山东大学微积分

课后习题解析

作者：洛七

组织：806136495@qq.com

更新：January 19, 2021

版本：1.0 beta

目　　录

第 1 章　无穷级数

1.1　常数项级数的概念和性质

1. 利用级数收敛的定义判断下列技术的敛散性，如收敛则求其和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(5) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots$;

*(6) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$.

2. 利用几何级数、调和级数以及收敛级数的性质，判定下列技术的敛散性：

(1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\cdots$;

(3) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots$;

(4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{8}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{8^2}{9^2}\right)+\left(\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{8^3}{9^3}\right)+\cdots$;

(6) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}\right)+\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{30}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)+\cdots$;

(7) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

1.2　正项级数的审敛法

1. 用比较审敛法考察下列级数的敛散性：

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(3) $1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{4^n}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{4/3}}$.

2. 判定下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

*(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)\quad(a>1)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

*(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$;

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a(n\to\infty)$，a_n，b，a 均为正数;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{na+b}\quad(a>0,b>0)$;

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{5^n-3^n}$.

3. 利用级数收敛的必要条件证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=a\neq0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

5. 设 $\{u_n\}$ 是正项数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$.

6. 已知 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并求其和.

*7. 设 $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

*8. 设 $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$.

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

1.3 交错级数和任意项级数的审敛法

1. 判定下列级数的敛散性：

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. 判定下列级数的敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$;

2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$;

*(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$;

(4) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\quad(p>0)$.

3. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 都收敛.

4. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. $\left(\text{提示：用 } f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 的一阶麦克劳林公式.}\right)$

1.4 幂级数

1. 已知函数项级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，求其和函数.

2. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$;

(4) $1-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^2}{3^2}+\cdots$;

(5) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n\right]x^n$;

(10) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间.

*3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论该区间端点处的收敛性.

4. 利用逐项积分或者逐项求导，求下列级数在下列区间内的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\quad(-1<x<1)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1<x<1)$，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ 的和；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, $|x|<\sqrt{2}$，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$, $|x|<1$.

*5. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$, $n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

*6. 已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$($n$ 为正整数)，且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

*7. 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$$y''+y'+y=e^x.$$

并利用以上结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

1.5 函数展开成幂级数

1. 用直接展开法求下列函数在给定点的幂级数展开式，并指出收敛域：

   (1) $f(x)=\cos x,\quad x_0=-\dfrac{\pi}{3}$;

   (2) $f(x)=a^x,\quad x_0=0$.

2. 将下列函数展成 x 的幂级数，并指出收敛域：

   (1) $\sin\dfrac{x}{2}$;

   (2) $\sin^2 x$;

   (3) $\ln(a+x)\quad (a>0)$;

   (4) $\dfrac{1}{2+x}$;

   (5) $(1+x)\ln(1+x)$;

   (6) $\arctan x$;

   (7) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

   (8) $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展成 $(x-3)$ 的幂级数.

4. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展成 $(x-2)$ 的幂级数.

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展成 $(x+4)$ 的幂级数.

6. 设 $f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$，求 $f^{(6)}(0)$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

8. 将 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 展成 x 的幂级数.

1.6 幂级数的简单应用

1.7 反常积分的审敛法和 Γ 函数

1. 判定下列反常积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\arcsin x}{1+x^3}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^3}$;

(6) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$.

2. 用 Γ 函数表示下列积分，并指出其收敛范围：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^n}\mathrm{d}x\quad(n>0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{1}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$.

3. 证明下列公式：

(1) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n=2^n\Gamma(n+1)$;

(2) $\displaystyle 1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$;

(3) $\displaystyle\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (勒让德倍量公式).

1.8 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，其再 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式如下，试将 $f(x)$ 展为傅里叶级数.

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0;\\ 0, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\leqslant x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ $a>b>0$ 是常数;

(3) $f(x)=3x^2+1,\quad -\pi\leqslant x<\pi$.

2. 将下列函数展为傅里叶级数：

(1) $f(x)=e^{ax},\quad -\pi\leqslant\pi$;

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

(3) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$

3. 设周期函数 $f(x)$ 的周期是 2π，证明 $f(x)$ 的傅里叶系数可表示为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

1.9 正弦级数、余弦级数和一般区间上的傅里叶级数

1. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开为正弦级数.
2. 将函数 $f(x)=2x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.
3. 将 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{px}{2}, & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{p(l-x)}{2}, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$ 展为正弦级数.
4. 将下列周期函数展为傅里叶级数 (下面给出函数在一个周期内的表达式):

(1) $f(x)=1-x^2 \quad \left(-\dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{1}{2}\right);$

(2) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$

5. 设 $f(x)=x-1(0 \leqslant x \leqslant 2)$，将 $f(x)$ 展为以 2 为周期的傅里叶级数.
6. 将 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2} \\ l-x, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$ 展为正弦级数和余弦级数.

1.10 复数形式的傅里叶级数

1.11 用 MATLAB 计算级数问题

第 2 章 向量代数与空间解析几何

2.1 向量及其运算

1. 设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为非零向量，试作出向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的图形.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,5,-1)$，$\boldsymbol{c}=(6,4,-6)$，证明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行.
3. 证明三角形两边中点连线平行于第三边，且等于第三边的一半.
4. 设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=6$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同方向，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.
5. 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$.
6. 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{2\pi}{3}$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 的夹角.
7. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.
8. 一向量的重点 $M_2(4,-2,0)$，它在三个坐标轴上的投影依次为 3，2，7，求该向量的起点 M_1.
9. 设两点 $M_1(2,0,-3)$，$M_2(1,-2,0)$，在线段 M_1M_2 上求一点 M，满足 $M_1M=2MM_2$.
10. 求向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$ 的夹角.
11. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,-4)$，$b=(2,1,8)$，向量 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，求 m.
12. 设向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求
    (1) $(-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$;
    (2) $\boldsymbol{a}\times 3\boldsymbol{b}$;
    (3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.
13. 设向量 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线，求 m 和 n.
14. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，求
    (1) 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线的长度;
    (2) 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积;
    (3) 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直的单位向量.
15. 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算
    (1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$;
    (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$;
    (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;
    (4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.
16. 判别下列向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否共面：
    (1) $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{c}=(3,-1,3)$;
    (2) $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{c}=(3,-4,7)$.

17. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,z)$，问 z 为何值时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小？并求出此最小值.

2.2 空间的平面和直线

1. 求满足下列条件的平面方程：
   (1) 过点 $M(1,2,3)$ 且与平面 $2x+3y+z=0$ 平行；
   (2) 过点 $M_1(2,-2,1)$，$M_2(0,1,0)$，$M_3(1,4,5)$ 三点；
   (3) 过点 $(4,-3,-2)$ 和点 $(4,1,1)$ 且平行于 x 轴.
2. 画出下列各平面图形：
   (1) $2x+3y+4z=6$;
   (2) $2x-y=3$;
   (3) $x-2y+3z=0$;
   (4) $z=2$.
3. 求距离原点为 3 且平行于 $x+y+z=1$ 的平面方程.
4. 求三平面 $\pi_1: x+y+z=4$，$\pi_2: 3x-y+z=0$ 和 $\pi_3: x+2y-z=6$ 的交点，以及两两平面之间的夹角.
5. 求满足下列条件的直线方程：
   (1) 过点 $M_1(-3,0,2)$ 和 $M_2(3,1,1)$;
   (2) 过点 $M(1,0,2)$ 且与两直线 $\dfrac{x-1}{1}=y=\dfrac{z+1}{-1}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 垂直的直线;
   (3) 过点 $M_1(2,-3,1)$ 与平面 $3x-y+4z-1=0$ 垂直;
   (4) 过点 $M_1(0,2,4)$ 与两平面 $x+2z-1=0$ 及 $y-3z-2=0$ 都平行;
   (5) 过点 $M_1(11,9,0)$ 与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-5}{5}$ 及直线 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ 相交.
6. 用对称式方程和参数方程表示直线
$$\begin{cases}2x+y-z+1=0,\\3x-y-2z-3=0.\end{cases}$$
7. 求点 $(2,0,1)$ 到直线 $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ 的距离.
8. 求直线 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{1-y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与平面 $2x+y-zz+4=0$ 的交点和夹角.
9. 判断下列平面与直线间的关系：
   (1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$，$4x-2y-2z-3=0$;
   (2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$，$3x-2y+7z-8=0$;
   (3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$，$x+y+z-3=0$.
10. 问 k 为何值时
   (1) 直线 $\begin{cases}x=kz+2,\\y=2kz+4\end{cases}$ 与平面 $x+y+z=0$ 平行；

(2) 直线 $\begin{cases} x = z + k, \\ y = z \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} x = 2z + 1, \\ y = 3z + 2 \end{cases}$ 相交.

11. 求直线 $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 12 = 0, \\ x + 4y - 2z - 10 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z - 1 = 0$ 上的投影直线方程.

12. 在 z 轴上求一点，使它与平面 $12x + 9y + 20z - 19 = 0$ 和 $16x - 12y + 15z - 9 = 0$ 等距离.

13. 求点 $M(4, 1, 2)$ 在平面 $x + y + z = 1$ 上的投影.

14. 求与平面 $x + 6y + z = 0$ 平行，且与坐标平面围成的四面体体积为 6 的平面方程.

2.3 空间的曲面和曲线

1. 建立以点 $M(1, 5, 2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程.

2. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z = 0$ 表示什么曲面？

3. 一球面过原点和三点 $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$，试求它的方程.

4. 求到两定点 $(c, 0, 0)$, $(-c, 0, 0)$ 距离之和为 $2a$ 的动点的轨迹方程 ($a > c > 0$ 均为常数).

5. 懂点 M 在 xOz 面上，M 到原点和到点 $A(5, -3, 1)$ 等距离，求 M 的轨迹方程.

6. 下列方程在平面直角坐标系和空间直角坐标系中各表示怎样的几何图形？

(1) $y = kx \quad (k$ 为常数);

(2) $x^2 - y^2 = 0$;

(3) $x^2 + y^2 = 0$;

(4) $y^2 = 2px \quad (p > 0$ 为常数);

(5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(6) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7. 求下列旋转面的方程：

(1) xOy 面上曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 绕 y 轴旋转一周；

(2) xOz 面上曲线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周；

(3) xOz 面上曲线 $x^2 - z^2 = 9$ 绕 z 轴旋转一周.

8. 指出下列方程中，哪些是旋转面，若是，它是怎样生成的？

(1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{9} = 1$;

(2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$;

(3) $x^2 - \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$;

(4) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;

(5) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{25} = 1$.

9. 下列方程组在平面直角坐标系和空间直角坐标系中各为什么图形？

(1) $\begin{cases} x-3=0, \\ y-2=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ y=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x+y=5, \\ 2x+y=-1. \end{cases}$

10. 求下列空间曲线关于 xOy 面的投影柱面和投影曲线的方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=-z, \\ x+z+1=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x+z-1=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0. \end{cases}$

11. 求空间曲线 $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y=1 \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线方程.

12. 求曲线 $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9, \\ z=5 \end{cases}$ 的参数方程.

13. 指出下列曲面的名称，并作图.

(1) $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z$;

(3) $16x^2+4y^2-z^2=64$;

(4) $y^2+z^2-x^2=0$;

(5) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}+z^2=-1$;

(6) $y^2-9z^2=81$.

14. 画出下列各组曲面所围成的立体图形：

(a). 平面 $x+2y+3z=1$ 与三个坐标面；

(b). 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，三个坐标面与平面 $x+y=1$；

(c). 圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 和 $y^2+z^2=r^2$ 及三个坐标面在第一卦限内；

(d). 平面 $y=1$, $3x+4y+2z=12$ 及三个坐标面.

第 3 章 多元函数微分学及其应用

3.1 多元函数的概念及其极限和连续

1. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(2) $z=\ln(x^2-3y+2)$;

(3) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}\ (R>r>0)$;

(4) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(5) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(6) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

(7) $z=\ln(x-y)-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(8) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-4}$.

2. 若 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

3. 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

4. 设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求函数 $f(x)$ 和 z 的表达式.

5. 求下列函数的间断点：

(1) $z=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(2) $z=\dfrac{xy^2}{x+y}$;

(3) $z=\ln(a^2-x^2-y^2)$;

(4) $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$.

6. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\tan(xy)}{x}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$.

**7. 讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的连续性.

3.2 偏导数与全微分

1. 求下列函数在给定点处的偏导数：
   (1) $z=x^2+3xy+y^2$，求 $z'_x(1,2)$，$z'_y(1,2)$;
   (2) $z=e^{x^2+y^2}$，求 $z'_x(0,1)$，$z'_y(0,1)$;
   (3) $z=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$，求 $z'_x(1,1)$，$z'_y(1,1)$;
   (4) $z=\ln|xy|$，求 $z'_x(-1,-1)$，$z'_y(1,1)$.
2. 求下列函数的一阶偏导数：
   (1) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;
   (2) $z=\ln(z+\ln y)$;
   (3) $z=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$;
   (4) $z=x\cdot\ln\dfrac{y}{x}$;
   (5) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$;
   (6) $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{y}{x}}$;
   (7) $z=(1+xy)^y$;
   (8) $z=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$
3. 求下列函数的二阶偏导数：
   (1) $z=x\ln(xy)$;
   (2) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;
   (3) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;
   (4) $z=y^x$.
4. 求下列函数的全微分：
   (1) $z=e^{x(x^2+y^2)}$;
   (2) $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$;
   (3) $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$;
   (4) $z=\sqrt{\ln(xy)}$.
5. 证明下列各题:
   (1) 设 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, 证明 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$;
   (2) 设 $z=x^y\cdot y^x$, 证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z(x+y+\ln z)$;
   (3) 设 $z=f(ax+by)$, 证明 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(4) 设 $u=(y-z)(z-x)(x-y)$, 证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$;

(5) 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$, 证明 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

6. 拉普拉斯方程是指偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 证明下述函数满足拉普拉斯方程:

(1) $u=\ln(x^2+y^2)$;

(2) $u=e^x\sin y+e^y\cos x$.

**7. 证明

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处可微. 但偏导数不连续.

*8. 求下列数的近似值:

(1) $(1.04)^{2.02}$;

(2) $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$.

9. 设有一圆柱形金属工件, 高为 $h=10cm$, 底圆半径 $r=2cm$, 求高增加 $0.02cm$, 半径增加 $0.01cm$ 时, 该工件的体积大致能增加多少?

10. 求下列函数的全微分:

(1) $u=xyz$;

(2) $u=y^{zx}$.

3.3 多元复合函数和隐函数的微分法

1. 求下列函数的导数或偏导数:

(1) 设 $z=u\ln v,\ u=x^2,\ v=x^2+y^2$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $w=ue^v,\ u=xyz,\ v=x+y+z$, 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dfrac{\partial w}{\partial z}$;

(3) 设 $z=e^{x-2y},\ x=\sin t, y=t^3$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$;

(4) 设 $z=f(e^t,t^2,\sin t)$, f 可微, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$;

(5) 设 $u=f(x,y),\ x=s^2+t^2, y=\cos(s-t)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial s},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}$;

(6) 设 $w=f(x,u,v),\ u=g(x,y),\ v=h(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}$;

(7) 设 $u=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

2. 设 $F(x,y,z)=0$ 且 F 具有连续偏导数, 证明

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $y^x=x^y$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\sin(xy) = x^2y^2 + e^{xy}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(3) 设 $e^z = xyz$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(4) 设 $z = e^{xyz}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(5) $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(6) $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(7) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z = xy + xF(u)$, $u = \dfrac{y}{x}$, $F(u)$ 为可微函数, 证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

5. 求下列函数的二阶偏导数 (其中 f 为二阶可微函数):

(1) $z = \ln(e^x + e^y)$;

(2) $z = f(xy, y)$;

(3) $z = f(x^2y, xy^2)$.

6. 求下列隐函数的二阶偏导数:

(1) 设 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

(2) 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

*(3) 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

**7. 求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\begin{cases} x + y + u + v = 0, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

(3) $\begin{cases} x = e^u + u\sin v, \\ y = e^u - u\cos v, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

**8. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微, 且 $f(1, 1) = 1$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 3$, $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

*9. 设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, 且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定, 求 $\mathrm{d}u$.

*10. 设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

3.4 微分法在几何上的应用

3.5 多元函数的极值与最值

3.6 二元函数泰勒公式

3.7 MATLAB 求偏导数

第 4 章 重积分

第 5 章　曲线积分与曲面积分