期末急速复习

Luokey

2023 年 7 月 1 日

摘要

仅用于工程数学期末急速复习, 简单了解原理 (如果我愿意写的话), 了解解题时的一些注意事项.

1 喵

1

因为有限维线性空间加法是可交换的, 因此当成正常解方程就行.

2

证明是一组向量是一个空间的一组基, 就是证明这组向量之间线性无关, 并且向量数与空间维数相同, 求这个基下的坐标就是

证明线性无关这里举两种方法 (假设有 n 个 n 维向量):

1. 令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$, 解出 $k_i = 0$ 为唯一解即可证明.
2. 设矩阵 $A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]$, 计算 $|A| \neq 0$ 即可证明.

$\beta = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3$, 然后解出 n_1, n_2, n_3 就得到以 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 为基的坐标 $[n_1, n_2, n_3]$

3

通过 Schmidt 正交化计算标准正交基的过程

1. 第一个向量不变, 得到 β_1
2. 第二个向量减去与 β_1 同方向的部分, 即减去 $\dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$
3. 第三个向量减去与 β_1, β_2 同方向的部分
4. 直到最后一个向量减去与前面所有得到的 β 向量同方向的部分
5. 将所有得到的 β_i 进行单位化, 得到 η_i

例如: 我们有 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 = \alpha_1 \\
&\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\
&\cdots \\
&\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}
\end{aligned}
$$

然后单位化:

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{\beta_1}{|\beta_1|} \\
\eta_2 &= \frac{\beta_2}{|\beta_2|} \\
&\cdots \\
\eta_n &= \frac{\beta_n}{|\beta_n|}
\end{aligned}
$$

然后我们就得到了想要的一组单位正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$.

这里的 (α, β) 是内积, 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 计算方法为 $(\alpha, \beta) = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \sum a_i b_i$.

这个是只有实数情况下的计算方法 (这是个伏笔).

注: 之后就认为你会计算正交化了, 不再赘述.

4

要会求矩阵的逆, 我一般用增广的方法, 比如求 A^{-1}, 就是对 $[A|I]$ 进行初等**行**变换 (这里加粗了!), 变成 $[I|A^{-1}]$. 就求出来了. 那么可能有人会问, 欸? 你什么这样算出来就是逆呢? 那我们先假设我们要求的矩阵 A 有逆, 那么是不是有性质 $A^{-1}A = E = I$, 因此通过行变换, 就相当于在求逆, 我们通过一个 I 进行统计我们的行变换, 当 A 变成 I 时, 相当于 $A^{-1}[A|I] = [I|A^{-1}]$. 因此我们只做行变换得到的也是 A^{-1}.

因此得到 $A = PBP^{-1}$, 我们在求矩阵的高次方的时候, 经常都通过这种方式, 中间的 B 是一个简单矩阵, 那么就有 $A^n = (PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$, 中间的 $P^{-1}P = E$ 就两两消去了.

注: 判断一个方阵 A 有没有逆, 最简单的方法就是看行列式, $|A| \neq 0$ 则存在逆.

5

这个比较显然是可以搞成分块矩阵来计算的. 有结论

$$
\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix} = |A| \cdot |B|
$$

其中 A, B 是方阵即可.

然后还有结论, 若 A 可逆, 则有 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, 且 $|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1$, 且 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$(这个其实是前面一条推出来的).

6

根据总体 X, 求样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的该概率函数或概率密度.

顺序:

1. 已知总体的概率密度 $f(x)$
2. 所求的概率密度为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$.

注: 1. 需要知道参数为 λ 的 Poission 分布, $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \cdots$.

7

求可逆矩阵 P 使得 PA 为 Hermite 阶梯型矩阵, 其实这个思路和求矩阵的逆是一样的, $[A|I] \to P[A|I] = [H|P]$, 因此我们知道对 $[A|I]$ 做初等行变换, 使得 A 变为 H 即可得到所求的 P.