



# 山东大学微积分

## 课后习题解析

作者：洛七

组织：806136495@qq.com

更新：January 17, 2021

版本：1.0 beta

# 目 录



# 第 1 章 无穷级数

## 1.1 常数项级数的概念和性质

1. 利用级数收敛的定义判断下列级数的敛散性，如收敛则求其和：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$(5) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} + \cdots;$$

$$*(6) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots.$$

2. 利用几何级数、调和级数以及收敛级数的性质，判定下列级数的敛散性：

$$(1) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(3) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots;$$

$$(4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots;$$

$$(5) \left(\frac{1}{6} + \frac{8}{9}\right) + \left(\frac{1}{6^2} + \frac{8^2}{9^2}\right) + \left(\frac{1}{6^3} + \frac{8^3}{9^3}\right) + \cdots;$$

$$(6) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{30}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{10n}\right) + \cdots;$$

$$(7) \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \cdots;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

## 1.2 正项级数的审敛法

1. 用比较审敛法考察下列级数的敛散性：

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots;$$

$$(3) 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{4^n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0);$$

$$(8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{4/3}}.$$

2. 判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$$

$$*(2) \sum_{n=1}^{\infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) \quad (a > 1);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n};$$



$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$*(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}};$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \text{ 均为正数};$$

$$(15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na+b} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n - 3^n}.$$

3. 利用级数收敛的必要条件证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

4. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = a \neq 0$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

5. 设  $\{u_n\}$  是正项数列, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ .

6. 已知  $a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx (n=1, 2, \dots)$ . 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 并求其和.

\*7. 设  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) (n=1, 2, \dots)$ . 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在;

(2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$  收敛.

\*8. 设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ .

(1) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$  的值;

(2) 试证: 对任意的常数  $\lambda > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛.

### 1.3 交错级数和任意项级数的审敛法

1. 判定下列级数的敛散性:

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots;$$



$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. 判定下列级数的敛散性, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n};$$

$$*(3) \sum_{n=2}^{\infty} \sin \left( n\pi + \frac{1}{\ln n} \right);$$

$$(4) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!};$$

$$(6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} \quad (p > 0).$$

3. 已知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$  都收敛.

4. 设  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ , 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

\*5. 已知  $f(x)$  在  $x = 0$  点的某邻域内具有连续的二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛. } \left( \text{提示: 用 } f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 的一阶麦克劳林公式.} \right)$$

## 1.4 幂级数

1. 已知函数项级数  $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛, 求其和函数.

2. 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n;$$





$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n};$$

$$(4) 1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} + \cdots;$$

$$(5) \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{2^n} + 3^n \right] x^n;$$

$$(10) \text{ 设 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } 3, \text{ 求 } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1} \text{ 的收敛区间.}$$

\*3. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$  的收敛半径, 并讨论该区间端点处的收敛性.

4. 利用逐项积分或者逐项求导, 求下列级数在下列区间内的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1 < x < 1);$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1), \text{ 并求 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \text{ 的和};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}, |x| < \sqrt{2}, \text{ 并求 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \text{ 的和};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n, |x| < 1.$$

$$*5. \text{ 设 } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx, n = 0, 1, 2, \cdots, \text{ 求 } \sum_{n=0}^{\infty} I_n.$$

\*6. 已知  $f_n(x)$  满足  $f'_n(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$  ( $n$  为正整数), 且  $f_n(1) = \frac{e}{n}$ , 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ 之和.}$$

\*7. 验证函数  $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 满足微分方程

$$y'' + y' + y = e^x.$$

并利用以上结果求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  的和函数.

## 1.5 函数展开成幂级数

1. 用直接展开法求下列函数在给定点的幂级数展开式, 并指出收敛域:

(1)  $f(x) = \cos x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{3};$

(2)  $f(x) = a^x, \quad x_0 = 0.$

2. 将下列函数展成  $x$  的幂级数, 并指出收敛域:

(1)  $\sin \frac{x}{2};$

(2)  $\sin^2 x;$

(3)  $\ln(a+x) \quad (a > 0);$

(4)  $\frac{1}{2+x};$

(5)  $(1+x)\ln(1+x);$

(6)  $\arctan x;$

(7)  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

(8)  $\frac{1}{x^2+4x+3}.$

3. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  展成  $(x-3)$  的幂级数.

4. 将函数  $f(x) = \ln(1+x)$  展成  $(x-2)$  的幂级数.

5. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$  展成  $(x+4)$  的幂级数.

6. 设  $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$ , 求  $f^{(6)}(0)$ .

\*7. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

试将  $f(x)$  展开成  $x$  的幂级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$  的和.

8. 将  $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$  展成  $x$  的幂级数.

## 1.6 幂级数的简单应用

## 1.7 反常积分的审敛法和 $\Gamma$ 函数

1. 判定下列反常积分的敛散性:





$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x|\sin x|};$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{x \arcsin x}{1 + x^3} dx;$$

$$(5) \int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3};$$

$$(6) \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}} dx;$$

$$(7) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}};$$

$$(8) \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

2. 用  $\Gamma$  函数表示下列积分, 并指出其收敛范围:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0);$$

$$(2) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$$

3. 证明下列公式:

$$(1) 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \Gamma(n+1);$$

$$(2) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)};$$

$$(3) \sqrt{\pi} \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{勒让德倍量公式}).$$

## 1.8 傅里叶级数

1. 下列周期函数  $f(x)$  的周期为  $2\pi$ , 其在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式如下, 试将  $f(x)$  展为傅里叶级数.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leq x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad a > b > 0 \text{ 是常数};$$

$$(3) f(x) = 3x^2 + 1, \quad -\pi \leq x < \pi.$$

2. 将下列函数展为傅里叶级数:

$$(1) f(x) = e^{ax}, \quad -\pi \leq x < \pi;$$



$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = 2 \sin \frac{x}{3}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

3. 设周期函数  $f(x)$  的周期是  $2\pi$ , 证明  $f(x)$  的傅里叶系数可表示为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

## 1.9 正弦级数、余弦级数和一般区间上的傅里叶级数

### 1.10 复数形式的傅里叶级数

### 1.11 用 MATLAB 计算级数问题



## 第 2 章 向量代数与空间解析几何



### 2.1 向量及其运算

### 2.2 空间的平面和直线

### 2.3 空间的曲面和曲线

## 第 3 章 多元函数微分学及其应用

---

**3.1 多元函数的概念及其极限和连续**

**3.2 偏导数与全微分**

**3.3 多元复合函数和隐函数的微分法**

**3.4 微分法在几何上的应用**

**3.5 多元函数的极值与最值**

**3.6 二元函数泰勒公式**

**3.7 MATLAB 求偏导数**

## 第 4 章 重积分

---

### 4.1 二重积分的概念和性质

### 4.2 二重积分的计算

### 4.3 三重积分的概念

### 4.4 三重积分的计算

### 4.5 重积分的应用

### 4.6 用 MATLAB 计算重积分

## 第 5 章 曲线积分与曲面积分

---

5.1 对弧长的曲线积分

5.2 对坐标的曲线积分

5.3 格林公式及其应用

5.4 对面积的曲面积分

5.5 对坐标的曲面积分

5.6 高斯公式和斯托克斯公式

5.7 场论简介

5.8 用 MATLAB 计算曲线积分和曲面积分