山东大学微积分

课后习题解析

作者：洛七

组织：806136495@qq.com

更新：January 18, 2021

版本：1.0 beta

目　　录

第 1 章 无穷级数

1.1 常数项级数的概念和性质

1. 利用级数收敛的定义判断下列技术的敛散性，如收敛则求其和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(5) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots$;

*(6) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

2. 利用几何级数、调和级数以及收敛级数的性质，判定下列技术的敛散性：

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(3) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$;

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3}\right)+\cdots$;

(6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{30}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)+\cdots$;

(7) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

1.2 正项级数的审敛法

1. 用比较审敛法考察下列级数的敛散性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(3) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{4^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$;

(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{4/3}}$.

2. 判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

*(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)\quad(a>1)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$;

*(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$;

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a(n\to\infty)$，a_n，b，a 均为正数;

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}\quad(a>0,b>0)$;

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$.

3. 利用级数收敛的必要条件证明：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

4. 若 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nu_n=a\neq 0$，证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

5. 设 $\{u_n\}$ 是正项数列，若 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$.

6. 已知 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并求其和.

*7. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在;

(2) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

*8. 设 $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$.

(1) 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

1.3 交错级数和任意项级数的审敛法

1. 判定下列级数的敛散性：

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. 判定下列级数的敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$;

2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$;

*(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$;

(4) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\quad(p>0)$.

3. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 都收敛.

4. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. $\left(\text{提示：用 } f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 的一阶麦克劳林公式.}\right)$

1.4 幂级数

1. 已知函数项级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，求其和函数.

2. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$;

(4) $1-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^2}{3^2}+\cdots$;

(5) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n\right]x^n$;

(10) 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，求 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间.

*3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论该区间端点处的收敛性.

4. 利用逐项积分或者逐项求导，求下列级数在下列区间内的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\quad(-1<x<1)$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1<x<1)$，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ 的和；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, $|x|<\sqrt{2}$，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$, $|x|<1$.

*5. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$, $n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum_{n=0}^{\infty}I_n$.

*6. 已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$($n$ 为正整数)，且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

*7. 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$$y''+y'+y=e^x.$$

并利用以上结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

1.5 函数展开成幂级数

1. 用直接展开法求下列函数在给定点的幂级数展开式，并指出收敛域：
   (1) $f(x)=\cos x,\quad x_0=-\frac{\pi}{3}$;

   (2) $f(x)=a^x,\quad x_0=0$.
2. 将下列函数展成 x 的幂级数，并指出收敛域：
   (1) $\sin\frac{x}{2}$;

   (2) $\sin^2 x$;

   (3) $\ln(a+x)\quad(a>0)$;

   (4) $\frac{1}{2+x}$;

   (5) $(1+x)\ln(1+x)$;

   (6) $\arctan x$;

   (7) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

   (8) $\frac{1}{x^2+4x+3}$.
3. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展成 $(x-3)$ 的幂级数.
4. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展成 $(x-2)$ 的幂级数.
5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展成 $(x+4)$ 的幂级数.
6. 设 $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$，求 $f^{(6)}(0)$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

8. 将 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 展成 x 的幂级数.

1.6 幂级数的简单应用

1.7 反常积分的审敛法和 Γ 函数

1. 判定下列反常积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\arcsin x}{1+x^3}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$;

(6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$.

2. 用 Γ 函数表示下列积分，并指出其收敛范围：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\mathrm{d}x \quad (n>0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x$.

3. 证明下列公式：

(1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n = 2^n\Gamma(n+1)$;

(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1) = \dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$;

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ (勒让德倍量公式).

1.8 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，其再 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式如下，试将 $f(x)$ 展为傅里叶级数.

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0; \\ 0, & 0\leqslant x<\pi, \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\leqslant x<0, \\ ax, & 0\leqslant x<\pi, \end{cases}$ $a>b>0$ 是常数;

(3) $f(x)=3x^2+1, \quad -\pi\leqslant x<\pi$.

2. 将下列函数展为傅里叶级数：

(1) $f(x)=e^{ax}, \quad -\pi\leqslant\pi$;

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

(3) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$

3. 设周期函数 $f(x)$ 的周期是 2π，证明 $f(x)$ 的傅里叶系数可表示为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

1.9 正弦级数、余弦级数和一般区间上的傅里叶级数

1. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2} \quad (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开为正弦级数.
2. 将函数 $f(x)=2x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.
3. 将 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{px}{2}, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{p(l-x)}{2}, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l \end{cases}$ 展为正弦级数.
4. 将下列周期函数展为傅里叶级数 (下面给出函数在一个周期内的表达式)：

(1) $f(x)=1-x^2 \quad \left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x<3. \end{cases}$

5. 设 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$，将 $f(x)$ 展为以 2 为周期的傅里叶级数.
6. 将 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2} \\ l-x, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l \end{cases}$ 展为正弦级数和余弦级数.

1.10 复数形式的傅里叶级数

1.11 用 MATLAB 计算级数问题

第 2 章 向量代数与空间解析几何

2.1 向量及其运算

1. 设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为非零向量，试作出向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的图形.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,5,-1)$，$\boldsymbol{c}=(6,4,-6)$，证明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行.

3. 证明三角形两边中点连线平行于第三边，且等于第三边的一半.

4. 设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=6$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同方向，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

5. 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$.

6. 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{2\pi}{3}$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 的夹角.

7. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

8. 一向量的重点 $M_2(4,-2,0)$，它在三个坐标轴上的投影依次为 3，2，7，求该向量的起点 M_1.

9. 设两点 $M_1(2,0,-3)$，$M_2(1,-2,0)$，在线段 M_1M_2 上求一点 M，满足 $M_1M=2MM_2$.

10. 求向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$ 的夹角.

11. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,-4)$，$b=(2,1,8)$，向量 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，求 m.

12. 设向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求
    (1) $(-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$;
    (2) $\boldsymbol{a}\times3\boldsymbol{b}$;
    (3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线，求 m 和 n.

14. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，求
    (1) 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线的长度;
    (2) 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积;
    (3) 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直的单位向量.

15. 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算
    (1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$;
    (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$;
    (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;
    (4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

16. 判别下列向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否共面：
    (1) $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{c}=(3,-1,3)$;
    (2) $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{c}=(3,-4,7)$.

17. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,z)$，问 z 为何值时，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小？并求出此最小值.

2.2 空间的平面和直线

2.3 空间的曲面和曲线

第 3 章 多元函数微分学及其应用

第 4 章 重积分

4.1 二重积分的概念和性质

4.2 二重积分的计算

4.3 三重积分的概念

4.4 三重积分的计算

4.5 重积分的应用

4.6 用 **MATLAB** 计算重积分

第 5 章 曲线积分与曲面积分