工程数学第 X 次作业

姓名 - 学号

日期

1 作业

1.1 第 1 次作业

1. 已知向量 $\alpha_1 = [3, 1, 5, 2]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = [10, 5, 1, 10]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = [1, -1, 1, 4]^{\mathrm{T}}$. 若有方程 $3(\alpha_1 - \beta) + 2(\alpha_2 - \beta) = 5(\alpha_3 + \beta)$, 求 β.

Sol:

由题 $3(\alpha_1 - \beta) + 2(2\alpha_2 - \beta) = 5(\alpha_3 + \beta)$ 可得 $10\beta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3$, 因此 $\beta = \frac{3}{10}\alpha_1 + \frac{2}{10}\alpha_2 - \frac{5}{10}\alpha_3$, 代入 α_1, α_2, α_3

可得 $\boxed{\beta = [\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}]^{\mathrm{T}}}$.

2. 证明：$\left\{\alpha_1 = [1, 1, 0]^{\mathrm{T}},\ \alpha_2 = [0, 0, 2]^{\mathrm{T}},\ \alpha_3 = [0, 1, 2]^{\mathrm{T}}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基; 并求 $\beta = [5, 7, -2]^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标.

Sol: 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 则有：

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ 2k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

因此 α_1, α_2, α_3 线性无关, 因此是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基. 设 $\beta = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3$。因此有

$$\begin{cases} n_1 = 5 \\ n_1 + n_3 = 7 \\ 2n_2 + 2n_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -3 \\ n_3 = 2 \end{cases}$$

因此 β 在这个基下的坐标为 $\boxed{[5, -3, 2]^{\mathrm{T}}}$.

3. 已知 $\left\{\alpha_1 = [1, 1, 0, 0]^{\mathrm{T}},\ \alpha_2 = [0, 0, 1, 1]^{\mathrm{T}},\ \alpha_3 = [1, 0, 0, -1]^{\mathrm{T}},\ \alpha_4 = [0, 1, 1, 0]^{\mathrm{T}}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一个基; 用 Schmidt 正交化方法求 $\mathbb{R}^4$ 的标准正交基。

Sol: Schmidt 正交化：令 $\beta = \alpha_1 = [1, 1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, $\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = [0, 0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$, $\beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$.

再将向量单位化得

$\eta_1 = \dfrac{\beta_1}{|\beta_1|} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0]^{\mathrm{T}}$,

$\eta_2 = \dfrac{\beta_2}{|\beta_2|} = [0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]^{\mathrm{T}}$,
$\eta_3 = \dfrac{\beta_3}{|\beta_3|} = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$,
$\eta_4 = \dfrac{\beta_4}{|\beta_4|} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$.
至此我们得到了所求的 $\mathbb{R}^4$ 的标准正交基.

4. 已知 $AP = PB$, 求 A 和 A^8。其中:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sol: 因为有 $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, 因此 P 可逆, 又 $AP = PB$, 因此存在 P^{-1}, 使得 $A = PBP^{-1}$ 成立。

$$\begin{aligned} P^{-1} =& \frac{1}{|P|} P^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此有 $\boxed{A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$

$A^8 = (PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1}) = PBP^{-1}PBP^{-1} \cdots PBP^{-1} = PB^8P^{-1}$, $\blacksquare$
又 $B^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此

$$\boxed{\begin{aligned} A^8 =& PB^8P^{-1} = PP^{-1} \\ =& E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&6&0&0\\0&0&3&5\\0&0&1&2\end{bmatrix}$, 求 $|A|$ 和 $|A^{-1}|$.

Sol:

$\boxed{|A|=\begin{vmatrix}1&2\\2&6\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&5\\1&2\end{vmatrix}=2}\neq 0$, 因此 A 可逆, 有 $AA^{-1}=E\Rightarrow |A||A^{-1}|=1\Rightarrow \boxed{|A^{-1}|=\dfrac{1}{2}}$.

1.2 第 2 次作业

6. 设 X_1,X_2,X_3 是取自正态总体 X 的样本, 就下列总体 X 给出这个样本的概率函数或概率密度:

(1) X 服从参数为 λ 的 Poission 分布;

(2) X 服从参数为 λ 的指数分布, 即概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$;

(3) X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布;

(4) X 服从参数为 a,b 的 β 分布, 即概率密度为 $f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$,

记 $X\sim B(a,b)$.

Sol:

(1) X 服从参数为 λ 的 *Poisson* 分布为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\cdots$, $P(X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3)=\boxed{\dfrac{\lambda_{x_1+x_2+x_3}\cdot e^{-3\lambda}}{x_1!\cdot x_2!\cdot x_3!}}$.

(2) X 服从参数为 λ 的 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$,

$f(x_1,x_2,x_3)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)=\boxed{\begin{cases}\lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)}, & x_1>0,x_2>0,and\ x_3>0,\\ 0, & x_1\leqslant 0,x_2\leqslant 0,or\ x_3\leqslant 0.\end{cases}}$

(3) X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & else \end{cases}$, 则

$$f(x_1,x_2,x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3) = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^3}, & a < x_1,x_2,x_3 < b \\ 0, & else. \end{cases}}$$

(4) X 服从参数为 a,b 的 β 分布,

$$f(x_1,x_2,x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)$$

$$= \boxed{\begin{cases} \left[\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right]^3 (x_1x_2x_3)^{a-1}\times \\ \qquad [(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)]^{b-1]}, & 0 < x_1,x_2,x_3 < 1, \\ 0, & else. \end{cases}}$$

1.3 第 3 次作业

7. 求可逆矩阵 P, 使得 PA 为 Hermite 阶梯型矩阵, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sol: 由于 $P[A:I] = [PA:P] = [H:P]$, 构造矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

因此得到

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

8. 求矩阵 A 的一个满秩分解, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Sol:
对 A 进行初等行变换得到

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此将 A 分解为 $A = F \cdot G$, 其中

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}}, \boxed{G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}$$

9. 设 x 的相对误差为 1%, 求 x^n 的相对误差.
Sol:
$e_r = \dfrac{e}{x^*} = \dfrac{x^* - x}{x^*} = 1\%,$
$$e_r' = \frac{e'}{(x^*)^n} = \frac{(x^*)^n - x^n}{(x^*)^n} = 1 - \left(\frac{x}{x^*}\right)^n = \boxed{1 - 0.99^n}.$$

10. 从总体 $N(20;(\sqrt{3})^2)$ 中抽取容量分别为 10 和 15 的两个相互独立的样本, 求这两个样本均值之差的绝对值小于 0.3 的概率. 这里 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $s_x^2=\dfrac{1}{n-1}(x_i-\bar{x})^2$, $s_y^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$.

Sol:

易知 $Y_{10}\sim N\left(20,\dfrac{3}{10}\right)$, $Y_{15}\sim N\left(20,\dfrac{1}{5}\right)$, 则 $Y_{10}-Y_{15}\sim N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $Pr(|Y_{10}-Y_{15}|<0.3)=2\cdot\Phi(0.3\sqrt{2})-1=2\cdot\Phi(0.4243)-1$, 查表可得 $\boxed{Pr(|Y_{10}-Y_{15}|<0.3)=0.3286}$.

11. 设 $X_1,\cdots,X_5$ 是取自总体 $N(0;1)$ 的样本,

(1) 求常数 c_1,d_1, 使 $c_1(X_1+X_2)^2+d_1(X_3+X_4+X_5)^2$ 服从 χ^2 分布, 并指出其自由度.

(2) 求常数 c_2,d_2, 使 $\dfrac{c_2(X_1^2+X_2^2)}{d_2(X_3+X_4+X_5)^2}$ 服从 F 分布, 并指出其自由度.

Sol:

(1) 已知 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$, $\dfrac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$, 因此有 $\left(\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2\sim\chi^2(1)$, $\left(\dfrac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(1)$, $\left(\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(2)$.

因此得 $\boxed{c_1=\dfrac{1}{2},\ d_1=\dfrac{1}{3}}$. 自由度为 2.

(2) 由上可知 $X_1^2+X_2^2\sim\chi^2(2)$, $\left(\dfrac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(1)$, 因此有 $\dfrac{\frac{X_1^2+X_2^2}{2}}{\frac{(x_3+X_4+X_5)^2}{3}}\sim F(2,1)$,

因此得 $\boxed{c_2=3,\ d_2=2}$, 第一自由度为 2, 第二自由度为 1.

12. λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$$

有唯一解、无解或无穷多解? 在有无穷多解时, 求其一般解.

Sol:

构造增广矩阵 $B=[A|b]$, 再进行初等行变换, 其中 A 为系数矩阵.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\
2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\
-2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1
\end{array}\right]
\Rightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c}
2-\lambda & 5-\lambda & -4 & 2 \\
0 & 2-\frac{(5-\lambda)(2-\lambda)}{2} & 2-2\lambda & \lambda-1 \\
0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda
\end{array}\right]
$$

i) $\boxed{\text{当 } \lambda=1 \text{ 时, 方程组有无穷多解.}}$

$$
B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

此时一般解为

$$
\boxed{\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ x_3 = \frac{k_1+2k_2-1}{2} \end{cases}}
$$

ii) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 有

$$
B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{(5-\lambda)(2-\lambda)}{2}-2\lambda & \lambda+\frac{(5-\lambda)(2-\lambda)}{2}-3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

当 $\lambda=10$ 时, 有 $B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $r(A)<r(B)$, 因此,

$\boxed{\text{当 } \lambda=10 \text{ 时此时方程组无解}}$.

iii) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, $r(A)=r(B)$, 因此, $\boxed{\text{当 } \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq 10 \text{ 时, 方程有唯一解}}$. $\blacksquare$

1.4 第 4 次作业

13. 取 $\sqrt{2}\approx 1.4$, 欲计算 $(\sqrt{2}-1)^6$ 的近似值, 有下列四个算式可采用:

(1) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$;

(2) $(3-2\sqrt{2})^3$;

(3) $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$;

(4) $99-70\sqrt{2}$.

分析这四个算式哪一个所得的误差最小。

Sol:

$x=(\sqrt{2}-1)^6 \approx 0.4142^6 \approx 5.0506\times 10^{-3}$

1. $x \approx x_1^* = \dfrac{1}{(1.4+1)^6} = \dfrac{1}{2.4^6} \approx 5\times 10^{-3}$, 误差 $e_1 = x_1^* - x \approx -5.06\times 10^{-5}$;

2. $x \approx x_2^* = (3-2\sqrt{2})^3 = 0.2^3 \approx 8\times 10^{-3}$, 误差 $e_2 = x_2^* - x \approx 2.9494\times 10^{-3}$;

3. $x \approx x_3^* = \dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} = \dfrac{1}{5.8^3} \approx 5\times 10^{-3}$, 误差 $e_3 = x_3^* - x \approx -5.06\times 10^{-5}$;

4. $x \approx x_4^* = 99-70\sqrt{2} \approx 1.0$, 误差 $e_4 = x_4^* - x = \approx 9.95^{-1}$.

我们发现, $\boxed{\text{第 (1) 和第 (3) 个算式的误差最小}}$.

14. 如何计算下列函数值才比较准确:

1. $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$, $|x| \ll 1$;
2. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$, $|x| \gg 1$;
3. $\dfrac{1-\cos x}{x}$, $|x| \ll 1$;
4. $\arctan(x+1) - \arctan(x)$, $|x| \gg 1$.

Sol:

1. 两个相近的数相减会造成误差. $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x} = \boxed{\dfrac{2x^2}{2x^2+3x+1}}$

2. 两个相近的数相减会造成误差. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{x-\dfrac{1}{x}} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}}$

3. 两个相近的数相减会造成误差. $\dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{1-(1-\frac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4))}{x} \approx \boxed{\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{24}}$

4. 两个相近的数相初造成误差. $\arctan(x+1)-\arctan(x) = \arctan\dfrac{1}{x^2+x+1} \approx \dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{3(x^2+x+1)^3} \approx \boxed{\dfrac{1}{x^2}}$

15. 设总体 X 服从正态分布 $N(12, 2^2)$, 现在随机抽取容量为 5 的样本, 问:

1. 此样本最小值小于 10 的概率是多少?
2. 此样本最大值大于 15 的概率是多少?

Sol: 易知 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-12}{2}$ 服从标准正态分布,

1. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 为样本, 则 $p = Pr(\min X_i < 10) = 1-Pr(\min X_i \geqslant 10) = 1-\prod_{i=1}^{5} Pr(X_i \geqslant 10) = 1-[Pr(X_i \geqslant 10)]^5$, $Pr(X_i \geqslant 10) = Pr(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \geqslant \dfrac{10-\mu}{\sigma}) = 1-\Phi(\dfrac{10-12}{2}) = 1-\Phi(-1) \approx \boxed{0.8413}$.
   $p = 1-[Pr(X_i \geqslant 10)]^5 \approx 1-0.8413^5 \approx 0.5785$
2. 同理, 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 为样本, 则 $q = Pr(\max_i \leqslant 15) = 1-[Pr(X_i \leqslant 15)]^5 = 1-\Phi^5(\dfrac{15-12}{2}) \approx \boxed{0.2923}$.

1.5 第 5 次作业

16. 已知 3 阶方阵 A 的属于特征值 $1, 0, -1$ 的特征向量依次为 $x_1 = [1, 2, 3]^T$, $x_2 = [2, -2, 1]^T$, $x_3 = [-2, -1, 2]^T$, 求 A 和 A^8.

Sol: 令 $X = [x_1 \mid x_2 \mid x_3]$, $AX = X\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{bmatrix}$,

因 $|X| = -3 \neq 0$, 有 $A = X\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{bmatrix}X^{-1}$, 则 $X^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

$$A = X\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{bmatrix}X^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}}.$$

$$A^8 = X\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{bmatrix}^8 X^{-1} = X\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{bmatrix} X^{-1} = \boxed{\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8\end{bmatrix}}.$$

17. 求正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵, 其中

$$A = \begin{bmatrix}5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

Sol: 求 A 的特征值有 $|A-\lambda I| = 0$, 得

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}5-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(10-\lambda) = 0$$

因此得到 A 的特征值为 $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 对 $\lambda_1 = 10$, 由特征方程 $|A - \lambda_1 I|X = 0$ 得到一个解 $X_1 = [-2, 2, -1]^T$, 单位化得到 $\varepsilon_1 = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]^T$.

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 由 $|A - \lambda_2 I|X = 0$ 得到 $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ 及一个解 $x_2 = [1, 1, 0]^T$, $x_3 = [-1, 1, 4]^T$, 单位化得到 $\varepsilon_2 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^T$, $\varepsilon_3 = [-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}]^T$.

令 $\boxed{Q = [\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3] = \begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}}$,

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{bmatrix}10 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

18. 设 $A = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 \\ 2 & x & 2 \\ 4 & 2 & -1\end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix}5 & & \\ & y & \\ & & -5\end{bmatrix}$ 相似, 求 x, y.

Sol: 由于 $A \sim B$, 因此有 $|A| = |B|$ 且 $tr(A) = tr(B)$.

$$\begin{cases} x + 16 + 16 - 16x + 4 + 4 = -25y \\ -1 + x - 1 = 5 + y - 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}}$$

19. 设样本 (1.3, 0.6, 1.7, 2.2 0.3, 1.1) 是取自具有概率密度

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}, & 0<x<\beta\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

的总体, 用矩估计法估计总体均值、总体方差及参数 β.

Sol: 总体均值: $\alpha_1=E(x)$, 用矩估计法估计得到 $\boxed{\hat{\alpha}_1=\bar{x}=1.2}$.

总体方差: $\alpha_2=M_k'(x)$, 用矩估计法得到 $\boxed{\hat{\alpha}_2=S_x=0.488}$.

利用总体均值估计参数: 由于

$$\alpha_1=E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\beta)\mathrm{d}x=\int_0^\beta\frac{x}{\beta}\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2\beta}\right|_0^\beta=\frac{\beta}{2}$$

则有 $\beta=2\alpha_1$。所以 β 矩估计值为 $\boxed{\hat{\beta}_1=2\bar{x}=2.4}$.

20. 设总体 X 服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$, 其概率函数为

$$f(x,\mu,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2\right], & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

其中, μ,σ^2 均未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自这个总体的样本, 求 μ 与 σ^2 的极大似然估计量.

Sol: 似然函数为

$$\begin{aligned}L(\mu,\sigma^2)&=\prod_{i=1}^n f(x_i,\mu,\sigma^2)\\&=\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\Big)^n\prod_{i=1}^n x_i^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(\ln x_i-\mu)^2\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\ln L(\mu,\sigma^2)\\&=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^n(\ln x_i-\mu)^2\Big)\end{aligned}$$

故似然方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L=\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n(2\ln x_i-2\mu)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n(\ln x_i-\mu)^2\Big)=0\end{cases}$$

解得 $\boxed{\begin{cases}\mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\ln x_i - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\Big)^2\end{cases}}$

21. 设 X_1, X_2, X_3 是取自总体 X 的样本, 证明下列统计量都是总体均值 $E(X)$ 的无偏估计量:

$$
\begin{aligned}
t_1(X_1, X_2, X_3) &= \frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3; \\
t_2(X_1, X_2, X_3) &= \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3; \\
t_3(X_1, X_2, X_3) &= \frac{1}{7}X_1 + \frac{3}{14}X_2 + \frac{9}{14}X_3.
\end{aligned}
$$

并问哪一个无偏估计量方差最小?

Sol: 上述式子具有一般形式 $t_i(X_1, X_2, X_3) = w_{1,i}X_1 + w_{2,i}X_2 + w_{3,i}X_3$, $\sum_{j=1}^{3} w_{j,i} = 1$,

$E[t_i(X_1, X_2, X_3) - E(X)] = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} w_{j,i}E[X_j] - E(X)\Big(\sum_{j=1}^{3} w_{j,i} - 1\Big) = 0$,

$\boxed{\text{从而得证上述式子为 } E(x) \text{ 的无偏估计量}}$. 其均方误差

$$
\begin{aligned}
r =& E[t_i(X_1, X_2, X_3) - E(x)]^2 \\
=& E[t_i(X_1, X_2, X_3)^2] + E[E(X)]^2 - 2E[t_i(X_1, X_2, X_3)E(X)] \\
=& \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} w_{j,i}^2 X_j^2 + \frac{3}{3}E(X)^2 - \frac{2}{3}E(X)\sum_{j=1}^{3} wj, iX_j \\
=& \sum_{j=1}^{3}[w_{j,i}^2 E[X_j - E(X)]^2] \\
=& \sum_{j=1}^{3} w_{j,i}^2 \cdot S(X)
\end{aligned}
$$

均方误差 $r(t_1) = \frac{9}{25}S(X)$, $r(t_2) = \frac{7}{18}S(X)$, $r(t_3) = \frac{94}{196}S(X)$, 因此 $\boxed{\text{无偏估计量 } t_1 \text{ 方差最小}}$.

个人感觉更好的答案:

$E(t_1) = E(\frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3) = \frac{2}{5}E(X_1) + \frac{1}{5}E(X_2) + \frac{2}{5}E(X_3) = E(X)$
$E(t_2) = E(\frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3) = \frac{1}{6}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) + \frac{1}{2}E(X_3) = E(X)$
$E(t_3) = E(\frac{1}{7}X_1 + \frac{3}{14}X_2 + \frac{9}{14}X_3) = \frac{2}{5}E(X_1) + \frac{1}{5}E(X_2) + \frac{2}{5}E(X_3) = E(X)$
因此上述式子为 $E(X)$ 的无偏估计量
$D(t_1) = D(\frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3) = (\frac{4}{25} + \frac{1}{25} + \frac{4}{25})D(X) = \frac{9}{25}D(X)$
$D(t_2) = D(\frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3) = (\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4})D(X) = \frac{7}{18}D(X)$
$D(t_3) = D(\frac{1}{7}X_1 + \frac{3}{14}X_2 + \frac{9}{14}X_3) = (\frac{1}{49} + \frac{9}{196} + \frac{81}{196}) = \frac{47}{98}D(X)$
因此可知无偏估计量 t_1 的方差最小.

1.6 第 6 次作业

22. 用正交线性变换将二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 化为标准型, 并给出所用的正交线性变换.

Sol: 系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$. 得到 A 得特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

对于 $\lambda_1 = -1$, 解线性方程组 $(A - \lambda I)x = 0$, 得一个基础解系 $x_1 = [2, -2, -1]^T$, 单位化后得 $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}[2, -2, -1]^T$.

对于 $\lambda_2 = 2$, 解线性方程组 $(A - \lambda I)x = 0$, 得一个基础解系 $x_2 = [2, 1, 2]^T$, 单位化后得 $\epsilon_2 = \frac{1}{3}[2, 1, 2]^T$.

对于 $\lambda_3 = 5$, 解线性方程组 $(A - \lambda I)x = 0$, 得一个基础解系 $x_3 = [1, 2, -2]^T$, 单位化后得 $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}[1, 2, -2]^T$.

于是, 令 $Q = [\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3] = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T}$, 则 Q 为正交矩阵, 且经正交线性变换 $x = Qy$, 二次型 f 转化为 $\boxed{f = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2}$.

23. 问 t 取何值时, 对称矩阵 A 是正定的, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$$

Sol: f 为正定二次型得充要条件是, 顺序主子式都大于 0, 即 $1>0$, $\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 2\end{vmatrix}=2-t^2>0$, $\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-t\end{vmatrix}=t(t+1)(t+2)>0$.

解得 $\boxed{t\in(-1,0)}$, 此时 f 为正定二次型.

24. 随机地从一批钉子中抽取 16 只, 测得其长度 (单位: 厘米) 为

$$2.14, 2.10, 2.13, 2.15, 2.13, 2.12, 2.13, 2.10,$$
$$2.15, 2.12, 2.14, 2.10, 2.13, 2.11, 2.14, 2.11$$

假定钉长分布是正态的, 求总体均值 μ 的双侧 90% 置信区间:

(1) 若已知 $\sigma=0.01$ 厘米;

(2) 若 σ 未知.

Sol:

(1) 一个正态总体下 σ^2 已知, 随机变量 $J=\sqrt{n}\dfrac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ 服从标准正态分布, 因此取 $\alpha=0.1$. 则 $\mu\in[\mu_0,\mu_1]$, $\mu_0=\bar{X}-\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\mu_1=\bar{X}+\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. 得到 $\bar{X}=2.125$, 即 $\mu_0=2.125-1.6448\cdot\dfrac{0.01}{\sqrt{16}}=2.1209$, 同理 $\mu_1=2.1291$. $\boxed{[2.1209, 2.1291]}$

(2) 一个正态总体下 σ^2 未知, 随机变量 $J=\sqrt{n}\dfrac{(\bar{X}-\mu)}{S}$ 服从 $t(n-1)$ 分布, 取 $\alpha=0.01$, 则 $\mu\in[\mu_0,\mu_1]$, $\mu_0=\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$, $\mu_1=\bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$. 得到 $\bar{X}=2.125$, $S=0.0171$, 即 $\mu_0=2.125-1.7531\cdot\dfrac{0.0171}{\sqrt{16}}=2.1175$, $\mu_1=2.1325$. $\boxed{[2.1175, 2.1325]}$

25. 甲乙两位化验员独立地对一种聚合物的含氯量用相同的方法各做了 10 次测定, 得 $s^2=0.5419$, $s_2^2=0.6050$. 求他们测定值得方差比得双侧 90% 置信区间, 假定测定值服从正态分布.

Sol: 两个正态总体下 μ_1,μ_2 未知, 随机变量 $J=\dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ 服从 $F(m-1,n-1)$ 分布, 因此, 取 $\alpha=0.1$, 则 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\in[k_0,k_1]$, $k_0=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}$, $k_1=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}$.

得到, $k_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)} = \frac{0.5419}{0.6050} \cdot \frac{1}{F_{0.95}(9,9)} = 0.2818$,
$k_1 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)} = \frac{0.5419}{0.6050} \cdot \frac{1}{F_{0.05}(9,9)} = 2.8471$.

$\boxed{[0.2818, 2.8471]}$

26. 设从某种型号的一大批晶体管中随机抽取 100 只样品, 测得其寿命标准差 $s = 45$ 小时, 求这批晶体管寿命标准差 σ 得双侧 95% 置信区间.

Sol: 根据辛钦中心极限定理, 设随机变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相互独立, 服从同一分布且有有限的数学期望 μ 和方差 σ^2, 则随机变量 $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, 满足 $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. 一个正态总体在 μ 未知时, $J = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布, 则有 $\sigma^2 \in [\sigma_0^2, \sigma_1^2]$. $\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$, $\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$, 得到 $\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{99 \cdot 45^2}{\chi^2_{0.975}(99)} \approx 1561.1$, 同理可得 $\sigma_1^2 \approx 2732.7$, 即 $\sigma^2 \in [1561.1, 2732.7]$. 因此标准差的 90% 置信区间为: $\boxed{\sigma \in [39.51, 52.28]}$.

1.7 第 7 次作业

27. 求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 矩阵, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sol: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3(\lambda-4)$

可知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 4$.

当 $\lambda = 4$ 时, $A - 4I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 得到其中一个基础解系 $x_1 = [-3\ 1\ 0\ 0]^T$, 它是 A 属于特征值 4 的特征向量;

当 $\lambda = 2$ 时, 考虑线性方程组 $(A-2I)x = y$, 即 $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$. 由于 $r = (A - 2I) = 3$, 所以特征值 2 的几何重数时 $4 - 3 = 1$. 对增广矩阵实施初等行变换, 解得 $x_2 = [0\ 0\ 1\ 0]^T$. 将 $y = x_2$ 代入 $(A-2I)x = y$ 解得任意一个解 $x_3 = [-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ 0]^T$. 令 $y = x_3$ 任取一个解 $x_4 = [-\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ 0\ 1]^T$, 此时 x_1, x_2, x_3, x_4 线性无关.

令 $P = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4] = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

则有 $AP = P \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$, 由于 $|P| \neq 0$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

28. 求 A^k(k 是正整数), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sol: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$ 可知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 由于 $(A-2I)x_1 = 0$, 得到其中一个基础解系 $x_1 = [1\ 0\ 2]^T$, 它是 A 属于特征值 1 的特征向量.

当 $\lambda = 2$ 时, 由于 $r(A - 2I) = 2$, 所以特征值 2 的几何重数时 3-2=1. $(A-2I)x_2 = 0$, 得到其中一个基础解系 $x_2 = [1\ 1\ 2]^T$, 它是 A 属于特征值 2 的特征向量; 将 $y = x_2$ 代入 $(A-2I)x = y$ 解得任意一个解 $x_2 = [\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]^T$.

$$P = [x_1\ x_2\ x_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

由于 $A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$,

因此 $A^k = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^k P^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1+k2^k & 2^k-1 & 2^k-1 & -k2^k-1 \\ k2^k & 2^k & -k2^k-1 & \\ 2-(k-1)2^{2^k-1} & 2^{k+1}-2 & (1-k)2^k & \end{bmatrix}}.$

29. 求 $g(A) = a^8 - 9A^6 + A^4 - 3A^3 + 4A^2 + I$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sol: 方阵 A 的特征多项式为, 为 $f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

且 $g(A)$ 对应的特征多项式 $g(\lambda) = \lambda^8 - 9\lambda^6 + \lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 1$. $g(\lambda)$ 除以 $f(\lambda)$ 得到表达式 $g(\lambda) = q(\lambda)f(\lambda) + r(\lambda)$, 其中 $q(\lambda)$ 和 $r(\lambda)$ 都是多项式, 且余式 $r(\lambda)$ 的次数至少比 $f(\lambda)$ 的次数低 1 次. 即 $r(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. 代入得到 $g(\lambda) = q(\lambda)f(\lambda) + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$.

将特征值 1, 3 分别代入, 得 $a_0 + a_1 + a_2 = g(1) = -5$, $9a_0 + 3a_1 + a_2 = g(3) = 37$. 又 $g'(\lambda) = q'(\lambda)f(\lambda) + q(\lambda)f'(\lambda) + 2a_0\lambda + a_1$, 有 $g'(1) = 2a_0 + a_1 = -43$, 解得

$$\begin{cases} a_0 = 32 \\ a_1 = -107 \\ a_2 = 70 \end{cases}$$

因为 $f(\lambda)$ 是 A 的零化多项式, 得

$$\boxed{g(A) = r(A) = 32A^2 - 107A + 70I = \begin{bmatrix} 16 & -21 & -42 \\ -21 & 16 & 42 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}$$

30. 求下列方阵得最小多项式:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1&1\\-4&-1&-1&1\\&&2&1\\&&-1&0\end{bmatrix}.$$

Sol: $\det(A-\lambda I)=(\lambda-1)^4$, 故 A 得最小多项式的形式是 $f(\lambda)=(\lambda-1)^n, n\in[1,4]$,

$$(A-I)=\begin{bmatrix}4&1&1&1\\-4&-2&-1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\neq O,\ (A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&-4&-8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\neq O,$$

$$(A-I)^3=\begin{bmatrix}0&0&-2&-2\\0&0&4&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\neq O,$$ $(A-I)^4=O$, 因此 A 的最小多项式是 $\boxed{f(\lambda)=(\lambda-1)^4}$.

1.8 第 8 次作业

31. 从两批电子元件中随机抽取一些样品, 测得它们的电阻 (单位: 欧姆) 如下：

甲批: 0.140; 0.138; 0.143; 0.142; 0.144; 0.137;

乙批: 0.135; 0.140; 0.142; 0.136; 0.138; 0.140;

假定这两批电子元件的电阻都服从正态分布, 问在显著性水平 0.05 下, 能否认为这两个正态总体的方差相等?

Sol: 由所给数据可得 $\bar{x}=0.1407$, $\bar{y}=0.1385$, $s_1^2\approx 7.867\times 10^{-6}$, $s_2^2=7.1\times 10^{-6}$.

得到检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

应用 F 检验, 得到检验统计量的观测值为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=1.108$, 而在显著水平 $\alpha=0.05$ 下, $F_{0.975}(5,5)=7.1464$, $F_{0.025}(5,5)=F_{0.975}^{-1}(5,5)=0.1399$. 显然 $0.1399<1.108<7.1464$, 所以不能拒绝 H_0, $\boxed{\text{可以认为这两个正态总体的方差相等}}$.

32. 电话交换台每分钟接到互换的次数服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$, 今观测了 100 个时段, 每个时段一分钟, 共有 585 次呼唤, 问在显著性水平 0.10 下, 能否认为该电环交换台每分钟接到互换的次数服从 $\lambda=6$ 的 Poisson 分布?

Sol: 检验假设 $H_0: \lambda = 6,\ H_1: \lambda \neq 6$.

根据泊松分布, 检验统计量的观测值为 $\bar{x} = 5.85$, 由于 $n = 100$ 较大, 所以近似地有：$\sqrt{n}\dfrac{\bar{x} - E(x)}{s} \sim N(0;1)$

由 Poisson 分布性质可得, $E(x) = \lambda,\ s = \sqrt{\lambda}$, 因此检验统计量观测值为：$\sqrt{100}\dfrac{|5.85 - 6|}{\sqrt{6}} \approx 0.6124$, 又因为 $\alpha = 0.1$, 因此 $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.95} \approx 1.645$, 显然 $1.645 > 0.6124$, 所以不能拒绝 H_0。即可以认为 $\boxed{\text{服从 } \lambda = 6 \text{ 的 Poisson 分布}}$.

33. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu;1)$ 的样本, 其中 μ 未知, 要检验假设

$$H_0: \mu \geqslant 0;\ H_1: \mu < 0$$

在显著性水平 α 下, 采用拒绝域为

$$W_1 = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \big| \sqrt{n} \cdot \bar{x} < -u_{1-\alpha}\big\}$$

的 μ 检验。

(1) 求这个 u 检验的功效函数 $\beta(\mu)$

(2) 当 $\alpha = 0.05$ 时, 如果要求 $\mu \leqslant -0.1$ 时, 这个 u 检验的 II 类风险不大于 0.05, 那么样本容量 n 至少应取多大?

Sol:

(1) 该检验得功效函数为

$$\begin{aligned}\beta(\mu) =& P_\mu\big\{(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_1\big\} \\ =& P_\mu\big\{\sqrt{n} \cdot \bar{X} < -\mu_{1-\alpha}\big\} \\ =& P_\mu\big\{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu) < -\mu_{1-\alpha} - \sqrt{n} \cdot \mu\big\}\end{aligned}$$

由于 $\bar{X} \sim N(\mu; \dfrac{1}{n})$, 故 $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N(0;1)$, 所以记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布 $N(0;1)$ 的分布函数, 则有

$$\boxed{\beta(\mu) = 1 - \Phi(u_{1-\alpha} + \sqrt{n} \cdot \mu),\ \mu \in \Theta = \{\mu_0; \mu_1\}}.$$

(2) 依题意 $1 - \beta(\mu) \leqslant 0.05$, 则 $\Phi(u_{1-\alpha} + \sqrt{n} \cdot \mu) \geqslant 1 - \beta(\mu)$, $\sqrt{n} \geqslant \dfrac{u_{1-\alpha} + \Phi^{-1}(1 - \beta(\mu))}{\mu} = \dfrac{u_{0.95} + u_{0.95}}{0.1} \approx 32.898$,$n \geqslant 32.898^2 \approx 1082.28$, 即样本数量至少为 $\boxed{1083}$ 个。

1.9 第 9 次作业

34. 验证 $A=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}i & -4\\ 4 & \sqrt{2}i\end{bmatrix}$ 是正规矩阵, 并求酉矩阵 U 使得 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵.

Sol: 因为 $A^HA=\begin{bmatrix}18 & \\ & 18\end{bmatrix}=AA^H$, $\boxed{\text{所以 } A \text{ 是正规矩阵}}$.

根据 Schur 定理, 存在酉矩阵 U 使 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵。由 $|A-\lambda I|=0$ 算出特征值 $\lambda_1=3\sqrt{2}i$, $\lambda_2=-3\sqrt{2}i$. 对应特征值 $3\sqrt{2}i$ 的特征向量 $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}i\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$, 以 ε_1 为第一列的一个酉矩阵可取为 $\boxed{U=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}i & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -i\end{bmatrix}}$

可以验证 $U^{-1}AU=\begin{bmatrix}3\sqrt{2}i & \\ & -3\sqrt{2}i\end{bmatrix}$.

35. 求 $A=\begin{bmatrix}1+i & 3\\ 2 & 1-i\end{bmatrix}$ 的谱半径 $\rho(A)$.

Sol: 由 $|A-\lambda I|=0$ 算出特征值 $\lambda_1=1+\sqrt{5}$, $\lambda_2=1-\sqrt{5}$.
于是 $S_p(A)=\{1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\}$, 所以 $\boxed{\rho(A)=1+\sqrt{5}}$.

36. 用 Gauss 消去法和列主元消去法求解

$$\begin{cases}4x_1-1.24x_2+0.3x_3=-11.04,\\ 2x_1+4.5x_2+0.36x_3=0.02,\\ 0.5x_1+1.1x_2+3.1x_3=6.\end{cases}$$

Sol: 根据题意, 方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix}4 & -1.24 & 0.3 & -11.04\\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02\\ 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6\end{bmatrix}$$

通过高斯消去法得

$$
\begin{bmatrix} \boxed{4} & -1.24 & 0.3 & -11.04 \\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \\ 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \end{bmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1.24 & 0.3 & -11.04 \\ 0 & \boxed{5.12} & 0.21 & 5.54 \\ 0 & 1.26 & 3.062 & 7.38 \end{bmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1.24 & 0.3 & -11.04 \\ 0 & 5.12 & 0.21 & 5.54 \\ 0 & 0 & 3.001 & 6.017 \end{bmatrix}
$$

回代求解得到

$$
\boxed{\begin{aligned} x_3 &= \frac{6.017}{3.011} = 2 \\ x_2 &= \frac{5.54 - 0.21x_3}{5.12} = 1 \\ x_1 &= \frac{-11.04 - 0.3x_3 + 1.24x_2}{4} = -2.6 \end{aligned}}
$$

1.10 第 10 次作业

37. 求下列方阵 A 的函数 e^A 和 e^{At}:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

Sol: $|A - \lambda I| = -(\lambda+1)^2(\lambda-4) = 0$, 得特征值 $\lambda_! = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$, 对应的 λ_1, λ_2 得特征向量为 $[1,\ 0,\ -1]^{\mathrm{T}}$, $[\frac{4}{7},\ -\frac{5}{7},\ 0]^{\mathrm{T}}$, 对应的 λ_3 的特征向量为 $[3,\ 0,\ 2]^{\mathrm{T}}$.

则 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = -\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & -15 \\ 0 & -35 & 0 \end{bmatrix}$. 于是, 有 $A = P\begin{bmatrix} 4 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix}P^{-1}$, 因此

$$\boxed{\begin{aligned}
e^{\mathrm{A}} &= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4} & & \\ & e^{-1} & e^{-1} \\ & & e^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & -15 \\ 0 & -35 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 15e^{4}+10e^{-1} & 12e^{4}-47e^{-1} & 15e^{4}-15e^{-1} \\ 0 & 25e^{-1} & 0 \\ 10e^{4}-10e^{-1} & 8e^{4}+27e^{-1} & 10e^{4}+15e^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
e^{\mathrm{A}t} &= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4t} & & \\ & e^{-t} & te^{-t} \\ & & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & -15 \\ 0 & -35 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 15e^{4t}+10e^{-t} & 12e^{4t}-(12+35t)e^{-t} & 15e^{4t}-15e^{-t} \\ 0 & 25e^{-t} & 0 \\ 10e^{4t}-10e^{-t} & 8e^{4t}-(8-35t)e^{-t} & 10e^{4t}+15e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}}$$

38. 证明: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵, 并求它的 LDL^T 分解和 Choelsky 分解.

Sol: 因为 $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 16 > 0$, $\Delta_3 = 16 > 0$, 所以 A 是正定矩阵. 根据 $A = LDL^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$, 可解得

$$\begin{cases} d_1 = 4, \\ l_{21} = -\frac{1}{4}, \\ l_{31} = \frac{1}{4}, \\ d_2 = 4, \\ l_{32} = \frac{3}{4}, \\ d_3 = 1 \end{cases}$$

即得到

$$
\begin{aligned}
A =&LDL^{\mathrm{T}} = LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L^{\mathrm{T}} = GG^{T}\\
=&\boxed{\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{4} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & 1 & \frac{3}{4} \\ & & 1 \end{bmatrix}}\\
=&\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{4} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & 1 & \frac{3}{4} \\ & & 1 \end{bmatrix}\\
=&\boxed{\begin{bmatrix} 2 & & \\ -\frac{1}{2} & 2 & \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & 2 & \frac{3}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix}}
\end{aligned}
$$

39. 设

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1, \end{bmatrix}
$$

证明方程组 $Ax = b$ 有解, 并用 QR 分解方法解方程组 $Ax = b$.

Sol: 因为 $r([A|b]) = r(A) = 3$, 因此方程组 $Ax = b$ 有解.

有 $A_1 = [1\ 1\ 1\ 2]^{\mathrm{T}}$, $A_2 = [1\ 2\ 1\ 3]^{\mathrm{T}}$, $A_3 = [2\ 1\ 3\ 3]^{\mathrm{T}}$,

$\beta_1 = A_1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}[1\ \ 1\ \ 1\ \ 2]^{\mathrm{T}}$, $\beta_2 = A_2 - (A_2, \varepsilon_1)\varepsilon_1 = \frac{1}{7}[-3\ \ 4\ \ -3\ \ 1]^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{35}}{35}[-3\ \ 4\ \ -3\ \ 1]^{\mathrm{T}}$, $\beta_3 = A_3 - (A_3, \varepsilon_1)\varepsilon_1 - (A_3, \varepsilon_2)\varepsilon_2 = \frac{1}{5}[-2\ 1\ 3\ -1]^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_3 = \frac{\sqrt{15}}{15}[-2\ 1\ 2\ -1]^{\mathrm{T}}$,

QR 分解得到

$$
A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} & -\frac{3}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{4}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{7} & \frac{10\sqrt{7}}{7} & \frac{12\sqrt{7}}{7} \\ & \frac{\sqrt{35}}{7} & -\frac{8\sqrt{35}}{35} \\ & & \frac{\sqrt{15}}{5} \end{bmatrix}
$$

$$\begin{cases} Qy = b \\ Rx = y \end{cases}, \begin{cases} y = Q^{-1}b, \\ x = R^{-1}y = R{-}1Q^{-1}b \end{cases}$$

解得 $\boxed{x = [-1,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}}$

40. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的奇异值及奇异值分解.

Sol: 由于 $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 7$, 故 A 的奇异值为 $\boxed{\sqrt{3},\ \sqrt{7}}$. 其中, $A^{\mathrm{T}}A$ 属于特征值 3 的单位特征向量为 $v_1 = [\frac{\sqrt{2}}{2}\ -\frac{\sqrt{2}}{2}]^{\mathrm{T}}$, 属于特征值 7 的单位特征向量为 $v_2 = [\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}]^{\mathrm{T}}$.

$$V = [v_1|v_2] = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = Av_1\Sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left[\sqrt{3}\right]^{-1} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同理可得 $U_2 = AV_2\Sigma_2^{-1} = \frac{\sqrt{14}}{14}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$U = [U_1|U_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

可验证得到 $U^{\mathrm{H}}AV = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \\ & \sqrt{7} \end{bmatrix}$

因此

$$\boxed{A = U\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \\ & \sqrt{7} \end{bmatrix} V^T = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \\ & \sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

1.11　第 11 次作业

41. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基

$$\mathscr{R}_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathscr{R}_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

(1) 求 $\mathscr{R}_1$ 到 $\mathscr{R}_2$ 的基变换矩阵 $\mathbf{P}$;

(2) 求在 $\mathscr{R}_1$、$\mathscr{R}_2$ 下有相同坐标的所有向量.

Sol:

(1) $\boxed{\mathscr{R}_2=\mathscr{R}_1P,\Longrightarrow \mathbf{P}=\mathscr{R}_1^{-1}\mathscr{R}_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&2&2\end{bmatrix}}$

(2) 即求 $\mathscr{R}_1x=\mathscr{R}_2x,\Longrightarrow x=\mathscr{R}_1^{-1}\mathscr{R}_2x$, $\mathbf{x}$ 的非零向量解即求矩阵 P 关于特征值 1 的特征向量, 若不存在特征值 1 则 $\mathbf{x}$ 只有零向量解.

$$\begin{aligned}|\lambda I-P=|=&\begin{bmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-2&\lambda-2\end{bmatrix}\\=&(\lambda-1)^2(\lambda-2)-3(\lambda-1)\\=&(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda-1)\end{aligned}$$

得其中一个特征值为 1,

$$(P-I)x=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

得到一个基础解系 $p=[2,-1,0]^{\mathrm{T}}$, 因此在 $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ 下有相同坐标的所有向量为 $\boxed{[2,-1,0]^{\mathrm{T}},\ k\in\mathbb{R}}$.

42. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{T}$ 在基 $\mathscr{R}_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ 下的矩阵是

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix},$$

求 $\mathscr{F}$ 在基 $\mathscr{R}_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ 下的矩阵 $\mathbf{B}$.

Sol: 设 $\mathscr{R}_1$ 到 $\mathscr{R}_2$ 得基变换矩阵为 $\mathbf{P}$, 则有 $\mathscr{R}_2=\mathscr{R}_1\mathbf{P}$,

解得 $\mathbf{P}=\mathscr{R}_1^{-1}\mathscr{R}_2=\begin{bmatrix}-3&-2&-2\\-2&-1&-1\\2&2&3\end{bmatrix}$

可得 $\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-4&5&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}$

$$\boxed{\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}9&6&7\\-22&-17&-22\\9&8&11\end{bmatrix}}$$

1.12 第 12 次作业

43. 利用 Gerschgorin 定理确定方阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&5&1\\-2&-1&9\end{bmatrix}$$

的特征值范围. 判断 $\mathbf{A}$ 的特征值是否都是实数?

Sol:

$\mathbf{A}$ 的三个盖氏圆分别为

$$G_1=\{z|\mid z-1\mid\leqslant 1\}$$
$$G_2=\{z|\mid z-5\mid\leqslant 2\}$$
$$G_1=\{z|\mid z-9\mid\leqslant 3\}$$

G_2, G_3 相交, 因此 $\lambda_1\in G_1$, $\lambda_2,\lambda_3\in G_2\bigcup G_3$.

对矩阵 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 应用圆盘定理. 矩阵 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 对应的三个圆盘为

$$G_1' = \{z| \mid z-1 \mid\leqslant 3\}$$
$$G_2' = \{z| \mid z-5 \mid\leqslant 2\}$$
$$G_1' = \{z| \mid z-9 \mid\leqslant 1\}$$

综合分析可知三个特征值属于 $\lambda_1 \in G_1$, $\lambda_2 \in G_2$, $\lambda_3 \in G_3'$, 发现 G_1, G_2, G_3 相互独立, 因此可知 λ_1, λ_2, λ_3 $\boxed{\text{都为实数}}$, 且特征值的范围为 $\boxed{0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2,\ 3 \leqslant \lambda_2 \leqslant 7,\ 8 \leqslant \lambda_3 \leqslant 10}$.

44. 已知方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x^{(0)} = 1.5$ 附近有根, 将方程改写成:

(1) $x = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, 对应的迭代算式为 $x^{(k+1)} = 1 + \dfrac{1}{[x^{(k)}]^2}$;

(2) $x = \sqrt[3]{1+x^2}$, 对应的迭代算式为 $x^{(k+1)} = \sqrt[3]{1+[x^{(k)}]^2}$;

(3) $x = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, 对应的迭代算式为 $x^{(k+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^{(k)}}-1}$.

判断上述各种迭代算式在 1.5 附近的收敛性.

Sol:

(1) $\varphi(x) = 1 + x^{-2}$, $\varphi'(x) = (1+x^2) = -2x^{-3}$, $|\varphi'(1.5)| = |-2 \times 1.5^{-3}| \approx 1.78 > 1$, 该算式在 1.5 附近 $\boxed{\text{不收敛}}$.

(2) $\varphi(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$, $\varphi'(x) = \dfrac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$, $|\varphi'(1.5)| \approx 0.456 < 1$, 该算式在 1.5 附近 $\boxed{\text{收敛}}$.

(3) $\varphi(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$, $|\varphi'(1.5)| \approx 1.414 > 1$, 该算式在 1.5 附近 $\boxed{\text{收敛}}$.

1.13 第 13 次作业

45. 今有 10 组观测数据如下

x_i	0.5	−0.8	0.9	−2.8	6.5	2.3	1.6	5.1	−1.9	−1.5
y_i	−0.3	−1.2	1.1	−3.5	4.6	1.8	0.5	2.8	−2.8	0.5

应用正态线性模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \cdots, 10$ 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{10}$ 相互独立,

(1) 求 β_0, β_1 的最小二乘估计;

(2) 求 β_1 的置信水平围殴 0.95 的区间估计;

(3) 在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下, 假设检验 $H_0 : \beta_1 = 0$;

(4) 计算残差方差 $\hat{\sigma}_e^2$;

(5) 求 $x = 1.2$ 时, Y 的双侧 95% 的预测区间.

Sol:

(1) 易知 $\bar{x} = 0.99$, $\bar{y} = 0.35$, $\beta_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$, 因此 $\beta_1 \approx 0.7566$, $\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$, 因此 $\beta_0 \approx -0.3991$.

(2) 由题意可知 $\alpha = 0.05$, 所求区间为: $\beta_1 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-k-1)\hat{\sigma}_e\sqrt{(L^{-1})_{11}}$, 其中, $e = y - X\hat{\beta}$, $Q_e = e^{\mathrm{T}}e = 7.5652$, $n-k-1 = 10-1-1 = 8$, 则 $\hat{\sigma}_e = \sqrt{\dfrac{Q_e}{n-k-1}} = 0.9724$,

$$L^{-1} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9.9 & 91.51 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1120 & -0.0121 \\ -0.0121 & 0.0122 \end{bmatrix}$$

, $\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-k-1)\hat{\sigma}_e\sqrt{(L^{-1})_{11}} = 0.7566 \pm t_{0.975}(8) \cdot 0.9724 \cdot 0.1120 = 0.7566 \pm 0.2511$, 因此得到区间为: $[0.5055,\ 1.0077]$.

(3) 假设检验 $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$.

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
回归系数	46.78	1	46.78	49.47
残差	7.5652	8	0.9457	
总和	54.35	9		

在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下, 临界值 $F_{1-\alpha}(k, n-k-1) = F_{0.99}(1,8) = 11.26$, 由于 $49.47 > 11.26$, 因此拒绝 $H\mathrm{H}_0$.

(4) 由上表可得 $\hat{\sigma}_e^2 = 0.9457$.

(5) $\mathbf{X}_t = [1\ 1.2]^{\mathrm{T}}$, $\hat{Y}_t = \mathbf{X}_t^{\mathrm{T}}\hat{\beta} = 0.5089$, Y_t 的双侧 $1-\alpha, \alpha = 0.05$ 预测区间的上下限为 $\hat{Y}_t \pm \hat{\sigma}_e\sqrt{1 + \mathbf{X}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{X}_t t_{1-\frac{\alpha}{2}}} = 0.5089 \pm 0.9724\sqrt{1+0.1005} \cdot 2.3060 = 0.5089 \pm 2.3523$ 则有 Y 的双侧 95% 的置信区间为 $[-1.7714, 2.9332]$ ■

46. 养猪场为了估算猪的毛重 (单位: 公斤) Y 与其身长 (单位: 厘米) x_1, 肚围 (单位: 厘米) x_2 之间的关系, 测量了 14 头猪, 得数据如下:

$x_{i,1}$	41	45	51	52	59	62	69	72	78	80	90	92	98	103
$x_{i,2}$	49	58	62	71	62	74	71	74	79	84	85	94	91	95
y_i	28	39	41	44	43	50	51	57	63	66	70	76	80	84

(1) 求经验回归函数;

(2) 在显著水平 1% 下, 检验 $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$;

(3) 求 $x_1 = 100$, $x_2 = 80$ 时 Y 的预测值;

(4) 在显著水平 5% 下, 做偏 F 检验, $H_{0j} : \beta_j = 0$, $j = 1, 2$.

这里, 假定猪的毛重 $Y \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \sigma^2)$.

Sol:

(1) 易得 $\overline{x_{i1}} = \frac{496}{7}$, $\overline{x_{i2}} = \frac{1049}{14}$, $\bar{y} = \frac{396}{7}$, $l_{11} = \sum x_{i1}^2 - 14\overline{x_{i1}}^2 = \frac{36762}{7}$, $l_{22} = \sum x_{i2}^2 - 14\overline{x_{i2}}^2 = \frac{35713}{14}$, $l_{12} = l_{21} = \sum x_{i1}x_{i2} - 14\overline{x_{i1}x_{i2}} = \frac{24499}{7}$, $l_{1y} = \sum x_{i1}y_i - 14\overline{x_{i1}}\bar{y} = \frac{30808}{7}$, $l_{2y} = \sum x_{i2}y_i - 14\overline{x_{i2}}\bar{y} = \frac{21256}{7}$.

因此 $\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}l_{1y}\\ l_{2y}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0.5223\\ 0.4738\end{bmatrix}$

且 $\beta_0 = \bar{y} - \sum \beta_j \overline{x_{ij}} \approx -15.9384$, 因此得到经验回归公式为

$$y = -15.9384 + 0.5223x_1 + 0.4738x_2$$

(2) 检验假设 $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$,

来源	平方和	自由度	均方和	F 值
回归系数	3737	2	1869	570.5
残差	36.03	11	3.276	
总和	3773	13		

在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下, 临界值 $F_{1-\alpha}(k, n-k-1) = F_{0.99}(2, 11) = 7.206$, 由于 $570.5 > 7.206$, 因此拒绝 H_0.

(3) 由 (1) 的经验回归公式可得 $Y = 15.9384 + 0.5223x_1 + 0.4738x_2 = 74.1956$

(4) 在显著水平 5% 下, 做偏 F 检验, $\mathrm{H}_{0j} : \beta_j = 0$, $j = 1, 2$. 由于 $SS_{rj} = \frac{b\hat{e}ta_j^2}{l^{(jj)}}$, 得 $SS_{r1} = 122.7$, $SS_{r2} = 49.07$, $SS_e = 36.03$, 因此得到统计

量 $F_j = \dfrac{SS_{rj}}{SS_e/(n-k-1)} = \dfrac{SS_{rj}}{3.276}$, 则有 $F_1 = 37.45$, $F_2 = 14.98$. 而 $F_{0.95}(2,11) = 3.982$, $F_j > 3.982$, 因而拒绝 $\mathrm{H}_0 : \beta_j = 0, j = 1, 2$.

47. 下表给出了某种化工产品在三种不同浓度 (单位: %) 与四种不同温度 (单位: ℃) 下成品的得率, 且每对水平搭配做了两次试验的数据:

浓度 \ 温度	10	24	38	52
2	10, 14	11, 11	13, 9	10, 12
4	9, 7	10, 8	7, 11	6, 10
6	5, 11	13, 14	12, 13	14, 10

假定数据赖子方差相等的正态总体.

(1) 证明: 在显著水平 25% 下, 浓度与温度之间的交互效应对该种化工产品的得率无显著影响.

(2) 问: 在显著性水平 5% 下, 浓度与温度分别对该种化工产品的得率有无显著影响?

Sol:

(1) 根据表中数据, 可得方差分析表如下

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值	P 值
温度	11.5	3	3.8333	0.71	0.5657
浓度	44.333	2	22.1667	4.09	0.0442
交互效应	27	6	4.5	0.83	0.5684
误差	65	12	5.4167		
总和	147.833	23			

根据显著性水平 25% 对照表中 p 值 0.5684 可知, 浓度与温度之间的交互效应对该种化工产品的得率无显著影响.

(2) 从表中可看出, 在显著性 5% 下, 浓度对该种化工产品的得率有显著影响, 与温度则无显著影响.

1.14 第 14 次作业

48. 给定数据表

x_i	1.2	3.2	4.5
f_i	101	112	109

求通过这三个点的次数不超过 2 的插值多项式.

Sol:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.2 & 1.44 \\ 1 & 3.2 & 10.24 \\ 1 & 4.5 & 20.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 \\ 112 \\ 109 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85.31 \\ 15.91 \\ -2.366 \end{bmatrix}$$

解得 $\boxed{y = 85.31 + 15.91x - 2.366x^2}$.

49. 已知数据表

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y(x)$	0.70010	0.40160	0.10810	-0.17440	-0.43750

用反插值 (即在 $y = y(x)$ 的反函数 $x = x(y)$ 存在的假设下, 构造反函数 $x = x(y)$ 的插值多项式) 求 $y(x) = 0$ 在 $(0.3, 0.4)$ 内的根的近似值.

Sol:

差商表如下:

x(y)	x	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0.7001	0.1				
0.4016	0.2	-0.3350			
0.1081	0.3	-0.3407	0.00964		
-0.1744	0.4	-0.3540	0.02303	-0.01531	
0.4375	0.5	-0.3801	0.04784	-0.02956	0.01253

根据牛顿插值多项式

$x = x(y) = f(y_0) + f[y_0, y_1](y - y_0) + f[y_0, y_1, y_2](y - y_0)(y - y_1) + f[y_0, y_1, y_2, y_3](y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) + f[y_0, y_1, y_2, y_3, y_4](y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$,

因此 $y(x) = 0$ 的根的近似值为 $x = x(0) = 0.1 - 0.3350(-0.7001) + 0.00964(-0.7001)(-0.4016) - 0.01531(-0.7001)(-0.4016)(-0.1081) + 0.01253(-0.7001)(-0.4016)(-0.108$
$\boxed{0.3376}$

50. 已知实验数据表

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式, 并计算均方误差.

Sol:

以 $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x^2$ 为基函数, 且

$y = [19.0\ 32.3\ 49.0\ 73.3\ 97.8]^{\mathrm{T}}$, $a = [a\ b]^{\mathrm{T}}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 361 & 625 & 961 & 1444 & 1936 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$G^{\mathrm{T}}G = \begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix}$

$G^{\mathrm{T}}y = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$$

解得 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9726 \\ 0.05004 \end{bmatrix}$

因此 $\boxed{y = 0.9726 + 0.5004x^2}$, 可计算得误差平方和为 $\sigma^2 = \dfrac{1}{5}\sum(y - \hat{y})^2 = 0.003039$.