Nombre: Luis Manuel Zambrano Fecha: día mes año

Profesor Materia

Institución Curso Nota

2.1.6

3.) a.)

$\circ$	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_k
I	I	R_i	X_k	$\bar{R}_j$
R_i	R_i	R_j	I	X_k
$\bar{R}_j$	$\bar{R}_j$	I	R_i	X_k
X_k	X_k	X_k	X_k	I

b.) Cumple Cerradura bajo $\circ$ por lo que podemos ver en la tabla de multiplicación

Asociatividad: $(I \circ R_i) \circ X_k = I \circ (R_i \circ X_k)$

Cumple identidad ya que $I \circ K = K$

inverso: tienen inverso ya que podemos (según la tabla de multiplicar) cada elemento es el inverso de sí mismo

→ Por que cumple estas propiedades podemos decir que es un grupo

c.) $\{I, R_i, R_j\}$ subgrupo cíclico de orden 3

$\circ$	I	R_i	R_j
I	I	R_i	R_j
R_i	R_i	R_j	I
R_j	R_j	I	R_i

Vemos que es cerrado bajo la concatenación también es asociativa, y existe un elemento neutro (I) y cada elemento tiene un inverso

→ por lo tanto es un subgrupo cíclico de grado 3

$\{I, \{X_K\}\}$ es un subgrupo cíclico de grado 2

	I	X_K
I	I	X_K
X_K	X_K	I

también es cerrado bajo esa operación, es asociativa y existe un elemento neutro (I) y todo elemento tiene su inverso

Por lo tanto forma un subgrupo cíclico

d.) Considere las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tabla de multiplicación

x	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	I	D	A	B	I

Las matrices $\{I, A, B, C, D, E\}$ forman un grupo ya que cumplen todas las propiedades anteriormente mencionadas, además podemos ver que es isomorfo a S_3 porque las tablas son equivalentes e.)

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_2	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_3	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

de igualmancia las tablas debidamente ordenada es isomorfo a G_6

f.) las operaciones de simetría que dejan invariante a un triangulo isosceles es solo una rotación por eje al eje de simetría del triangulo. llamar a representarlo, con un conjunto S_i que junto con

	I	S_i
I	I	S_i
S_i	S_i	I

junto con la identidad forman un grupo que cumple las propiedades

Si el triangulo es escaleno S no existe porque un triangulo escaleno no tiene eje de simetría

10.) $\mathbb{P}_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = a_j x^i$

a.) Cerrado bajo la suma

$\forall P_n(x)_a , P_n(x)_b \in \mathbb{P}_n$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = a_j x^i + b_j x^i = (a_j + b_j)(x^i)$

donde $(a_j + b_j) \in C_i$

Cerrado bajo la multiplicacion

$\alpha P_{na} = (\alpha a_j) x^i$ donde $\alpha a_j \in C_i$

b.) Si porque si $a_i \in \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}$ entonces sigue siendo un espacio vectorial

c.) I) $P_n(0, P_{n-1})$ si es subespacio de de P_n

Ademas es cerrado bajo la suma y el producto con un escalar

II) por definicion la suma de 2 numeros pares da un par por lo tanto es cerrado bajo la suma, multiplicacion con un escalar y es subespacio

III.) no porque puedo definir

$ax^2 - ax^2 = 0$ y el $0 \notin$ al subespacio por ende no es cerrado bajo la suma

IV.) de igual manera $(x-1) - (x-1) = 0$

no es cerrado bajo la suma

Profesor | Materia

Institución | Curso | Nota

2.2.4   6.)

a.)

* $|a\rangle + |b\rangle = a^0 + a^i|q_i\rangle + b^0 + b^i|q_i\rangle = a^0 + b^0 + (a^i b^i)|q_i\rangle$
$= c^0 + c^i|q_i\rangle$

* $\alpha|c\rangle = \alpha c^\alpha|q_\alpha\rangle = \alpha c^0|q_0\rangle + \alpha c^1|q_1\rangle +$
$\alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$

Si es analogo a R^3 ya que se hace la suma y la multiplicacion por escalar componente a componente solo que ahora son 4 componentes y si es espacio vectorial ya que es cerrado bajo suma y multiplicacion.

b.) $|b\rangle \equiv (b^0, \mathbf{b})$, $|r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$

$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0|q_0\rangle + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle) \odot$
$(r^0|q_0\rangle + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$

→ $d^0 = b^0 r^0(|q_0\rangle \odot |q_0\rangle) + b^1 r^1(|q_1\rangle \odot |q_1\rangle) + b^2 r^2(|q_2\rangle \odot |q_2\rangle)$
$+ b^3 r^3(|q_3\rangle \odot |q_3\rangle)$

$d^0 = b^0 r^0 - b^1 r^1 - b^2 r^2 - b^3 r^3 = b^0 r^0 - b^i r_i = b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}$

→ $d^i = (b^0 r^1 + r^0 b^1 - b^2 r^3 + b^3 r^2)|q_1\rangle$
$+ (b^0 r^2 + r^0 b^2 - b^1 r^3 + b^3 r^1)|q_2\rangle$
$+ (b^0 r^3 + r^0 b^3 - b^2 r^1 + b^1 r^2)|q_3\rangle$

$b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} + \varepsilon_{ijk} b_j b_k|q_i\rangle = b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}$

c.

$d^0 = b^i r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} = a|q_0\rangle \rightarrow$ parte real

$\mathbf{d} = r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}$

Proponemos $r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} = S^{\alpha j}\delta^0_\alpha|q_j\rangle$

$\rightarrow S^{0j}|q_j\rangle = (S^{0j} + S^{j0})|q_j\rangle = (r^0 b_j + b^0 r_j)|q_j\rangle$

$\rightarrow r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r}$ ■

proponemos $A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = \varepsilon^{ijk}_{\ \ } b_j r_k |q_i\rangle$

$\rightarrow A^{[jk]i} = -A^{kij}$ } misma definición
$\rightarrow \varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$

$\rightarrow A^{[jk]i} = \varepsilon^{ijk}$ ■

d) $S^{ij} = r^0 b^1 + r^0 b^2 + r^0 b^3 + b^0 r^1 + b^0 r^2 + b^0 r^3$

$A^{[jk]i} b_j r_k = \varepsilon^{ijk} b_i r_j |q_k\rangle = (\mathbf{b}\times\mathbf{r})_k$

Vectores $a^i e_i = a$

$a \rightarrow a^i(-e_i) = -a$

Pseudovectores

$c = a \times b \rightarrow (-a)\times(-b) = c$

por lo tanto $|d\rangle$ no va ser ni vector ni pseudo vector ya que

$|d\rangle \rightarrow d^0 - d^i|q_i\rangle$

e.)

$$|q_0\rangle = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \sigma_0$$

$$|q_1\rangle = i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = i\sigma_1$$

$$|q_2\rangle = i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = i\sigma_2$$

$$|q_3\rangle = i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = i\sigma_3$$

$$|q_0\rangle \odot |q_0\rangle = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = |q_0\rangle = 1 \qquad i^2$$

$$|q_1\rangle \odot |q_1\rangle = i^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$$

$$|q_2\rangle \odot |q_2\rangle = i^2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$$

$$|q_3\rangle \odot |q_3\rangle = i^2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$$

$$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = i^2\sigma_1\sigma_2 = -i\sigma_3 = -|q_3\rangle$$

$$|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = i^2\sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3 = -|q_3\rangle$$

$$|q_2\rangle \odot |q_3\rangle = i^2\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = |q_1\rangle$$

$$|q_3\rangle \odot |q_3\rangle = i^2\sigma_3\sigma_2 = -i\sigma_1 = -|q_1\rangle$$

analogamente salen otras 8 ecuaciones entonces

$$(|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle) \equiv \{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3, \sigma_0\}$$

$$|b\rangle \to \begin{pmatrix}z & w\\ -w^* & z^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+iy & a+ib\\ -a+ib & x-iy\end{pmatrix}$$

$$= x(\sigma_0) + b(i\sigma_1) + a(i\sigma_2) + y(i\sigma_3) = \begin{pmatrix}x+iy & a+ib\\ -a+ib & x-iy\end{pmatrix}$$

$$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle$$

adjuntamos codigo en python para no hacer tantos calculos ... segun el codigo si son base para los cuaterniones

g.) $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{*} \odot |b\rangle$

I.) $\widetilde{\langle a|a\rangle} = |a\rangle^{*} \odot |a\rangle = a^0 - a^i|q_i\rangle \odot$
$a^0 + a^i|q_i\rangle$

$= a^0a^0 + (a^i - a^i|q_i\rangle) + \cancel{a^0a^i|q_i\rangle} - \cancel{a^0a^i|q_i\rangle}$

$= (a^0)^2 \rightarrow \widetilde{\langle a|a\rangle} \geq 0$

II.) $\widetilde{\langle a|a\rangle} = 0$ solo si $|a\rangle = 0$

falso porque si $|a\rangle = 0 + a^i|q_i\rangle$ cumple que $\widetilde{\langle a|a\rangle} = 0 \rightarrow$ no es buena definicion de producto interno

h.) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle\right]$

I) $\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[\underbrace{a^{02} - |q_1\rangle}_{\downarrow} \odot a^{02} \odot |q_1\rangle\right]$

[illegible]

$\frac{1}{2}\left[(a^0)^2 - |q_1\rangle \odot (a^0)^2|q_1\rangle\right] \frac{1}{2}\left[(a^0)^4|q_1\rangle + (a^0)^2\right]$

$\longrightarrow \langle a|a\rangle \geq 0$ $\qquad |f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$

Nombre | Fecha día mes año

Profesor | Materia

Institución | Curso | Nota

II de igual manera que el anterior

si $|f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$ / que $f^0 \neq 0$

$\langle f|f\rangle = \frac{1}{2}(f^0)^2 \neq 0$

i.) $n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$n(|b\rangle) = \sqrt{|b\rangle^* \odot |b\rangle} = \sqrt{(b^0)^2} = |b^0| \geq 0$

pero al igual que la pregunta g.) si $|b\rangle = b^0 + b^i|q_i\rangle$ con $b^0 = 0$ y $b^i|q_i\rangle \neq 0$ puedo encontrar infinitos vectores tal que su norma es 0 por tanto no actúa como espacio vectorial normado j.) $\overline{|a\rangle} = \dfrac{|a\rangle}{\||a\rangle\|^2} \rightarrow = \dfrac{a^0|q_0\rangle - a^1|q_1\rangle}{(a^0)^2}$

$\rightarrow |a\rangle \odot \overline{|a\rangle} = 1 = |q_0\rangle$

$\left(a^0|q_0\rangle + a^1|q_1\rangle\right) \odot \left(\dfrac{a^0}{(a^0)^2}|q_0\rangle - \dfrac{a^1}{(a^0)^2}|q_1\rangle\right) |q_1\rangle$

$|q_0\rangle|q_0\rangle - \dfrac{a^1}{(a^0)}|q_0\rangle|q_1\rangle + \dfrac{a^1 a^0}{(a^0)^2}|q_1\rangle|q_0\rangle$

$- \dfrac{(a^1)^2}{(a^0)^2}|q_1\rangle|q_1\rangle$

$= 1 - \dfrac{a^1}{a^0}|q_1\rangle + \dfrac{a^1}{a^0}|q_1\rangle + \dfrac{(a^1)^2}{(a^0)^2}$

$= \left(\dfrac{(a^1)}{(a^0)}\right)^2 + 1 \neq 1$

No es unico

k.) podemos ver que si es un grupo y cumple todas las propiedades hasta podriamos decir que el elemento inverso es $(-|q_1\rangle)$ ya que $|q_1\rangle \odot (-|q_1\rangle) = -(-1) = 1$

l.) $|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$|v'\rangle = (\overline{|a\rangle} \odot |a\rangle) \cdot |v\rangle$

$= \left(\left(\dfrac{a^1}{a^0}\right)^2 + 1\right) \odot |v\rangle = \underbrace{\left(\left(\dfrac{a^1}{a^0}\right)^2 + 1\right)}_{\alpha}|v\rangle - |v'\rangle$

$n(|v\rangle) = 0 \rightarrow$ no tiene parte real

$n(\alpha|v\rangle) = 0 \rightarrow$ no tiene parte real

si se conserva la norma

5.)

a.) Verifiquemos si $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ son LI

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$a+d=0 \quad b-ci=0$

$a-d=0 \quad b+ci=0$

$\rightarrow a=-d$ y $a=d$ solo es cierto si $d=0$

$\rightarrow b=ci$ y $b=-ci$ solo es cierto si $c=0$

entonces $a=b=c=d=0$ son LI

Miremos si podemos obtener la matriz hermítica a través de las matrices de pauli

$$A = \begin{bmatrix} a+d & b+ci \\ b-ci & a-d \end{bmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

$$= a\sigma_0 + d\sigma_3 + b\sigma_1 + c\sigma_2$$

b.) $\langle a|b\rangle = Tr(A^{+}B)$

$\langle\sigma_0|\sigma_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = 0$

$\langle\sigma_0|\sigma_2\rangle = tr(\sigma_0\sigma_2) = Tr(\sigma_2) = 0$

$\langle\sigma_0|\sigma_3\rangle = tr(\sigma_0\sigma_3) = tr(\sigma_3) = 1-1 = 0$

$\langle\sigma_1|\sigma_3\rangle = tr\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = 0$

$\langle\sigma_1|\sigma_2\rangle = tr\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = 0$

$\langle\sigma_2|\sigma_3\rangle = tr\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix} = 0$ son ortonormales c.) podemos construir un subespacio con las matrices reales $\{ \sigma_1, \sigma_3, \sigma_0 \}$ notando que son base para matrices 2x2 de la forma

$$a\sigma_0 + b\sigma_1 + d\sigma_3 = \begin{pmatrix} a+d & b \\ b & a-d \end{pmatrix}$$

tambien podemos construir subespacios de matrices imaginarias puras con $\{ \sigma_2 \}$ de la forma

$$c\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & ci \\ -cj & 0 \end{pmatrix}$$