



山东大学微积分

课后习题解析

作者：洛七

组织：806136495@qq.com

更新：January 16, 2021

版本：1.0 beta

目 录



第 1 章 无穷级数

1.1 常数项级数的概念和性质

1. 利用级数收敛的定义判断下列级数的敛散性，如收敛则求其和：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$(5) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} + \cdots;$$

$$*(6) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots.$$

2. 利用几何级数、调和级数以及收敛级数的性质，判定下列级数的敛散性：

$$(1) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(3) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots;$$

$$(4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots;$$

$$(5) \left(\frac{1}{6} + \frac{8}{9}\right) + \left(\frac{1}{6^2} + \frac{8^2}{9^2}\right) + \left(\frac{1}{6^3} + \frac{8^3}{9^3}\right) + \cdots;$$

$$(6) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{30}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{10n}\right) + \cdots;$$

$$(7) \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \cdots;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

1.2 正项级数的审敛法

1. 用比较审敛法考察下列级数的敛散性：

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots;$$

$$(3) 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{4^n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0);$$

$$(8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{4/3}}.$$

2. 判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$$

$$*(2) \sum_{n=1}^{\infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) \quad (a > 1);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$*(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}};$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \text{ 均为正数};$$

$$(15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na+b} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n - 3^n}.$$

3. 利用级数收敛的必要条件证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = a \neq 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 设 $\{u_n\}$ 是正项数列, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

6. 已知 $a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx (n=1, 2, \dots)$. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并求其和.

*7. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) (n=1, 2, \dots)$. 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

*8. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$.

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证: 对任意的常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

1.3 交错级数和任意项级数的审敛法

1. 判定下列级数的敛散性:

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots;$$



$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. 判定下列级数的敛散性, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(a). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(b). \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n};$$

$$*(3) \sum_{n=2}^{\infty} \sin \left(n\pi + \frac{1}{\ln n} \right);$$

$$(4) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!};$$

$$(6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} \quad (p > 0).$$

3. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 都收敛.

4. 设 $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

*5. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. (提示: 用 $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 的一阶麦克劳林公式.)

1.4 幂级数

1.5 函数展开成幂级数

1.6 幂级数的简单应用

1.7 反常积分的审敛法和 Γ 函数

1.8 傅里叶级数

1.9 正弦级数、余弦级数和一般区间上的傅里叶级数

1.10 复数形式的傅里叶级数

1.11 用 MATLAB 计算级数问题



第 2 章 向量代数与空间解析几何

2.1 向量及其运算

2.2 空间的平面和直线

2.3 空间的曲面和曲线

第 3 章 多元函数微分学及其应用

3.1 多元函数的概念及其极限和连续

3.2 偏导数与全微分

3.3 多元复合函数和隐函数的微分法

3.4 微分法在几何上的应用

3.5 多元函数的极值与最值

3.6 二元函数泰勒公式

3.7 MATLAB 求偏导数

第 4 章 重积分

4.1 二重积分的概念和性质

4.2 二重积分的计算

4.3 三重积分的概念

4.4 三重积分的计算

4.5 重积分的应用

4.6 用 MATLAB 计算重积分

第 5 章 曲线积分与曲面积分

5.1 对弧长的曲线积分

5.2 对坐标的曲线积分

5.3 格林公式及其应用

5.4 对面积的曲面积分

5.5 对坐标的曲面积分

5.6 高斯公式和斯托克斯公式

5.7 场论简介

5.8 用 MATLAB 计算曲线积分和曲面积分