Groupe E

Lucas CARPENTIER, Julie MENARD

27 octobre 2024

INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Professeur encadrant :
Mehmet ERSOY

Résumé

La méthode des différences finies pour la résolution des équations différentielles est souvent sollicitée dans de nombreux problèmes de physiques ou de mathématiques. Celle-ci consiste à discrétiser l'espace continu en une grille de points et ensuite, à approcher les valeurs des dérivées de la fonction dont on souhaite trouver la valeur par des différences finies calculées à partir des valeurs de la fonction aux points voisins. En utilisant cette approximation, il est alors possible de transformer une équation différentielle en un système d'équations linéaires qui pourra être résolu numériquement avec certains langages de calcul tel que Fortran 77 afin d'obtenir des solutions approximatives de l'équation différentielle. Cette méthode est très utile pour résoudre des problèmes complexes qui n'ont pas de solution analytique exacte. Cependant la méthode des différences finies possède ses limites. Elle peut par exemple devenir très coûteuse en termes de temps de calcul pour une discrétisation très fine. Par ailleurs, des erreurs d'arrondis numériques vont fausser les résultats obtenus. La méthode est aussi sensible aux conditions aux limites, donc l'utilisation de technique annexe peut alors devenir nécessaire afin de garder la précision des résultats.

Mots clés : équation de transport, schéma numérique, différences finies

Abstract

The finite difference method for solving differential equations is often employed in various physics or mathematics problems. It involves discretizing the continuous space into a grid of points and then approximating the values of the function's derivatives, which we want to determine, using finite differences calculated from the function values at neighboring points. By utilizing this approximation, it is possible to transform a differential equation into a system of linear equations that can be numerically solved using programming languages such as Fortran 77 to obtain approximate solutions to the differential equation. This method is highly valuable for solving complex problems that lack an exact analytical solution. However, the finite difference method has its limitations. For instance, it can become computationally expensive for a very fine discretization, resulting in long computation times. Additionally, numerical rounding errors can distort the obtained results. The method is also sensitive to boundary conditions, so the use of auxiliary techniques may be necessary to maintain result accuracy.

Key words : transport equation, numerical scheme, finite differences

Özet

Sonluk denklemlerin çözümünde sonlu farklar yöntemi, fizik veya matematik problemlerinin çözümünde sıkça kullanılır. Bu yöntemde, sürekli uzayı nokta kafesine dönüştürerek, aranan fonksiyonun türev değerlerini komşu noktalardaki fonksiyon değerlerinden hesaplanan sonlu farklarla yaklaşık olarak elde etmek amaçlanır. Bu yaklaşımı kullanarak, diferansiyel denklemi, diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için Fortran 77 gibi hesaplama dilleriyle sayısal olarak çözülebilen bir doğrusal denklem sistemi haline dönüştürmek mümkündür. Bu yöntem, kesin analitik bir çözümü olmayan karmaşık problemlerin çözümü için oldukça faydalıdır. Ancak, sonlu farklar yönteminin sınırlamaları vardır. Örneğin, çok ince bir ayrıştırmada hesaplama süresi açısından maliyetli olabilir. Ayrıca, sayısal yuvarlama hataları elde edilen sonuçları bozabilir. Yöntem aynı zamanda sınır koşullarına hassastır, bu nedenle sonuç hassasiyetini korumak için ek tekniklerin kullanılması gerekebilir.

Anahtar kelimeler : taşıma denklemi, sayısal şema, sonlu farklar

Sommaire

Introduction

La méthode des différences finies est une méthode numérique utilisée pour résoudre des équations différentielles ou des problèmes de valeurs limites. Elle consiste à discrétiser l'espace continu en un ensemble fini de points et puis d'approcher les dérivées en remplaçant les différences finies entre les points voisins par des approximations numériques. Cela permet alors de transformer l'équation différentielle en un système d'équations algébriques qui lui peut être résolu numériquement pour obtenir une solution approchée de l'équation originale. Dans notre cas, nous nous pencherons sur son utilisation liée à l'équation de transport.

1. L'équation de Transport

On considère l'équation de transport linéaire à coefficient constant :

$$\begin{cases} u_t + c\,u_x = 0 \text{ où } x \in (0,5) \text{ et } t \in (0,10) \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Notation 1 *Pour toute la suite de notre raisonnement, on écrira :*

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t},\ u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Pour l'approximation de la valeur de u, nous utiliserons la méthode des différences finies. Cette dernière est basée sur les développements de Taylor :

Théorème 1 *Soit $f \in C^p(I, \mathbb{R})$, avec $I \subseteq \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$*

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$ alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}h^p + r(h)$$

où $r(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$, ie $\exists k > 0$ tel que $|r(h)| \leq kh^{p+1}$

Calculons, à l'aide de ce principe, les différentes dérivées partielles de l'équation de transport :

Soit $\delta t > 0$

$$u(x, t + \delta t) = u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\delta t + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\frac{\delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\delta t^3) \tag{a}$$

$$u(x,t-\delta t) = u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\delta t + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\frac{\delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\delta t^3) \tag{b}$$

Grâce à (a), on peut en déduire la formule décentrée aval :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x,t+\delta t) - u(x,t)}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t) \tag{2}$$

De même, grâce à (b), on obtient la formule décentrée amont :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x,t) - u(x,t-\delta t)}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t) \tag{3}$$

Ainsi, en soustrayant ces deux équations ((2) - (3)), on aura la formule centrée :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x,t+\delta t) - u(x,t-\delta t)}{2\delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2) \tag{4}$$

De la même façon, on peut approcher $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$:

— Formule décentrée aval

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u(x+\delta x,t) - u(x,t)}{\delta x} + \mathcal{O}(\delta x) \tag{5}$$

— Formule décentrée amont

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u(x,t) - u(x-\delta x,t)}{\delta x} + \mathcal{O}(\delta x) \tag{6}$$

— Formule centrée

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{u(x+\delta x,t) - u(x-\delta x,t)}{2\delta x} + \mathcal{O}(\delta x^2) \tag{7}$$

Maintenant, nous allons construire un schéma numérique pour une équation de transport quelconque en appliquant ces approximations.

Supposons que $x \in [a,b]$ et $t > 0$. Soit la subdivision $x_i = a + i\delta x$ avec $\delta x = \dfrac{b-a}{n}$ et $i \in [\![0, N]\!]$.

On cherche alors, $\forall i$, la solution de l'équation :

$$u_t(x_i,t) + cu_x(x_i,t) = 0 \iff u_t(x_i,t) + c\,\frac{u(x_i+\delta x,t) - u(x_i-\delta x,t)}{2\delta x} = \mathcal{O}(\delta x^2)$$

De plus, on subdivise aussi t :

$$t_0 = 0,\ t_1 = t_0 + \delta t,\ \ldots,\ t_{n+1} = t_n + \delta t \text{ où } \delta t > 0$$

On cherche la solution $\forall n$:

$$\begin{aligned} u_t(x_i,t_n) + c\,\frac{u(x_{i+1},t_n) - u(x_{i-1},t_n)}{2\delta x} &= \mathcal{O}(\delta x^2) \\ \iff \frac{u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_{n-1})}{2\delta t} + c\,\frac{u(x_{i+1},t_n) - u(x_{i-1},t_n)}{2\delta x} &= \mathcal{O}(\delta x^2, \delta t^2) \end{aligned}$$

> **Notation 2** *Pour la suite, nous allons supposer que δt et δx sont petits. Ainsi :* $u_i^n \simeq u(x_i,t_n)$

Considérons et étudions les cinq schémas suivants :

— Schéma explicite décentré aval

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x} = 0 \tag{S1}$$

— Schéma explicite centré

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0 \tag{S2}$$

— Schéma explicite décentré amont

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\,\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} = 0 \tag{S3}$$

— Schéma leap frog (saute mouton)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\delta t} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0 \tag{S4}$$

— Schéma numérique avec $\lambda = c\dfrac{\delta t}{\delta x}$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) \tag{S5}$$

2. Analyse d'erreur

2.1 Étude de la consistance

Pour analyser la consistance d'un schéma numérique, on suppose que la solution est régulière. Par la suite, on calcule l'erreur de troncature $\epsilon(\delta t, \delta x)$, en posant $\overline{u_i^n} = u(x_i, t_n)$, solution du problème de transport par définition. Ainsi, après calcul, on retrouve l'équation de départ ainsi que l'erreur globale.

Or, cette dernière possède un terme prépondérant dans l'erreur de troncature. Si ce terme est d'ordre pair, alors le coefficient porté par l'opérateur est un coefficient de diffusion numérique. Par contre, si ce terme est d'ordre impair, le coefficient porté par l'opérateur est un coefficient de dispersion numérique.

Enfin, pour avoir un schéma numérique convergent, il faut que ce coefficient soit un coefficient de diffusion numérique et qu'il soit négatif. Ainsi, le schéma sera stable au sens L^∞.

De plus, comme u est la solution de l'équation de transport et si on a :

$$\lim_{(\delta t, \delta x) \to (0,0)} \epsilon(\delta t, \delta x) = 0$$

alors, le schéma est consistant.

2.2 Étude de la stabilité L^∞

Définition 1 *On dit qu'un schéma vérifie le principe du max si :*

$$m \leq u_i^0 \leq M \Rightarrow m \leq u_i^n \leq M \qquad \forall n$$

2.3 Étude de la stabilité L^2

Pour analyser la stabilité au sens L^2, on réalise une analyse de Fourier. On suppose que le problème est posé sur $[0,1]$, muni de conditions aux limites périodiques :

$$u(x,t) = u(x+1,t) \qquad \forall t > 0 \text{ et } \forall x \in [0,1]$$

On pose :

$$u^n(x) = u_i^n \, \mathbb{1}_{m_i}(x)$$

avec $m_i =]x_i - \dfrac{\delta x}{2}, x_i + \dfrac{\delta x}{2}[$ et $\mathbb{1}_{m_i}$, la fonction indicatrice pour $x \in m_i$.

Cette fonction est de carré intégrable et admet une décomposition en série de Fourier :

$$u_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2I\pi k dx} \text{ avec } I = \sqrt{-1}$$

De plus, on a :

$$\hat{u}_n(t) = \int_0^1 u_n(x) e^{-2I\pi kx} dx$$

On utilise donc le théorème de Plancherel :

Théorème 2

$$\|u_n\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 = \|\hat{u}^n(i)\|_2^2$$

Remarque 1 *La stabilité L^∞ entraîne la stabilité L^2.*

Remarque 2 *On utilisera les relations suivantes pour étudier plus facilement la stabilité d'un schéma. Pour cela, on sait que u est la solution de l'équation de transport. Ainsi :*

$$u_t + cu_x = 0 \iff u_t = -cu_x$$

Ainsi, en dérivant de nouveau, on a :

$$\begin{aligned} u_{tt} = -(c\,u_x)_t &\iff u_{tt} = -(c\,u_t)_x \\ &\iff u_{tt} = -(c(-c\,u_x))_x \\ &\iff u_{tt} = c^2(u_{xx}) \end{aligned}$$

De ce fait, on pourra remplacer les termes souhaités afin de simplifier l'équation.

Théorème 3 *Théorème de Lax : Un schéma stable et consistant converge*

Notre objectif est de comparer les solutions numériques exactes pour différentes valeurs de N et de $\alpha \in (0, 1]$.

Tout d'abord, nous allons procéder à l'étude théorique de chaque schéma, en examinant leur stabilité et leur erreur de consistance. Ensuite, nous utiliserons le langage Fortran pour approcher la solution exacte avec une solution numérique, pour laquelle nous ferons varier le paramètre $\alpha = c\,\dfrac{\delta t}{\delta x}$ ainsi que le nombre de points N.

3. Étude du schéma explicite décentré aval

Ce schéma est un schéma numérique explicite décentré aval qui s'écrit de la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x} = 0 \tag{S1}$$

3.1. Étude analytique du schéma S1

3.1.1. Erreur de consistance

Soit u la solution régulière de l'équation de transport. On pose $u_i^n = u(x_i, t_n)$. Comme vu précédemment, on note $\epsilon(\delta x, \delta t)$, l'erreur de troncature :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \frac{\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_i^n}}{\delta t} + c\,\frac{\overline{u_{i+1}^n} - \overline{u_i^n}}{\delta x} \tag{8}$$

On effectue les développements limités de Taylor correspondants et on obtient :

$$u_i^{n+1} = u(x_i, t_{n+1}) = u_i^n + \delta t (u_t)_i^n + \frac{\delta t^2}{2}(u_{tt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^3)$$
$$u_{i+1}^n = u(x_{i+1}, t_n) = u_i^n + \delta x (u_x)_i^n + \frac{\delta x^2}{2}(u_{xx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Afin de pouvoir remplacer ces expressions dans l'équation, on a :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = (u_t)_i^n + \frac{\delta t}{2}(u_{tt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^2) \tag{c}$$

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x} = (u_x)_i^n + \frac{\delta x}{2}(u_{xx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^2) \tag{d}$$

En remplaçant dans (8), on obtient :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \overline{(u_t)_i^n} + c\,\overline{(u_x)_i^n} + \frac{\delta t}{2}\,\overline{(u_{tt})_i^n} + c\,\frac{\delta x}{2}\,\overline{(u_{xx})_i^n} + \mathcal{O}(\delta t^2, \delta x^2) \tag{8bis}$$

Par conséquent, on a bien :

$$\lim_{(\delta t, \delta x) \to (0,0)} \epsilon(\delta t, \delta x) = 0$$

| **Conclusion 1** *Le schéma S1 est alors consistant à l'ordre 1 en temps et 1 en espace.*

3.1.2. Stabilité

On note $\alpha \in (0,1]$ tel que $\delta t = \alpha\,\dfrac{\delta x}{|c|}$. Cette condition de stabilité est appelée la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

À l'aide de la remarque 2, on peut simplifier l'équation (8bis) :

$$u_t + c\,u_x + c^2\,\frac{\delta t}{2}\,u_{xx} + c\,\frac{\delta x}{2}\,u_{xx} = 0$$

Ainsi, on en déduit le coefficient de viscosité :

$$\nu = c\,(\frac{c\,\delta t + \delta x}{2})$$

<u>Cas 1 :</u>
Si $c > 0$ alors $\nu > 0$. Par conséquent, $\forall \delta x$ et $\forall \delta t$, le schéma sera instable au sens L^p, $\forall p \in \mathbb{R}$.

<u>Cas 2 :</u>
Si $c < 0$ et si la condition de CFL est vérifiée, alors $\nu < 0$. Par conséquent, $\forall \delta x$ et $\forall \delta t$, le schéma sera stable au sens L^∞.

> **Conclusion 2** *Si $c > 0$ alors le schéma est instable au sens L^p, $\forall p \in \mathbb{R}$.*
>
> *Si $c < 0$ et si la condition de CFL est vérifiée, alors le schéma est L^∞ stable.*

3.2. Étude numérique

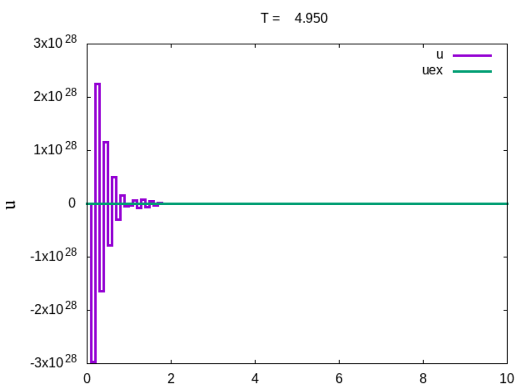
3.2.1 Donnée initiale discontinue avec $c = 1$

Dans ce cas, nous supposons que $c = 1$ et nous prenons la donnée initiale discontinue suivante : Soit

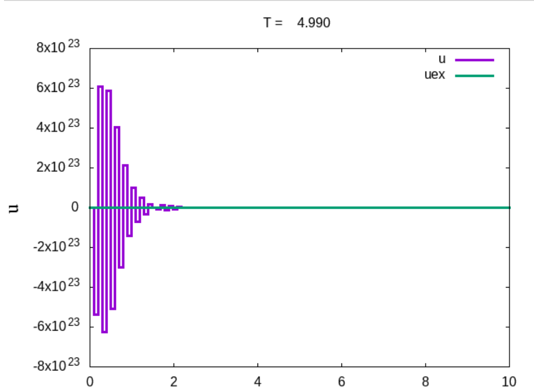
$$u_0(x) = e^{-50(x-3)^2} + \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

Afin de réaliser les différents graphiques, on utilisera le langage Fortran. On fera varier le paramètre α de manière à ce que $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.9$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 1.2$. Ainsi, on pourra confronter les solutions numériques avec la solution exacte $u(x,t) = u_0(x - ct)$ en prenant $N = 100$, $N = 500$ et $N = 1000$.

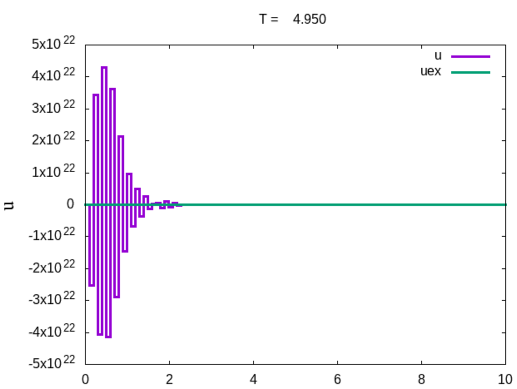
Tout d'abord, pour $N = 100$, nous obtenons :



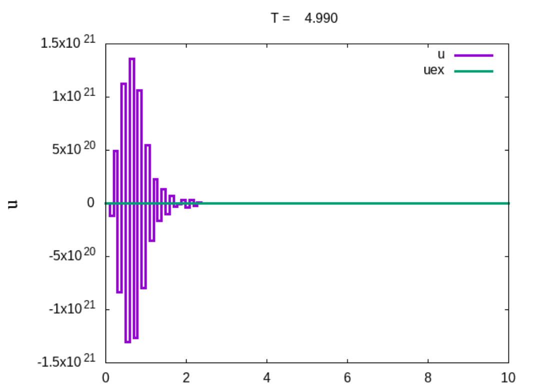
(a) $N = 100$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 100$ et $\alpha = 0.9$



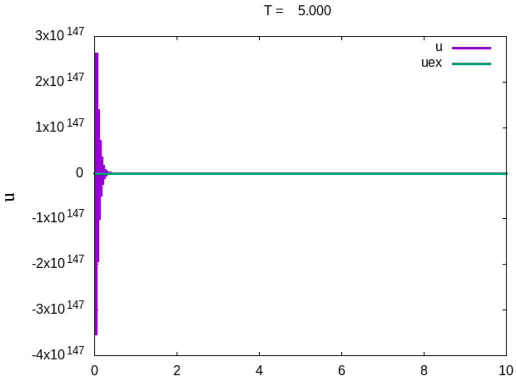
(c) $N = 100$ et $\alpha = 1$



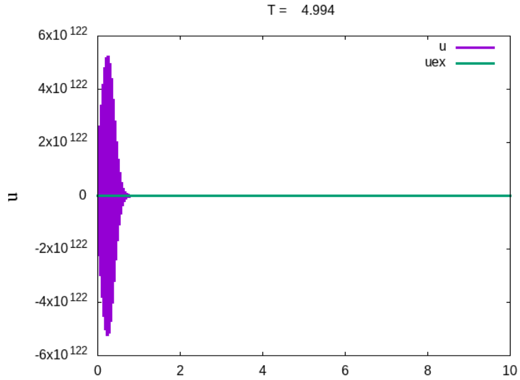
(d) $N = 100$ et $\alpha = 1.2$

FIGURE 1 – Solutions numériques du schéma explicite décentré aval pour $N = 100$

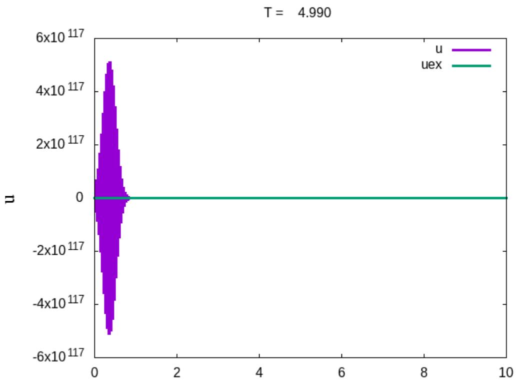
Puis, pour $N = 500$:



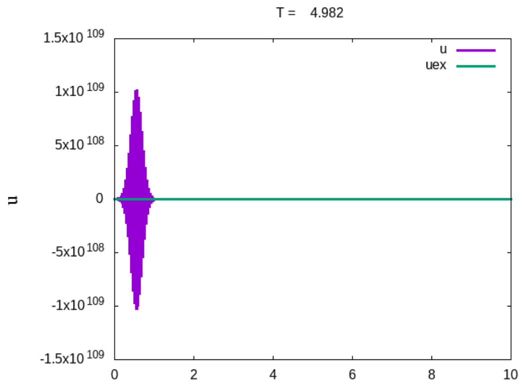
(a) $N = 500$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 500$ et $\alpha = 0.9$



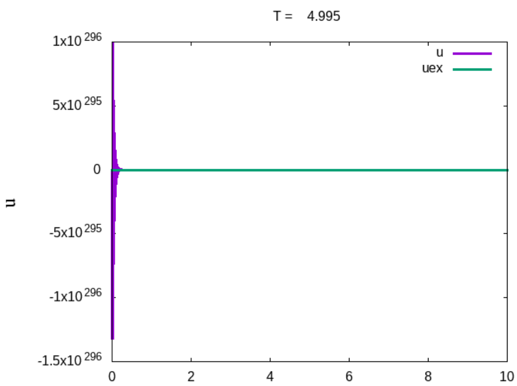
(c) $N = 500$ et $\alpha = 1$



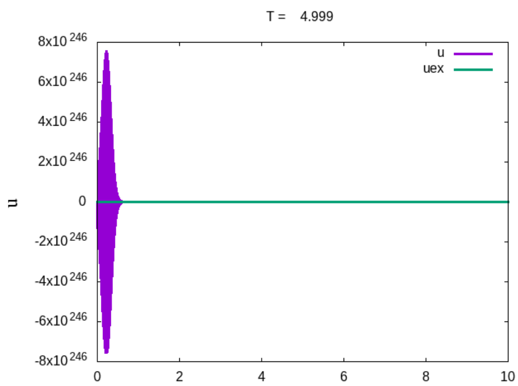
(d) $N = 500$ et $\alpha = 1.2$

FIGURE 2 – Solutions numériques du schéma explicite décentré aval pour $N = 500$

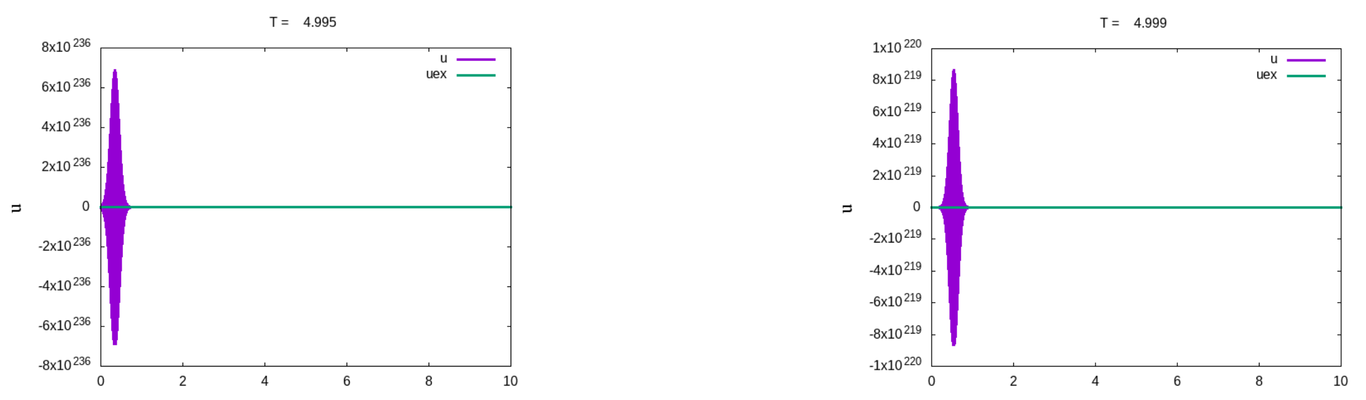
Enfin, pour $N = 1000$:



(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$



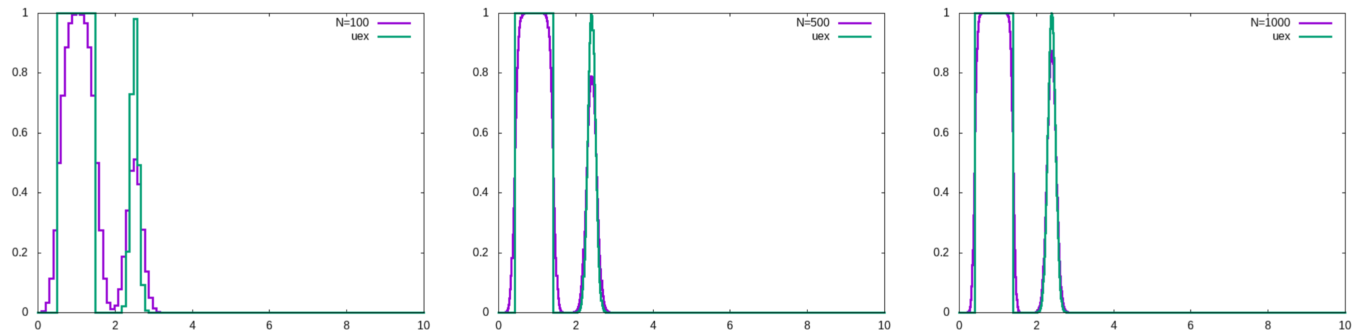
(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$ (d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

FIGURE 3 – Solutions numériques du schéma explicite décentré aval pour $N = 1000$

Nous pouvons remarquer que, pour toutes les valeurs de α, le schéma explicite décentré aval est instable. En effet, d'après la partie analytique sur la stabilité du schéma (S1), pour que le schéma soit stable, il faut que le coefficient de viscosité soit négatif, soit que $c < 0$. Or, ici, $c > 0$, d'où les résultats obtenus.

3.2.2 Donnée initiale discontinue avec $c < 0$

Cette fois-ci, on choisit $c = -1$, afin de démontrer la stabilité du schéma. Ainsi, pour $N = 100$:



(a) $N = 100$ et $\alpha = 0.5$ (b) $N = 500$ et $\alpha = 0.5$ (c) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$

FIGURE 4 – Solutions numériques du schéma explicite décentré aval pour $\alpha = 0.5$ avec $c = -1$

On remarque bien que le schéma converge pour $c = -1$. Par ailleurs, on n'a pu tester que pour $\alpha = 0.5$. Par conséquent, pour un certain α, le schéma sera sûrement instable.

4. Étude du schéma explicite centré

Ce schéma est un schéma numérique explicite centré qui s'écrit de la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0 \qquad \text{(S2)}$$

4.1. Étude analytique du schéma S2

4.1.1. Erreur de consistance

Soit u la solution régulière de l'équation de transport. On pose $u_i^n = u(x_i, t_n)$. Comme vu précédemment, on note $\epsilon(\delta x, \delta t)$, l'erreur de troncature :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \frac{\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_i^n}}{\delta t} + c\,\frac{\overline{u_{i+1}^n} - \overline{u_{i-1}^n}}{2\delta x} \tag{10}$$

On effectue les développements limités de Taylor correspondants et on obtient :

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u(x_i, t_{n+1}) = u_i^n + \delta t (u_t)_i^n + \frac{\delta t^2}{2}(u_{tt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^3)\\
u_{i+1}^n &= u(x_{i+1}, t_n) = u_i^n + \delta x (u_x)_i^n + \frac{\delta x^2}{2}(u_{xx})_i^n + \frac{\delta x^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^4)\\
u_{i-1}^n &= u(x_{i-1}, t_n) = u_i^n - \delta x (u_x)_i^n + \frac{\delta x^2}{2}(u_{xx})_i^n - \frac{\delta x^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^4)
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir remplacer ces expressions dans l'équation, on a :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = (u_t)_i^n + \frac{\delta t}{2}(u_{tt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^2) \tag{e}$$

$$\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = (u_x)_i^n + \frac{\delta x^2}{6}(u_{xxx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^3) \tag{f}$$

En remplaçant dans (e), on obtient :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \underbrace{\overline{(u_t)_i^n} + c\,\overline{(u_x)_i^n}}_{\text{équation de transport}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\delta t}{2}\overline{(u_{tt})_i^n} + c\,\frac{\delta x^2}{6}\overline{(u_{xxx})_i^n}}_{\text{terme prépondérant dans l'erreur de troncature}} + \mathcal{O}(\delta t^2, \delta x^3)}_{\text{erreur global } = \mathcal{O}(\delta t, \delta x^2)} \tag{10bis}$$

Par conséquent, on a bien :

$$\lim_{(\delta t, \delta x) \to (0,0)} \epsilon(\delta t, \delta x) = 0$$

Conclusion 3 *Le schéma S2 est alors consistant à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.*

4.1.2. Stabilité

À l'aide de la remarque 2, on peut simplifier l'équation (10bis) :

$$u_t + c\,u_x + c^2\,\frac{\delta t}{2}\,u_{xx} + c\,\frac{\delta x^2}{6}\,u_{xxx} = 0$$

D'après la section 2.1., cette équation simplifiée possède un terme prépondérant d'ordre impair, donc le coefficient porté par l'opérateur est un coefficient de dispersion numérique. Donc, le schéma n'est pas consistant.

Démontrons la stabilité avec Fourier. Pour cela, réécrivons (S2) en remplaçant u_i^n par $\hat{u}^n(k)$. Ainsi, on a :

$$\frac{\hat{u}^{n+1}(k) - \hat{u}^n(k)}{\delta t} + c\,\frac{\hat{u}^n(k)(e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x})}{2\delta x} = 0 \iff \hat{u}^{n+1}(k) = \underbrace{(1 - c\,\frac{\delta t}{2\delta x}(e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x}))}_{A(k)}\,\hat{u}^n(k)$$

Or, $e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x} = 2I\sin(2\pi k\delta x)$.
Ainsi,

$$A(k) = 1 - c\,\frac{\delta t}{\delta x} I\sin(2\pi k\delta x)$$

Si $|A(k)| < 1$, alors le schéma sera stable L^2. Donc, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1^2 + \alpha^2\,\sin^2(2\pi k\delta x)} < 1 &\iff 1 + \alpha^2\,\sin^2(2\pi k\delta x) < 1 \\ &\iff \alpha^2\,\sin^2(2\pi k\delta x) < 0\end{aligned}$$

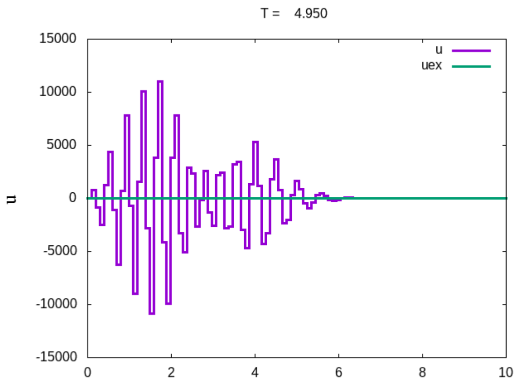
Un nombre au carré est toujours positif donc, ce qui est écrit précédemment est impossible.

Conclusion 4 *Le schéma est instable* $\forall c$, $\forall \delta t > 0$.

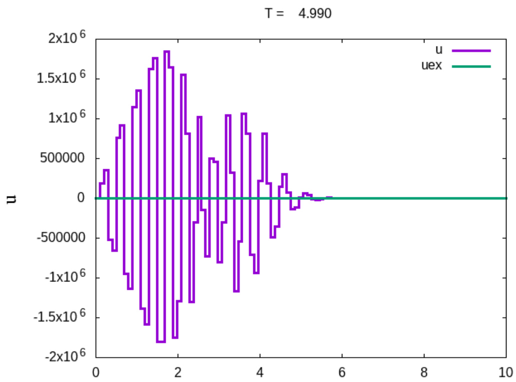
4.2. Étude numérique

4.2.1 Donnée initiale discontinue avec $c = 1$

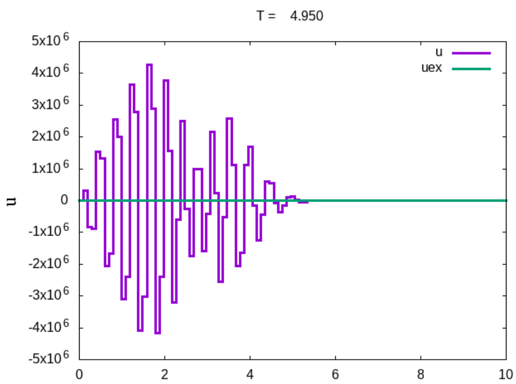
De la même manière que dans la partie précédente, on trace les graphiques suivants :



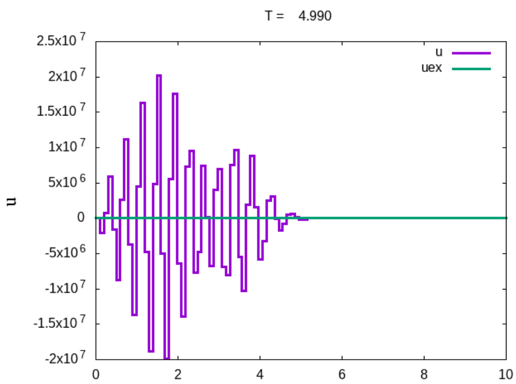
(a) $N = 100$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 100$ et $\alpha = 0.9$

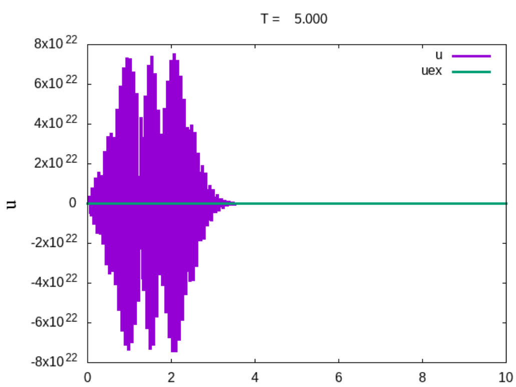


(c) $N = 100$ et $\alpha = 1$

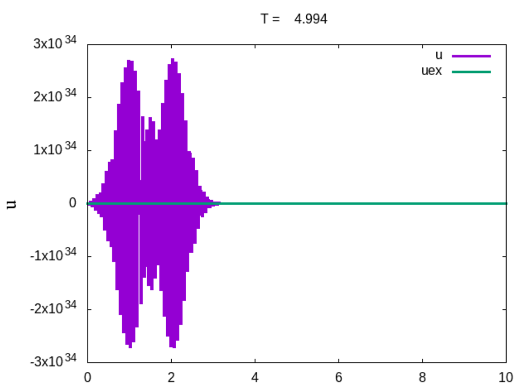


(d) $N = 100$ et $\alpha = 1.2$

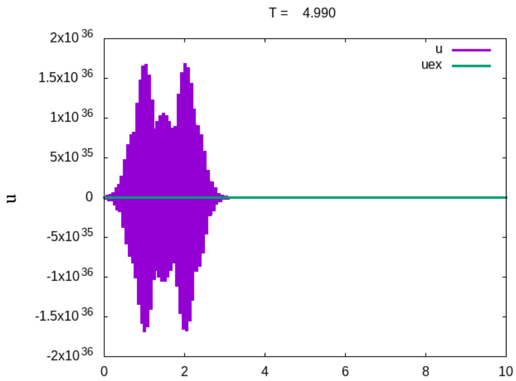
FIGURE 5 – Solutions numériques du schéma explicite centré pour $N = 100$



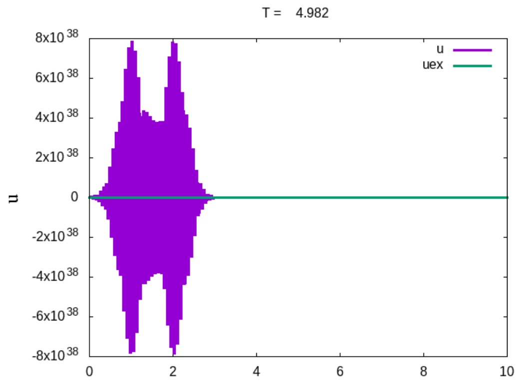
(a) $N = 500$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 500$ et $\alpha = 0.9$

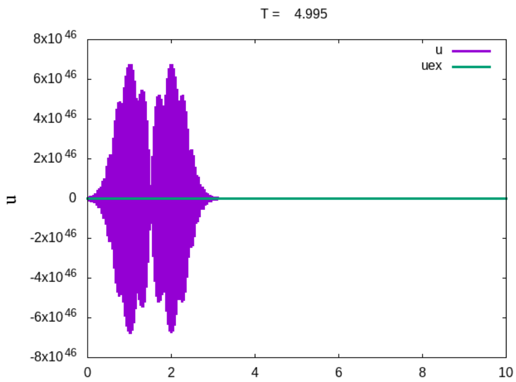


(c) $N = 500$ et $\alpha = 1$

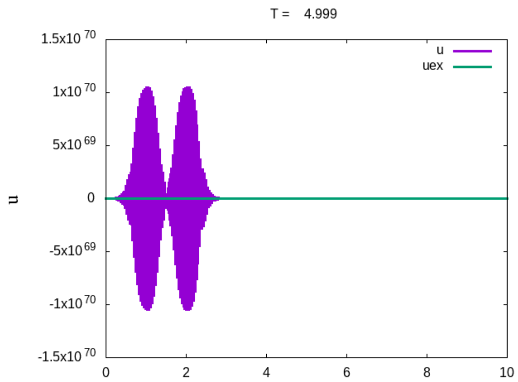


(d) $N = 500$ et $\alpha = 1.2$

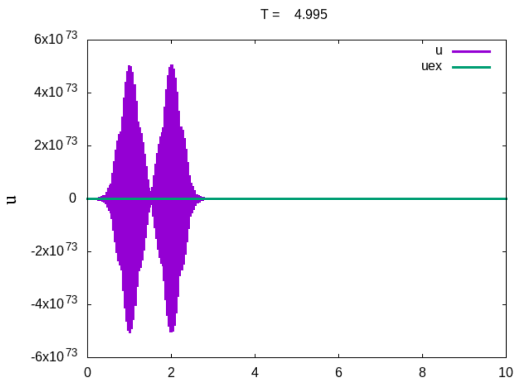
FIGURE 6 – Solutions numériques du schéma explicite centré pour $N = 500$



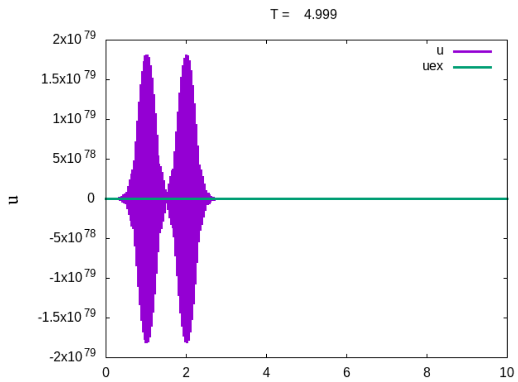
(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$



(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$



(d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

FIGURE 7 – Solutions numériques du schéma explicite centré pour $N = 1000$

Pour n'importe quelle valeur de N ou de α, le schéma explicite centré est instable. C'est ce que nous avons démontré dans la partie analytique.

5. Étude du schéma explicite décentré amont

Ce schéma est un schéma numérique explicite décentré amont qui s'écrit de la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\,\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} = 0 \tag{S3}$$

5.1. Étude analytique du schéma S3

On procède de la même manière que précédemment pour déterminer la consistance et la stabilité.

5.1.1. Erreur de consistance

Soit u la solution régulière de l'équation de transport. On pose $u_i^n = u(x_i, t_n)$. Comme vu précédemment, on note $\epsilon(\delta x, \delta t)$, l'erreur de troncature :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \frac{\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_i^n}}{\delta t} + c\,\frac{\overline{u_i^n} - \overline{u_{i-1}^n}}{\delta x} \tag{11}$$

On remarque que le calcul pour l'erreur de consistance est quasiment le même que pour le schéma explicite décentré aval (S1). On trouve donc :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \overline{(u_t)_i^n} + c\,\overline{(u_x)_i^n} + \frac{\delta t}{2}\,\overline{(u_{tt})_i^n} - c\,\frac{\delta x}{2}\,\overline{(u_{xx})_i^n} + \mathcal{O}(\delta t^2, \delta x^2) \tag{11bis}$$

Par conséquent, on a bien :

$$\lim_{(\delta t, \delta x) \to (0,0)} \epsilon(\delta t, \delta x) = 0$$

Conclusion 5 *Le schéma S3 est alors consistant à l'ordre 1 en temps et 1 en espace.*

5.1.2. Stabilité

À l'aide de la remarque 2, on peut simplifier l'équation (11bis) :

$$u_t + c\,u_x + c^2\,\frac{\delta t}{2}\,u_{xx} - c\,\frac{\delta x}{2}\,u_{xx} = 0$$

Ainsi, on en déduit le coefficient de viscosité :

$$\nu = c\,(\frac{c\,\delta t - \delta x}{2})$$

<u>Cas 1 :</u>
Si $c < 0$ alors $\nu > 0$. Par conséquent, $\forall \delta x$ et $\forall \delta t$, le schéma sera instable au sens L^p, $\forall p \in \mathbb{R}$.

<u>Cas 2 :</u>
Si $c > 0$ et si la condition de CFL est vérifiée, alors $\nu < 0$. Par conséquent, $\forall \delta x$ et $\forall \delta t$, le schéma sera stable au sens L^∞.

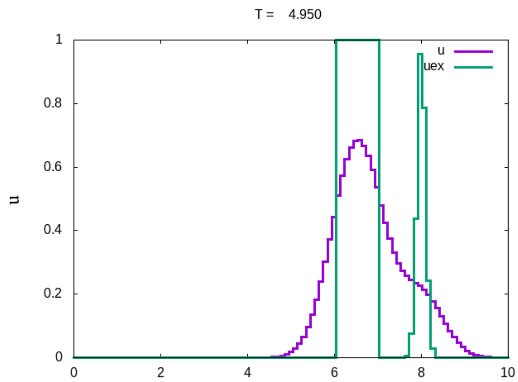
Conclusion 6 *Si $c < 0$ alors le schéma est instable au sens L^p, $\forall p \in \mathbb{R}$.*

Si $c > 0$ et si la condition de CFL est vérifiée, alors le schéma est L^∞ stable.

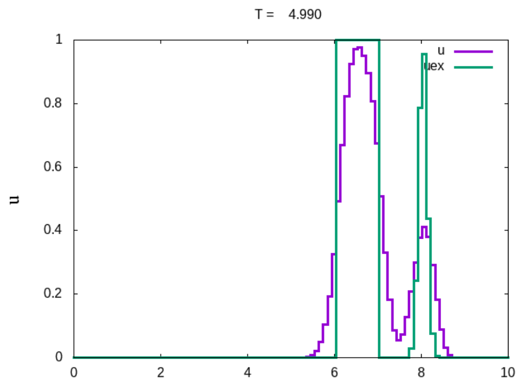
5.2. Étude numérique

5.2.1 Donnée initiale discontinue avec c=1

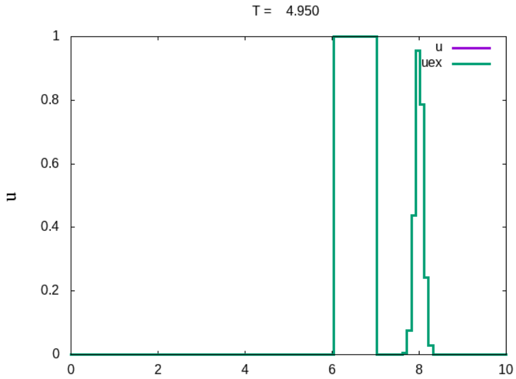
Traçons les différents graphiques :



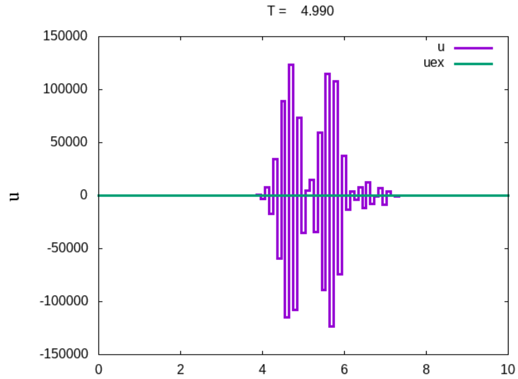
(a) $N = 100$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 100$ et $\alpha = 0.9$

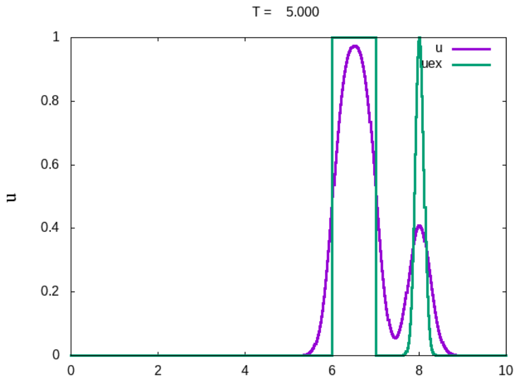


(c) $N = 100$ et $\alpha = 1$

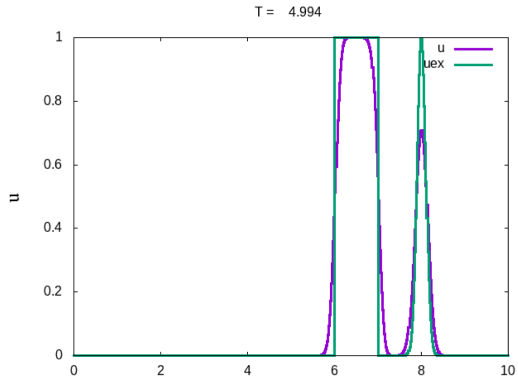


(d) $N = 100$ et $\alpha = 1.2$

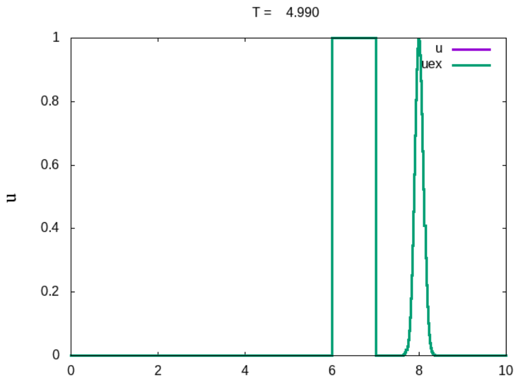
FIGURE 8 – Solutions numériques du schéma explicite décentré amont pour $N = 100$



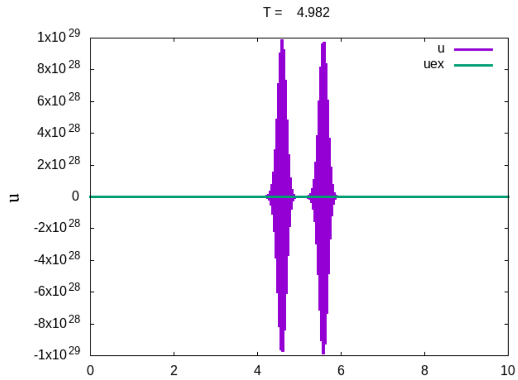
(a) $N = 500$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 500$ et $\alpha = 0.9$

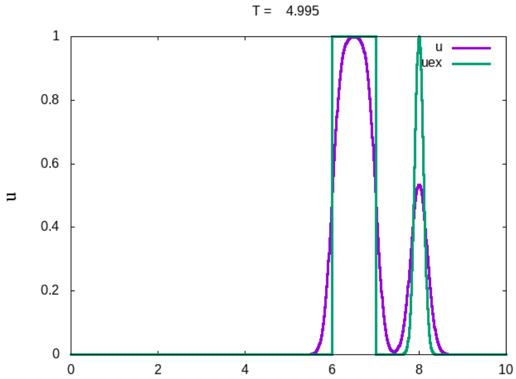


(c) $N = 500$ et $\alpha = 1$

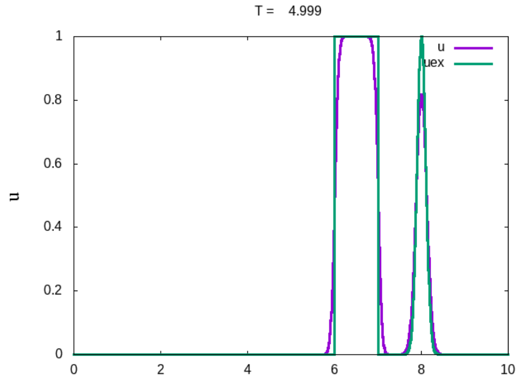


(d) $N = 500$ et $\alpha = 1.2$

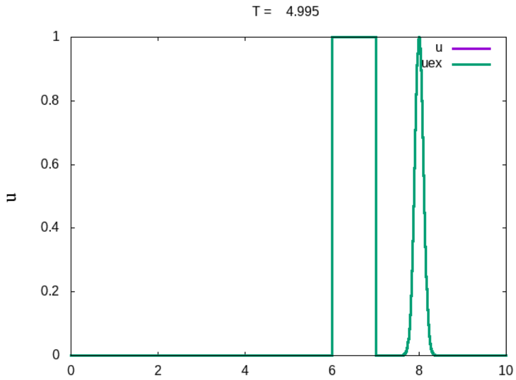
FIGURE 9 – Solutions numériques du schéma explicite décentré amont pour $N = 500$



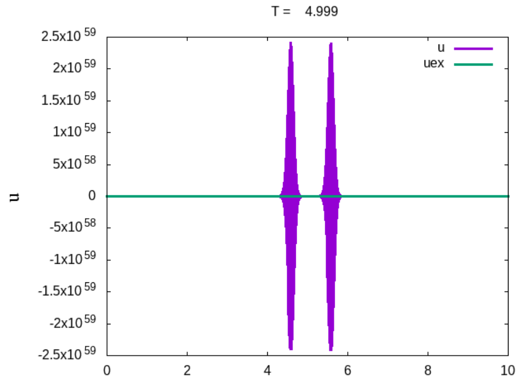
(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$



(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$

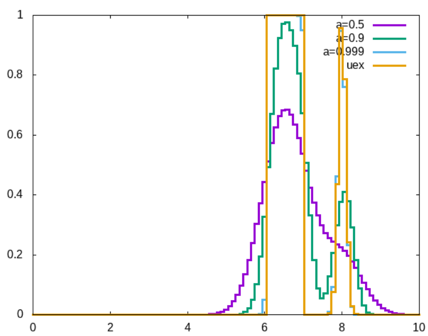


(d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

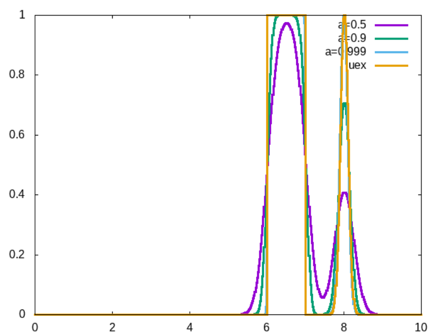
FIGURE 10 – Solutions numériques du schéma explicite décentré amont pour $N = 1000$

On remarque que ce schéma est stable quelque soit le N et si α tend vers 1. Par contre, si $\alpha > 1$, le schéma devient instable.

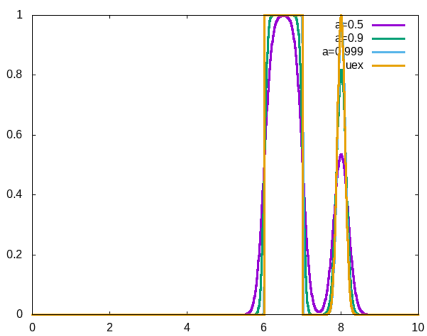
Cette fois, nous avons tracé un schéma avec différents α compris entre 0 et 1, afin de vérifier ce que l'on a trouvé précédemment :



(a) $N = 100$



(b) $N = 500$



(c) $N = 1000$

FIGURE 11 – Solutions numériques du schéma explicite décentré amont pour $\alpha < 1$ et pour différents N

Conclusion 7 *D'après le théorème 3, le schéma numérique décentré amont converge pour* $\alpha < 1$.

6. Étude du schéma "leap frog"

Ce schéma est un schéma numérique dit "leap frog" qui s'écrit de la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\delta t} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0 \tag{S4}$$

6.1. Étude analytique du schéma S4

6.1.1. Erreur de consistance

Soit u la solution régulière de l'équation de transport. On pose $u_i^n = u(x_i, t_n)$. Comme vu précédemment, on note $\epsilon(\delta x, \delta t)$, l'erreur de troncature :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \frac{\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_i^{n-1}}}{2\delta t} + c\,\frac{\overline{u_{i+1}^n} - \overline{u_{i-1}^n}}{2\delta x} \tag{12}$$

On effectue les développements limités de Taylor correspondants et on obtient :

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u(x_i, t_{n+1}) = u_i^n + \delta t (u_t)_i^n + \frac{\delta t^2}{2}(u_{tt})_i^n + \frac{\delta t^3}{6}(u_{ttt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^4) \\
u_i^{n-1} &= u(x_i, t_{n-1}) = u_i^n - \delta t (u_t)_i^n + \frac{\delta t^2}{2}(u_{tt})_i^n - \frac{\delta t^3}{6}(u_{ttt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^4) \\
u_{i+1}^n &= u(x_{i+1}, t_n) = u_i^n + \delta x (u_x)_i^n + \frac{\delta x^2}{2}(u_{xx})_i^n + \frac{\delta x^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^4) \\
u_{i-1}^n &= u(x_{i-1}, t_n) = u_i^n - \delta x (u_x)_i^n + \frac{\delta x^2}{2}(u_{xx})_i^n - \frac{\delta x^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^4)
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir remplacer ces expressions dans l'équation, on a :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\delta t} = (u_t)_i^n + \frac{\delta t^2}{6}(u_{ttt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^3) \tag{g}$$

$$\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = (u_x)_i^n + \frac{\delta x^2}{6}(u_{xxx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^3) \tag{h}$$

En remplaçant dans **??**, on obtient :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \overline{(u_t)_i^n} + c\,\overline{(u_x)_i^n} + \frac{\delta t^2}{6}\,\overline{(u_{ttt})_i^n} + c\,\frac{\delta x^2}{6}\,\overline{(u_{xxx})_i^n} + \mathcal{O}(\delta t^3, \delta x^3) \tag{12bis}$$

Par conséquent, on a bien :

$$\lim_{(\delta t, \delta x) \to (0,0)} \epsilon(\delta t, \delta x) = 0$$

Conclusion 8 *Le schéma S4 est alors consistant à l'ordre 2 en temps et 2 en espace.*

6.1.2. Stabilité

À l'aide de la remarque 2, on peut simplifier l'équation (12bis) :

$$u_t + c\,u_x - c^3\,\frac{\delta t^2}{6}\,u_{xxx} + c\,\frac{\delta x^2}{6}\,u_{xxx} = 0$$

On en déduit que le schéma est instable car, comme dans le schéma numérique explicite centré (S4), le coefficient porté par l'opérateur est un coefficient de dispersion numérique car le terme prépondérant est d'ordre impair.

Pour trouver la stabilité du schéma (S4), il faut faire l'analyse de Fourier.

Pour cela, réécrivons (S4) en remplaçant u_i^n par $\hat{u}^n(k)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{\hat{u}^{n+1}(k) - \hat{u}^{n-1}(k)}{2\delta t} + c\,\frac{\hat{u}^n(k)(e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x})}{2\delta x} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\hat{u}^{n+1}(k) - c\,\frac{\delta t}{\delta x}(e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x})\,\hat{u}^n(k) + \hat{u}^{n-1}(k) = 0 \end{aligned}$$

Or, $e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x} = 2I\sin(2\pi k\delta x)$.

On peut poser $\hat{u}^n(k) = r$, et ainsi, on a :

$$r^2 - c\,\frac{\delta t}{\delta x} 2I\sin(2\pi k\delta x)\,r + 1 = 0$$

En calculant les racines de l'équation, on doit montrer ensuite que ces racines sont inférieures à 1 pour que le schéma soit stable.

Conclusion 9 *Le schéma est instable* $\forall c$, $\forall \delta t > 0$.

L'étude numérique de ce schéma n'a pas été faite.

7. Étude du schéma numérique S5

Ce schéma est un schéma numérique avec $\lambda = c\dfrac{\delta t}{\delta x}$ qui s'écrit de la forme suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) \tag{S5}$$

Mais, en remplaçant λ, on a :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + \frac{c}{2\delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) - c^2\frac{\delta t}{2\delta x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) = 0 \tag{S5bis}$$

7.1. Étude analytique du schéma S5

7.1.1. Erreur de consistance

Soit u la solution régulière de l'équation de transport. On pose $u_i^n = u(x_i, t_n)$. Comme vu précédemment, on note $\epsilon(\delta x, \delta t)$, l'erreur de troncature :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \frac{\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_i^n}}{\delta t} + \frac{c}{2\delta x}\left(\overline{u_{i+1}^n} - \overline{u_{i-1}^n}\right) - c^2\frac{\delta t}{2\delta x^2}\left(\overline{u_{i+1}^n} - 2\overline{u_i^n} + \overline{u_{i-1}^n}\right) \tag{13}$$

On effectue les développements limités de Taylor correspondants comme pour le schéma numérique "leap frog" (S4) et on obtient, afin de pouvoir remplacer dans l'équation :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = (u_t)_i^n + \frac{\delta t}{2}(u_{tt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t^3) \tag{i}$$

$$u_{i+1}^n - u_{i-1}^n = 2\delta x(u_x)_i^n + \frac{2\delta x^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^4) \tag{j}$$

$$u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n = \delta x^2(u_{xx})_i^n + \mathcal{O}(\delta x^4) \tag{k}$$

En remplaçant dans (13), on obtient :

$$\epsilon(\delta x, \delta t) = \overline{(u_t)_i^n} + \frac{\delta t}{2}\,\overline{(u_{tt})_i^n} + c\,\overline{(u_x)_i^n} + c\,\frac{\delta x^2}{6}\,\overline{(u_{xxx})_i^n} - c^2\,\frac{\delta t}{2}\,\overline{(u_{xx})_i^n} + \mathcal{O}(\delta t^2, \delta x^3) \qquad (13\text{bis})$$

Par conséquent, on a bien :

$$\lim_{(\delta t, \delta x) \to (0,0)} \epsilon(\delta t, \delta x) = 0$$

Conclusion 10 *Le schéma S5 est alors consistant à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.*

7.1.2. Stabilité

À l'aide de la remarque 2, on peut simplifier l'équation (13bis) :

$$u_t + c\,u_x + c^2\,\frac{\delta t}{2}\,u_{xx} + c\,\frac{\delta x^2}{6}\,u_{xxx} - c^2\,\frac{\delta t}{2}\,u_{xx} = 0$$

Donc, il reste :

$$u_t + c\,u_x + c\,\frac{\delta x^2}{6}\,u_{xxx} = 0$$

Ainsi, on en déduit le coefficient de viscosité :

$$\nu = c\,\frac{\delta x^2}{6}$$

Comme le schéma numérique (S4), le coefficient ν est un coefficient de dispersion numérique car le terme prépondérant est d'ordre impair. Par conséquent, le schéma (S5) est L^∞ instable.

Démontrons la stabilité avec Fourier. Pour cela, réécrivons (S5) en remplaçant u_i^n par $\hat{u}^n(k)$. Ainsi, on a :

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \underbrace{1 - \frac{\lambda}{2}(e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x}) + \frac{\lambda^2}{2}(e^{2I\pi k\delta x} - 2 + e^{-2I\pi k\delta x})}_{A(k)}\,\hat{u}^n(k)$$

Or, $e^{2I\pi k\delta x} - e^{-2I\pi k\delta x} = 2I\sin(2\pi k\delta x)$ et $e^{2I\pi k\delta x} + e^{-2I\pi k\delta x} = 2\cos(2\pi k\delta x)$
Ainsi,

$$A(k) = 1 - \lambda I\sin(2\pi k\delta x) + \lambda^2(\cos(2\pi k\delta x) - 1)$$

Si $|A(k)| < 1$, alors le schéma sera stable L^2. Donc, on a :

$$\sqrt{(1+\lambda^2(\cos(2\pi k\delta x)-1))^2+\lambda^2\sin^2(2\pi k\delta x)} < 1$$

Ainsi, on peut déterminer deux cas pour la stabilité L^2 :

Cas 1 :
Si $|\lambda = c\dfrac{\delta t}{\delta x}| > 1$, alors le schéma sera L^2-instable.

Cas 2 :
$|\lambda = c\dfrac{\delta t}{\delta x}| \leq 1$, alors le schéma sera L^2-stable.

Conclusion 11 *Le schéma (S5) est L^∞ instable.*

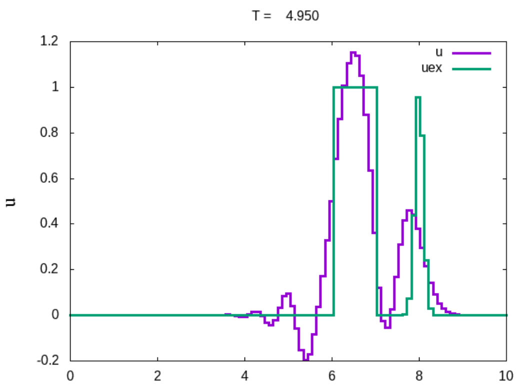
Pour $|\lambda| > 1$, il est L^2-instable.

Pour $|\lambda| \leq 1$, il est L^2-stable.

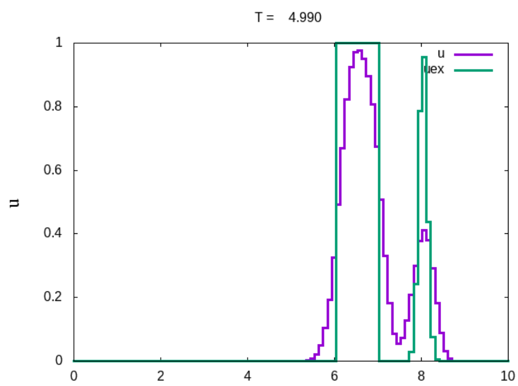
7.2. Étude numérique

7.2.1 Donnée initiale discontinue avec c=1

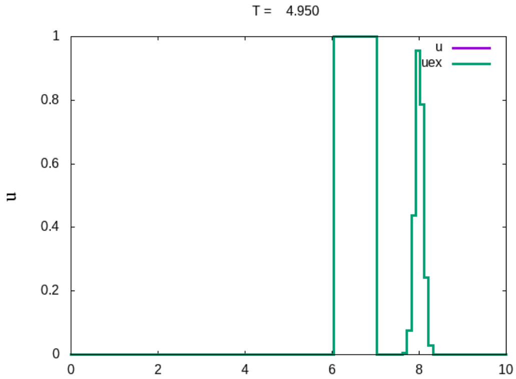
On trace pour $N = 100$:



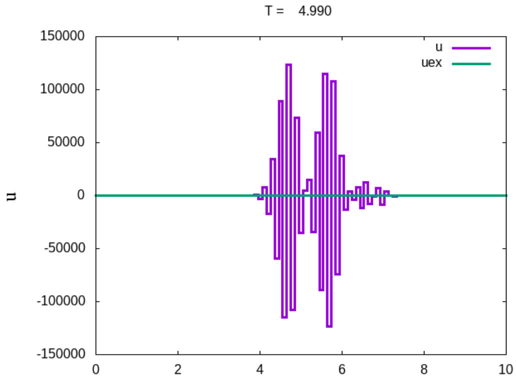
(a) $N = 100$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 100$ et $\alpha = 0.9$



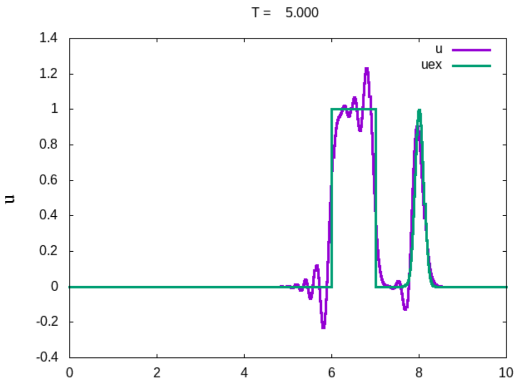
(c) $N = 100$ et $\alpha = 1$



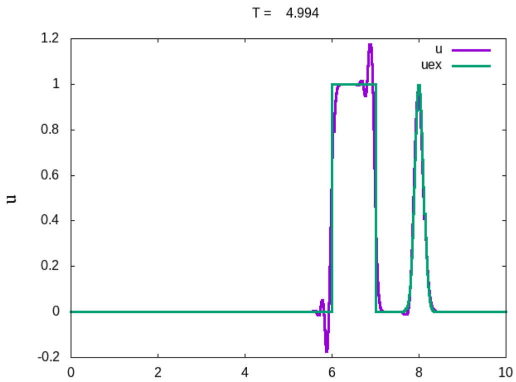
(d) $N = 100$ et $\alpha = 1.2$

FIGURE 12 – Solutions numériques du schéma explicite (S5) pour $N = 100$

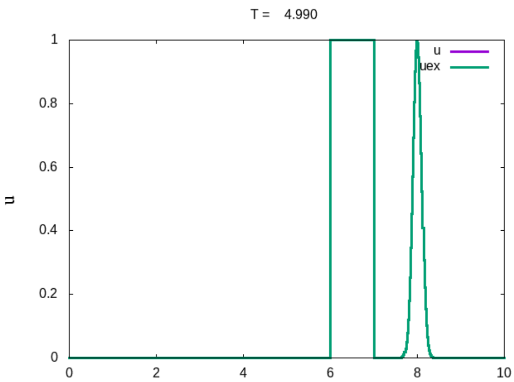
De même, on trace les graphiques pour $N = 500$, puis $N = 1000$:



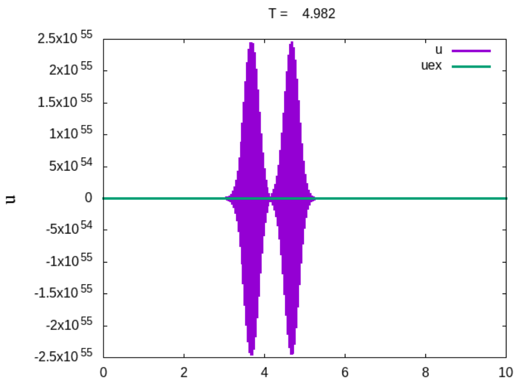
(a) $N = 500$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 500$ et $\alpha = 0.9$

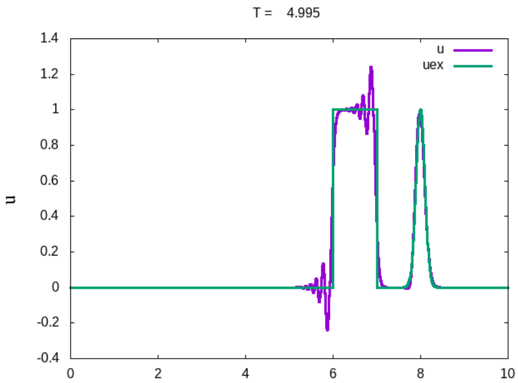


(c) $N = 500$ et $\alpha = 1$

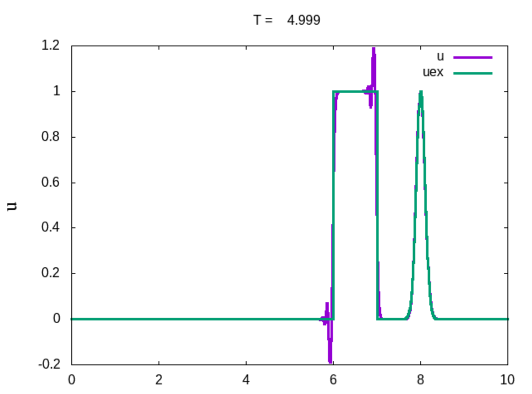


(d) $N = 500$ et $\alpha = 1.2$

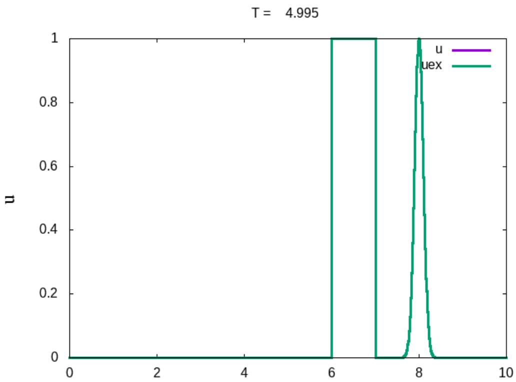
FIGURE 13 – Solutions numériques du schéma explicite (S5) pour $N = 500$



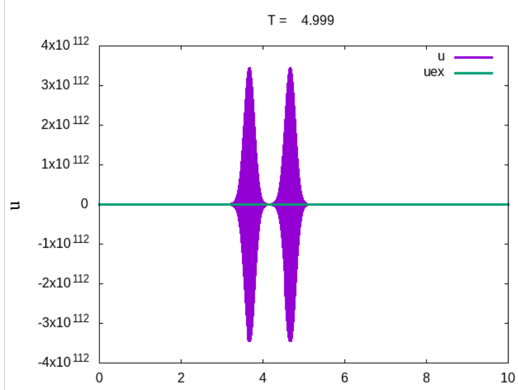
(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$



(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$

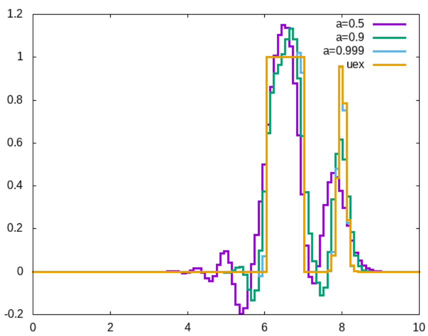


(d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

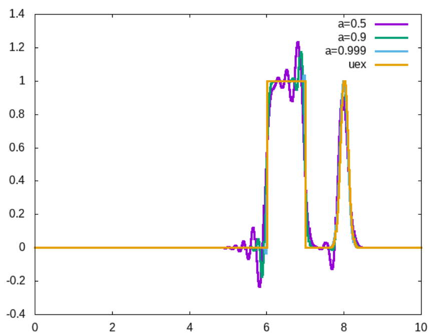
FIGURE 14 – Solutions numériques du schéma explicite (S5) pour $N = 1000$

On peut noter que pour $N = 500$ et $N = 1000$, le schéma numérique a un comportement d'un schéma L^2-stable, tandis que pour $N = 100$, le schéma numérique a un comportement d'un schéma L^∞-stable. Par ailleurs, on peut aussi remarquer que pour $\alpha > 1$, le schéma (S5) est instable.

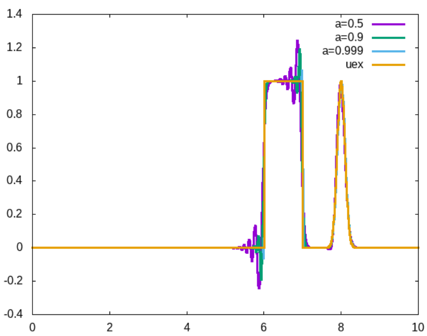
Pour voir plus précisément la stabilité en L^2 et en L^∞, on trace les graphiques suivants :



(a) $N = 100$



(b) $N = 500$



(c) $N = 1000$

FIGURE 15 – Solutions numériques du schéma explicite décentré amont pour $\alpha < 1$ et pour différents N

8. Résolution d'un cas particulier avec $c(x,t) = cos(x)$

On considère l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} u_t + c\, u_x = 0 \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On suppose que c est une focntion continue par rapport à x et t, et lipschitzienne par rapport à x.

Soient $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $0 \leq s < t$. On pose $X'(s;(x,t)) = c(X(s;(x,t)),s)$ avec $X(t;(x,t)) = x$.

8.1. Solution exacte du problème de transport

On considère $c(x,t) = cos(x)$. Cette fonction est continue par rapport à x et lipschitzienne par rapport à x. Donc, par le théorème de CL, pour tout couple (x,t), il existe une unique fonction X qui vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X'(s) = cos(X(s)) \qquad\qquad (*) \\ X(t) = x \end{cases}$$

De plus, pour alléger les notations, on écrira $X(s)$ pour $X(s;(x,t))$.

Ainsi (*) devient :

$$\frac{X'(s)}{cos(X(s))} = 1$$

Donc en intégrant, on a :

$$\int \frac{X'(s)}{cos(X(s))} ds = \int ds \Longleftrightarrow \int X'(s) \sec(X(s)) ds = s + K$$

avec K, une constante et $\dfrac{1}{cos(X(s))} = \sec(X(s))$.

Posons, $u = X(s)$ et $du = X'(s)ds$.
Ainsi, on a :

$$\int X'(s) \sec(X(s)) ds = s + K \Longleftrightarrow \int \sec(u) du = s + K$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par $\sec(u) + \tan(u)$:

$$\int \frac{\sec^2(u) + \sec(u)\tan(u)}{\sec(u) + \tan(u)} du = s + K \iff \int \frac{1}{y} dy = s + K$$

en posant $y = \sec(u) + \tan(u)$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\ln(\tan(u) + \sec(u)) = s + K &\iff \ln(\frac{1 + \sin(u)}{\cos(u)}) = s + K \\
&\iff \ln((\frac{\sin(\frac{u}{2}) + \cos(\frac{u}{2}))^2}{\cos^2(\frac{u}{2}) - \sin^2(\frac{u}{2})} = s + K \\
&\iff \ln(\frac{\sin(\frac{u}{2}) + \cos(\frac{u}{2})}{\cos(\frac{u}{2}) - \sin(\frac{u}{2})}) = s + K \\
&\iff \ln(\frac{1 + \frac{\sin(\frac{u}{2})}{\cos(\frac{u}{2})}}{1 - \frac{\sin(\frac{u}{2})}{\cos(\frac{u}{2})}}) = s + K \\
&\iff 2\tanh^{-1}(\tan(\frac{X(s)}{2})) = s + K \\
&\iff X(s) = 2\tan^{-1}(\tanh(\frac{1}{2}(s + K)))
\end{aligned}$$

Or, $X(t) = x$. Ainsi :

$$X(t) = x = 2\tan^{-1}(\tanh(\frac{1}{2}(t + K))) \iff K = 2\tanh^{-1}(\tan(\frac{x}{2})) - t$$

Finalement, on obtient :

$$X(s) = 2\tan^{-1}(\tanh(\frac{1}{2}(s - t + 2\tanh^{-1}(\tan(\frac{x}{2}))))) \tag{14}$$

Par conséquent, on a :

$$u(X(0), 0) = u_0(2\tan^{-1}(\tanh(\frac{1}{2}(2\tanh^{-1}(\tan(\frac{x}{2})) - t))))$$

8.2. Solution quasi-exacte

Cherchons la solution quasi-analytique de notre problème de Cauchy avec la méthode d'Euler implicite. Soit la subdivision $s_k = k\delta s$ avec $\delta s = \dfrac{t}{M}$ avec $M \in \mathbb{N}$.

On sait que :

$$\begin{aligned} x'(t) = f(t, x(t)) &\iff \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) \\ &\iff x(t_{n+1}) - x(t_n) = \delta t f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \\ &\iff x_{n+1} = x_n + \delta t f(t_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\iff x_{n+1} = x_n + \delta t \cos(x_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc, en prenant les notations dans notre exercice, on a :

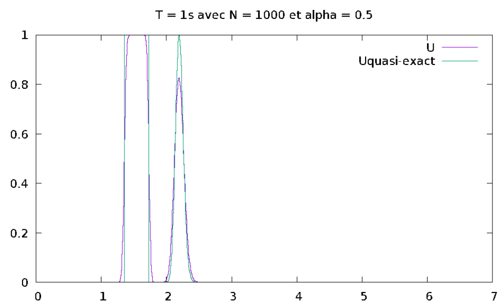
$$X_{k+1} = X_k + \delta s \cos(X_{k+1}) \iff X_k = X_{k+1} - \delta s \cos(X_{k+1})$$

Avec la condition initiale précédente, on peut trouver X_0 et ainsi, déterminer la solution quasi-exacte avec $u_0(X(0))$.

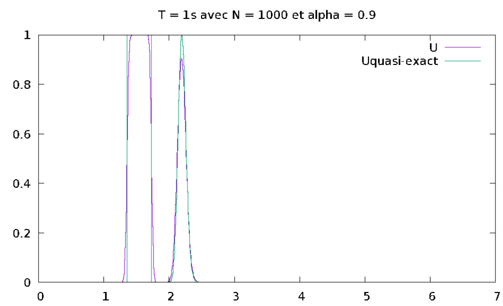
8.3. Construction d'un schéma stable

Tout d'abord, nous allons construire un schéma stable à partir du schéma (S1) et du schéma (S3). D'après la partie théorique de ces schémas, nous avons vu que le schéma numérique décentré en amont convergeait si $c > 0$ et que le schéma numérique décentré en aval convergeait si $c < 0$.

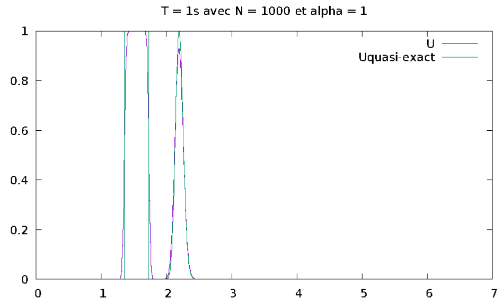
Ainsi, nous avons pu tracer les graphiques suivants :



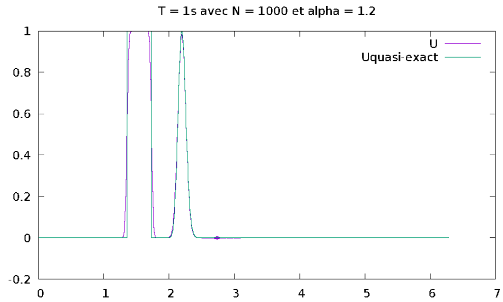
(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$



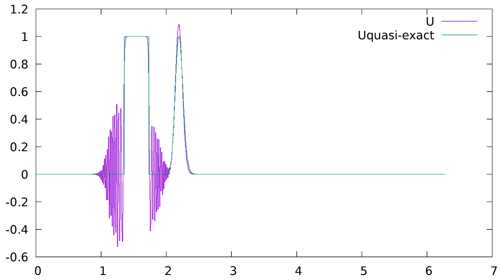
(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$



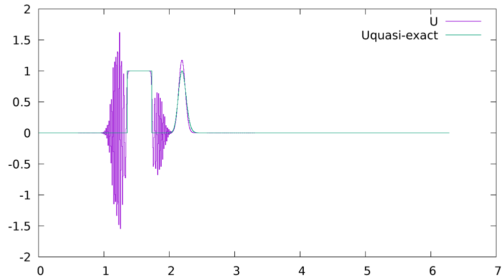
(d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

FIGURE 16 – Solutions numériques du schéma explicite avec (S1) et (S3) pour $N = 1000$

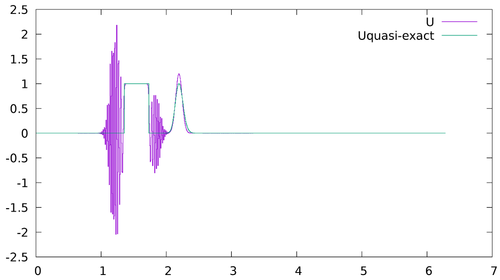
Comparons ces solutions avec le schéma explicite (S5). On trace ainsi les graphiques suivants en faisant varier λ :



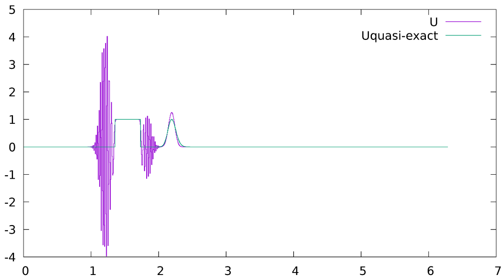
(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$

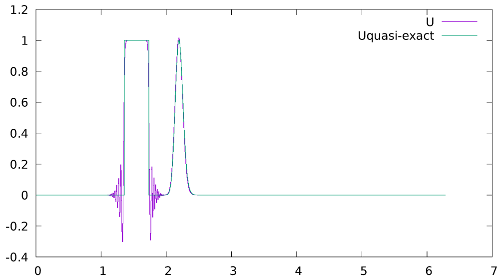


(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$

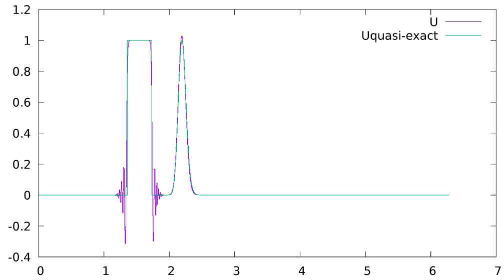


(d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

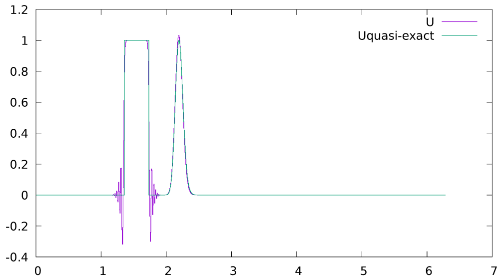
FIGURE 17 – Solutions numériques du schéma explicite avec (S5) pour $N = 1000$ et $\lambda = 0.5$



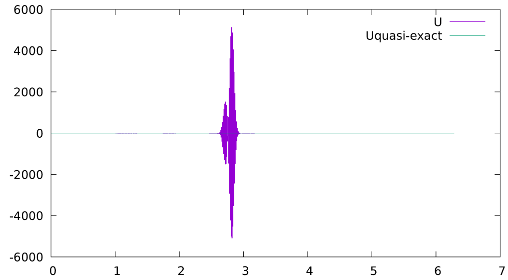
(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$

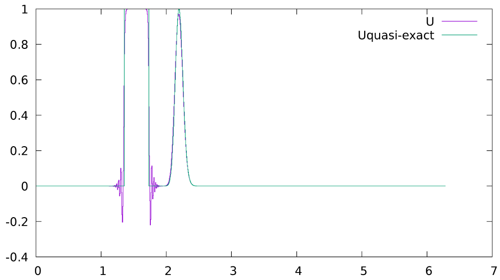


(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$

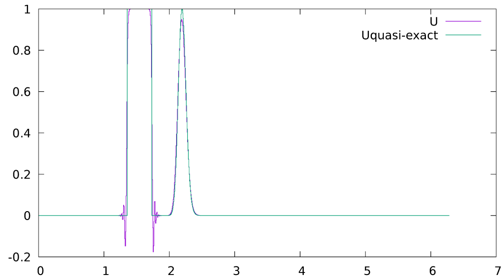


(d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

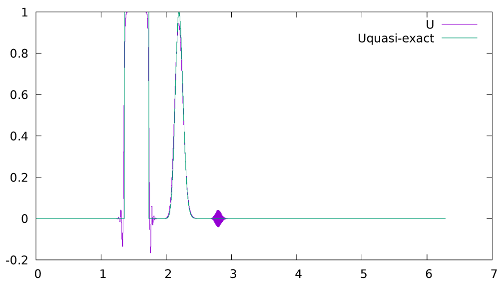
FIGURE 18 – Solutions numériques du schéma explicite avec (S5) pour $N = 1000$ et $\lambda = 0.9$



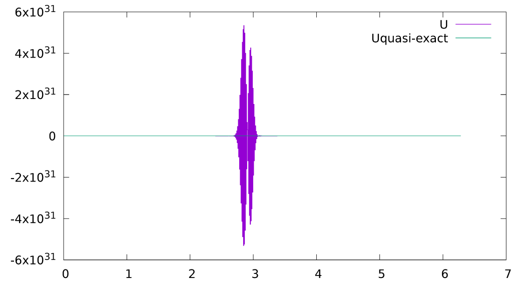
(a) $N = 1000$ et $\alpha = 0.5$



(b) $N = 1000$ et $\alpha = 0.9$



(c) $N = 1000$ et $\alpha = 1$



(d) $N = 1000$ et $\alpha = 1.2$

FIGURE 19 – Solutions numériques du schéma explicite avec (S5) pour $N = 1000$ et $\lambda = 1.2$

On remarque qu'avec (S1) et (S3), le schéma converge vers la solution exacte pour tout α. D'autre part, avec (S5), on peut noter que le schéma est L^2-stable comme ce dernier.

De plus, pour tous les schémas avec (S5), il y a divergence si $\alpha > 1$. On remarque aussi que plus λ se rapproche de 1, plus le schéma est stable. Aussi, plus la valeur de λ augmente, plus α doit être petit afin que le schéma soit stable.

Enfin, pour avoir un schéma convergent optimal, il faut que $\alpha = 1$ et $\lambda = 1$.

Conclusion

Ainsi, grâce à cette étude sur la méthode des différences finies, nous avons pu constater que son utilisation pouvait être profitable mais dans certains cas, celle-ci n'était pas adaptée. Par exemple, pour le schéma (S1), celle-ci converge uniquement avec une donnée initiale discontinue et avec $c < 0$. Cela signifie donc que des conditions doivent être auparavant définies afin d'assurer la convergence. Ensuite, lors de l'analyse numérique, nous avons mis en lumière l'importance des facteurs α et N qui devaient être choisis astucieusement pour assurer la convergence. Nous pouvons alors dire que la méthode des différences finies est une méthode très puissante de résolution d'équations aux dérivées partielles mais qui n'offrira pas une précision satisfaisante. Dans le cas d'un problème plus complexe, il serait intéressant d'étudier la méthode des éléments finis qui offre de meilleurs résultats.

Annexes

Code Fortran du fichier 'fcts.f' pour la partie du cas général :

```
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      FUNCTION u0(x)
      IMPLICIT NONE
      DOUBLE PRECISION u0,x

      u0=0.0d0
      if ((x.gt.1.).and.(x.lt.2.)) u0=1.
      u0=u0+dexp(-50*(x-3.)**2)
      RETURN
      END
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      FUNCTION uex(t,x)
      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'common.inc'

      DOUBLE PRECISION t,uex,x,u0
      EXTERNAL U0

      UEX = U0(X-C*T)
      RETURN
      END
```

Code Fortran du fichier 'main.f' pour la partie du cas général :

```
      PROGRAM transport
c Resolution de l'equation de transport sur [0,L]
c avec des conditions aux limites periodiques

      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'common.inc'
C     Declaration
      DOUBLE PRECISION deltax,deltat
      DOUBLE PRECISION Tf,t,CFL,L
      DOUBLE PRECISION u(1100),uold(1100)
      DOUBLE PRECISION x(1100)
      INTEGER CPT

      open(1,file='trace.plt')
C UNE FOIS LE CALCUL TERMINE, LANCER GNUPLOT PUIS LA COMMANDE
C load 'trace.plt' pour visualiser la solution en temps

      t = 0.0d0
      Tf= 5.0d0
      c = 1.0d0

      n = 500
      cfl = 0.5d0
      L = 10.0d0
```

```
      deltax = L/dble(n+1)

      cpt = 0

c Initialisation
      call init(x,uold,deltax)

      DO WHILE (t .LT. Tf)
c Ecriture des donnees en temps dans data/tmp.numero
         CALL ecrit(x,uold,t,cpt)
         cpt = cpt+1

c Calcul du pas de temps
         deltat = cfl*deltax/abs(c)
         if (t+deltat.ge.Tf) deltat = Tf-t
         print*,'t = ', t

c Calcul de la solution a l'instant t_{n+1}
         CALL calcul_u(u,uold,deltax,deltat)

c Mise a jour des conditions aux limites
c        a l'aval
         u(N+2) = u(N+1)

```

```
c MAJ de uold
          uold = u
       ENDDO

       close(1)
       stop 'Execution avec succes!!!'
       end program
```

Code Fortran du fichier 'subrouts.f' pour la partie du cas général :

```
       SUBROUTINE  init(x,u,dx)
       IMPLICIT NONE
       INCLUDE 'common.inc'
       DOUBLE PRECISION x(*),u(*),dx
       INTEGER i
       DOUBLE PRECISION U0
       EXTERNAL U0
C
       DO i=1,n+2
          x(i)=(i-1.0d0)*dx
          u(i)=u0(x(i))
       ENDDO
       RETURN
       END
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
       SUBROUTINE  calcul_u(u,uold,dx,dt)
```

```
      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'common.inc'
      DOUBLE PRECISION u(*),uold(*),dx,dt
      DOUBLE PRECISION phi
      INTEGER i
C
      phi = c**2.0d0*dt/2.0d0
      phi=1.2*phi
      DO i=2,n+1
        u(i)=uold(i)-(c*dt/dx)*(uold(i+1)-uold(i)) !S1
c u(i) = uold(i) - c*dt/(2.0d0*dx)*(uold(i+1)-uold(i-1))  !S2
c u(i) = uold(i)-(c*dt/dx)*(uold(i)-uold(i-1))   !S3
c u(i)=-(c*dt/dx)*(uold(i)-uold(i-1))     !S4
c u(i)=uold(i)-c*dt/(dx*2)*(uold(i+1)-uold(i-1))+
c & (c*dt/dx)**2/2*(uold(i+1)-2*uold(i)+uold(i-1)) !S5
c u(i) = u(i) + phi*(uold(i+1) - 2.0d0*uold(i)
c &+ uold(i-1))*dt/dx**2.0d0 !S2 modifie
      ENDDO
      RETURN
      END
```

Code Fortran du fichier 'fcts.f' pour la partie du cas particulier :

```
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      FUNCTION u0(x)
      IMPLICIT NONE
```

```
      DOUBLE PRECISION u0,x

      u0=0.0d0
      if ((x.gt.1.).and.(x.lt.2.)) u0=1.
      u0=u0+dexp(-50*(x-3.)**2) ! on ajoute la gaussienne
      RETURN
      END
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      FUNCTION uex(t,x)
      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'common.inc'

      DOUBLE PRECISION t,uex,GX(100),u0,ds,x
      INTEGER k,M
      EXTERNAL U0

      ds=t/100
      GX(100)=x
      DO k=99,1,-1
        GX(k)=GX(k+1)-ds*dcos(GX(k+1))
      ENDDO

      UEX = U0(GX(1))
      RETURN
```

```
      END
```

Code Fortran du fichier 'main.f' pour la partie du cas particulier :

```
      PROGRAM transport
c Resolution de l'equation de transport sur [0,L]
c avec des conditions aux limites periodiques

      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'common.inc'
C     Declaration
      DOUBLE PRECISION deltax,deltat
      DOUBLE PRECISION Tf,t,CFL,L
      DOUBLE PRECISION u(1100),uold(1100)
      DOUBLE PRECISION x(1100)
      INTEGER CPT

      open(1,file='trace.plt')
C UNE FOIS LE CALCUL TERMINE, LANCER GNUPLOT PUIS LA COMMANDE
C load 'trace.plt' pour visualiser la solution en temps

      t = 0.0d0
      Tf= 5.0d0
      c = 1.0d0

      n = 500
```

```
      cfl = 0.9d0
      L = 10.0d0
      deltax = L/dble(n+1)

      cpt = 0

c Initialisation
      call init(x,uold,deltax)

      DO WHILE (t .LT. Tf)
c Ecriture des donnees en temps dans data/tmp.numero
         CALL ecrit(x,uold,t,cpt)
         cpt = cpt+1

c Calcul du pas de temps
         deltat = cfl*deltax/abs(c)
         if (t+deltat.ge.Tf) deltat = Tf-t
         t =t + deltat
         print*,'t = ', t

c Calcul de la solution a l'instant t_{n+1}
         CALL calcul_u(u,uold,deltax,deltat,x)

c Mise a jour des conditions aux limites
```

```
c        a l'aval
         u(N+2) = u(N+1)

c MAJ de uold
         uold = u
      ENDDO

      close(1)
      stop 'Execution avec succes!!!'
      end program
```

Code Fortran du fichier 'subrouts.f' pour la partie du cas particulier :

```
      SUBROUTINE  init(x,u,dx)
      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'common.inc'
      DOUBLE PRECISION x(*),u(*),dx
      INTEGER i
      DOUBLE PRECISION U0
      EXTERNAL U0
C
      DO i=1,n+2
         x(i)=(i-1.0d0)*dx
         u(i)=u0(x(i))
      ENDDO
      RETURN
```

```
      END
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      SUBROUTINE  calcul_u(u,uold,dx,dt,x)
      IMPLICIT NONE
      INCLUDE 'common.inc'
      DOUBLE PRECISION u(*),uold(*),dx,dt,x(*),tmp
      DOUBLE PRECISION phi
      INTEGER i
      phi = c**2.0d0*dt/2.0d0
      phi=1.2*phi
      DO i=2,n+1
        c=cos(x(i))
c             if (c>0) then
c                  tmp = uold(i)-uold(i-1)
c             else
c                  tmp = uold(i+1)-uold(i)
c             endif
c          u(i) = uold(i) - c*dt/dx*tmp
         u(i)=uold(i)-c*dt/(dx*2)*(uold(i+1)-uold(i-1))
     &+(c*dt/dx)**2/2*(uold(i+1)-2*uold(i)+uold(i-1))
      ENDDO
      RETURN
      END
```

Bibliographie

[1] Mehmet Ersoy http ://ersoy.univ-tln.fr