FATORAÇÃO QR (HOUSEHOLDER E GIVENS)

Iann Takami Singo
Júlio César Fagundes
Luiza Gabriela da Silva
Victor Gabriel Zerguer

O que é?

- A = QR;
- Problema dos mínimos quadrados;
- Base para o algoritmo QR - autovalores e autovetores;
- Q é ortogonal e sua transposta é igual sua inversa;
- R é matriz triangular superior.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 \end{bmatrix} \; Q = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \; R = \begin{bmatrix} 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 \end{bmatrix}$$

Alston Scott Householder

Transformações de Householder

- Utilizam-se reflexões dos vetores colunas da matriz.
- Matriz de Householder:

$$H(u) = I - \frac{2 \cdot u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$$

- Preferimos separar como no livro do Lee Johnson: Introduction to Linear Algebra.

$$Q = I - b \cdot u \cdot u^T \qquad b = \frac{2}{(u^T \cdot u)}$$

ALGORITHM 2

Given an integer k, $1 \le k \le n$, and a vector $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T$, construct $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$ as follows:

1. $u_1 = u_2 = \cdots = u_{k-1} = 0$.

2. $u_k = v_k - s$, where

$$s = \pm\sqrt{v_k^2 + v_{k+1}^2 + \cdots + v_n^2}.$$

3. $u_i = v_i$ for $i = k+1, k+2, \ldots, n$.

In step (2), choose the sign of s so that $v_k s \le 0$.

Transformações de Householder

```
b = 2/ (u'*u)  ##vai simplificar pra fazer a matriz Q
k += 1
Q = I - b*u*u' ##Define a matriz Q
R = Q'*A ##Define a matriz R

if Q*R == A  ##Caso QR = A, quebra o loop e vai para os prints.
    break
end
```

Transformações de Householder

```
julia> A = [4 1 2 2; 1 2 0 1; -2 0 3 -2; 2 1 2 1]
4×4 Array{Int64,2}:
  4  1  2   2
  1  2  0   1
 -2  0  3  -2
  2  1  2   1

julia> HouseholderQR(A)

Matriz R = [4.0 1.0 2.0 2.0; 1.0 2.0 0.0 1.0; 2.748077590084897 0.8543643927543477 0.
14970557864439304 1.8937131973305492; -0.6693799809324941 0.5196744022881007 3.602441
9828392444 -1.1890543832205949]

Matriz Q = [1.0 0.0 0.0 0.0; 0.0 1.0 0.0 0.0; 0.0 0.0 -0.5196744022881008 0.854364392
7543477; 0.0 0.0 0.8543643927543477 0.5196744022881007]

Matriz QR = [4.0 1.0 2.0 2.0; 1.0 2.0 0.0 1.0; -2.0000000000000004 -5.551115123125783
e-17 3.0000000000000004 -2.0000000000000004; 2.0000000000000004 1.0 1.9999999999999999
8 1.0]
```

Transformações de Householder

```
        Q = Matrix(I,m,m) - b*u*u'
        R = (Q'*A)
        println("\nA matriz R = $R")
        println("\nA matriz Q = $Q")
end
```

PROBLEMS   OUTPUT   DEBUG CONSOLE   TERMINAL

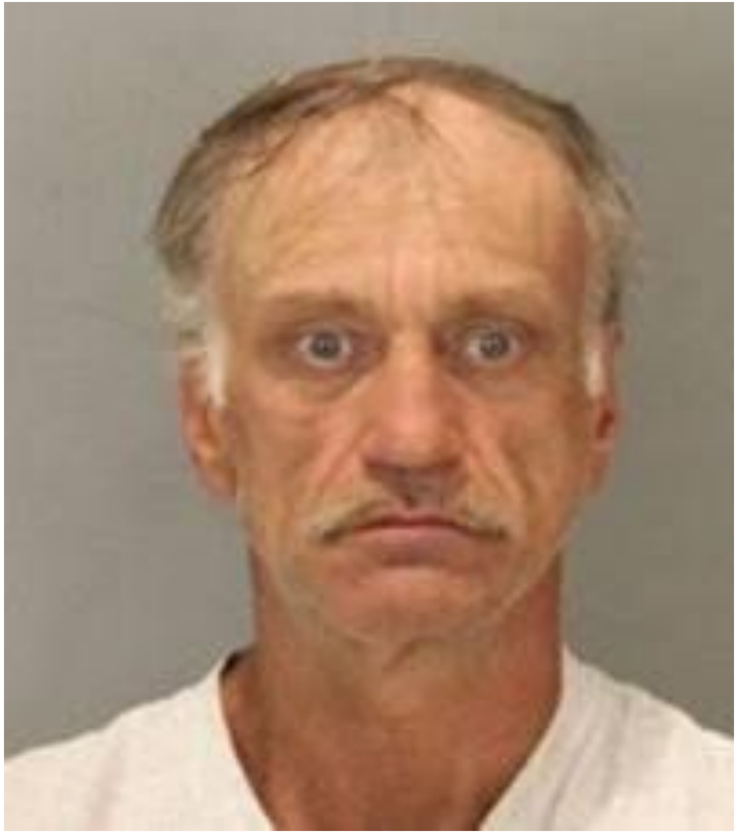
```
julia> A = [4 0; 0 3]
2×2 Array{Int64,2}:
 4  0
 0  3

julia> HouseholderQR(A)

A matriz R = [-4.0 0.0; 0.0 3.0]

A matriz Q = [-1.0 0.0; 0.0 1.0]
```

Wallace Givens



Rotações de Givens

- Utilizam-se rotações dos vetores.

- Matriz de rotação para n=2:

$$P_j^i = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

- Para eliminar as entradas:

$$c = \frac{a_{i-1,j}}{\sqrt{a_{i-1,j}^2 + a_{i,j}^2}}$$

$$s = \frac{a_{i,j}}{\sqrt{a_{i-1,j}^2 + a_{i,j}^2}}$$

Rotações de Givens

Exemplo: se quisermos anular a entrada a_{21} da Matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447$$

$$s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{21}^2 + a_{11}^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.89$$

Rotações de Givens

$$P_j^i = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c & s \\ -s & c \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow P_1^2 = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.89 & 0 \\ -0.89 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{P_1^2}{\begin{bmatrix} 0.447 & 0.89 & 0 \\ -0.89 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{A_2}{\begin{bmatrix} 2.27 & 2.674 & 2.674 \\ 0.004 & -0.886 & -0.886 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Rotações de Givens

$$P_1^2 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c & s \\ -s & c \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \qquad P_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

Rotações de Givens

A cada elemento zerado encontramos uma P nova, ao final, teremos um conjunto de P's que multiplicadas viram Q^T. E como encontrar Q?

$$Q^T \cdot A = R$$

$$Q^T \cdot A \cdot A^{-1} = R \cdot A^{-1}$$

$$Q^T = R \cdot A^{-1}$$

$$Q = (R \cdot A^{-1})^T$$

Rotações de Givens - Caso específico

```julia
    if m == 2
        g[2,1] = -b[2,1]/sqrt((b[2,1]^2)+(b[1,1]^2))
        g[1,1] = b[1,1]/sqrt((b[2,1]^2)+(b[1,1]^2))
        g[1,2] = b[2,1]/sqrt((b[2,1]^2)+(b[1,1]^2))
        g[2,2] = b[1,1]/sqrt((b[2,1]^2)+(b[1,1]^2))
        b = g*b
    else
```

PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL

```
julia> A = [4.0 0.0; 0.0 3.0]
2×2 Array{Float64,2}:
 4.0  0.0
 0.0  3.0

julia> GivensQR(A)

Matriz R = [4.0 0.0; 0.0 3.0]

Matriz Q = [1.0 0.0; 0.0 1.0]
```

HOUSEHOLDER

Mexe com o vetor coluna inteiro;

Bom para zerarmos muitas entradas;

GIVENS

Bom para zerar poucas entradas;

Mexe com a linha da entrada e a anterior;

Agradecemos pela atenção!