دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی و علم مواد

آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد

آزمایش شماره 3 :

آزمایش خمش

نگارش :

پیام مرادی بانیارانی

98107728

گروه :

دوشنبه ساعت 13:30 تا 16:30

اساتید :

دکتر سیامک سراج زاده

مهندس جعفر مهدی اخگر

تاریخ انجام آزمایش :

1401/01/15

عنوان آزمایش: آزمایش خمش

با درنظر گرفتن فرضیات زیر چگونگی خمش کشسان تیر در این آزمایش مورد بررسی واقع می شود.

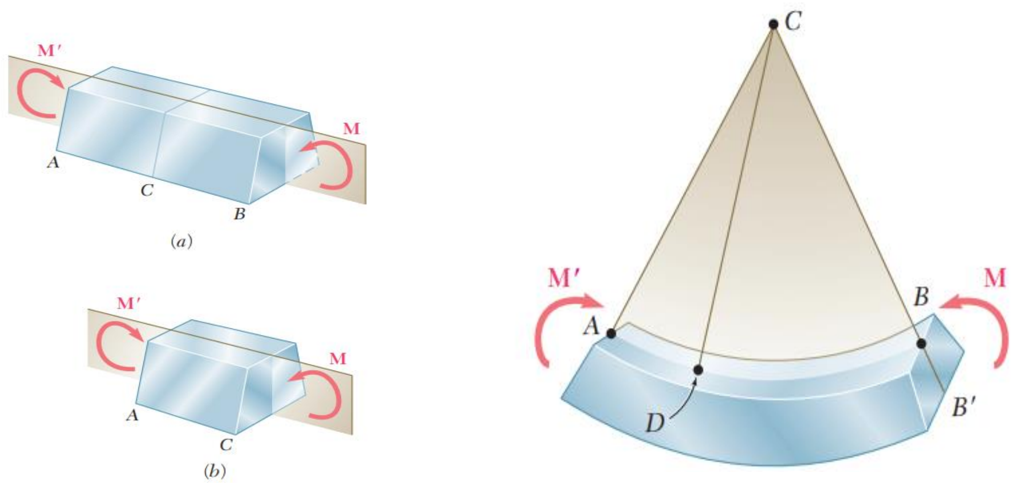
۱- مقاطع صفحه ای تیر به صورت صفحه باقی می ماند.

۲- جسم بصورت همگن بوده و از قانون هوک پیروی می کند.

۳- تیر در ابتدا مستقیم بوده و دارای سطح مقطع یکسان است.

۴- مدول کشسان در فشار و کشش یکسان است.

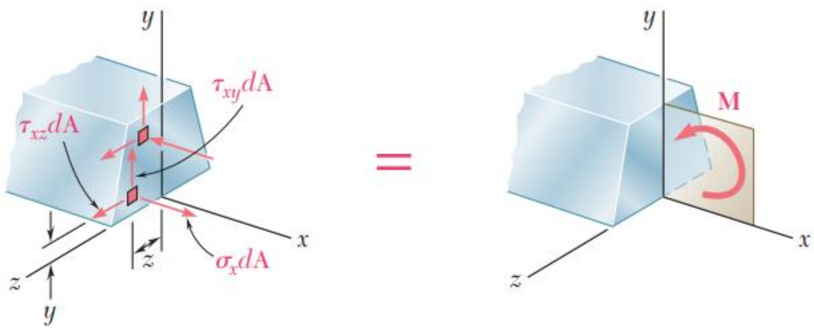
۵- صفحه باردهی شامل یک محور اصلی از مقطع تیر می باشد و بار اعمالی عمود بر محور طول تیر وارد می شود.



شکل 1.1 قبل و بعد از اعمال نیروی خمشی بر روی تیر

همان طور که در شکل بالا مشخص است، قرار است به تیری با سطح مقطع مشخص نیرویی وارد شود که باعث خم شدن تیر می شود

در شکل زیر نمایی از آنچه که بر سطح مقطع تیر اتفاق می افتد نشان داده شده است.



شکل 1.2 نیروی های وارده بر سطح مقطع تیر

همانطور که از علم استاتیک می دانیم، ممان نتیجه دو نیروی مخالف هم می باشد و برای آنکه ما صرفاً خمش را در جهت y داشته باشیم باید جمع نیروها در جهات دیگر صفر شود. از طرفی جسم از جای خود حرکت نمی کند و نیروی $\sigma_x dA$ در راستای محور x باید صفر شود.

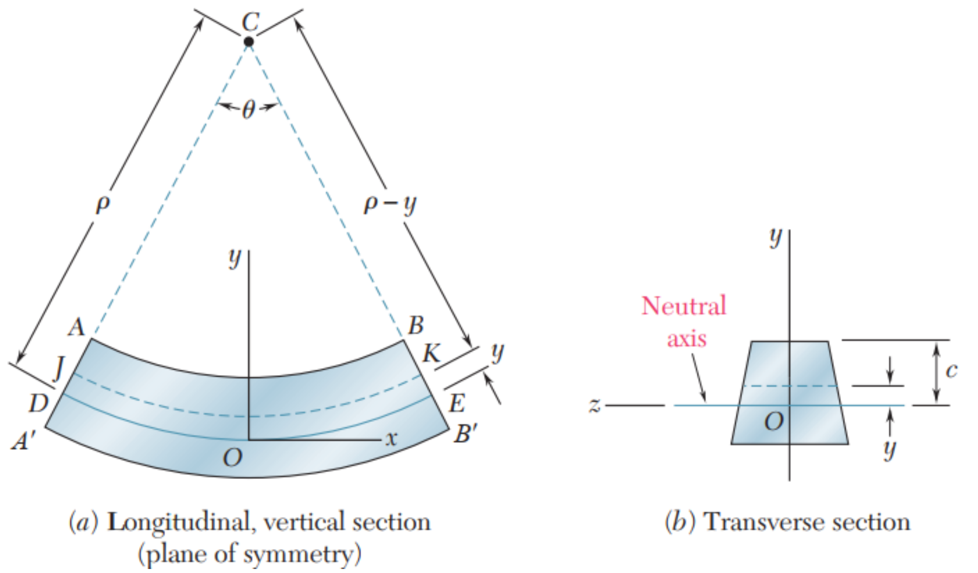
در جهت محور x : $\int \sigma_x \, dA = 0$ (1-1)

از طرفی همانطور که اشاره شد، ممان در راستاهای دیگر باید صفر شود. پس ممان حول محور y باید صفر شود.

ممان حول محور y : $\int z \, \sigma_x \, dA = 0$ (1-2)

اما همانطور که می توان از شکل فهمید ممان در راستای محور z یا ممان حول محور z دیگر صفر نیست و برابر با M می باشد. پس

ممان حول محور z : $\int (-y \, \sigma_x \, dA) = M$ (1-3)



شکل 1.3 نمایش سطح مقطع تیر و تیر خم شده به همراه اسم گذاری مکان های مختلف تیر

همانطور که در تصویر بالا مشاهده می‌کنیم، در اثر اعمال نیروی خمشی، کنش در صفحات مختلف تیر متفاوت می‌باشد به گونه‌ای که ما در کف این تیر بیشترین کنش کششی و در داخل خم تیر، بیشترین کنش فشاری را شاهد هستیم. حال در ادامه قصد داریم که کنش‌های به وجود آمده از اعمال نیروی خمشی را در هر نقطه یا صفحه‌ای از صفحات تیر را بدست بیاوریم.

ابتدا به این نکته باید توجه کنیم که بین بیشترین کنش کششی و بیشترین کنش فشاری، صفحه‌ای وجود دارد که هیچ کنشی به آن اعمال نمی‌شود، به این صفحه، صفحه خنثی می‌گوییم. در شکل بالا صفحه DE صفحه خنثی ما می‌باشد. در ادامه قصد داریم کنشی که به صفحه JK وارد می‌شود را محاسبه کنیم.

هنگامی که تیر خم می‌شود، یک شعاع انحنایی در آن به وجود می‌آید که مرکز این انحنا در شکل نقطه C می‌باشد.

طول صفحه خنثی (DE) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L = \rho\theta \qquad (1-4)$$

که در آن L همان طول DE و ρ شعاع کمان DE می‌باشد.

حال طول کمان JK که با کمان DE فاصله y دارد را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$L' = (\rho - y)\theta \qquad (1-5)$$

از آنجایی که قبل از خم کردن تیر طول کمان JK با DE یکسان بوده و حالا بعد از خم کردن متفاوت است، این اختلاف را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\delta = L' - L \qquad (1-6)$$

حال با جایگذاری روابط (1-4)، (1-5) در رابطه (1-6) خواهیم داشت:

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \qquad (1-7)$$

حال اگر δ را بر طول اولیه JK که همان طول DE است تقسیم کنیم کرنش را خواهیم داشت، کرنش در راستای طولی را، کرنش طولی می‌نامیم و داریم:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \Longrightarrow \boxed{\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}} \qquad (1-8)$$

علامت منفی در رابطهٔ (8-1) به این خاطر است که ما جهت نشان داده شده خمان را مثبت در نظر گرفتیم پس صفحه ای که در بالای صفحهٔ خنثی باشد دچار فشار و در نتیجه کم شدن طول و یا منفی شدن کرنش می شود.

با توجه به فرضی که در ابتدای بحث انجام دادیم، فرض شمارهٔ 1، که در آن مقاطع صفحه‌ای تیر، به صورت صفحه باقی می ماند پس تغییر شکل یکسانی در همهٔ صفحات موازی با صفحهٔ تقارن خواهیم داشت. بنابراین بنابراین رابطهٔ (8-1) در همه جا صادق می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که کرنش نرمال طولی (ϵ_x) به صورت خطی با فاصله گرفتن از صفحهٔ خنثی تغییر می کند.

ϵ_x زمانی به ماکسیمم خود می رسد که y یعنی فاصلهٔ صفحهٔ خنثی از صفحه‌ای که ما قصد اندازه گیری کنش در آن را داریم به بیشترین مقدار خود برسد. پس بیشترین فاصله از صفحهٔ خنثی مربوط به صفحات انتهایی خم، بیرونی ترین لایهٔ خم و درونی ترین لایهٔ خم می باشد. اگر این فاصله را با c نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \qquad (1-9)$$

که در رابطهٔ بالا ϵ_m، بیشترین کرنش ممکن را نشان می دهد.

حال با جایگذاری ρ از رابطهٔ بالا در رابطهٔ (8-1) خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{-y}{\rho} \\ \rho &= \frac{c}{\epsilon_m} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\epsilon_x = \frac{-y}{c}\,\epsilon_m} \qquad (1-10)$$

حال قصد ما استفاده از رابطهٔ (10-1) در قانون هوک می باشد چرا که قصد ما از این آزمایش خمش الاستیک است. با توجه به رابطهٔ هوک و رابطهٔ (10-1) داریم:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E\,\epsilon_x \\ E\,\epsilon_x &= \frac{-y}{c}\,(E\,\epsilon_m) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sigma_x = \frac{-y}{c}\,\sigma_m \qquad (1-11)$$

با توجه به رابطهٔ (11-1) می توان دید که تنش نرمال، با فاصله گرفتن از صفحهٔ خنثی به طور خطی تغییر می کند. چرا که در این رابطه σ_m و c اعدادی ثابت و فقط y متغیر است.

حال با استفاده از روابطی که در ابتدا به آنها رسیدیم یعنی روابط (1-1)، (2-1) و (3-1) قصد پیدا کردن σ_x از روی ممان وارد به تیر را داریم. با توجه به رابطهٔ (1-1) خواهیم داشت:

$$\int \sigma_x \, dA = \int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0 \qquad (1-12)$$

می‌توان دید که $\int y \, dA = 0$ می‌شود یعنی ممان اول سطح مقطع حول محور خنثی آن باید صفر شود، یا به عبارت دیگر برای عضوی که تحت خمش محض (pure bending) قرار می‌گیرد، تا زمانی که تنش‌ها در محدودهٔ الاستیک باقی بمانند، محور خنثی از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند. برای همین است که ممان آن صفر است. کنار سطح صفر می‌باشد.

حال با توجه به رابطهٔ (3-1) خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} &\int (-y \, \sigma_x \, dA) = M \\ &\int (-y)\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = M \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma_m}{c}\int y^2 \, dA = M \qquad (1-13)$$

همانطور که می‌بینیم $\int y^2 dA$ نمایانگر ممان اینرسی و یا همان ممان دوم سطح مقطع می‌باشد.

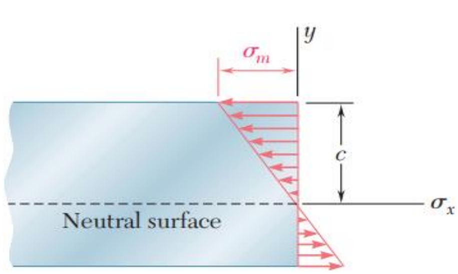
پس داریم:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \qquad (1-14)$$

با جایگذاری کردن رابطهٔ (14-1) در رابطهٔ (11-1) خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_m = \frac{Mc}{I} \\ &\sigma_x = \frac{-y}{c}\sigma_m \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}} \qquad (1-15)$$

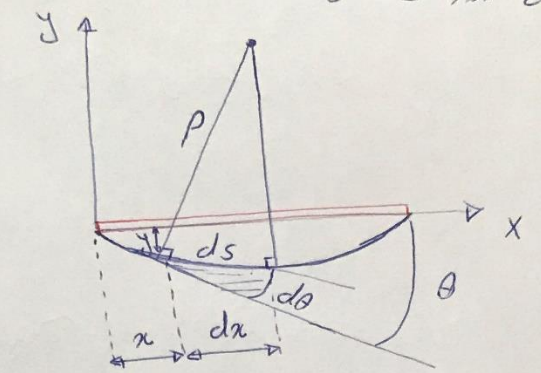
در رابطهٔ بالا به σ_x که حاصل از خمش و خم کردن تیر است به آن «flexural stress» می‌گویند. حال اگر تنش فشاری باشد یعنی $\sigma_x < 0$ پس $y > 0$ یعنی بالاتر از محور خنثی اگر جهت M که در شکل نشان داده شده است را مثبت در نظر بگیریم. و همینطور که $\sigma_x > 0$ یعنی به نواحی پشت تر محور خنثی می‌رویم.



شکل 1.4 نمایش توزیع تنش نرمال

روش انتگرال گیری دوبل و تعیین تغییر مکان خمشی (خیز)

در شکل زیر مقطع تغییر مکان خمشی یک تیر نشان داده شده است که انحنای کشسان نامیده می‌شود



شکل 1.5 . تغییر مکان خمشی یک تیر

قصد داریم مکان خمشی y در فاصله x را بدست بیاوریم.

فرض بر این است که مقدار انحنا کوچک بوده لذا انحناء کشسان دارای شیب خیلی کم می‌باشد. بنابراین شیب برابر است با $tg\theta = \frac{d\theta}{dx}$ وچون θ خیلی کوچک است، با در نظر گرفتن خطای کم می‌توان نوشت:

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad , \quad d\theta = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1-16)$$

حال اگر تغییرات θ برای مقدار طول ds که در اثر خمش تیر می‌باشد، نوشته شود. خواهیم داشت:

$$ds = \rho . d\theta \qquad (1-17)$$

ρ شعاع انحنای قوس به طول ds می‌باشد چون انحناء کم در نظر گرفته شده ds عملاً برابر dx است

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \simeq \frac{d\theta}{dx} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}} \qquad (1-18)$$

$$\left.\begin{array}{l} \epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \\ \sigma_x = E\,\epsilon_x \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{Ey}{\rho} = \frac{-My}{I} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}}$$

از ریاضیات برای شعاع انحنا داریم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{d^2y}{d^2x}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (1-19)$$

چون $\frac{dy}{dx}$ مقدار کوچکی است، می‌توان در مقایسه با 1 از آن صرف نظر کرد.

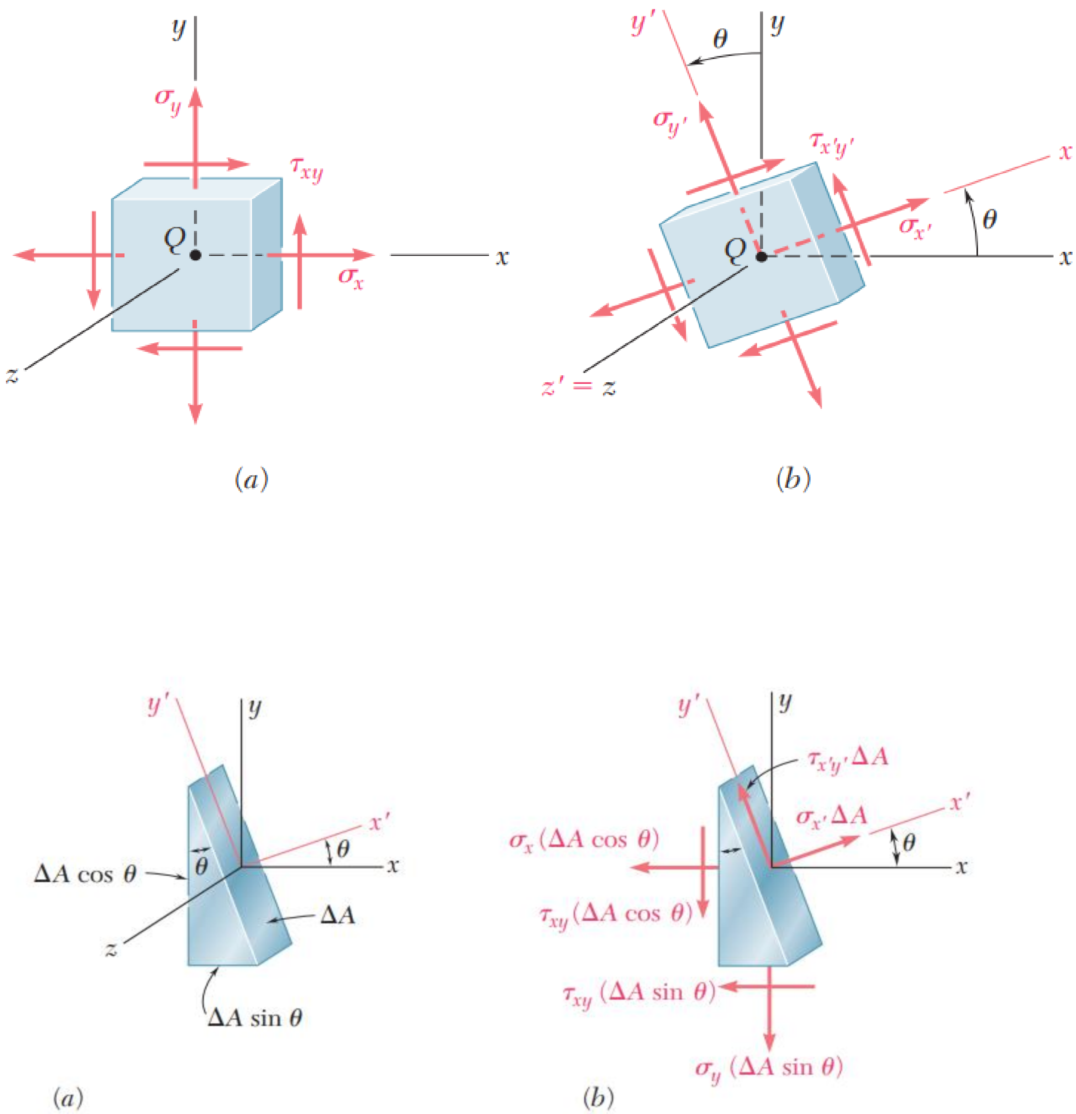
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E.I} \Longrightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad (1-20)$$

در این روابط M مقدار ممان برحسب x می باشد

$$EI\frac{dy}{dx} = Mx + C_1 \qquad (1-21)$$

$$EIy = \frac{M}{2}x^2 + C_1x + C_2 \qquad (1-22)$$

C_1 و C_2 ثوابتی هستند که برحسب شرایط باردهی مشخص می شوند



شکل 1.6 تجزیه نیرو ها

تنش صفحه‌ای :

با توجه به شکل بالا داریم :

$$\Sigma F_{x'} = 0 : \quad \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos\theta)\sin\theta - \sigma_y (\Delta A \sin\theta)\sin\theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin\theta)\cos\theta = 0 \qquad (1\text{-}23)$$

$$\Sigma F_{y'} = 0 : \quad \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos\theta)\sin\theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos\theta)\cos\theta - \sigma_y (\Delta A \sin\theta)\cos\theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin\theta)\sin\theta = 0 \qquad (1\text{-}24)$$

با حل معادلهٔ رابطهٔ (1-23) و تولید $\sigma_{x'}$ ، و با حل معادلهٔ رابطهٔ (1-24) ، $\tau_{x'y'}$ را بدست بیاوریم.

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \qquad (1\text{-}25)$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad (1\text{-}26)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta , & \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} , & \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{array}}$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1-\cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

or

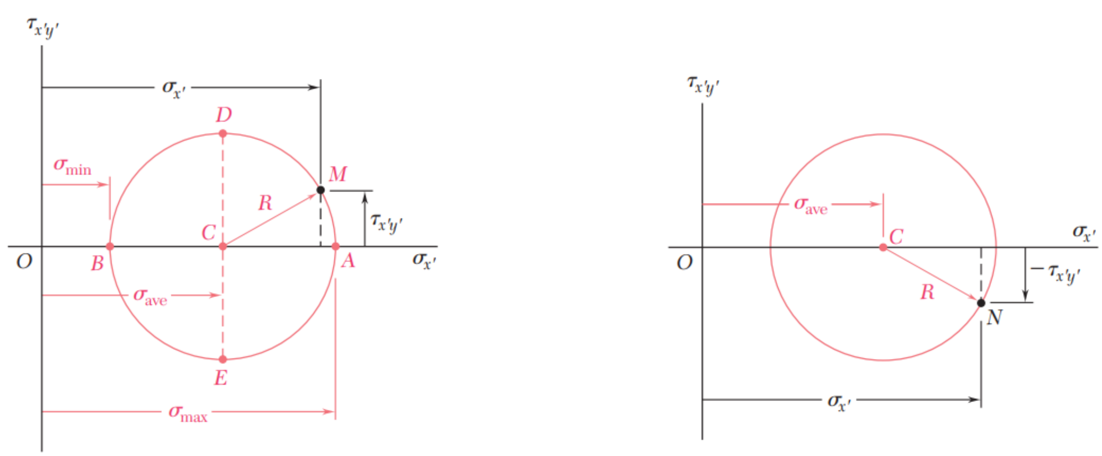
$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \qquad (1\text{-}27)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (1\text{-}28)$$

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (1-29)$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad , \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\left(\sigma_{x'} - \sigma_{ave}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \qquad (1-30)$$



شکل 1.7 دایره مور

برای بدست آوردن کرنش اصلی به وسیله کرنش سنج از دایره مور استفاده می شود. برای اینکار فرض می کنیم که سه کرنش سنج روی صفحه‌ای به طور دلخواه با زاویه α و β نسبت به یکدیگر در جهات oa ، ob ، oc قرار گرفته و به ازای یک سیستم کرنش اعمالی این سه کرنش سنج مقدار کرنشهای ε_a ، ε_b ، ε_c را نشان می دهند. دایره مور به روش زیر رسم می شود:

1) دو محور عمود بر هم xx' و $\frac{\gamma}{2}$ را به طور دلخواه رسم کرده و سه خط به موازات $\frac{\gamma}{2}$ و به فاصله ε_a ، ε_b و ε_c از آن رسم می کنیم.

2) از یک نقطه دلخواه مثل D روی خط bb خطی رسم می کنیم که با bb زاویه α بسازد و از همان نقطه خط دیگری که با آن زاویه β بسازد نیز رسم می شود. (زوایای α و β در همان جهتی هستند که بین کرنش سنجها وجود دارد.) نقطه تقاطع خط اولی را با محور aa نقطه A و محل برخورد خط دوم با محور cc را نقطه C می نامیم.

3) از سه نقطه D ، A ، C حاصله، یک دایره رسم می کنیم. این دایره، دایره مور است.

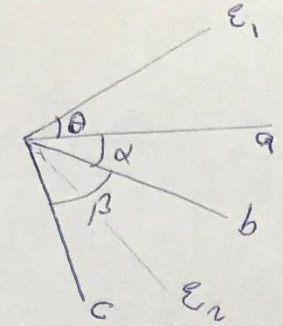
4) از مرکز دایره خطی عمود بر محور $\frac{\gamma}{2}$ رسم کنید. این خط محور ε است.

5) نقاط D ، A ، C مقادیر $\frac{\gamma}{2}$ و ε را برای سه کرنش سنج نشان می دهد. (در سیستم جدید $\varepsilon - \frac{\gamma}{2}$)

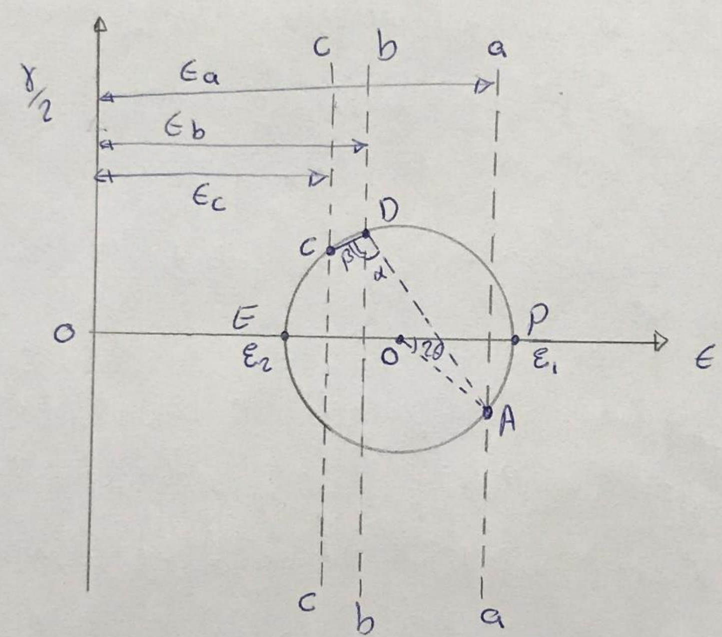
6) میزان کرنش های اصلی از محل برخورد دایره مور با محور جدید (محور ε) بدست می آید.

زاویه ε_1 با کرنش سنج (a) نصف زاویه AOP در دایره مور است ($AOP = 2\theta$)

نقاط E ، P مشخص کننده کرنشهای اصلی هستند.

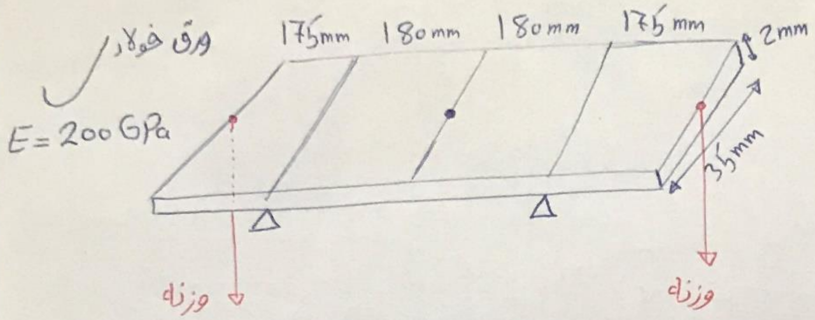


شکل (1.8): طرح واره موقعیت کرنش سنجها نسبت به کرنشهای اصلی



شکل (1.9) شماتیک ترسیم دایره مور

خواسته شماره ۱ :



الف)

$$\sigma = E\varepsilon$$

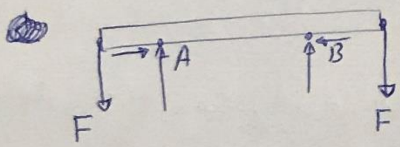
m وزنه (گرم)	ε	
248	83×10^{-6}	$\longrightarrow \sigma = 200\times10^{9}\times83\times10^{-6} = 16.6\,MPa$
523	242×10^{-6}	$\longrightarrow \sigma = 200\times10^{9}\times242\times10^{-6} = 48.4\,MPa$
725	317×10^{-6}	$\longrightarrow \sigma = 200\times10^{9}\times317\times10^{-6} = 63.4\,MPa$

ب)

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$I = \frac{1}{12}bt^3 = \frac{1}{12}\times35\times2^3 = 23.33\,(mm)^4$$

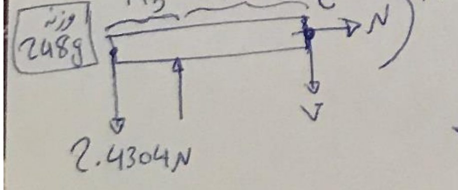
$$y = 1\,mm$$



$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x = B_x \\ \Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y + B_y = 2F \\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \quad F(175) + 360(B_y) - 535(F) = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = F}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$A_y + B_y = 2F \Rightarrow \boxed{A_y = 2F - F = F}$$

حال برای وزنه‌های مختلف M ها را بدست می‌آوریم.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$$

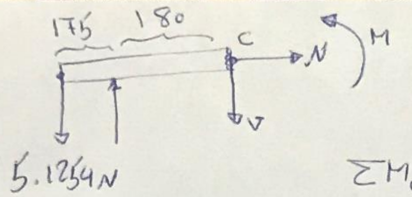
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2.4304 - 2.4304 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V=0}$$

$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M + 2.4304(\cancel{180} + 175 - \cancel{180}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M = -425.32\,N.mm}$$

جهت ممان رو برعکس درنظر می‌گیریم و علامت منفی را مثبت می‌کنیم.

وزنه
523g $\Rightarrow$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

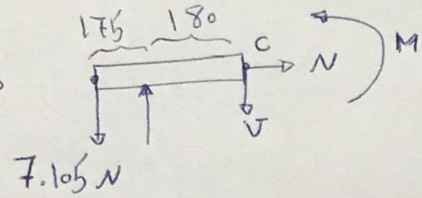
$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5.1254 - 5.1254 - V = 0$

$\Rightarrow \boxed{V=0}$

$\sum M_c = 0 \Rightarrow M + 5.1254\,(175 + \cancel{180} - \cancel{180}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{M = -896.945\ N.mm}$

وزنه
725g $\Rightarrow$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 7.105 - 7.105 - V = 0$

$\Rightarrow \boxed{V=0}$

$\sum M_c = M + 7.105\,(175 + 180 - 180) = 0$

$\boxed{M = -1243.375\ N.mm}$

در تمام موارد با علامت ممان رو برعکس می‌گیریم و بجای علامت منفی از علامت مثبت استفاده می‌کنیم.

$\sigma = \frac{My}{I}$

for 248g $\Rightarrow \sigma = \frac{425.32 \times 1}{23.33} = \boxed{18.23\ MPa}$

for 523g $\Rightarrow \sigma = \frac{896.945 \times 1}{23.33} = \boxed{38.446\ MPa}$

for 725g $\Rightarrow \sigma = \frac{1243.375 \times 1}{23.33} = \boxed{53.295\ MPa}$

همانطور که می‌بینیم مقادیر خوانده شده به وسیله کرنش سنج و استفاده از قانون هوک بیشتر از محاسبات و استفاده از فرمول $\sigma = \frac{My}{I}$ می‌شود. شاید شخصی که کرنش را می‌خواند با خطا این کار را انجام داده.
همچنین هر چقدر که وزنه‌ها بیشتر شده، طبیعتاً به دلیل ایجاد خمش و ممان بیشتر، به تناسب تنش نرمال بیشتری وارد می‌کند.

خواسته شماره 2 :

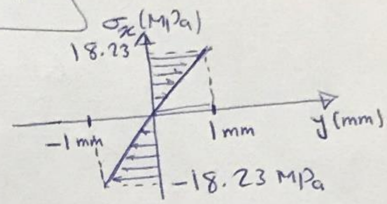
رسم نمودار توزیع تنش نرمال :

$\sigma_x = \frac{+y}{c}\,\sigma_m$

$\sigma_m = E\,\epsilon_m \Rightarrow \epsilon_m = \frac{c}{\rho}$, $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$ $\Rightarrow \sigma_m = \frac{\cancel{E}\,c\,M}{\cancel{E} \cdot I} = \frac{Mc}{I}$

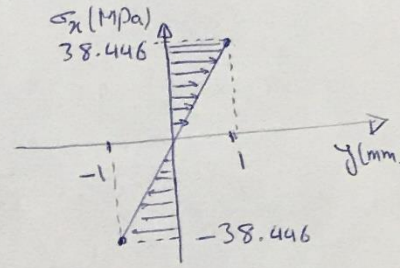
$\boxed{\text{وزنه ۱} \quad 248g}$ $\Longrightarrow$ $248g \times \frac{1kg}{1000g} \times 9.8 = \underline{2.4304\ N}$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_m = \frac{MC}{I} = \frac{M_{max}C}{I} \\ M_{max} = 425.32\ N.mm \\ I = 23.33\ (mm)^4 \\ C = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\sigma_m = 18.23\ MPa}$$



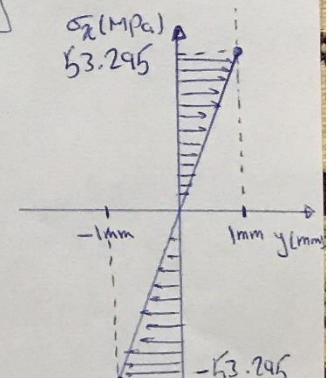
$\boxed{\text{وزنه ۲} \quad 523g :}$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_m = \frac{MC}{I} \\ M_{max} = 896.945\ N.mm \\ I = 23.33\ (mm)^4 \\ C = 1\ mm \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\sigma_m = 38.446\ MPa}$$

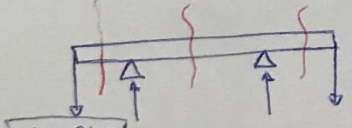


$\boxed{725g \quad \text{وزنه}}$

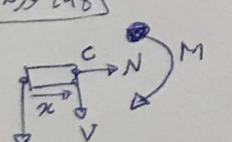
$$\left.\begin{array}{l} \sigma_m = \frac{MC}{I} \\ M_{max} = 1243.375\ N.mm \\ C = 1mm \\ I = 23.33\ (mm)^4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\sigma_m = 53.295\ MPa}$$



۳ برش احتیاج است.



رسم نمودارهای توزیع تنش برشی و ممان خمشی :



$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow \boxed{N = 0}$

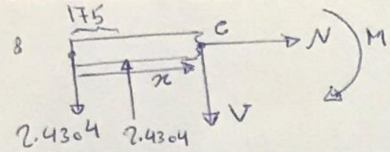
$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow -2.4304 - V = 0 \Longrightarrow \boxed{V = -2.4304}$

$\Sigma M_c = 0 \Longrightarrow M - 2.4304x = 0 \Longrightarrow \boxed{M = 2.4304x}$

$0 \leq x < 175\ mm$

M جهت عقربه‌های ساعت مثبت

برش دوم 8
وزنه 248g



$175_{mm} \leq x < 535\,mm$

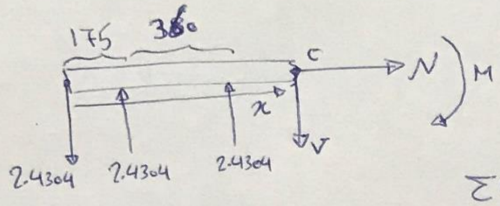
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2.4304 + 2.4304 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V=0}$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M - 2.4304x + (x-175)2.4304 = 0$

$\Rightarrow \boxed{M = 425.32\ N.mm}$

برش سوم 8
وزنه 248g



$535_{mm} \leq x < 710\,mm$

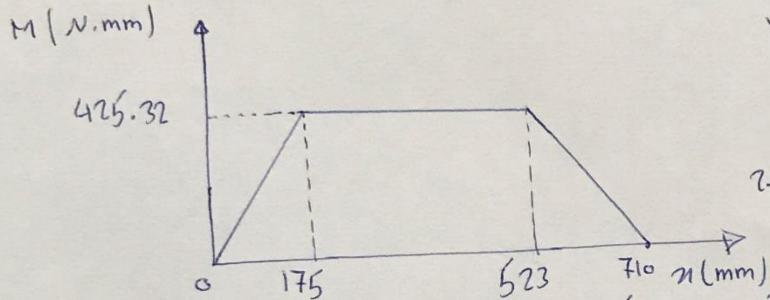
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2.4304 + 2.4304 + 2.4304 - V = 0$

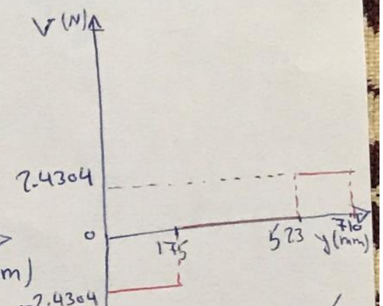
$\Rightarrow \boxed{V = 2.4304}$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M - 2.4304x + (x-535)2.4304 + (x-175)2.4304 = 0$

$\Rightarrow \boxed{M = -2.4304x + 1725.584}$



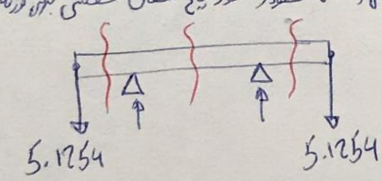
شکل (1-10) نمودار توزیع ممان خمشی برای وزنه 248 گرم



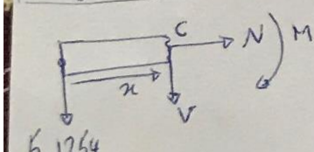
شکل (1.11) نمودار توزیع تنش برشی برای وزنه 248 گرم

3 برش احتیاج داریم

برای وزنه 523g



برش اول
وزنه 523g



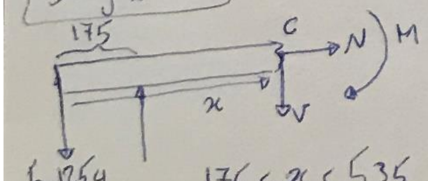
$0 \leq x < 175$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -5.1254 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = -5.1254\,N}$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M - 5.1254x = 0 \Rightarrow \boxed{M = 5.1254x}$

برش دوم
وزنه 523g



$175 \leq x < 535$

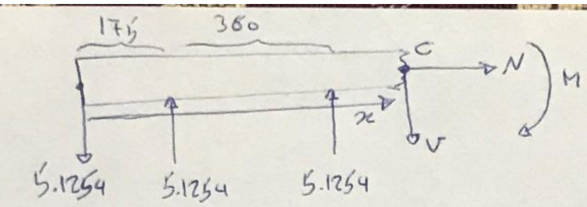
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -5.1254 + 5.1254 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V=0}$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M - 5.1254x + (x-175)5.1254 = 0$

$\Rightarrow \boxed{M = 896.945\ N.mm}$

برش سوم :
وزنه 523g



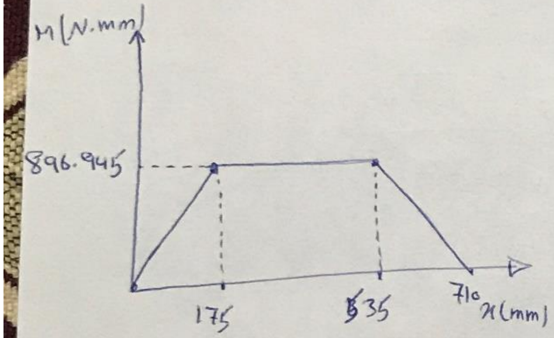
$535 \leq x < 710$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

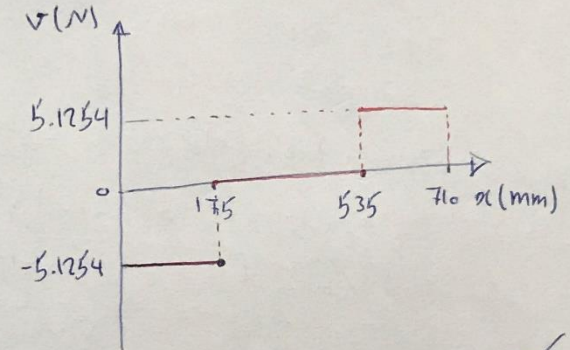
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -5.1254 + 5.1254 + 5.1254 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = 5.1254\,N}$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M - 5.1254x + (x-175)5.1254 + (x-535)5.1254 = 0$

$\Rightarrow \boxed{M = -5.1254 + 2032.964}$

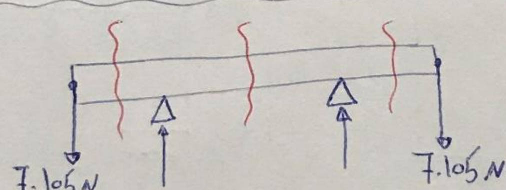


شکل (1.12) نمودار توزیع ممان خمشی برای وزنه 523 گرم



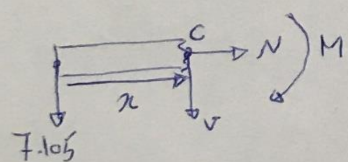
شکل (1.13) نمودار توزیع تنش برشی برای وزنه 523 گرم

برای وزنه 725g



3 تا برش احتیاج داریم

برش اول :
وزنه 725g



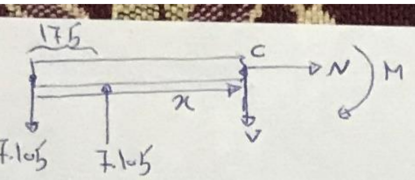
$0 \leq x < 175$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -7.105 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = -7.105\,N}$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M - 7.105x = 0 \Rightarrow \boxed{M = 7.105x}$

برش دوم : وزنه 725g



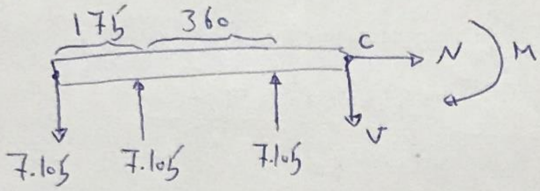
$175 \le x < 535$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -7.105 + 7.105 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V=0}$

$\sum M_c = 0 \Rightarrow M - 7.105x + (x-175)7.105 = 0 \Rightarrow \boxed{M = 1243.375\ N.mm}$

برش سوم : وزنه 725g



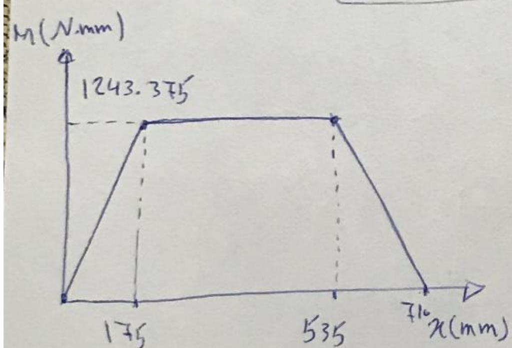
$535 \le x < 710$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

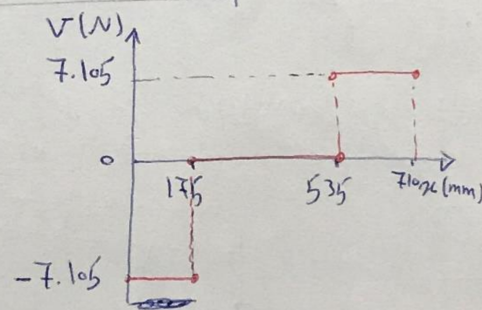
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -7.105 + 7.105 + 7.105 - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = 7.105\ N}$

$\sum M_c = 0 \Rightarrow M - 7.105x + (x-175)7.105 + (x-535)7.105 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{M = -7.105x + 5044.55}$$

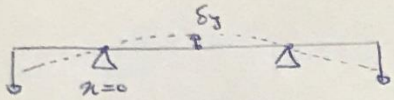


شکل (1.14) نمودار توزیع ممان خمشی برای وزنه 725 گرم



شکل (1.15) نمودار توزیع تنش برشی برای وزنه 725 گرم

خواسته شماره 3 :



$$EIy = \frac{M}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$x=0,\ y=0 \Rightarrow EI(0) = \frac{M}{2}(0)^2 + C_1(0) + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$x=360,\ y=0 \Rightarrow EI(0) = \frac{M}{2}(360)^2 + C_1(360) \Rightarrow \boxed{C_1 = -180M}$$

$$\boxed{EIy = \frac{M}{2}x^2 - 180Mx}$$

برای وزنه 248g :

$$200\times10^9 \frac{N}{m^2} \times 23.33\ (mm)^4 \times y = \frac{425.32\ N.mm}{2}(180\ mm)^2 - 180mm\,(425.32\ N.mm)(180\ mm)$$

$$\Rightarrow \boxed{y \simeq 1.4767\ mm}$$

برای وزنه 523g :

$$200\times10^9 \frac{N}{m^2} \times \frac{1m^2}{10^6 mm^2} \times 23.33\ (mm)^4 \times y = \frac{896.945\ N.mm}{2}(180mm)^2 - 180\ mm\,(896.945\ N.mm)(180mm)$$

$$\Rightarrow \boxed{y \approx 3.114\ mm}$$

برای وزنه 725 g :

$$200\times10^9 \frac{N}{m^2} \times \frac{1m^2}{10^6 mm^2} \times 23.33\ (mm)^4 \times y = \frac{1243.375\ N.mm}{2}(180mm)^2 - 180\,(1243.375)(180mm)$$

$$\Rightarrow \boxed{y \approx 4.3169\ mm}$$

مراجع : کتاب مکانیک مواد بیر – جانسون

جزوه آزمایشگاه خواص مکانیک مواد