

# Algorithmen II

Lukas Abelt

`lukas.abelt@airbus.com`

DHBW Ravensburg  
Wirtschaftsinformatik

Ravensburg  
19. Mai 2019

# Outline

---

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Inhalt

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Inhalt

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Allgemeines

## Eigenschaften

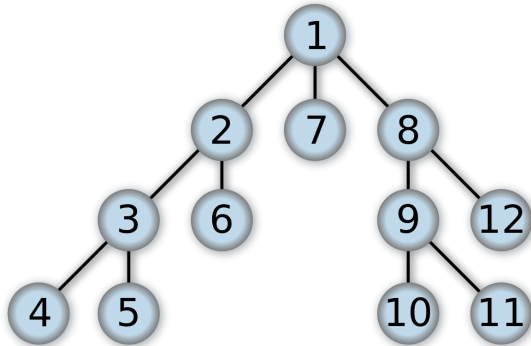
- Grundlegende Algorithmenstrategie
- Findet theoretisch:
  - alle Lösungen für ein gegebenes Problem...
  - ...in einer endlichen Zeit
- Nutzt das **trial and error** Prinzip

# Methodik

- Sind rekursiv implementiert
- Es werden inkrementell Teillösungen „ausprobiert“
- Wird eine Teillösung als ungeeignet erkannt, wird diese verworfen
- Implikationen daraus:
  - Problem muss ein Kriterium für Nicht-Erfüllbarkeit liefern
  - Oder anders: Die Lösung muss bestimmte Bedingungen erfüllen
  - Man spricht in der Regel von **Constraint-Satisfaction-Problems**
- Visualisieren lässt sich das z.B. als Entscheidungsbaum

# Entscheidungsbaum

## Backtracking Algorithmen



Quelle: [1]

# Vor- und Nachteile

- Es werden alle (sinnvollen) Lösungen ausprobiert
- Umgekehrt kann definitiv ausgesagt werden, dass keine Lösung existiert, wenn Sie nicht über Backtracking gefunden werden kann
- Jedoch sehr ineffizient
  - Komplexität im Worst Case ist  $O(z^n)$  (Wobei  $z$  der Verzweigungsgrad ist)
  - Somit ergibt sich für alle  $z > 1$  eine exponentielle Laufzeit
  - Daher eher für Probleme mit kleinem Lösungsbaum geeignet



# Anwendungen I

Von Backtracking (Vgl. [5])

## □ Damenproblem

- Auf einem  $n \times n$  Schachfeld sollen  $n$  Damen so platziert werden, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können

## □ Springerproblem

- Auf einem  $M \times N$  Schachfeld soll ein Springer einen Weg finden, durch den jedes Feld **genau einmal** besucht wird.

## □ Sudoku

## □ Färbeproblem

- Eine Landkarte mit  $B$  Ländern soll mit  $N$  verschiedenen Farben eingefärbt werden
- Gesucht wird eine Einfärbung, bei der angrenzende Länder immer verschiedene Farben haben

# Anwendungen II

Von Backtracking (Vgl. [5])

- **Wegsuche in Graphen**

- Hierzu gehört zum Beispiel auch das finden eines Weges in einem Labyrinth

- Viele Backtracking Probleme sind **NP-vollständig**

# Inhalt

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Motivation

- Das Lösen großer Probleme fällt oft schwer
  - Sowohl für Menschen
  - Als auch Computer
- Meist ist es einfacher, das Problem in Teilprobleme zu unterteilen
- ...und diese separat voneinander zu lösen
- Wir machen dies oft ganz automatisch
- Bei Algorithmen spricht man hierbei vom **Divide and Conquer** Verfahren

# Simple Beispiel

## Multiplikation

$$a \cdot b = \overbrace{b + b + \dots + b}^{a \text{ mal}}$$

$$a \cdot b = \overbrace{(b + b + \dots + b)}^{\frac{a}{2} \text{ mal}} + \overbrace{(b + b + \dots + b)}^{\frac{a}{2} \text{ mal}}$$

$$a \cdot b = 2 \cdot \overbrace{(b + b + \dots + b)}^{\frac{a}{2} \text{ mal}}$$

# Grundsätze

## Des Divide and Conquer Verfahrens

- Ein gegebenes Problem wird aufgeteilt...
- ...in zwei (oder mehr) kleinere Teilprobleme
- Dies geschieht rekursiv solange...
- ...bis sich die Teilprobleme trivial direkt lösen lassen
- Am Ende werden die Teilergebnisse zur Gesamtlösung zusammengefügt
- Es gibt ein ähnliches Vorgehen, bei dem man das Problem lediglich auf *ein* kleineres Teilproblem reduziert
  - Dies nennt man auch **Decrease and Conquer**

# Vorteile

Von D&C Algorithmen (Vgl. [6])

- ▣ **Starke Lösungsstrategie**

- ▣ Hilft dabei, Lösungen für komplexe Probleme zu finden
- ▣ Solange man einen Weg findet, das Problem in kleinere Subprobleme zu teilen

- ▣ **Algorithmeneffizienz**

- ▣ Der D&C Ansatz hat oft effizientere Algorithmen für bekannte Probleme gefunden
- ▣ Zum Beispiel: Quicksort, Mergesort und FFT
- ▣ Wenn sich ein Problem der Größe  $n$  immer in  $p$  Teilprobleme der Größe  $\frac{n}{p}$  teilen lässt, so ist die Komplexität von  $O(n \log_p n)$

# Vorteile

Von D&C Algorithmen (Vgl. [6])

## ▣ Parallelisierung

- ▣ Teilprobleme können oft parallel bearbeitet werden
- ▣ Dadurch teils erhebliche Zeitersparnis

## ▣ Speicherzugriff

- ▣ D&C Algorithmen können den Speicher meist effizienter (=schneller) nutzen
- ▣ Wenn die Teilprobleme klein genug sind können diese ggf. direkt im Prozessorcaché berechnet werden
- ▣ Dieser ist im Vergleich zum RAM deutlich schneller durch höhere Taktraten und physische Nähe



# Herausforderungen

Bei der Implementierung von D&C Algorithmen (Vgl. [6])

## ▣ Rekursion

- ▣ Implementierung erfolgt in der Regel über rekursive Aufrufe
- ▣ Dies ist häufig komplexer in der Implementierung und dem Verständnis

## ▣ Aufruftiefe

- ▣ Je nachdem wie oft der rekursive Aufruf erfolgt führt das zu Problemen
- ▣ Je nach Sprache und Compiler ist ggf. nur eine Rekursionstiefe möglich
- ▣ Dies kommt durch die ggf. beschränkte Größe des *Call Stacks*
- ▣ Bei zu tiefer Rekursion kann es so zum *Stack Overflow* kommen

# Herausforderungen

Bei der Implementierung von D&C Algorithmen (Vgl. [6])

## ▣ Auswahl des „trivialen Problems“

- ▣ Die Auswahl des direkt lösbaren Teilproblems ist nicht immer direkt ersichtlich
- ▣ In einigen Fällen ist ein Teilen bis zum kleinstmöglichen Teilproblem nicht sinnvoll
- ▣ Und effizienter ist es ein größeres Teilproblem direkt zu lösen
- ▣ Beispiel: Determinantenberechnung in Matrizen

# Suchalgorithmen

## Motivation

- Dienen dazu mit großen Datenmengen zu arbeiten
- Um bestimmte Informationen zu finden
- Beispiele (Digital und analog):
  - Finden einer Übersetzung im Wörterbuch
  - Finden von Websites
  - Suchen von bestimmten Buchabschnitten nach Thema (über Inhaltsverzeichnis oder Index)

# Allgemeine Aspekte

## Der Suche

- Oft wird nach den *Werten* für bestimmte *Schlüssel* gesucht
- Die Suche in einer beliebigen Sammlung von Daten ist in der Regel nur schwer optimierbar
  - Man muss jedes Element der Sammlung einzeln betrachten um ein bestimmtes Element zu finden
  - Komplexität:  $O(N)$
- Aus diesen Gründen werden zum suchen teils spezielle Datenstrukturen verwendet:
  - Symboltabellen
  - Hashtables
  - Suchbäume

# Allgemeine Aspekte

## Der Suche

- Gemeinsamkeit der Suchstrukturen:
  - Sind meist nach einem bestimmten Kriterium sortiert
- Dadurch lassen sich die Strukturen deutlich einfacher durchsuchen
- Stichwort: **Binärsuche**

# Inhalt

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Inhalt

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Insertion Sort

Grundprinzip (Siehe [3] S. 85ff)

- Gegeben sein eine Liste mit  $N$  Elementen
- Jedes Element wird nacheinander betrachtet
- Und an der korrekten Stelle der bereits betrachteten Elemente eingefügt
- Dadurch ergibt sich:
  - Eine bereits sortierte Teilliste
  - Eine Restliste mit den noch einzusortierenden Elementen



# Insertion Sort

## Praktisches Beispiel

# Vor- und Nachteile (Siehe [3] S. 85ff)

- Implementierung ist relativ simpel
- Jedoch viele Vergleiche und ggf. Verschiebungen nötig
- Komplexität beträgt hierfür  $O(N^2)$

# Inhalt

---

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Bubble Sort

Grundprinzip (Siehe [3] S. 89ff)

- Eine Liste wird Elementweise betrachtet
- Jedes Element wird mit seinem Nachfolger verglichen
- Ist der Nachfolger kleiner, so werden die Elemente getauscht
- Dies wird solange wiederholt, bis die komplette Liste durchlaufen wurde ohne, dass eine Vertauschung durchgeführt wurde
- Der Name „Bubble“ leitet sich davon ab, dass die größten Element sich am oberen Ende der Liste wie eine „Blase“ sammeln

# Insertion Sort

## Praktisches Beispiel

# Vor- und Nachteile

Siehe [3] S. 89ff

- Wohl mit der simpelste Algorithmus
- Jedoch ineffizient → Komplexität  $O(N^2)$
- Auch wenn z.B. Insertion Sort die gleiche Komplexität hat ist dieser in der Regel deutlich schneller
- Daher nur wenige sinnvolle praktische Anwendungen:
  - Beispielsweise erkennen (und korrigieren) von sehr kleinen Fehlern in „beinahe sortierten“ Arrays (Anwendung in der Computergrafik)

# Inhalt

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Selection Sort

Grundprinzip (Vgl. [3] S. 82f, [4], S. 272f)

- Gegeben ist eine Liste mit Elementindizes 1 bis  $N$
- Beginnend mit  $M = 1$  führe folgende Schritte durch:
  - Suche das Minimum der Liste im Bereich  $M \dots N$
  - Tausche das Minimum mit dem Element an der Stelle  $M$
  - Wiederhole diesen Vorgang für die Teilliste von  $M + 1 \dots N$  (Solange bis  $M = N$ )



# Inhalt

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Heapsort

Grundprinzip (Vgl. [2], S. 12ff)

- Sortiert nicht direkt Listen sondern nur die spezielle Struktur „Heap“
- Das heißt die Daten müssen entweder in dieser Form vorliegen
- ...Oder erst in diese Struktur umgewandelt werden
- Heap kann als Binärbaum interpretiert werden
- Heapsort besteht aus dem wiederholten Entfernen der Wurzel...
- ...Und dem nachfolgenden „versickern“ der restlichen Element

# Heap

## Definition

Heap (Definition als Liste, Vgl. [2], S. 12ff)

Eine Folge  $F = k_1, k_2, \dots, k_n$  von  $n$  Schlüsseln nennen wir dann Heap, wenn

$$k_i \leq k_{\frac{i}{2}}$$

# Heap

Definition (Vgl. [2], S. 12ff)

## Heap (Binärbaum)

Ein Heap ist ein vollständiger Binärbaum, in dem der Schlüssel jedes Knotens mindestens so groß ist wie der Schlüssel seiner Söhne

# Heapsort

Sortieren (Vgl. [2], S. 12ff)

## Vorgehen Sortieren

- Gebe den Wurzelknoten des Baumes aus und entferne diesen
- Setze das letzte Element im Baum an die Wurzel
- Versickere die neue Wurzel im Baum
- Wiederhole den Prozess bis der Baum leer ist

# Heapsort

Versickern (Vgl. [2], S. 12ff)

## Vorgehen Versickern

- Vergleiche den Wurzelknoten mit dem größten Kindknoten
- Ist der Wurzelknoten kleiner als der größte Kindknoten:
  - Vertausche den Kindknoten mit dem Wurzelknoten
  - Wiederhole dies bis beide Kindknoten kleiner als der Wurzelknoten sind (Bzw. keine Kindknoten mehr vorhanden sind)

# Inhalt

---

## 1 Arten von Algorithmen

- Backtracking
- Divide and Conquer

## 2 Sortieralgorithmen

- Insertion Sort
- Bubble Sort
- Selection Sort
- Heapsort
- Quicksort

# Quicksort

Grundprinzipien (Vgl. [3] S. 93ff, [4] S. 313-330)

- Basiert auf dem **Divide and Conquer** Prinzip
- Es wird ein Vergleichselement  $x$  gewählt
- Und die Liste in eine linke und rechte Teilliste gliedert
  - Linke Teilliste: Alle Elemente sind kleiner(oder gleich)  $x$
  - Rechte Teilliste: Alle Elemente sind größer(oder gleich)  $x$
- Führe wieder Quicksort auf den beiden Teillisten aus



# Grundlegendes Vorgehen

Quicksort (Siehe [2] S. 8ff)

- ▣ Setze linken Zeiger  $i$  auf das erste Element
- ▣ Setze rechten Zeiger  $j$  auf das letzte Element
- ▣ Solange  $i < j$ 
  - ▣ Erhöhe  $i$  bis  $a[i] \geq x$
  - ▣ Verringere  $j$  bis  $a[j] \leq x$
  - ▣ Wenn  $i < j$ , dann vertausche die Elemente

# Slowsort

Ein humoristischer Ansatz an Sortierungen

- 1986 von Andrei Broder und Jorge Stolfi entwickelt
- Teil ihres Papers „Pessimal Algorithms and Simplexity Analysis“
- Ziel war ein möglichst ineffizienten Algorithmus zu schaffen
  - Ohne Nutzung von zufälligen Faktoren
  - ...und ohne „überflüssige“ Operationen einzubauen
- Basiert auf dem **Multiply and Surrender** (Parodie auf Divide and Conquer) Prinzip

# Slowsort

## Ablauf

- Besteht im Grund aus zwei Schritten:
  - 1. Finde das Maximum der Liste und platziere es am Ende
  - 2. Sortiere die verbleibende Teilliste
- Ineffizienz kommt durch die rekursive Umsetzung des ersten Schritts:
  - 1.1 Finde (rekursiv) das Maximum der ersten Listenhälfte
  - 1.2 Finde (rekursiv) das Maximum der zweiten Listenhälfte
  - 1.3 Vergleiche die Maxima und tausche ggf.
- Die untere Grenze der Komplexität lässt sich angeben mit  $\Omega(n^{\frac{\log_2(n)}{2+\epsilon}})$
- Damit ist selbst der Best-Case schlechter als der Worst-Case von Bubble Sort

# Quellen I

- [1] Wikimedia Commons. *File:Depth-first-tree.svg* — *Wikimedia Commons, the free media repository*. 2014. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Depth-first-tree.svg&oldid=143002747> (besucht am 29.04.2019).
- [2] Prof. E. Fahr. *Theoretische Informatik II - Algorithmen*. 2016.
- [3] T. Ottmann und P. Widmayer. *Algorithmen und Datenstrukturen*. Spektrum Akademischer Verlag, 2017. ISBN: 9783662556498.
- [4] K. Wayne und R. Sedgewick. *Algorithmen. Algorithmen und Datenstrukturen*. Pearson, 2014. ISBN: 978-3-86894-184-5.

# Quellen II

- [5] Wikipedia. *Backtracking* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. 2019. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Backtracking&oldid=186371836> (besucht am 29.04.2019).
- [6] Wikipedia contributors. *Divide-and-conquer algorithm* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Divide-and-conquer\\_algorithm&oldid=886471841](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Divide-and-conquer_algorithm&oldid=886471841) (besucht am 30.04.2019).

# Kontakt

- E-Mail: `lukas.abelt@airbus.com`
- GitHub: `https://www.github.com/LuAbelt`
- GitLab: `https://www.gitlab.com/LuAbelt`
- Telefon(Firma): 07545 - 8 8895
- Telegram: LuAbelt