期末急速复习

Luokey

2023 年 7 月 1 日

摘要

仅用于工程数学期末急速复习, 简单了解原理 (如果我愿意写的话), 了解解题时的一些注意事项.

1 喵

1

因为有限维线性空间加法是可交换的, 因此当成正常解方程就行.

2

证明是一组向量是一个空间的一组基, 就是证明这组向量之间线性无关, 并且向量数与空间维数相同, 求这个基下的坐标就是

证明线性无关这里举两种方法 (假设有 n 个 n 维向量):

1. 令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$, 解出 $k_i = 0$ 为唯一解即可证明.
2. 设矩阵 $A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]$, 计算 $|A| \neq 0$ 即可证明.

$\beta = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3$, 然后解出 n_1, n_2, n_3 就得到以 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 为基的坐标 $[n_1, n_2, n_3]$

3

通过 Schmidt 正交化计算标准正交基的过程

1. 第一个向量不变, 得到 β_1
2. 第二个向量减去与 β_1 同方向的部分, 即减去 $\dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$
3. 第三个向量减去与 β_1, β_2 同方向的部分
4. 直到最后一个向量减去与前面所有得到的 β 向量同方向的部分
5. 将所有得到的 β_i 进行单位化, 得到 η_i

例如: 我们有 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\cdots$$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

然后单位化:

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}$$
$$\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}$$
$$\cdots$$
$$\eta_n = \frac{\beta_n}{|\beta_n|}$$

然后我们就得到了想要的一组单位正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$.

这里的 (α, β) 是内积, 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 计算方法为 $(\alpha, \beta) = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = \sum a_i b_i$.

这个是只有实数情况下的计算方法 (这是个伏笔).

注: 之后就认为你会计算正交化了, 不再赘述.

4

要会求矩阵的逆, 我一般用增广的方法, 比如求 A^{-1}, 就是对 $[A|I]$ 进行初等**行**变换 (这里加粗了!), 变成 $[I|A^{-1}]$. 就求出来了. 那么可能有人会问, 欸? 你什么这样算出来就是逆呢? 那我们先假设我们要求的矩阵 A 有逆, 那么是不是有性质 $A^{-1}A = E = I$, 因此通过行变换, 就相当于在求逆, 我们通过一个 I 进行统计我们的行变换, 当 A 变成 I 时, 相当于 $A^{-1}[A|I] = [I|A^{-1}]$. 因此我们只做行变换得到的也是 A^{-1}.

因此得到 $A = PBP^{-1}$, 我们在求矩阵的高次方的时候, 经常都通过这种方式, 中间的 B 是一个简单矩阵, 那么就有 $A^n = (PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$, 中间的 $P^{-1}P = E$ 就两两消去了.

注: 判断一个方阵 A 有没有逆, 最简单的方法就是看行列式, $|A| \neq 0$ 则存在逆.

5

这个比较显然是可以搞成分块矩阵来计算的. 有结论

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix} = |A| \cdot |B|$$

其中 A, B 是方阵即可.

然后还有结论, 若 A 可逆, 则有 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, 且 $|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1$, 且 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$(这个其实是前面一条推出来的).

6

根据总体 X, 求样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的该概率函数或概率密度.

顺序:

1. 已知总体的概率密度 $f(x)$
2. 所求的概率密度为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$.

注: 1. 需要知道参数为 λ 的 Poission 分布, $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \cdots$.

7

求可逆矩阵 P 使得 PA 为 Hermite 阶梯型矩阵, 其实这个思路和求矩阵的逆是一样的, $[A|I] \to P[A|I] = [H|P]$, 因此我们知道对 $[A|I]$ 做初等行变换, 使得 A 变为 H 即可得到所求的 P.

变换的结果大致形式是 $\begin{bmatrix} I & A \\ O & O \end{bmatrix}$, 比如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 如果没有零矩阵也很正常.

8

求满秩分解, 答案形式为 $A = F \cdot G$, 先通过第 7 题的方法得到阶梯型矩阵 H, 取非全零行作为 G, 然后我们根据 G 的行数, 取 A 的前几列作为 F 即可, 如果不确定最后再验算一下即可.

9

具体情况, 具体分析.

10

记结论:

1. 从 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 a, b 的相互独立的样本, 均值变量为 Y_a, Y_b 服从 $Y_a \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{a})$, $Y_b \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{b})$
2. 假设有两个正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则有 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 和 $X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

3. 若有 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则有 $P(X < a) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

11

主要是记几个结论就行.

1. 若 $X \sim N(0,1)$, 则有 $X^2 \sim \chi^2(1)$, 自由度为 1.
2. 若 X^2, Y^2 相互独立, 且 $X^2 \sim \chi^2(m)$, $Y^2 \sim \chi^2(n)$, 则有 $X^2 + Y^2 \sim \chi^2(m+n)$. 相减似乎没有什么结论. 括号里的是自由度.
3. 若 $X^2 \sim \chi^2(a)$, $Y^2 \sim \chi^2(b)$, 则有 $\frac{X^2/a}{Y^2/b} \sim F(a,b)$ 为 F 分布, 第一自由度为 a, 第二自由度为 b.
4. 若 $F \sim F(a,b)$, 则有 $\frac{1}{F} \sim F(b,a)$.
5. $F_\alpha(a,b) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(b,a)}$

我们可以看哦, 标准正态分布平方是卡方分布 (χ^2), 卡方分布相除是 F 分布 (不是简单的相除, 要先除以自己的自由度).

12

构造增广矩阵 $\mathbf{B} = [\mathbf{A}|b]$, 进行初等行变换, 分析即可.

13

用计算器进行估算即可. 模仿答案的格式即可.

14

没什么好的通法, 具体情况具体分析, 会答案的就行.

15

抽取容量为 k 的样本, 问:

1. 此样本最小值小于 a 的概率是多少?
2. 此样本最大值大于 b 的概率是多少?

1. 直接求最小值小于 a 的概率 $p = P(\min X_i < a)$ 比较难, 但是我们可以求所有值都大于等于 a 的概率, 即 $p = 1 - \prod_{i=1}^{k} P(X_i \geqslant a)$, 而可以进一步 $P(X_i \geqslant a) = 1 - P(X_i < a)$, 因此 $p = 1 - \prod(1 - P(X_i < a))$, 又因为此题是从正态分布 $N(\mu, \sigma)$ 的总体中抽取样板的, 因此我们可以进一步化简 $P(X < a) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$, 因此得到结果 $p = 1 - (1 - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}))^k$.
2. 直接求最大值大于 b 的概率 $p = P(\max X_i > b)$ 比较难, 因此我们可以求所有值都小于等于 b 的概率, 即 $p = 1 - \prod_{i=1}^{k} P(X_i \leqslant b)$, 而可以进一步 $P(X_i \leqslant b) = P(\frac{X_i-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$, 因此得到结果 $p = 1 - (\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}))^k$.

16

不难, 和前面第 4 题的思路也差不多.

17

首先我们要知道几个结论

1. 实对称矩阵一定能对角化
2. 同一个矩阵不同特征值对应的特征向量互相正交

因此做这题的时候, 我们先计算出特征值, 如果特征值都是一重的, 那么算出特征向量, 然后单位化, 拼在一起即可. 如果有多重的特征向量, 那么一个特征值对应的多个特征向量可以通过 Schmidt 正交化去使其正交.

例如对称方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 对应的特征向量正交化单位化后为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, 那么有 $Q = [\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n]$ 为所求正交矩阵. 有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

18

两个矩阵 A, B 相似, 则有

1. $|A| = |B|$
2. $tr(A) = tr(B)$, $tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹, 就是主对角线元素的和.

19

1. 用样本均值当成总体均值 $\alpha_1 = E(X) = \bar{x}$
2. 用样本方差当成总体方差 $\alpha_2 = S_x$
3. 通过 $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf\mathrm{d}x$ 去求出参数.

20

求 μ 与 σ^2 的极大似然估计, 过程:

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为对应样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一组观测值.
2. 令似然函数为 $L = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod f(x_i; \mu, \sigma^2)$
3. 然后一般对 L 取对数
4. 求 $\dfrac{\partial}{\partial \mu} L = \cdots = 0$ 解出 μ
5. 求 $\dfrac{\partial}{\partial \sigma^2} L = \cdots = 0$ 解出 $\sigma^2 =$ 一个关于 x_i 的表达式
6. 上面两步不排除要联立求解.
7. 总结: μ 的最大似然估计量为 $\hat{\mu} =$ 一个关于 X_i 的表达式, 就是把 x_i 换成 X_i, σ^2 同理.

21

证明统计量是 $E(X)$ 的无偏估计量:

例如: $t = w_1 X_1 + \cdots + w_n X_n$

$E(t) = w_1 E(X) + \cdots + w_n E(X) = \sum w_i E(X)$, 若 $E(t) = E(X)$, 即 $\sum w_i = 1$, 则 t 是总体均值 $E(X)$ 的无偏估计量.

计算方差

$D(t) = \sum w_i^2 D(X)$

然后算出最小的, 你就知道谁的无偏估计方差最小了.

22

只要会写出系数矩阵即可, 通过二次型写出系数矩阵 A, 系数矩阵一定是对称的, 因此可以求出正交矩阵 Q(上面讲过方法了), 然后经过的线性变换就是 $x = Qy$

23

证明是正定矩阵, 就只用顺序主子式大于 0 即可. 比如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ 的顺序主子式为 $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ 这三个就为 A 的顺序主子式, 应该看得出来什么意思.

24

懒惰 orz...

25

懒惰 orz...

26

懒惰 orz...

27

求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 矩阵.

1. 求 A 的特征值和对应的特征向量

有 $J = P^{-1}AP$, 则有 $AP = PJ$, 令 $P = (P_1, P_2, \cdots, P_k)$, 且 Jordan 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \cdots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

其中 n_i 表示 Jordan 标准型的阶数.

然后有

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_k) = (P_1, P_2, \cdots, P_k) \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \cdots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

因此有 $AP_i = P_i J_{n_i}(\lambda_i)$

其中 $P_i = (p_1^i, p_2^i, \cdots, p_{n_i}^i)$, p_k^i 为一个列向量.

因此

$$A(p_1^i, p_2^i, \cdots, p_{n_i}^i) = (p_1^i, p_2^i, \cdots, p_{n_i}^i) \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

因此得到

$$\begin{cases} Ap_1^i = \lambda_i p_1^i \\ Ap_2^i = \lambda_i p_2^i + p_1^i \\ \quad \vdots \\ Ap_{n_i}^i = \lambda_i p_{n_i}^i + p_{n_i-1}^i \end{cases}$$

得到结论

2. $(A - \lambda_i I_n)p_1^i = 0$,
$(A - \lambda_i I_n)p_j^i = p_{j-1}^i, (j = 2, 3, \cdots, n)$

因此第一个就是特征向量, 剩下的是一直迭代.

要保证后面是要有解的

3. 几何重数表示了以该特征值为特征值的 Jordan 块的个数

4. 设 A 为 n 阶方阵, λ_i 为其特征值, 则 A 的 Jordan 标准型 J 中以 λ_i 为特征值, 阶数为 l 的 jordan 块的个数为 $r_{l+1} + r_{l-1} - 2r_l$

其中 $r_l = rank[(\lambda_i I - A)^l]$, $r_0 = n$

感觉 4 不需要考虑, 老师应该没这么恐怖.(3 是为了确认老师没这么恐怖.)

28

和第四题讲的差不多, 两种情况: 1. 矩阵可对角化. 2. 矩阵不可对角化. 实际上没啥区别, 不可对角化就是搞成 Jordan 阵.

结论:

1. 代数重数大于几何重数则矩阵无法对角化
2. 代数重数等于几何重数则可以对角化

A 的代数重数就是指的 λ_i 的重数, 几何重数为 $n - rank(A - \lambda_i I)$.

得到 $P^{-1}AP = J$, J 为 Jordan 阵, 运气好就是对角矩阵, 然后 $A = PJP^{-1}$, $A^k = PJ^kP^{-1}$, 不管怎么样都会简化很多.

29

已知矩阵函数 $g(A)$, 那么就有特征函数 $g(\lambda)$,

1. 方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = |A - \lambda I|$
2. 通过矩阵函数 $g(A)$, 得到对应的特征多项式 $g(\lambda)$(就是把公式里的 A 换成 λ)
3. 分解成 $g(\lambda) = q(\lambda)f(\lambda) + r(\lambda)$, 其中 $r(\lambda)$ 的阶数是要比 $f(\lambda)$ 的阶数小 1.
4. 假设 $f(\lambda)$ 为 3 阶的, 那么设 $r(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$.
5. 将特征值带入则有 $f(\lambda_i) = 0$, 因此 $g(\lambda_i) = r(\lambda_i)$, 如果有重根就求导带入, 最终解出来系数.
6. 因此 $g(A) = a_0A^2 + a_1A + a_2I$. 算出最后结果即可.

注: 我们知道若 a 是 $f(\lambda)$ 的 k 重根, 那么 $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$.

30

我们先知道一个结论, 在工程数学考试中会让你求最小多项式的矩阵满足下面一个性质：最小多项式与矩阵的特征多项式有相同的根

例如: $f(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$

则所求的最小多项式的形式为 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\beta_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\beta_k}$

其中 $0 < \beta_i \leqslant \alpha_i$

然后从最低阶开始慢慢往上, 计算 $(A - \lambda_1)^1 \cdots (A - \lambda_k)^1$ 是否为零矩阵, 如果不为零, 则继续往上加数值, 直到第一个为零矩阵的数对

(这里各位可能会有疑问, 但是别想那么多！老师大概率只会出 $f(\lambda) = (\lambda - k)^a$ 次方这种难度的, 所以就不考虑太多了.)

31

这题和第 25 题差不多.

32

老师说不考

33

老师说不考

34

验证矩阵 A 为正规矩阵, 即满足 $A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$ 即可 (我考试的时候只写了一半啊啊啊啊)

A^{H} 表示 A 的共轭转置, 表示先对所有元素取共轭后转置. 平时看的转置 T 其实可以认为是一种退化.

求酉矩阵 U 使得 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵, 即求出 A 的特征值, 求处对应特征向量，然后单位化, 然后得到 $U = [\varepsilon_1 \ \cdots \varepsilon_n]$

注意:

1. 酉矩阵可以认为是拓展到复数的正交矩阵
2. 复数矩阵中的转置并不是单纯的转置, 都是共轭转置
3. 复数正交矩阵, 即酉矩阵, 即满足 $U^H U = UU^H = E$
4. 单位化复向量的时候, 除以的模是 $\sqrt{x^{\mathrm{H}} \cdot x}$

因为复数 $z = a + bi$ 的模长是 $|z| = a^2 + b^2$, 其中 a, b 为实数

上次说的伏笔就是这里, 在复数的情况下, 你判断两个向量 x, y 是否正交, 不是用 $x^{\mathrm{T}} \cdot y = 0$ 而是 $x^{\mathrm{H}} \cdot y = 0$, 要注意这个共轭转置! (我考试的时候忘了, 验算了好多次! 后面才想起来...)

35

求方阵 A 的谱半径, 算出 A 的特征值. 谱半径就是模最大的, $\rho(A) = \max|\lambda_k|$.

36

简单, 就是普通的高斯消去法加上了一个列主元，就是做高斯消去法的时候要找到当前列绝对值最大的那一项, 然后对应的那一行换到第一行.

37

求方阵 A 的 e^A 和 e^{At}

过程:

1. 求 A 的特征值和特征向量 α_i
2. 然后得到 $P = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n]$
3. 得到 Jordan 标准型 J

4. 得到 $A = PJP^{-1}$

5. 设 $f(x) = e^x$ 计算出 e^A

6. 设 $f(x) = e^{xt}$ 计算出 e^{At}, 这里我们认为 t 是常数

37 题目解答:

1. A 的特征值容易算为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$, 因此会有两个 Jordan 块, 对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的特征向量为 $[1,\ 0,\ -1]^{\mathrm{T}}$, $[\frac{4}{7},\ -\frac{5}{7},\ 0]^{\mathrm{T}}$, λ_3 对应的特征向量为 $[3,\ 0,\ 2]^{\mathrm{T}}$.

2. 得到 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. 得到 Jordan 标准型 $J = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$

4. 因此 $A = PJP^{-1}$

5. $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$, 因此 $f(A) = Pf(J)P^{-1} = P \begin{bmatrix} f(4) & & \\ & f(-1) & \frac{1}{1!}f'(-1) \\ & & f(-1) \end{bmatrix} P^{-1} =$

$P \begin{bmatrix} e^4 & & \\ & e^{-1} & e^{-1} \\ & & e^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}$ 然后就是简单的矩阵乘法

6. $f(x) = e^{xt}, f'(x) = te^{xt}$, 因此 $f(S) = Pf(J)P^{-1} = P \begin{bmatrix} f(4) & & \\ & f(-1) & \frac{1}{1!}f'(-1) \\ & & f(-1) \end{bmatrix} P^{-1} =$

$P \begin{bmatrix} e^{4x} & & \\ & e^{-t} & te^{-t} \\ & & e^{-t} \end{bmatrix} P^{-1}$ 然后就是简单的矩阵乘法

注: 1. 若 $A = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$, 则 $f(A) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & f(J_k) \end{bmatrix}$

因为 $P^{-1}AP = J$, 有 $f(A) = Pf(J)P^{-1}$

2. 对于每一个 Jordan 块, 有 $f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda_i) \\ & & \cdots & \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$

38

老师说不考

39

QR 分解不考, 如果考证明方程组有解, 那就只要算出 $r(A) = r([A|b])$ 即可.

40

奇异值分解

预期结果 $A = U\Sigma V$

对矩阵 A 进奇异值分解:

1. 算出 $A^H A$ 的特征值 λ_i
2. $\sqrt{\lambda_i}$ 就为奇异值
3. 求出 $A^H A$ 对应的特征向量, 并单位化得到 v_i.
4. 得到 $V = [v_1 \ \cdots \ v_n]$
5. 计算 $u_i = Av_i\Sigma_i^{-1}$, 其中 Σ_i 为 v_i 对应的奇异值, 即 v_i 对应的特征值的算术平方根.
6. 得到 $U = [u_1 \ \cdots \ u_n]$
7. Σ 除了主对角线上是奇异值, 其他都是 0.
8. 得到预期结果.

41

求 R_1 到 R_2 的基变换矩阵 P, 即满足 $R_2 = R_1 P$, 因此只要算 $P = R_1^{-1}R_2$ 即可.

求 R_1, R_2 下相同坐标的所有向量, 即 $R_1 x = R_2 x$, 因此即 $(R_1 - R_2)x = 0$, 解出来即可

42

知道在基 R_1 下的变换矩阵 A, 求在基 R_2 下的变换矩阵 B, 实际上就是先把这个变换矩阵变成基础的，再变成 R_2 的,

1. $R_1^{-1}AR_1$ 变成以最普通的基
2. 然后再变换成以 R_2 为基, 得到 $B = R_2^{-1}R_1^{-1}AR_1R_2$, 其实也可以求直接从 R_1 到 R_2 的变换, $P = R_1^{-1}R_2$, 然后得到 $B = P^{-1}AP$

43

用盖氏圆判断特征值是否都为实数

首先获得盖氏圆, 几阶方阵 A 就有几个盖氏圆, 每一行可以获得一个盖氏圆, 格式为

$G_i = \{z||z - a_{ii}| \leqslant b_i\}$

其中 a_{ii} 是主对角线上的元素, a_{ii} 是第 i 行的第 i 个元素, G_i 代表第 i 行得到的盖氏圆, 而 b_i 代表第 i 行除了 a_{ii} 以外的元素的绝对值的和.

1. 得到盖氏圆
2. 看看有多少个盖氏圆相交
3. 试着缩小盖氏圆的半径
4. 直到缩小到盖氏圆没有相交才能证明特征值都为实数

缩小方法:

1. 转置 (不一定能缩小)
2. 通过 $P^{-1}AP$ 进行控制矩阵, 其中 P 是对角矩阵, 比如说我们希望第一行缩小十倍, 那么就是 P 的第一个元素为 0.1 或者 10

44

就是设 $f(x)$ 等于迭代算式的右边部分, 然后进行求导, 判断如果在带入的值是小于 1 的, 那么则在这附近收敛.

45

老师说不考

46

老师说不考

47

老师说不考

48

给定计算表, 计算插值多项式, 实际上就是计算系数, 用行列式解就行.

49

老师说不考

50

老师说不考