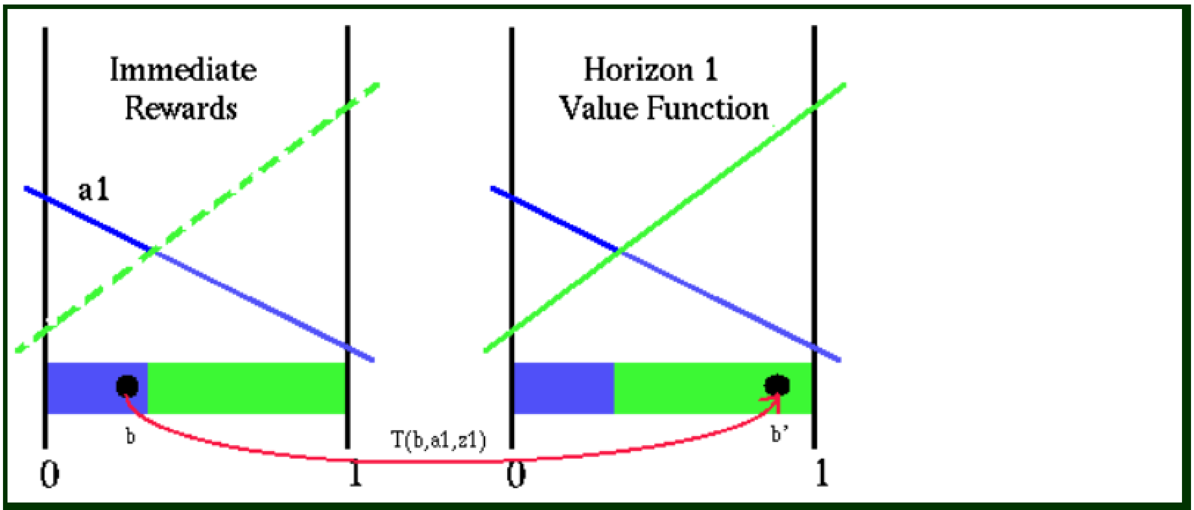
因此，唯一的问题是，我们如何在给定belief(b),action(a),observation(z)的情况下，计算更新后信念状态(b')的最高价值是什么。事实上，由于b,a,z都是完全给定的，因此我们可以唯一确定$b'=\tau(b,a,z)$，而b'的**最高价值**由$V^*(b')=V_{Horizon=1}(b')$可以决定。

故在给定a_1,z_1的情况下，b对应的价值函数为：

$$V^*(b,a_1,z_1) = \left\{\sum_{s\in S} b(s)R(s,a_1) + V_{Horizon=1}(\tau(b,a_1,z_1))\right\}, \tag{7}$$

因此，我们可以根据公式(7)来计算给定a,z时任意belief的价值

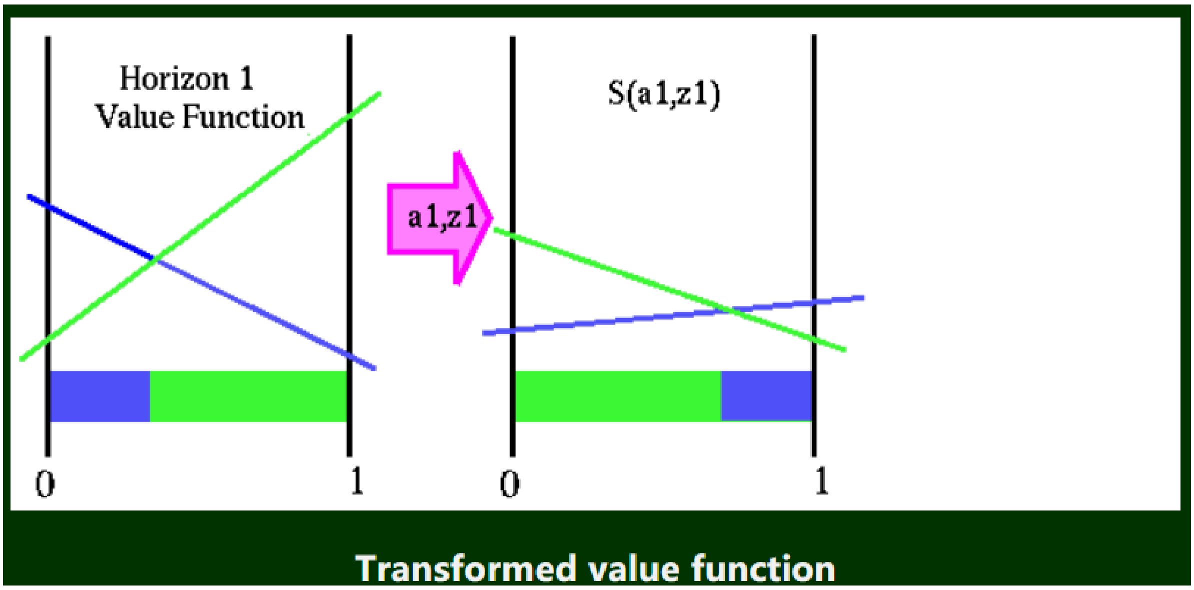
下图显示了此过程。左侧是**即时奖励函数**，右侧是Horizon=1的值函数。 动作a_2的立即奖励以虚线显示，因为在考虑给定动作a_1时，它不具备奖励。(假设我们给定的$a=a_1$)



Value of a fixed action and observation

注意图中$T(b,a_1,z_1)=\tau(b,a_1,z_1)$，为信念状态转移函数。 请注意，通过查看b'的位置，我们可以立即确定执行操作a_1之后应该采取的最佳操作。 信念状态b'位于绿色区域中，这意味着，如果我们步长为2，并且首先采取动作a_1，那么我们之后的最佳策略就是采取行动a_2。

为了使得结构更加清晰，我们令$S(a_1,z_1)=V_{Horizon=1}(\tau(b,a_1,z_1))$，并画出$S(a_1,z_1)$的图像如下：



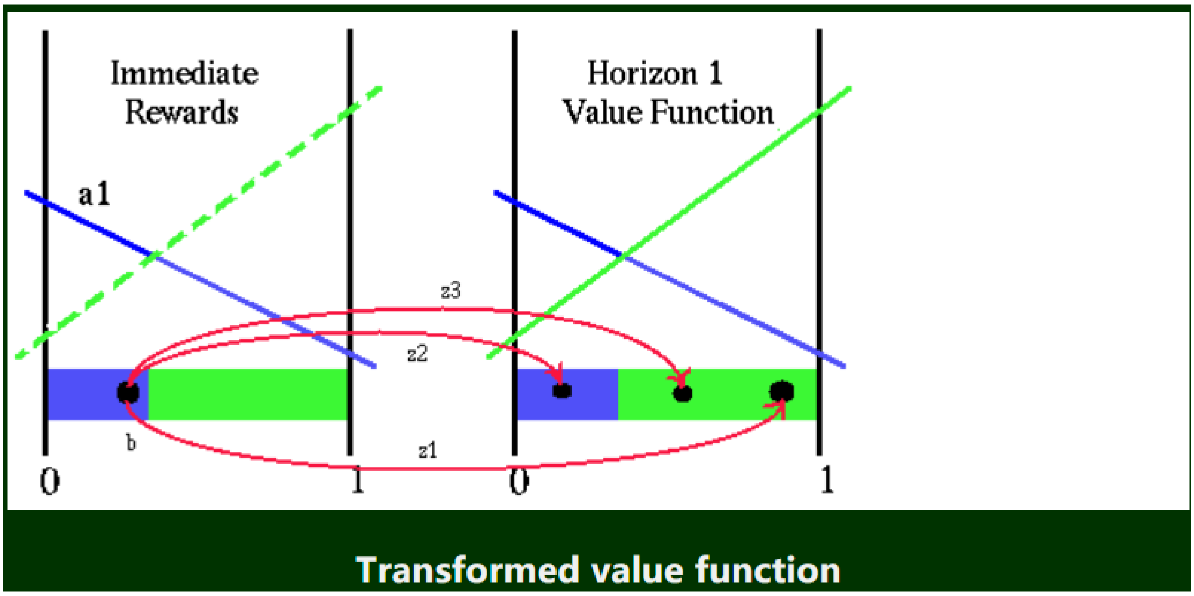
S函数可以帮助我们直接获得b对应的第二步的最高价值，而不需要经过两个函数变换(先将b变为b'，再根据$V_{Horizon=1}$计算b'价值)，原来的$V_{Horizon=1}$是b'的函数，而现在的S是b的函数。使用S函数的好处是：转换后的函数也是PWLC(Piecewise linear and convex)。

现在在任意给定a_i, z_j时，计算任意的belief的最高价值如下：

$$V^*(b, a_i, z_j) = \left\{ \sum_{s \in S} b(s) R(s, a_i) + S(b, a_i, z_j) \right\}, \tag{8}$$

2.当a给定时，如何计算belief的价值。

由于在POMDP中观测是具有概率性的，因此在执行完一个具体动作之后，会有多种可能的观测(我们无法确定是哪一个观测)，在这个例子中，有三种可能的观测z_1, z_2, z_3，**任意一个观测都会导致独立的信念状态(即对不同的z，$\tau(b, a_1, z)$的结果可能是不同的)**，如下图所示：

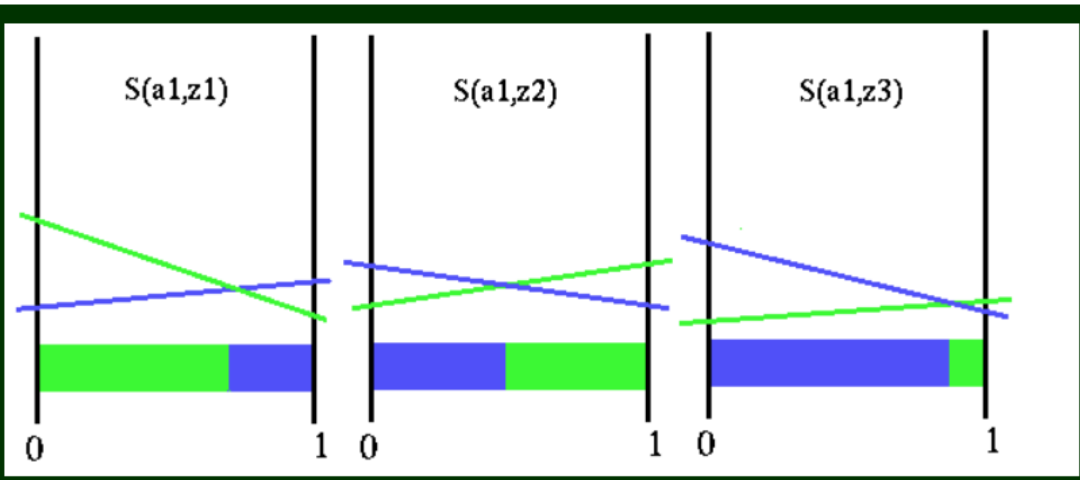


对于给定的belief，**每个观察值都有与之相关的特定概率。** 如果我们知道给定观测值时belief的值(即公式(8))，则在不知道观测值的情况下获得belief的值**只是将每个结果值乘以该观测对应的概率进行加权的问题。**

因此，当我们只给定了动作而不知道观测时，我们应该考虑所有可能的观测，即在观测层面上，对给定a, z的价值函数进行加权即可，公式如下：

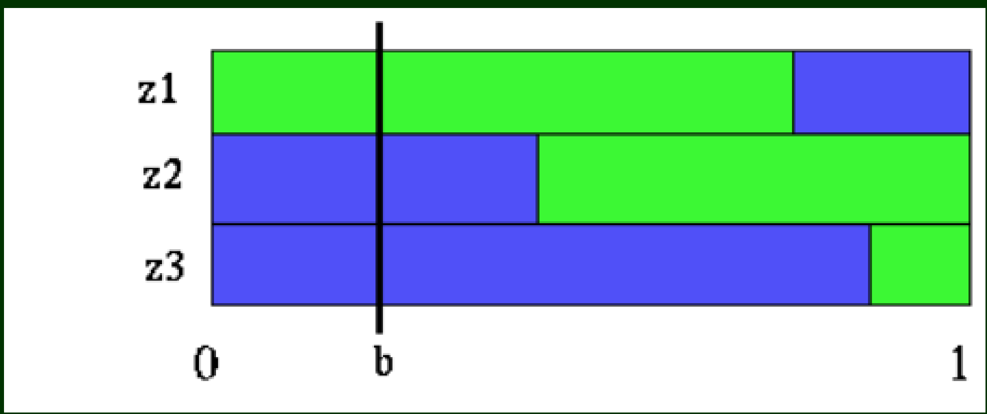
$$V^*(b,a_i)=\left\{\sum_{s\in S}b(s)R(s,a_i)+\sum_{z\in Z}p(z\mid b,a_i)S(b,a_i,z)\right\},\tag{9}$$

在这个例子中，对于动作a_1，我们需要计算在三种不同观测的情况下的S函数值，如下：



Transformed value function for all observations

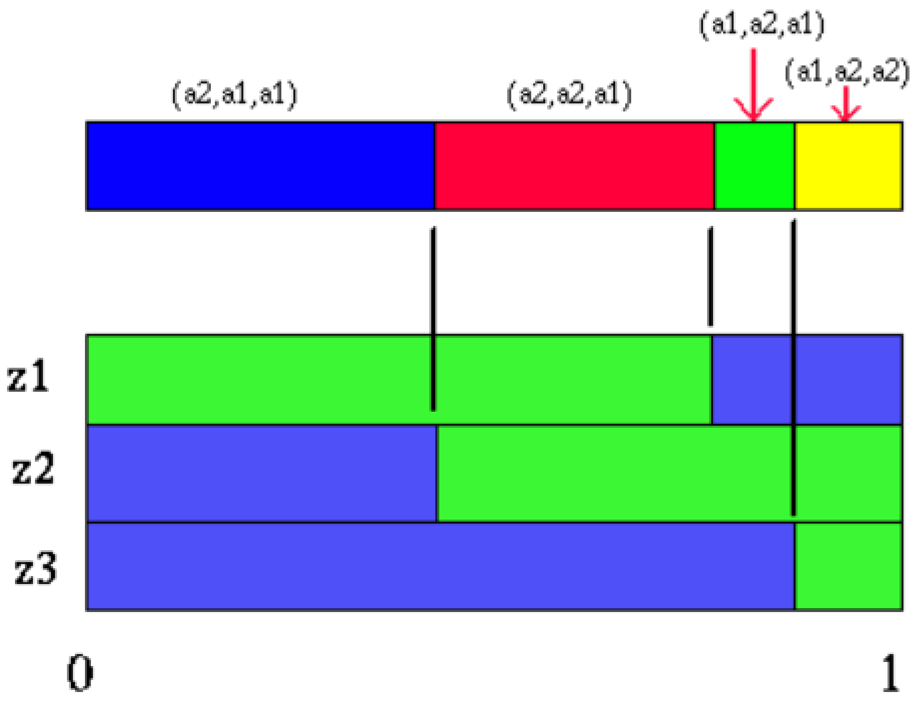
该图显示了动作a_1和所有三个观测值的S函数。 请注意，对于所有三个观测值,每个S函数都是不同的，且均对信念空间进行了不同的划分。所有这些暗示着，要执行的最佳下一个动作不仅取决于初始的信念状态，而且还取决于我们得到的观察结果，如下图所示，蓝色区域代表下一个最佳动作为a_1，绿色区域代表下一个最佳动作为a_2：



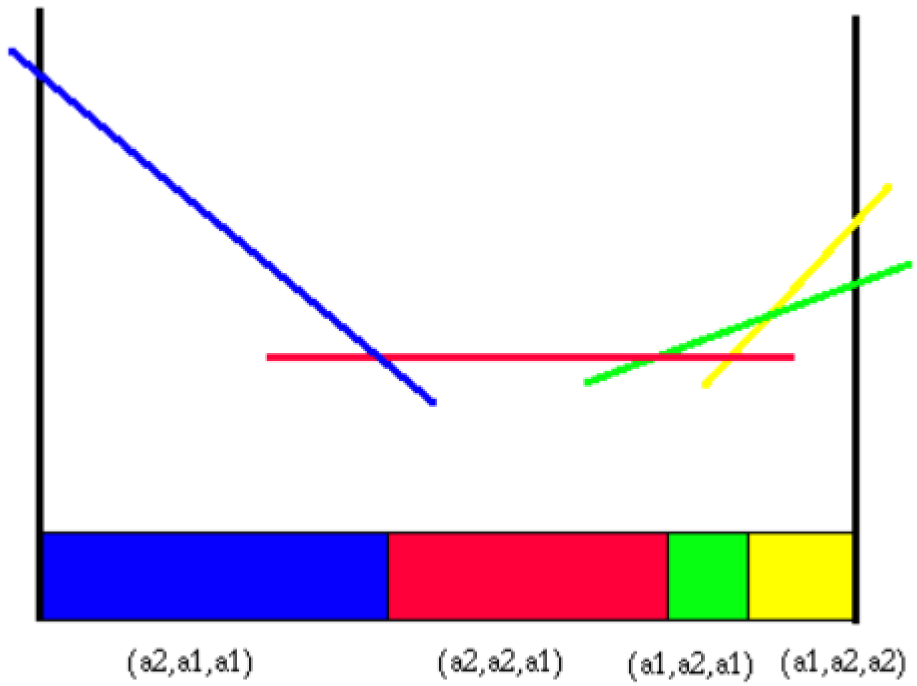
Belief point in transformed value function partitions

从上图可知：对信念状态b执行动作a_1后，如果我们观察到z_2或z_3，则下一步的最优动作为a_1，否则下一步最优动作为a_2。因此根据这个图，我们可以轻松的查看完整的最佳策略，且可以轻松的得到即时奖励$R(b,a_1)$和$S(a_1,z_i)$，从而得到$V(b)$的值。因此对于信念空间上的任意一个信念点b，我们都能画出对应的一条线，从而得出在信念点b下执行a_1后的最优策略，例如此时的最优策略为$[z_1:a_2;z_2:a_1;z_3:a_1]$。

然而我们知道$[z_1:a_2;z_2:a_1;z_3:a_1]$只是当信念为$b$时的最优未来策略，它并不是整个信念空间上的最优策略，我们根据下图可以看出，$[z_1:a_2;z_2:a_1;z_3:a_1]$仅仅只是蓝色分区处所有信念点的最优未来策略：



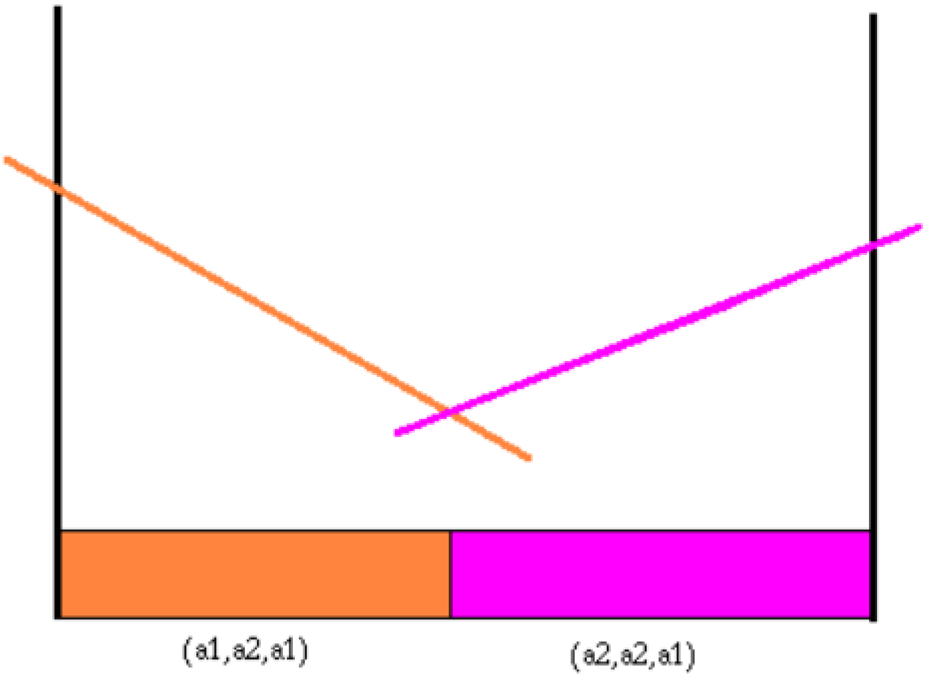
我们按照分区的不同，为四个具有不同最优未来策略的区域画出对应的价值函数$V(b,a_1)$(由公式(9)计算)如下：



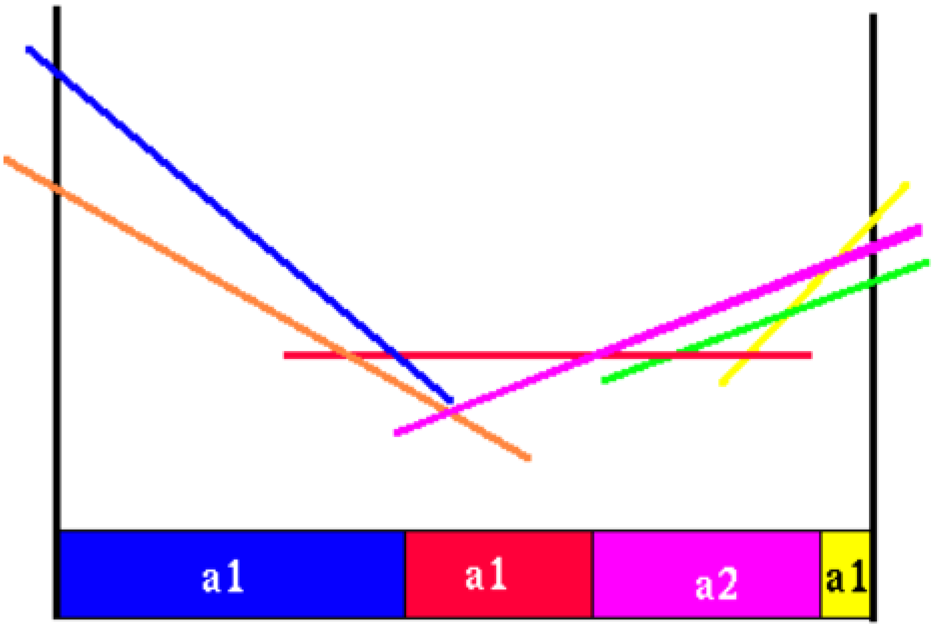
因此我们可以轻松的计算出$V^*(b,a_i)$的值函数和最佳策略。

3.如何计算belief对应的真实值函数。

在2中，我们知道了如何在给定b,a_1的情况下，得到未来的最优策略并计算$V^*(b,a_1)$。但是我们关心的不是$V^*(b,a_i)$而是$V^*(b)$的值，因此我们需要对a_2重复一遍2过程，得到$V^*(b,a_2)$的值函数和最佳策略如下图：



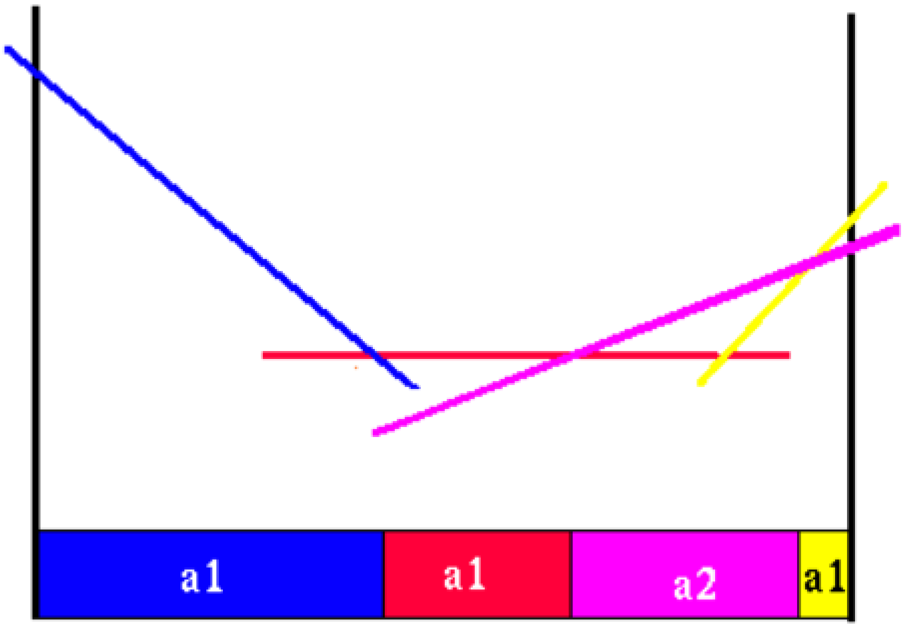
我们可以将两个动作的值函数结合在一起，选择具有更高价值的动作，如下图：



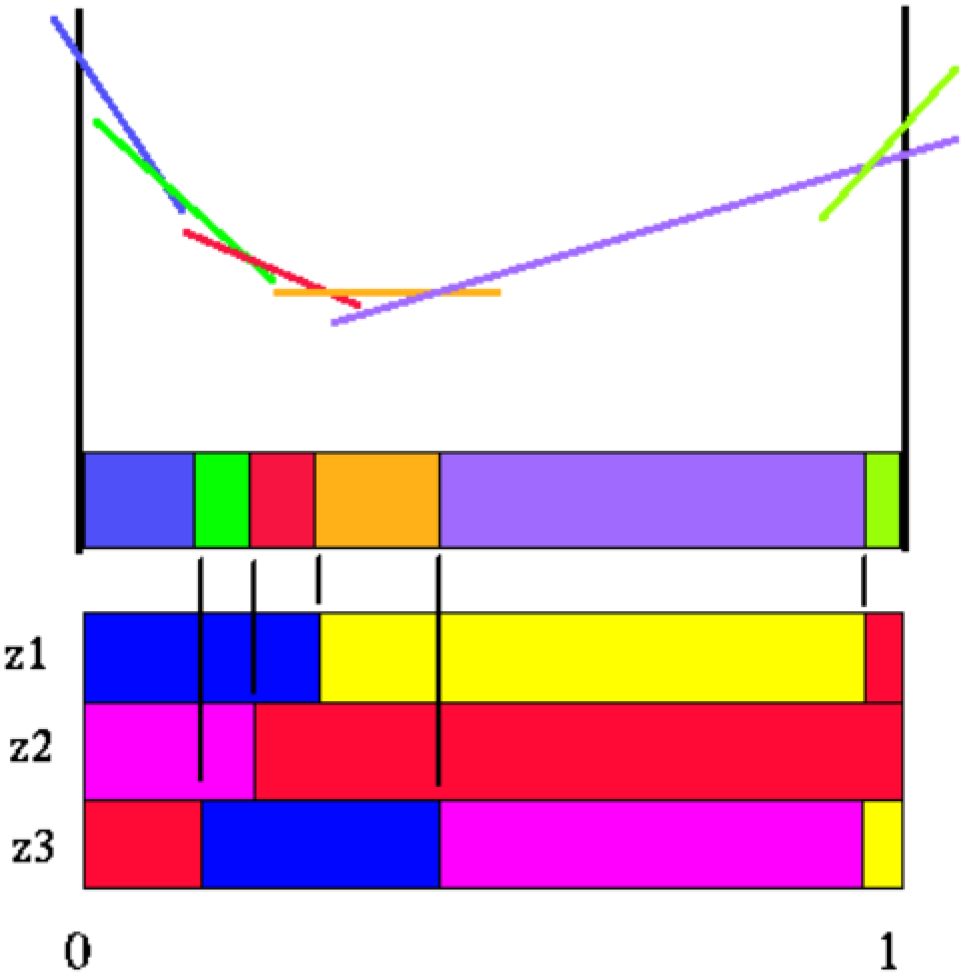
由于$V^*(b,a_1)$的蓝线大于$V^*(b,a_2)$，因此第一区域应该先执行动作a_1，再按$[z_1:a_2;z_2:a_1;z_3:a_1]$的最佳未来策略执行，剩下三个区域同理。我们可知对两个$V^*(b,a)$而言，其中总有价值更高线段，因此价值更低的线段会被舍弃，从而会产生更紧凑的Horizon=2的$V(b)$函数。

三 Horizon=3

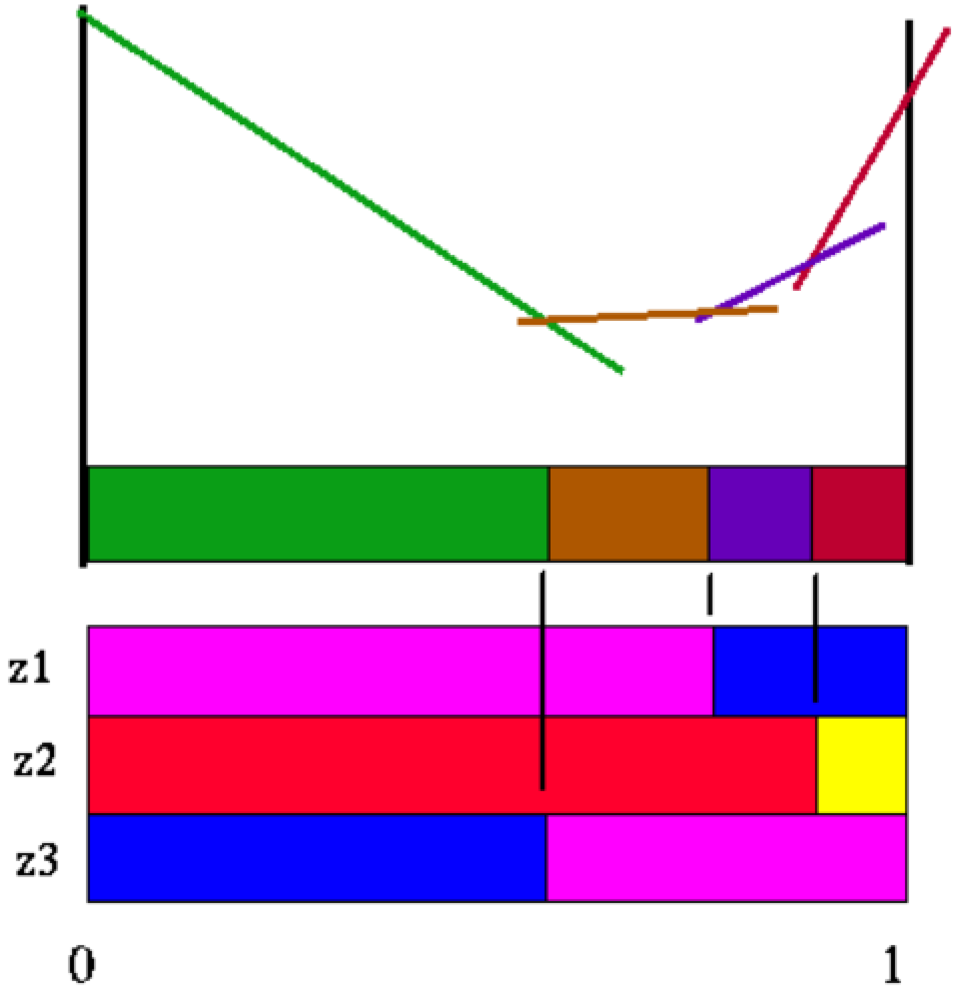
我们将把Horizon=2的情况拓展到Horizon=3的情况上来。我们首先画出Horizon=2的$V(b)$函数如下，值得注意的是其中每个颜色都代表不同的未来策略(在这个例子中，代表第二步应该执行的动作)：



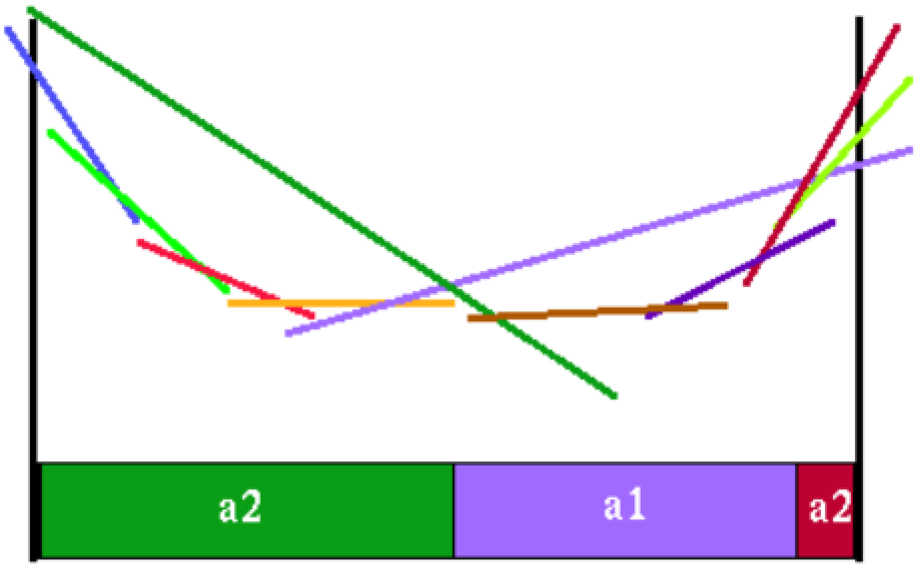
首先，我们依然是构造$V^*(b,a_1)$的值函数(由公式(9)计算，其中$S(a_1,z_1))=V_{Horizon=2}(\tau(b,a_1,z_1))$如下:



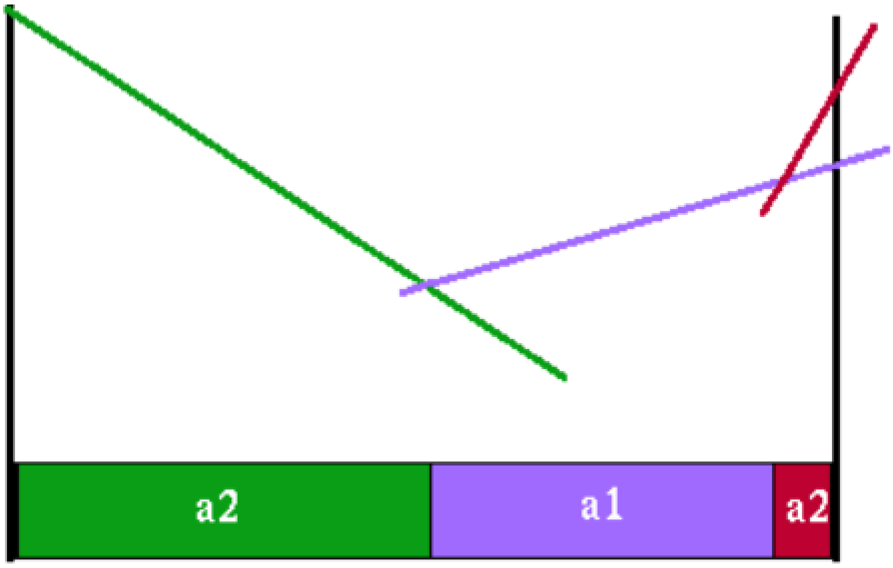
同样地，然后我们按照相同步骤构造$V^*(b,a_2)$如下:



最后，我们将$V^*(b,a_1)$与$V^*(b,a_2)$结合到一张图上，确定好策略的分区：



最终$V^*_{Horizon=3}(b)$函数如下：



我们可以对任意Horizon反复应用值迭代的方法构造$V^*_{Horizon=n}(b)$**的值函数，注意到对** $k<n, \forall a \in A$**，**$V^*_{Horizon=k}(b)$**和**$V^*(b,a)$**都是分段线性凸函数，因此根据数学归纳法易证** $V^*_{Horizon=n}(b)$**也是分段线性凸函数。**