

Algorithmen

Lukas Abelt

`lukas.abelt@airbus.com`

DHBW Ravensburg
Wirtschaftsinformatik

Ravensburg
3. April 2019

Outline

- 1 Allgemeines
 - Begriffsklärung
 - Ziele des Moduls
- 2 Beschreibung
 - Formale Eigenschaften
 - Darstellungsformen
- 3 Analyse
 - Korrektheit eines Algorithmus
 - Komplexitätsanalyse
- 4 Aufgaben

Inhalt

- 1 Allgemeines
 - Begriffsklärung
 - Ziele des Moduls
- 2 Beschreibung
 - Formale Eigenschaften
 - Darstellungsformen
- 3 Analyse
 - Korrektheit eines Algorithmus
 - Komplexitätsanalyse
- 4 Aufgaben

Inhalt

- 1 Allgemeines
 - Begriffsklärung
 - Ziele des Moduls
- 2 Beschreibung
 - Formale Eigenschaften
 - Darstellungsformen
- 3 Analyse
 - Korrektheit eines Algorithmus
 - Komplexitätsanalyse
- 4 Aufgaben

Begriffklärung

Etymologie

- Leitet sich ursprünglich vom persischen Astronomen „Muhammad Ibn-Musa al-Hwarizmi“ ab
 - Schrieb Bücher über das indische Zahlensystem (um 800 n. Chr.)
 - Im 12. Jh übersetzt ins lateinische
 - Dabei wurde der Namensbestandteil „al-Hwarizmi“ in „Algorismi“ lateinisiert
- Durch spätere Überlieferungen wurde der Begriff später als Zusammensetzung betrachtet aus...
 - Dem Namen „Algus-“...
 - und dem aus dem griechisch entlehnten „-rismus“ (Zahl)

Vgl. [3]

Begriffsklärung

Was bedeutet das jetzt

Formale Definition (Nach [3])

Eine Berechnungsvorschrift zur Lösung eines Problems heißt genau dann Algorithmus, wenn eine zu dieser Berechnungsvorschrift äquivalente Turingmaschine existiert, die für jede Eingabe, die eine Lösung besitzt, stoppt.

Oder auch

Ein Algorithmus ist eine domänenunabhängige Beschreibung einer Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems. Eine bestimmte Eingabe wird in eine bestimmte Ausgabe überführt.

Begriffsklärung

Also

- ▣ Ist also die Beschreibung eines Programmes oder einer Funktion
 - ▣ Unabhängig von der verwendeten Programmiersprache!
 - ▣ Source Code direkt ist also kein Algorithmus...
 - ▣ ...aber aus diesem lässt sich der verwendete Algorithmus ableiten und beschreiben
- ▣ Algorithmen können in verschiedenen Formen dargestellt werden (Mehr dazu im nächsten Kapitel)

Inhalt

1 Allgemeines

- Begriffsklärung
- Ziele des Moduls

2 Beschreibung

- Formale Eigenschaften
- Darstellungsformen

3 Analyse

- Korrektheit eines Algorithmus
- Komplexitätsanalyse

4 Aufgaben

Ziele

- Am Ende des Moduls könnt ihr...
 - Einen Algorithmus in eine Implementierung umsetzen
 - Aus einer Implementierung den Algorithmus ableiten
 - Die formalen Eigenschaften von Algorithmen kennen
 - Algorithmen anhand der kennengelernten Methoden zu analysieren

Inhalt

- 1 Allgemeines
 - Begriffsklärung
 - Ziele des Moduls
- 2 Beschreibung
 - Formale Eigenschaften
 - Darstellungsformen
- 3 Analyse
 - Korrektheit eines Algorithmus
 - Komplexitätsanalyse
- 4 Aufgaben

Inhalt

1 Allgemeines

- Begriffsklärung
- Ziele des Moduls

2 Beschreibung

- Formale Eigenschaften
- Darstellungsformen

3 Analyse

- Korrektheit eines Algorithmus
- Komplexitätsanalyse

4 Aufgaben

Eigenschaften von Algorithmen

Grundlegendes

- **Finitheit** - Ein Algorithmus lässt sich in endlich vielen Schritten eindeutig beschreiben
- **Ausführbarkeit** - Jeder Einzelschritt muss tatsächlich ausführbar sein
- **Platzkomplexität** - Ein Algorithmus benötigt zu jedem Zeitpunkt nur endlich viel Speicherplatz
- **Terminierung** - Der Algorithmus benötigt eine endliche Anzahl von Schritten zur Ausführung
- **Determiniertheit** - Der Algorithmus muss bei gleichen Rahmenbedingungen das gleiche Ergebnis liefern
- **Determinismus** - Der nächste Schritt des Algorithmus ist zu jedem Zeitpunkt genau definiert

Effizienz von Algorithmen

- Ergibt sich indirekt aus den Grundlegenden Eigenschaften
- Effizienz lässt sich über verschiedene Größen beschreiben:
 - Speicherverbrauch
 - Zeitverbrauch
- Die sind jedoch oft Implementierungs- und Rechnerabhängig
- Deshalb wird mit formalisierten Modellen gearbeitet
- ...Mehr dazu im Kapitel „Analyse“

Vgl. [2], S. 2f

Inhalt

1 Allgemeines

- Begriffsklärung
- Ziele des Moduls

2 Beschreibung

- Formale Eigenschaften
- Darstellungsformen

3 Analyse

- Korrektheit eines Algorithmus
- Komplexitätsanalyse

4 Aufgaben

Ein kleines Beispiel

Warum wir das überhaupt brauchen (Algorithmus siehe [4])

```
1 float Q_rsqrt( float number ) {
2     long i;
3     float x2, y;
4     const float threehalfs = 1.5F;
5
6     x2 = number * 0.5F;
7     y  = number;
8     i  = * (long*) &y;    // evil floating point bit level
    ↪   hacking
9     i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 );    // what the fuck?
10    y  = *(float*) &i;
11    y  = y*(threehalfs-(x2*y*y));    // 1st iteration
12    //y = y*(threehalfs-(x2*y*y));    // 2nd iteration, this
    ↪   can be removed
13    return y;
14 }
```

Warum wir das brauchen

- ▣ Source Code ist nicht immer verständlich
 - ▣ Selbst mit Kommentaren...
- ▣ Benötigt spezielles Wissen über die Sprache
- ▣ Nutzt ggf. Besonderheiten der Sprache aus
- ▣ Nutzt teilweise Workarounds (zum Beispiel aus Effizienzgründen)

Möglichkeiten der Darstellung

- Zur Definition von Algorithmen gibt es verschiedenste Möglichkeiten
- Mit ganz eigenen Vor- und Nachteilen
- Wir betrachten im Rahmen der Vorlesung:
 - Prosatext
 - Pseudocode
 - Struktogramme
 - Programmablaufplan (PAP)

Was beschreiben wir?

Unser Referenzalgorithmus

- Um die verschiedenen Elemente zu vergleichen, wollen wir mit allen den folgenden Algorithmus beschreiben:

Referenz

Für eine Zahl n (Wobei gilt: $n \in \mathbb{N}$), soll die Summe aller geraden Zahlen von 0 bis n berechnet werden.

Darstellung als Prosatext

Der simple Weg

- Simpleste Herangehensweise
- Man beschreibt in eigenen Worten, wie man vorgehen würde um die gegebene Problemstellung zu lösen
- **Achtung:** Unterscheiden zwischen Problemstellung und Lösungsbeschreibung!
- Auch in Prosaform sollten die Einzelschritte eindeutig beschrieben sein
- Nicht standardisiert → Beschreibung von Algorithmen inkonsistent

Prosabeschreibung

An einem simplen Beispiel

Gebe alle Zahlen bis n aus

Lese die Zahl n ein.

Anschließend setze die Zählvariable i 0.

Gebe i aus. Erhöhe anschließend i um 1. Wiederhole die letzten zwei Schritte bis i größer ist als n .

Prosabeschreibung

Für unseren Algorithmus

Addiere alle geraden Zahlen

Darstellung als Pseudocode

Der Zwischenweg

- ❑ Mischung aus Prosa und tatsächlichem Code
- ❑ Orientiert sich an den in Programmiersprachen vorhandenen Strukturen (If-then-else, Schleifen...)
- ❑ Nutzt dabei aber leicht verständliche und programmiersprachenunabhängige Begriffe
- ❑ Wie Code in der Regel zeilenweise auf atomare Operationen beschränkt
- ❑ Keine formale Standardisierung, dadurch auch hier Inkonsistenzen möglich → Aber weniger als bei Prosabeschreibung

Pseudocode

An einem simplen Beispiel.

```
1  LESE  n
2  FUER  i=0 BIS n
3      WENN istPrim(i) DANN
4          GEBE i AUS
5      ENDE WENN
6  ENDE FUER
```

Pseudocode

Für unser Pseudoproblem

Struktogramme

Der erste Standard

- Entwickelt durch *Nassi Shneidermann*
- Grafische Darstellung von Algorithmen
- Standardisiert nach **DIN 66261**
- Zerlegt den Algorithmus in elementare Grundstrukturen
- Die über die definierten Blöcke dargestellt werden
- Werden (lückenlos) von oben nach unten aneinander gereiht

Elemente von Struktogrammen

Anweisung

- Einzelne Anweisung:

Einzelne Anweisung

- Mehrere aufeinanderfolgende Anweisungen:

Anweisung 1

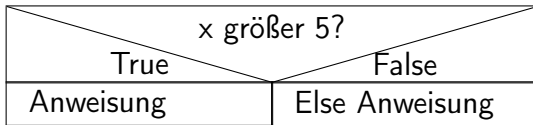
Anweisung 2

Anweisung 3

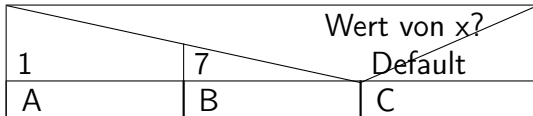
Elemente von Struktogrammen

Verzweigungen

- Einfache Verzweigung(if-then-else):



- Mehrfache Verzweigung(switch-case):



Elemente von Struktogrammen

Zählschleifen

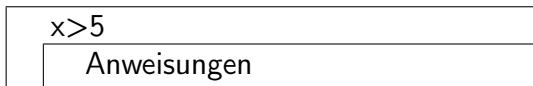
- Einfache Zählschleifen(for-loop):

von 0 bis 10, Schrittweite 2
Anweisungen

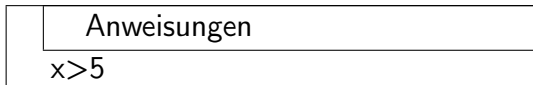
Elemente von Struktogrammen

Schleifen

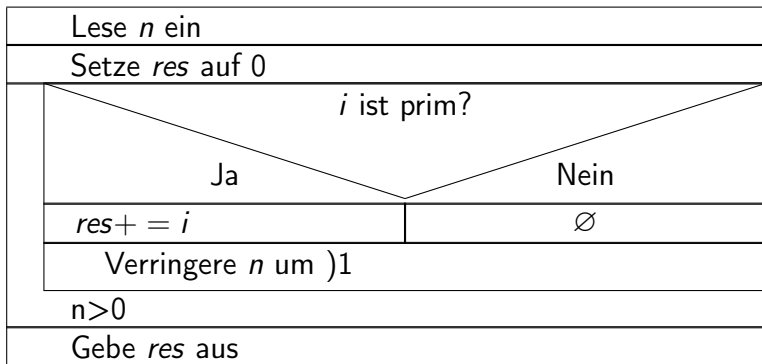
- Kopfgeprüfte Schleifen(while):



- Fußgeprüfte Schleifen(do-while):



Struktogramm Beispiel



Struktogramm für unseren Algorithmus



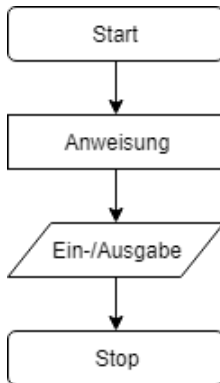
Programmablaufplan

Der zweite Standard

- Bildet einen linearen Programmfluss aber
- Standardisiert nach **DIN 66001**
- Wie beim Struktogramm gibt es fest definierte Grundblöcke
- Diese werden hier jedoch über Pfeile verbunden

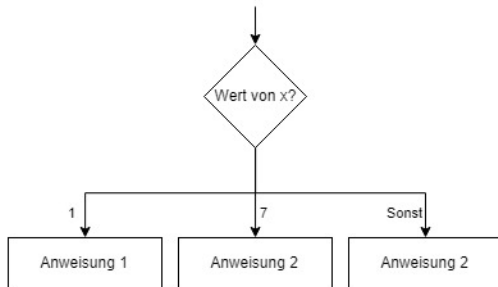
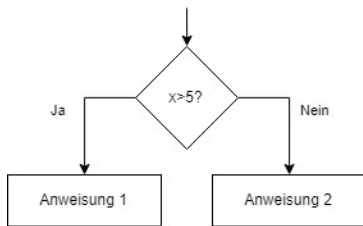
Elemente von Programmablaufplänen

Start, Stop, Anweisungsblock, Ein- und Ausgaben



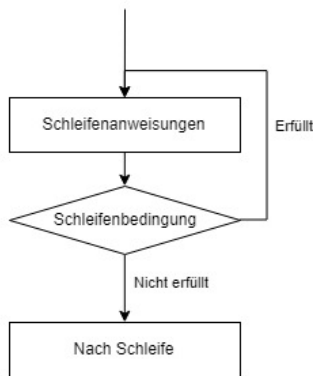
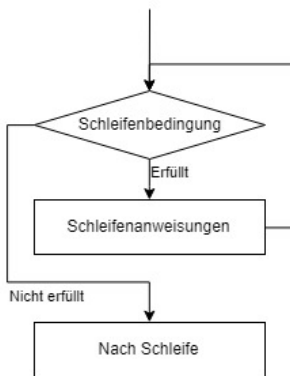
Elemente von Programmablaufplänen

Verzweigungen



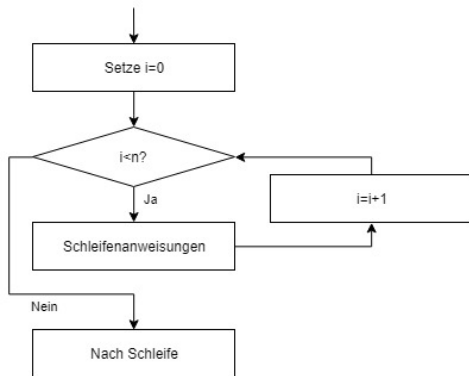
Elemente von Programmablaufplänen

Schleifen



Elemente von Programmablaufplänen

Zählschleifen



Programmablaufplan

...für unseren Algorithmus

Zusammenfassung

- Keine der dargestellten Formen ist optimal
- Verwendung kommt auf Anforderungen und persönliche Vorlieben an
- Keine der hier vorgestellten Methoden zur Abbildung komplexerer objektorientierter Zusammenhänge möglich
- Weitere Darstellungsformen:
 - Aktivitätsdiagramm
 - Petrinetze
 - Interaktionsdiagramme

Inhalt

- 1 Allgemeines
 - Begriffsklärung
 - Ziele des Moduls
- 2 Beschreibung
 - Formale Eigenschaften
 - Darstellungsformen
- 3 Analyse
 - Korrektheit eines Algorithmus
 - Komplexitätsanalyse

4 Aufgaben

Inhalt

1 Allgemeines

- Begriffsklärung
- Ziele des Moduls

2 Beschreibung

- Formale Eigenschaften
- Darstellungsformen

3 Analyse

- Korrektheit eines Algorithmus
- Komplexitätsanalyse

4 Aufgaben

Korrektheit von Algorithmen

Allgemeines (Vgl. [3])

- Jeder Algorithmus sollte auch in allen Fällen das korrekte Ergebnis liefern...
- Klingt simpel, aber eindeutiger Beweis für alle Eingaben oft schwierig
- Testen an ausgewählten Beispielen **nicht** ausreichend
 - Jedoch verringern umfangreiche Tests natürlich das Risiko eines unentdeckten Fehler
- Korrektheit lässt sich im Grunde nur durch formalen Beweis zeigen
 - Wie zum Beispiel Induktionsbeweis
 - Diese sind häufig sehr umfangreich und komplex...
 - ...und deshalb auch nicht Teil der Vorlesung

Korrektheit von Algorithmen



Quelle: [1]

„Program testing can be used to show the presence of bugs, but never to show their absence!“

Edsger W. Dijkstra

Inhalt

1 Allgemeines

- Begriffsklärung
- Ziele des Moduls

2 Beschreibung

- Formale Eigenschaften
- Darstellungsformen

3 Analyse

- Korrektheit eines Algorithmus
- Komplexitätsanalyse

4 Aufgaben

Speicherkomplexität

Wie lässt sich diese messen?

- Wie schon erwähnt: Der verbrauchte Speicher ist Sprach- und Rechnerabhängig
- Mögliche Lösung über Definition von Referenzsprache und -system
- Messungen sind allerdings nicht repräsentativ
- Deswegen wird in der formalen Informatik mit dem *Random-Access-Machine*(RAM) Modell gearbeitet
 - Besteht im Grunde aus abzählbar unendlich vielen adressierbaren Speicherzellen
 - Für einen Algorithmus wird dann bestimmt, wie viele Speicherzellen genutzt werden müssen
 - Dies entspricht dann der Speicherkomplexität

Laufzeitkomplexität

Grundlegendes

- Gleiches Problem wie bei der Speicherkomplexität
- Deswegen hier ähnliches Modell:
 - Man bestimmt die Anzahl von „atomaren Operationen“ des Algorithmus
 - Diese Operationen sind vergleichbar mit Assembler-Befehlsrepertoire
- Beispiele für atomare Operationen:
 - Addition/Subtraktion/Multiplikation/Division zweier Zahlen
 - Lesen einer Variable von einer Speicheradresse
 - Schreiben einer Variable an eine bestimmte Adresse
 - Random Access in Arrays
 - Vergleich zweier Zahlen
- Angabe benötigten Operationen über $\tau(N) = x$

Beispiel einer Komplexitätsanalyse

Vertauschen zweier Zahlen I

```
1 public void swap(int first, int second){  
2     int tmp = first;  
3     first = second;  
4     second = tmp;  
5 }
```

- Laufzeitkomplexität:
- Speicherkomplexität(In Byte):

Beispiel einer Komplexitätsanalyse

Vertauschen zweier Zahlen II

```
1 public void swap(int first, int second){  
2     first = first + second;  
3     second = first - second;  
4     first = first - second;  
5 }
```

- Laufzeitkomplexität:
- Speicherkomplexität(In Byte):

Probleme und Problem instanzen

- Komplexität ist selten statisch
- In der Regel von Problem und der konkreten *Problem instanz* abhängig
 - Problem: z.B. Das sortieren einer Liste
 - Problem instanz: konkrete Liste die sortiert werden soll, z.B.
(7, 3, 12, -5, 45)
- Die Problem instanz hat meist einen oder mehrere dynamische Faktoren von denen die entgültige Komplexität abhängt
 - Für Sortieren: Länge der Liste
- Angegeben werden in der Komplexität nur noch die skalierenden Faktoren: $O(N)$

Vgl. [2] S. 3 ff

Dynamische Komplexität

Ein Beispiel

```
1 //A-> Array mit Elementen, n->Länge von A
2 int sumList(int[] A, int n){
3     int sum = 0;
4     for(int i=0; i<n; i++){
5         sum+=A[i]
6     }
7     return sum;
8 }
```

Unterschiedliche Laufzeiten von Algorithmen

- Bisher betrachtete Algorithmen hatten (für gegebenes N) feste Komplexität
- Algorithmen können jedoch für gleiches N verschiedene Laufzeiten haben
 - Warum?
- Beispiel: Leicht angepasste Variante unseres Algorithmus zum addieren von geraden Zahlen:

Addieren aller geraden Zahlen einer Liste

```
1 public int getSquareSum(int[] data, int n){
2     int res = 0;
3     for(int i=0;i<n;i++){
4         if(data[i]%2 == 1){
5             continue;
6         }else{
7             res += data[i]*data[i];
8         }
9     }
10    return res;
11 }
```

Best- und Worst-Case Execution Time

- Für diese Fälle gibt es prinzipiell drei Betrachtungsweisen
 - ▣ Best-Case Execution Time
 - ▣ Worst-Case Execution Time
 - ▣ Average Execution Time
 - ▣ Frage: Welche ist für die Komplexitätsbetrachtung relevant?
- Average Execution Time lässt sich nur schwer bestimmen
 - ▣ Reiner Durchschnitt aus Best- und Worst-Case nicht praktikabel
 - ▣ Beschaffenheit der Problem instanzen und deren Verteilung müsste bekannt sein
 - ▣ Ist jedoch selten der Fall

Best- und Worst-Case Execution Time

- In der Regel ist die Worst-Case Execution Time relevant
 - Simpel zu bestimmen
 - Dadurch kann sichergestellt werden, dass der Algorithmus **maximal** die angegebene Zeit benötigt
 - insbesondere relevant für Echtzeitsysteme

Vgl. [2] S. 3ff

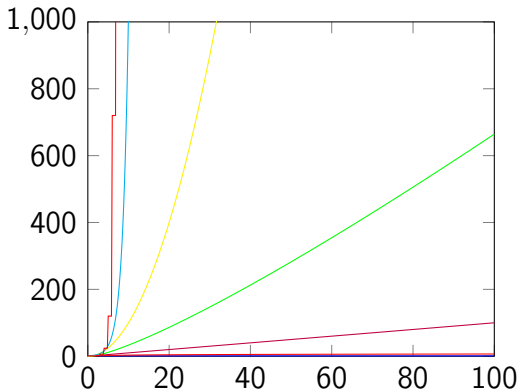
Gängige Komplexitätsfaktoren

Vgl. [2]

- In der Regel begegnet man den folgenden Komplexitäten bei der Analyse(In Abhängigkeit von N):
 - Kein Wachstum: $O(1)$
 - Logarithmisches Wachstum: $O(\log N)$
 - Lineares Wachstum: $O(N)$
 - N -log N -Wachstum: $O(N \cdot \log N)$
 - Polynomiales Wachstum: $O(N^2)$, $O(N^3)$...
 - Exponentielles Wachstum: $O(2^N)$, $O(3^N)$...
 - Faktorielles Wachstum: $O(N!)$
- Praktikabel sind maximal Algorithmen mit polynomialen Wachstum
- Exponentielle und faktorielle Algorithmen wachsen zu schnell an

Komplexität von Algorithmen

Visueller Vergleich



Beispiele für Komplexität

Kein Wachstum $O(1)$

```
1 public void swap(int[] data, int first, int second){  
2     int tmp = data[first];  
3     data[first] = data[second];  
4     data[second] = tmp;  
5 }
```

- Algorithmus ist in keiner Weise von der Länge von data abhängig (Abgesehen von eventueller Fehlerbetrachtung)

Beispiele für Komplexität

Logarithmisches Wachstum $O(\log N)$

```
1 public void logNComplexity(int n){  
2     for(int i=1; i<=n; i = i * 2){  
3         System.out.println(i);  
4     }  
5 }
```

- Indikator für Logarithmisches Wachstum:
 - Zählvariable steigt multiplikativ/verringert sich durch Division
 - Größe der Problemistanz verringert sich in jedem Schritt mit bestimmtem Faktor
- Basis des Logarithmus ist nicht von Relevanz, da nur konstanter Faktor
- In der Regel handelt es sich aber um \log_2
- Beispiel: Binäre Suche

Beispiele für Komplexität

Lineares Wachstum $O(N)$

```
1 public int sum(int[] data, int n){
2     int res=0;
3     for(int i=0;i<n;i++){
4         res+=data[i];
5     }
6     return res;
7 }
```

- Grundlegend alle Schleifen, die von 0 bis N iterieren (Mit Schrittweite 1)
- Beispiele:
 - Summen von Listen
 - Finden von Mini-/Maxima in unsortierten Listen

Beispiele für Komplexität

$N\text{-log } N\text{-Wachstum } O(N \cdot \log N)$

```
1 public void nlogNComplexity(int n){
2     for(int i=0;i<n;i++){
3         for(int j=0;j<n;j=j*2){
4             System.out.println(i);
5             System.out.println(j);
6         }
7     }
8 }
```

- Entsteht durch die Kombination von linearem und logarithmischem Wachstum
- Beispiele:
 - Heap Sort
 - Quick Sort

Beispiele für Komplexität

Polynomiales Wachstum $O(N^x)$

```
1 //Unter der Annahme, dass data ein n*n Array ist
2 public void print2DArray(int[][] data, int n){
3     for(int i=0;i<n;i++){
4         for(int j=0;j<n;j++){
5             System.out.println(data[i][j]);
6         }
7     }
8 }
```

- Entsteht durch die Verschachtelung mehrerer $O(N)$ Algorithmen
- Beispiele:
 - Insertion Sort
 - Traversieren von N-Dimensionalen Arrays

Beispiele für Komplexität

Exponentielles Wachstum $O(x^N)$

- Hier ist mir leider kein leichtes Codebeispiel eingefallen
- Beispiele:
 - Bruteforce von Passwörtern
 - Damenproblem (mit naiver Implementierung)

Beispiele für Komplexität

Faktorielles Wachstum $O(N!)$

```
1 public void factorial(int n){  
2     for(int i=0;i<n;i++){  
3         System.out.println(i);  
4         factorial(n-1);  
5     }  
6 }
```

- Häufig in rekursiven Algorithmen
- Beispiele:
 - Finden aller Permutationen in einem Array
 - Travelling Salesman Problem (Primitiver Ansatz)

Inhalt

- 1 Allgemeines
 - Begriffsklärung
 - Ziele des Moduls
- 2 Beschreibung
 - Formale Eigenschaften
 - Darstellungsformen
- 3 Analyse
 - Korrektheit eines Algorithmus
 - Komplexitätsanalyse

4 Aufgaben

Aufgabe 1

Größter Teiler

Entwerft einen Algorithmus, der für eine gegebene natürliche Zahl den größten (ganzzahligen) Teiler findet. Erstellt zu eurem Algorithmus einen Programmablaufplan oder Struktogramm.

Analysiert euren Algorithmus bezüglich der Komplexität O . Vergleicht euren Algorithmus mit denen der anderen.

Aufgabe 2

Codeanalyse

Analysiert den folgenden Codeausschnitt. Welche Aufgabe hat der Algorithmus? Bestimmt die Komplexität O .

```
1 public void func(List<?> in1, List<?> in2){
2     for(int i=0;i<in1.size();i++){
3         for(int j=0;in2.size();j++){
4             String out = String.format("{\%s,\%s}", in1.get(i
5                 ↪ ), in2.get(j));
6             System.out.println(out);
7         }
8     }
```

Aufgabe 3



Quellen I

- [1] Wikimedia Commons. *File:Edsger Wybe Dijkstra.jpg* — *Wikimedia Commons, the free media repository*. 2017. URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Edsger_Wybe_Dijkstra.jpg&oldid=244763264 (besucht am 29.03.2019).
- [2] T. Ottmann und P. Widmayer. *Algorithmen und Datenstrukturen*. Spektrum Akademischer Verlag, 2017. ISBN: 9783662556498.
- [3] Wikipedia. *Algorithmus* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. 2019. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Algorithmus&oldid=186838998> (besucht am 29.03.2019).

Quellen II

- [4] Wikipedia contributors. *Fast inverse square root* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fast_inverse_square_root&oldid=887505872 (besucht am 29.03.2019).

Kontakt

- E-Mail: `lukas.abelt@airbus.com`
- GitHub: `https://www.github.com/LuAbelt`
- GitLab: `https://www.gitlab.com/LuAbelt`
- Telefon(Firma): 07545 - 8 8895
- Telegram: LuAbelt