山东大学微积分

课后习题解析

作者：洛七
组织：806136495@qq.com
更新：January 17, 2021
版本：1.0 beta

目　　录

第 1 章 无穷级数

1.1 常数项级数的概念和性质

1. 利用级数收敛的定义判断下列技术的敛散性，如收敛则求其和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(5) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots$;

*(6) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

2. 利用几何级数、调和级数以及收敛级数的性质，判定下列技术的敛散性：

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(3) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$;

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3}\right)+\cdots$;

(6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{30}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)+\cdots$;

(7) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

1.2 正项级数的审敛法

1. 用比较审敛法考察下列级数的敛散性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(3) $1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{4^n}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{4/3}}$.

2. 判定下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

*(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)\quad(a>1)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

*(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$;

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n \to a(n\to\infty)$，a_n，b，a 均为正数;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{na+b} \quad (a>0, b>0)$;

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{5^n-3^n}$.

3. 利用级数收敛的必要条件证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n\cdot n!}{n^n} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = a \neq 0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 设 $\{u_n\}$ 是正项数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

6. 已知 $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^n \mathrm{d}x (n=1,2,\cdots)$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，并求其和.

*7. 设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \quad (n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

*8. 设 $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$.

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

1.3 交错级数和任意项级数的审敛法

1. 判定下列级数的敛散性：

(1) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{p}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. 判定下列级数的敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$;

2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\frac{n+1}{n}$;

*(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$;

(4) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{[n+(-1)^{n}]^{p}}\quad(p>0)$.

3. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 都收敛.

4. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. $\Big($提示：用 $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 的一阶麦克劳林公式.$\Big)$

1.4 幂级数

1. 已知函数项级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，求其和函数.

2. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^{n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$;

(4) $1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} + \cdots$;

(5) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^n} + 3^n \right] x^n$;

(10) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3，求 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间.

*3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论该区间端点处的收敛性.

4. 利用逐项积分或者逐项求导，求下列级数在下列区间内的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1 < x < 1)$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$，并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ 的和；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, $|x| < \sqrt{2}$，并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) x^n$, $|x| < 1$.

*5. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x \mathrm{d}x$, $n = 0, 1, 2, \cdots$，求 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$.

*6. 已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1} e^x$($n$ 为正整数)，且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和.

*7. 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$ 满足微分方程

$$y'' + y' + y = e^x.$$

并利用以上结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

1.5 函数展开成幂级数

1. 用直接展开法求下列函数在给定点的幂级数展开式，并指出收敛域：

(1) $f(x)=\cos x, \quad x_0=-\frac{\pi}{3}$;

(2) $f(x)=a^x, \quad x_0=0$.

2. 将下列函数展成 x 的幂级数，并指出收敛域：

(1) $\sin\frac{x}{2}$;

(2) $\sin^2 x$;

(3) $\ln(a+x) \quad (a>0)$;

(4) $\frac{1}{2+x}$;

(5) $(1+x)\ln(1+x)$;

(6) $\arctan x$;

(7) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(8) $\frac{1}{x^2+4x+3}$.

3. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展成 $(x-3)$ 的幂级数.

4. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展成 $(x-2)$ 的幂级数.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展成 $(x+4)$ 的幂级数.

6. 设 $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$，求 $f^{(6)}(0)$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

8. 将 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 展成 x 的幂级数.

1.6 幂级数的简单应用

1.7 反常积分的审敛法和 Γ 函数

1. 判定下列反常积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\arcsin x}{1+x^3}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$;

(6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$.

2. 用 Γ 函数表示下列积分，并指出其收敛范围：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\mathrm{d}x \quad (n>0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x$.

3. 证明下列公式：

(1) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot 2n = 2^n\Gamma(n+1)$;

(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1) = \dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$;

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ (勒让德倍量公式).

1.8 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，其再 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式如下，试将 $f(x)$ 展为傅里叶级数.

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0; \\ 0, & 0\leqslant x<\pi, \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\leqslant x<0, \\ ax, & 0\leqslant x<\pi, \end{cases}$ $a>b>0$ 是常数;

(3) $f(x)=3x^2+1, \quad -\pi\leqslant x<\pi$.

2. 将下列函数展为傅里叶级数：

(1) $f(x)=e^{ax}, \quad -\pi\leqslant\pi$;

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

(3) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$

3. 设周期函数 $f(x)$ 的周期是 2π，证明 $f(x)$ 的傅里叶系数可表示为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

1.9 正弦级数、余弦级数和一般区间上的傅里叶级数

1. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开为正弦级数.
2. 将函数 $f(x)=2x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.
3. 将 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{px}{2}, & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{p(l-x)}{2}, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$ 展为正弦级数.
4. 将下列周期函数展为傅里叶级数 (下面给出函数在一个周期内的表达式):

(1) $f(x)=1-x^2 \quad \left(-\dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$

5. 设 $f(x)=x-1(0 \leqslant x \leqslant 2)$，将 $f(x)$ 展为以 2 为周期的傅里叶级数.
6. 将 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2} \\ l-x, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$ 展为正弦级数和余弦级数.

1.10 复数形式的傅里叶级数

1.11 用 MATLAB 计算级数问题

第 2 章 向量代数与空间解析几何

第 3 章 多元函数微分学及其应用

第 4 章 重积分

第 5 章　曲线积分与曲面积分