



---

## Travail Dirigé sur les graphes de liaisons

---

CARPENTIER Lucas COURTOIS Thibault CHERIF Enzo  
SYSMER 3A

Responsable : M. Lacroix

27 octobre 2024

## Introduction

Durant ce module de 3<sup>ème</sup> année d'école d'ingénieur en mécatronique, nous avons abordé la modélisation des systèmes multi-physiques à l'aide des graphes de liaisons (BOND graph). Cette approche nous a conduits à la réalisation d'un TD permettant d'appliquer concrètement les connaissances acquises en classe.

Le système mécanique que nous allons modéliser sous forme de graphe de liaison est le suivant :

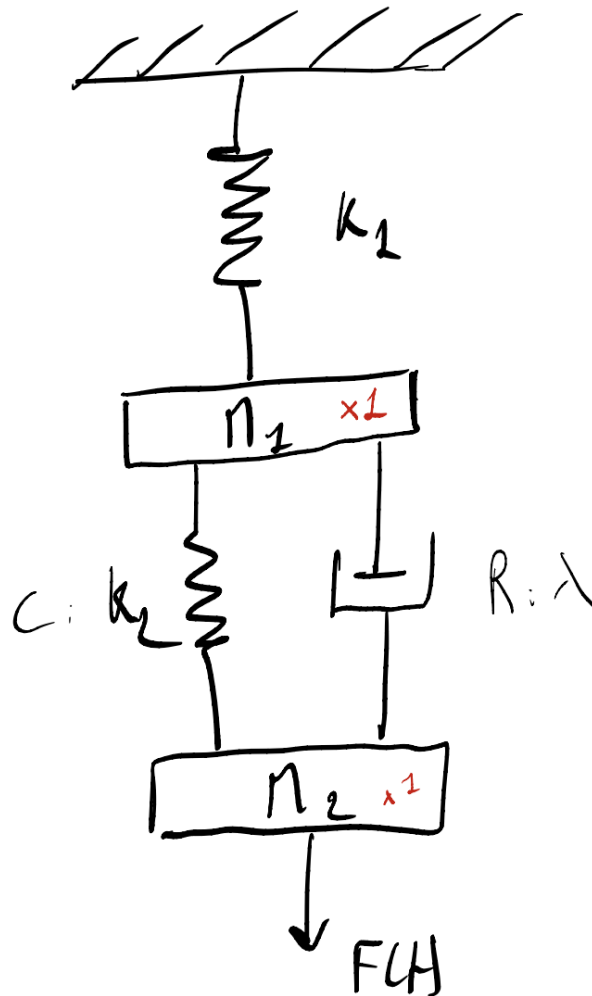


FIGURE 1 – Schéma du système étudié

Nous allons dans un premier temps réaliser le graphe de liaison du système, puis nous le mettrons en équation afin d'obtenir la matrice d'état. Enfin, nous résolverons ce système avec l'aide du langage de programmation et du solver Scipy.Integrate afin de pouvoir analyser son comportement en fonction des différents paramètres. Pour la suite de ce compte rendu, l'axe vertical ( $z$ ) sera considéré descendant et fixé au bâtis.

# 1 Modélisation du système en graphe de liaison

La première étape du travail est de modéliser notre système en utilisant les conventions des bond graphs. Voici le résultat obtenu :

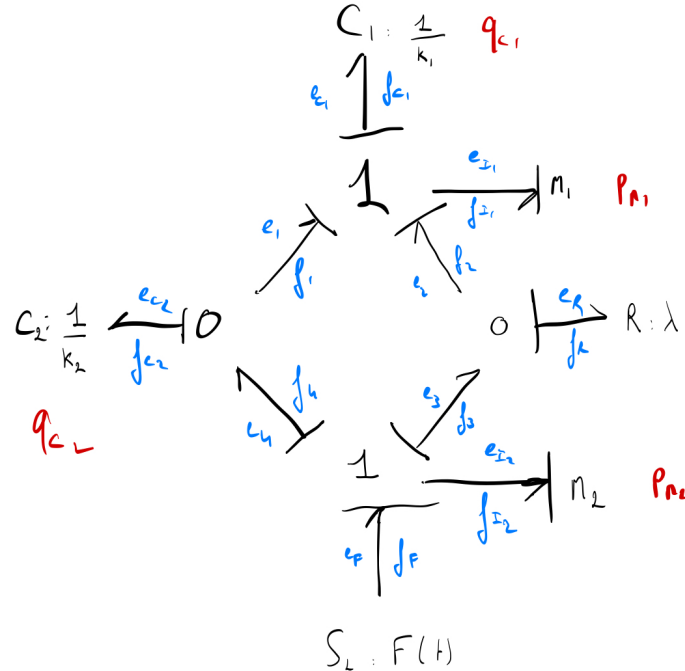


FIGURE 2 – Graphe de liaison du système étudié

Grâce à cette modélisation, nous pouvons aisément mettre en équation notre système. Les lois qui régissent les nœuds établissent souvent un lien entre le flux et l'effort. Il existe une conservation de la puissance, et les lois que nous utiliserons sont les deux suivantes :

- **Identité des efforts** : un effort entrant détermine les efforts sortants. Cela correspond à une jonction de type 0, de configuration parallèle.
- **Identité des flux** : un flux entrant impose les flux sortants. Cela correspond à une jonction de type 1, de configuration série.

Nous obtenons ce système d'équation :

$$\begin{cases} e_I + e_{c1} = e_1 + e_2 \\ f_3 = f_r + f_2 \quad \text{soit} \quad f_r = f_3 - f_2 \\ e_f = e_3 + e_4 + e_{I2} \\ f_{c2} = f_1 + f_4 \end{cases}$$

Nous pouvons nous en servir afin de déterminer les valeurs des paramètres de notre système. Voici les relations que nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i : e_f = F \\ S_f : f_v = 0 \\ I_1 : e_I = \dot{P}_m 1 = e_1 + e_2 - e_{c1} = e_{c2} + e_r - e_{c1} = k_2 * q_{c2} + \lambda \left( \frac{P_{m2}}{M_2} - \frac{P_{m1}}{M_1} \right) - k_1 * q_{c1} \\ I_2 : e_{I2} = \dot{P}_m 2 = e_f - e_3 - e_4 = e_f - e_r - e_{c2} = F(t) - k_2 * q_{c2} - \lambda \left( \frac{P_{m2}}{M_2} - \frac{P_{m1}}{M_1} \right) \\ R : e_r = \lambda f_r = \lambda (f_3 - f_2) = \lambda \left( \frac{P_{m2}}{M_2} - \frac{P_{m1}}{M_1} \right) \\ c_1 : f_{c1} = \dot{q}_{c1} = f_{I1} = \frac{P_{m1}}{M_1} \\ c_2 : f_{c2} = \dot{q}_{c2} = f_4 - f_1 = f_{I2} - f_{I1} = \frac{P_{m2}}{M_2} - \frac{P_{m1}}{M_1} \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors regrouper ces équations sous la forme d'un système matriciel, cela nous permettra également de le résoudre à l'aide du langage de programmation Python. Voici le système obtenu :

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_m \\ \dot{P}_n \\ \dot{q}_{c1} \\ \dot{q}_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{m_1} & \frac{\lambda}{m_2} & -k_1 & k_2 \\ \frac{\lambda}{m_1} & -\frac{\lambda}{m_2} & 0 & -k_2 \\ \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{m1} \\ P_{m2} \\ q_{c1} \\ q_{c2} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons désormais passer à la résolution de ce système.

## 2 Résolution numérique du système

Dans cette partie, nous allons développer les méthodes numériques utilisées pour résoudre le système d'équations obtenu à partir de la modélisation par graphe de liaison. L'objectif est d'analyser le comportement du système sous différents scénarios et conditions initiales.

### 2.1 Mise en place de l'environnement numérique

Pour résoudre numériquement le système d'équations différentielles modélisé, nous avons utilisé le langage de programmation Python. Ce choix est justifié par la flexibilité et la puissance de Python en matière de calcul scientifique. Pour mener à bien notre analyse, nous avons fait appel à plusieurs bibliothèques spécialisées :

- **NumPy** : utilisée pour la manipulation efficace des tableaux numériques.
- **SciPy.integrate** : permet l'intégration numérique des équations différentielles.
- **matplotlib.pyplot** : utilisée pour la visualisation des résultats sous forme graphique.

Une fois l'environnement configuré, nous avons procédé à la simulation du système. Les résultats ont été visualisés en traçant les quatre variables principales du système :  $P_{m2}$ ,  $P_{m1}$ ,  $q_{c1}$ , et  $q_{c2}$ . Ces courbes ont été affichées sur une même graphique pour faciliter la comparaison et l'analyse des interactions entre les variables. Cette graphique, que nous appelons la *solution du système d'équations différentielles*, illustre comment chaque paramètre évolue avec le temps sous l'effet des conditions initiales et des paramètres du système.

## 2.2 Cas générique

Dans ce premier cas nous allons mettre en évidence les propriétés dynamiques de chaque paramètres de notre système mécanique qui est une forme de double masse-ressort-amortisseur. L'objectif est d'étudier les réactions du système face à des paramètres standardisés et contrôlés.

Dans cette simulation, nous avons choisi arbitrairement des paramètres pour les masses, les constantes des ressorts et les coefficients d'amortissement (permettant une mise à l'échelle correcte des mouvements et moments généralisés). Voici les paramètres que nous avons utilisés :

- Masse  $m_1$  et  $m_2$
- Constantes des ressorts  $k_1$  et  $k_2$
- Coefficients d'amortissement  $\lambda$

La simulation permet d'observer comment les masses oscillent et interagissent avec les ressorts et les amortisseurs dans des conditions simplifiées. Les résultats, bien qu'éducatifs, donnent une vision de base de la dynamique du système qui permet une compréhension complète du système avant de s'aventurer dans des scénarios plus complexes.

### 2.2.1 Définition des paramètres

Les paramètres spécifiques sont les suivants :

- **Masse  $m_1 = 0.1$  kg :** Représente la masse supérieure du système, suspendue directement sous un point fixe à travers le ressort  $k_1$ .
- **Masse  $m_2 = 0.05$  kg :** La masse inférieure, connectée à  $m_1$  par un autre ressort  $k_2$  et un amortisseur  $R$ , simulant l'interaction avec un environnement plus complexe.
- **Constante de ressort  $k_1 = 0.1$  N/m :** Affecte directement  $m_1$ , fournissant la force de rappel initiale.
- **Constante de ressort  $k_2 = 0.05$  N/m :** Connecte  $m_1$  à  $m_2$ , moins rigide pour observer l'effet de deux masses dépendantes.
- **Coefficient d'amortissement  $R = 2$  Ns/m :** Modèle la dissipation d'énergie entre  $m_1$  et  $m_2$ , crucial pour observer l'amortissement des oscillations.
- **Force externe  $F = 5$  N :** Appliquée à  $m_2$ , cette force est la source des oscillations du système.

Les conditions initiales sont définies telles que  $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ , indiquant un départ du système depuis un état au repos. La durée de simulation est de 300 secondes afin de pouvoir observer la période et la fréquence des oscillations ainsi que son amortissement.

### 2.2.2 Simulation et Résultats

Cette simulation trace l'évolution des moments et des mouvements généralisés en fonction du temps.

- $P_{m1}$  et  $P_{m2}$  : Représentent respectivement les moments des masses  $m1$  et  $m2$ . Ces valeurs sont tracées en bleu pour  $P_{m1}$  et en orange pour  $P_{m2}$ .
- $q_{c1}$  et  $q_{c2}$  : Correspondent aux positions des composants  $c1$  et  $c2$  du système. Les courbes vertes et rouges illustrent respectivement les trajectoires de  $q_{c1}$  et  $q_{c2}$ .

La figure ci-dessous montre les amplitudes des efforts et des positions au cours du temps sur une période de 300 secondes :

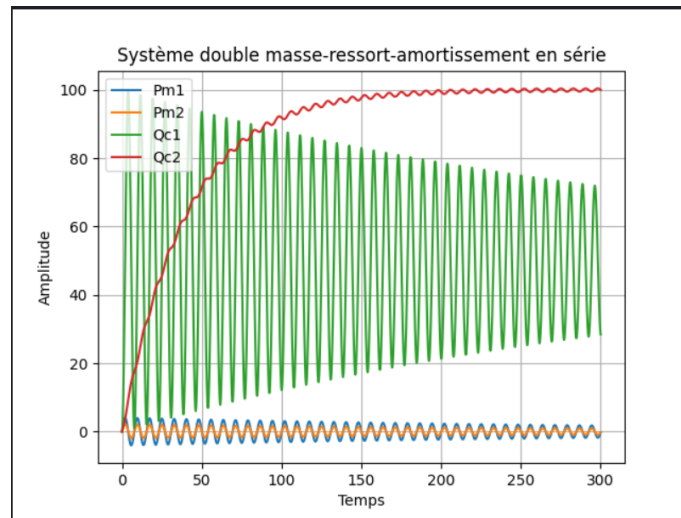


FIGURE 3 – Mouvements et moments généralisés en fonction du temps

#### Observations empiriques :

- Les efforts  $P_{m1}$  et  $P_{m2}$  (moments généralisés) sont corrélés à l'énergie cinétique des masses  $M1$  et  $M2$  qui oscillent autour de 0 et décroissent au fur et à mesure en raison de l'amortissement du système.
- Les positions  $q_{c1}$  et  $q_{c2}$  sont aussi oscillantes mais de valeur moyenne non nulle dû à la force constante  $F = 5$  N appliquée sur  $M2$ . Cette force étire le système, créant un nouvel état d'équilibre déplacé vers le haut.
- Les différences notables dans les amplitudes de  $q_{c1}$  et  $q_{c2}$  sont dûes aux différences de masse  $M2 \ll M1$ , de raideur  $k2 \ll k1$  et le point d'application de la force constante  $F$  (directement sur  $M2$ ). Par conséquent, les deux masses n'ont pas la même position d'équilibre et le sous-système  $M2-k2-R$  absorbe l'énergie du premier sous-système masse-ressort  $M1-k1$  ( $M2-k2-R$  agit comme un condensateur par analogie électro-mécanique).
- Trois phases sont à distinguer dans la réponse du système à une force constante : une phase initiale qui engendre une forte oscillation de  $q_{c1}$  et le déplacement oscillant de  $q_{c2}$ . Une phase transitoire d'amortissement progressif de  $q_{c1}$  et de montée de  $q_{c2}$ . Une phase d'équilibre des deux mouvements.

### Analyse fréquentielle de $q_{c1}$ et $q_{c2}$ :

Pour notre système à deux masses couplées en série, l'analyse des fréquences naturelles et des temps caractéristiques est essentielle à la compréhension de son comportement dynamique. En considérant la matrice de raideur  $K$  et la matrice de masse  $M$  :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

où  $m_1 = 0.1$  kg,  $m_2 = 0.05$  kg,  $k_1 = 0.1$  N/m, et  $k_2 = 0.05$  N/m, nous pouvons approximer les fréquences naturelles du système. La résolution analytique nous donne :

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 1 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 \approx \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}} \approx 1.22 \text{ rad/s}$$

Ces fréquences angulaires correspondent à des fréquences  $f_1 \approx 0.159$  Hz et  $f_2 \approx 0.194$  Hz, avec des périodes respectives  $T_1 \approx 6.28$  s et  $T_2 \approx 5.15$  s.

En ce qui concerne l'amortissement, avec  $R = 2$  N·s/m, les temps caractéristiques pour chaque masse sont :

$$\tau_1 = \frac{2m_1}{R} = 0.1 \text{ s}, \quad \tau_2 = \frac{2m_2}{R} = 0.05 \text{ s}$$

L'observation du graphique révèle plusieurs phénomènes intéressants. Les oscillations de la position  $Q_{c1}$  présentent une période d'environ 6-7 secondes, correspondant à la fréquence naturelle la plus basse calculée. L'enveloppe d'amortissement suit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique plus long que celui calculé théoriquement, probablement dû à l'effet de la force constante  $F = 5$  N appliquée au système. La position  $Q_{c2}$  atteint son équilibre en approximativement 150-200 secondes, un délai significativement plus long que le temps de stabilisation théorique, ce qui s'explique par la force constante qui continue d'étirer le système.

Nous avons aussi changer les valeurs de raideur, d'amortissement et des masses dans le cas d'une force constante. Le comportement générale du système ne change pas (sauf cas extrême) mais les pulsations, fréquences et temps caractéristiques sont eux modifiés.

## 2.3 Cas Antisismique

Notre système s'apparente très bien à un système de protection anti-sismique comme le pendule utilisé dans la Taipei tower de Taïwan que l'on peut retrouver dans des buildings situés dans des zones à hauts risques.

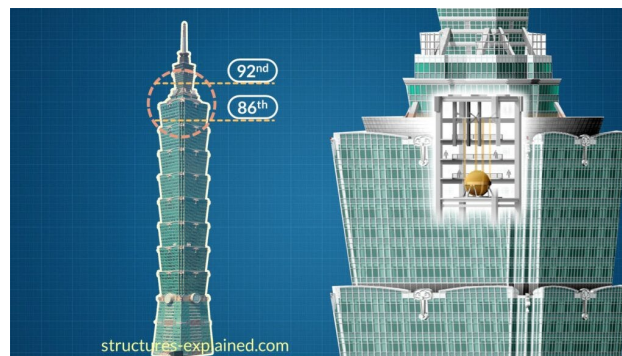


FIGURE 4 – Système anti-sismique entre le 87ème et 92ème étage de la tour Taipei

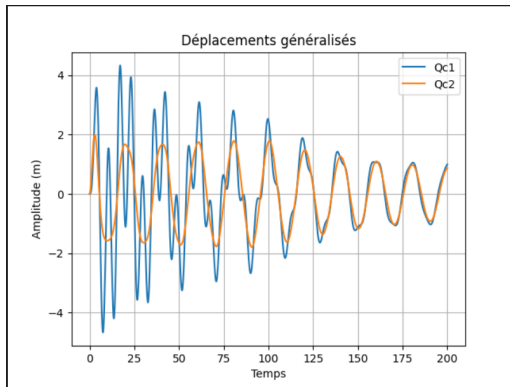
Dans cette dernière sous-partie nous allons modifier nos paramètres pour qu'ils correspondent à une situation de protection anti-sismique d'immeuble.

### 2.3.1 Adaptation des Paramètres

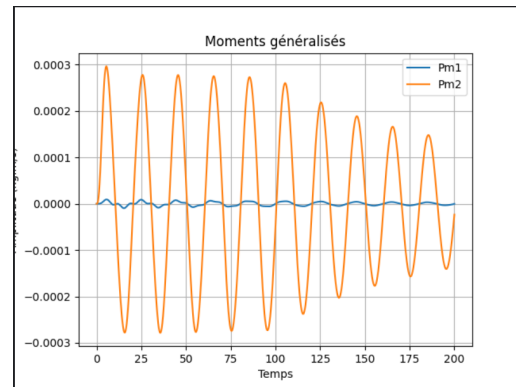
Les paramètres spécifiques sont les suivants :

- **Masse  $m_1 = 1000$  tonnes** : Représente la masse supérieure du système, qui est ici un immeuble.
- **Masse  $m_2 = 20$  tonnes** : La masse inférieure, de l'ordre de 2% de la masse du building à protéger.
- **Constante de ressort  $k_1 = 1000000$  N/m**
- **Constante de ressort  $k_2 = 20000$  N/m**
- **Coefficient d'amortissement  $R = 10000$  Ns/m**
- **Force externe  $F = 100000 * \sin(0.1 * \pi * t)$  N**, la situation est ici approximée à un régime sinusoïdale forcée pour modéliser le séisme ou de forts vents sur l'immeuble.

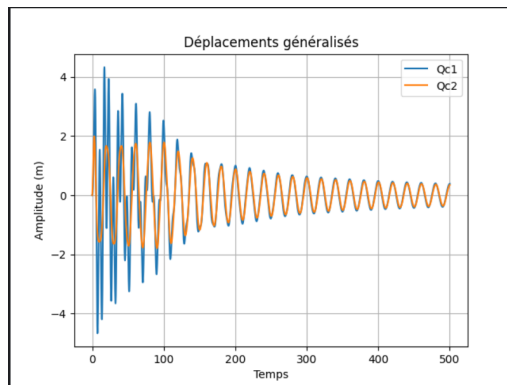
### 2.3.2 Résultats et observations :



Mouvements généralisés



Moments généralisés



Mouvements, changement de l'échelle de temps

FIGURE 5 – Mouvements et moments généralisés en fonction du temps



### Observations empiriques :

Lors de la phase initiale, on observe que la réponse de l'immeuble est une somme de sinus de très forte amplitude en opposition de phase avec dispositif anti-sismique qui à un mouvement oscillant relativement normale d'amplitude inférieur.

Pendant la phase transitoire, le mouvement de l'immeuble décroît exponentiellement grâce à l'amortissement et rentre en phase avec la masse stabilisatrice M2 qui est aussi amortie (on observe une diminution de l'énergie cinétique de l'immeuble et de la contre masse sur le graphe des moments généralisés). Grâce à la contre masse, l'immeuble réduit son mouvement et le transforme en un mouvement oscillant moins dangereux pour sa structure (passage d'une somme de sinus à un sinus).

Enfin, les deux sous-systèmes atteignent l'équilibre, en phase, avec une amplitude de mouvement divisé par 4 pour l'immeuble. Les amplitudes ne peuvent pas converger vers 0 car la force sinusoïdale continue à s'exercer sur l'ensemble.

## Conclusion

En conclusion, ce rapport a permis de modéliser et de résoudre numériquement le comportement d'un système mécanique à deux masses couplées par des ressorts et des amortisseurs en utilisant les graphes de liaisons (Bond Graph). Grâce à cette approche, les équations dynamiques ont été formulées et simulées à l'aide de Python, offrant des visualisations claires du comportement du système. Les résultats obtenus, notamment les oscillations des masses et les effets de l'amortissement dans le cas concret d'un système anti-sismique, confirment la validité de la modélisation et fournissent une explication claire de la dynamique du système.