山东大学微积分

课后习题解析

作者：洛七

组织：806136495@qq.com

更新：January 17, 2021

版本：1.0 beta

目　　录

第 1 章 无穷级数

1.1 常数项级数的概念和性质

1. 利用级数收敛的定义判断下列技术的敛散性，如收敛则求其和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(5) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots$;

*(6) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$.

2. 利用几何级数、调和级数以及收敛级数的性质，判定下列技术的敛散性：

(1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\cdots$;

(3) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots$;

(4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{8}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{8^2}{9^2}\right)+\left(\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{8^3}{9^3}\right)+\cdots$;

(6) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}\right)+\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{30}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)+\cdots$;

(7) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

1.2 正项级数的审敛法

1. 用比较审敛法考察下列级数的敛散性：

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots;$

(3) $1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots;$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n};$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{4^n};$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}};$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0);$

(8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{4/3}}.$

2. 判定下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$

*(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)\quad(a>1);$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}};$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n};$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n};$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!};$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n};$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n};$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!};$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n};$

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

*(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$;

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n \to a(n\to\infty)$，a_n，b，a 均为正数;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{na+b} \quad (a>0, b>0)$;

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{5^n-3^n}$.

3. 利用级数收敛的必要条件证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = a \neq 0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 设 $\{u_n\}$ 是正项数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

6. 已知 $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^n \mathrm{d}x (n=1,2,\cdots)$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，并求其和.

*7. 设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \quad (n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

*8. 设 $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$.

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

1.3 交错级数和任意项级数的审敛法

1. 判定下列级数的敛散性：

(1) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. 判定下列级数的敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$;

2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$;

*(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$;

(4) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\quad(p>0)$.

3. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 都收敛.

4. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. $\left(\text{提示：用 } f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 的一阶麦克劳林公式.}\right)$

1.4 幂级数

1. 已知函数项级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，求其和函数.

2. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2+1} x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$;

(4) $1 - x + \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{x^2}{3^2} + \cdots$;

(5) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2 \cdot 4} + \dfrac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{(-1)^n}{2^n} + 3^n \right] x^n$;

(10) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间.

*3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n + (-2)^n} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论该区间端点处的收敛性.

4. 利用逐项积分或者逐项求导，求下列级数在下列区间内的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1 < x < 1)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} \cdot \dfrac{1}{2^{n+1}}$ 的和；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, $|x| < \sqrt{2}$，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1) x^n$, $|x| < 1$.

*5. 设 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x \mathrm{d}x$, $n = 0, 1, 2, \cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

*6. 已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1} e^x$($n$ 为正整数)，且 $f_n(1) = \dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和.

*7. 验证函数 $y(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$ 满足微分方程

$$y'' + y' + y = e^x.$$

并利用以上结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

1.5 函数展开成幂级数

1.6 幂级数的简单应用

1.7 反常积分的审敛法和 Γ 函数

1.8 傅里叶级数

1.9 正弦级数、余弦级数和一般区间上的傅里叶级数

1.10 复数形式的傅里叶级数

1.11 用 MATLAB 计算级数问题

第 2 章 向量代数与空间解析几何

2.1 向量及其运算

2.2 空间的平面和直线

2.3 空间的曲面和曲线

第 3 章 多元函数微分学及其应用

第 4 章 重积分

4.1 二重积分的概念和性质

4.2 二重积分的计算

4.3 三重积分的概念

4.4 三重积分的计算

4.5 重积分的应用

4.6 用 MATLAB 计算重积分

第 5 章　曲线积分与曲面积分