UNIDAD Nº II - TEORIA DE CONJUNTOS

DIFERENCIA SIMETRICA

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B se expresa en forma simbólica $A \Delta B$.
Para calcular la diferencia simétrica se utilizan cualquiera de las dos fórmulas.

$$\mathbf{A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)}$$

$$\mathbf{A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)}$$

Volvamos al ejemplo de la fig. 1

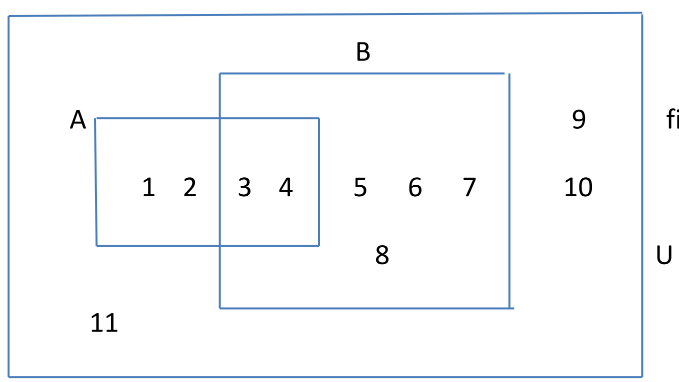


fig. 1

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}$

Calculemos a) $A \Delta B$ b) $B \Delta A$

Para calcular $A \Delta B$ utilizaremos la primera de las fórmulas.

$$\mathbf{A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)}$$

$A - B = \{ 1, 2 \}$

$B - A = \{ 5, 6, 7, 8 \}$ $A \Delta B = \{ 1, 2, 5, 6, 7, 8 \}$

Para calcular $A \,\Delta\, B$ ahora utilizaremos la segunda de las fórmulas.

$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

$A \cap B = \{ 3, 4 \}$

$A \,\Delta\, B = \{ 1, 2, 5, 6, 7, 8 \}$

LEYES DE DE MORGAN

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

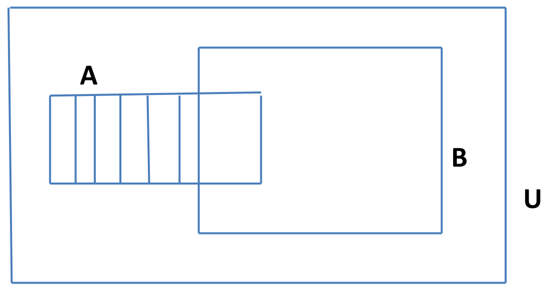
$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{\phi} = U$$

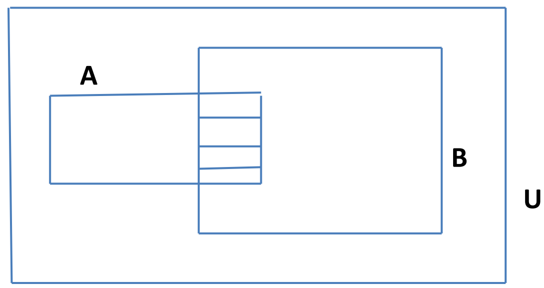
$$\overline{U} = \phi$$

PROBLEMAS DE CONTEO

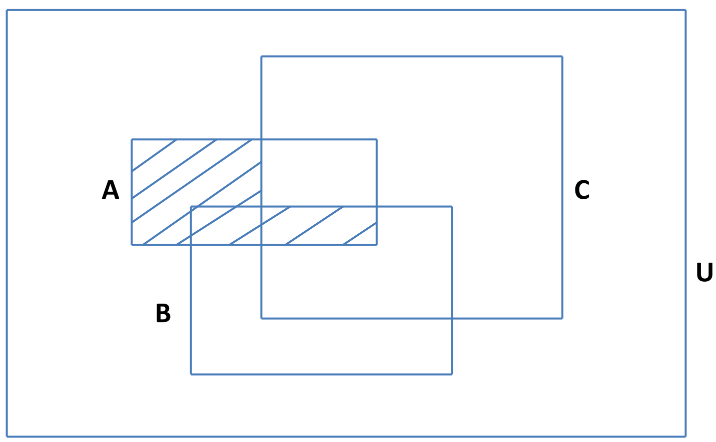
Para resolver los problemas de conteo , una parte muy importante es reconocer y poder escribir en notación conjuntista cada una de las partes de un diagrama.
Por ejemplo



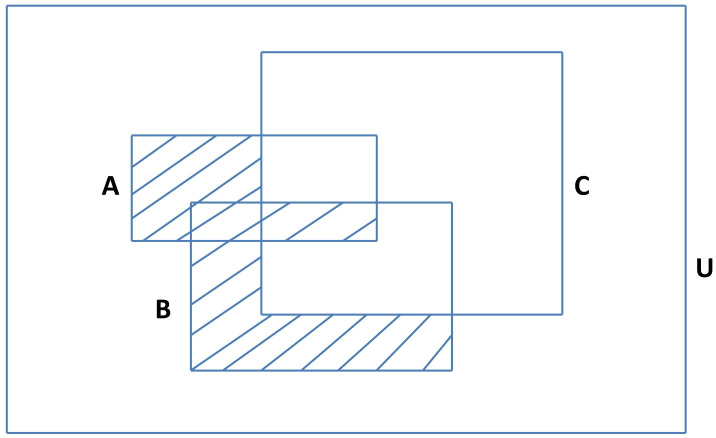
La zona rayada de la fig. se puede expresar como **A $-$ B .**



La zona rayada de la fig. se puede expresar como **A $\cap$ B .**



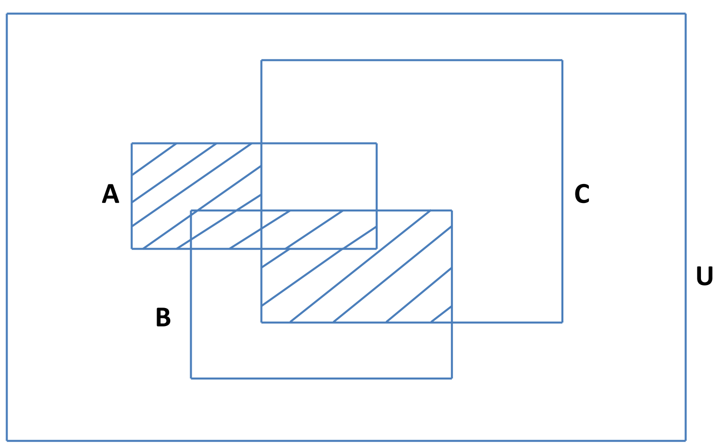
La zona rayada , ahora un poco más compleja la situación , una de las formas en la que se puede expresar es **(A $-$ C) U (A $\cap$ B $\cap$ C) .**



La zona rayada , una de las formas en la que se puede expresar es

$(A - C) \ U \ (B - C) \ U \ (A \cap B \cap C)$

Otra forma de expresar la misma zona podría ser $\left[(A \ U \ B) - C \right] \ U \ (A \cap B \cap C)$

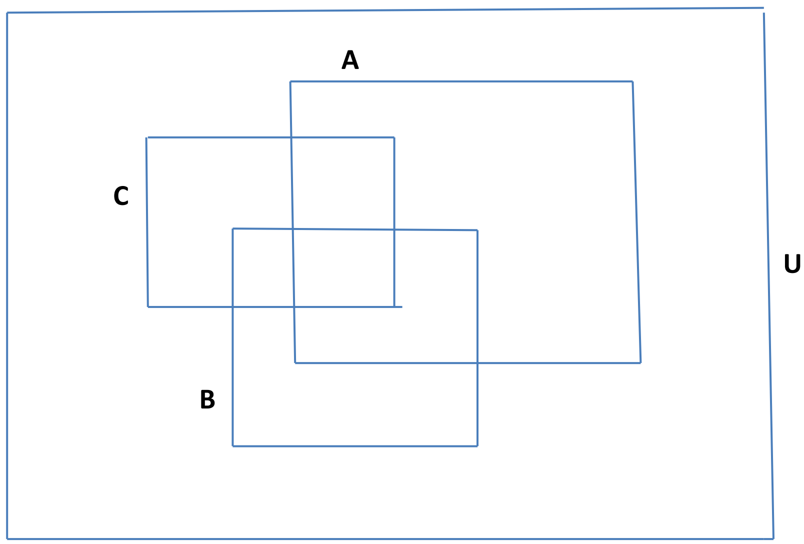


La zona rayada , una de las formas en la que se puede expresar es

$(A - C) \ U \ (B \cap C)$

Muy frecuentemente , no hay una sola manera de expresar una zona en notación conjuntista.

Los problemas de conteo se resuelven analizando el enunciado , leyéndolo un par de veces y lo primero que debemos hacer es identificar la cantidad de conjuntos que hay.
Si hay por ejemplo tres conjuntos , se empieza graficando los conjuntos de la sig. manera.

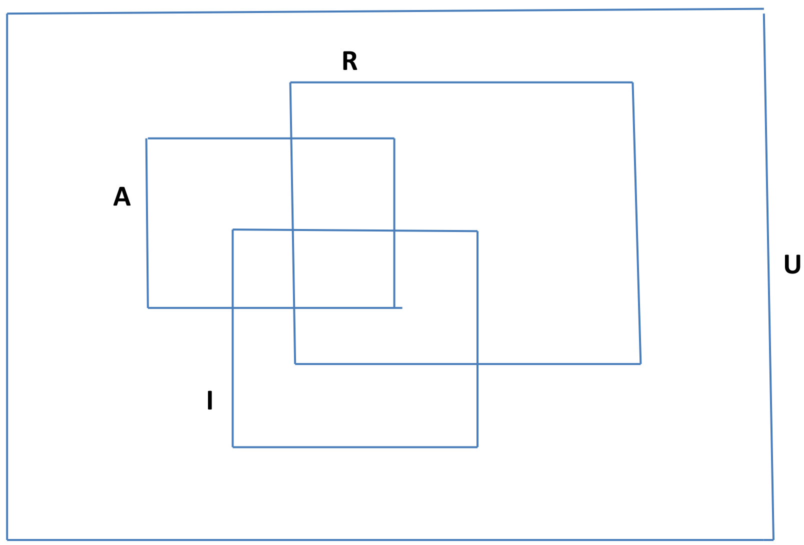


Luego se escriben los datos en forma simbólica en función de los conjuntos definidos.
Luego se ubican en el diagrama los datos que identifiquen una única zona del diagrama.
Las zonas del diagrama que están sin datos se le pone una incógnita.
Con los datos que no se pueden ubicar en el diagrama (porque involucran una zona que no es única) se plantean ecuaciones , se resuelven las mismas , despejando las incógnitas.
Se vuelve a dibujar el diagrama con todos los datos , luego se contestan las preguntas.

Veamos un ejemplo.

A un Instituto de Idiomas concurren 60 alumnos , 15 alumnos estudian solamente ruso , 11 estudian ruso e inglés , 12 estudian solo alemán , 8 estudian ruso y alemán , 10 estudian solo inglés , 5 estudian inglés y alemán , y 3 los tres idiomas.
a) ¿ Cuántos alumnos no estudian ningún idioma ?
b) Cuántos alumnos estudian alemán ?
c) ¿ Cuántos alumnos estudian sólo alemán e inglés ?
d) ¿ Cuántos alumnos estudian ruso ?

Es evidente que en este problema hay tres conjuntos , a saber , R (ruso) , A (alemán) e I (inglés).
Por lo tanto el diagrama sería.



Los datos escritos en forma simbólica son.

$\#\ U = 60$

$\#\ R - (I \cup A) = 15$

$\#\ (R \cap I) = 11$

$\#\ A - (R \cup I) = 12$

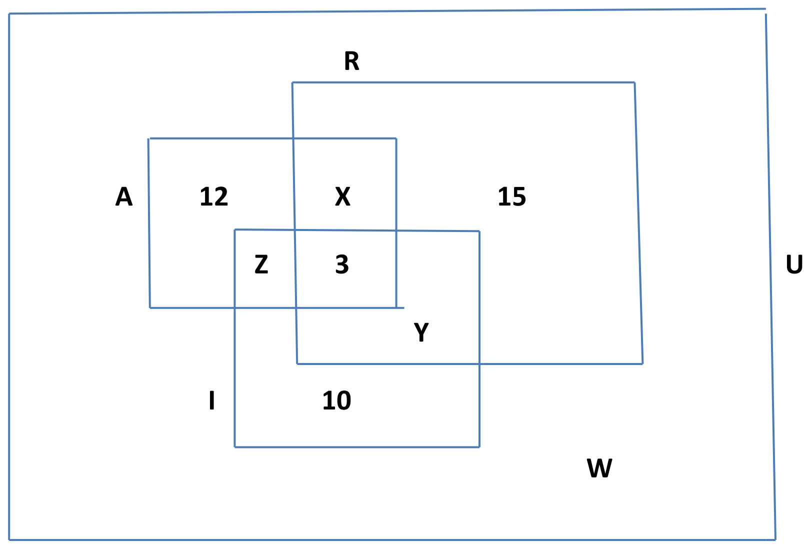
$\#\ (R \cap A) = 8$

$\#\ I - (R \cup A) = 10$

$\#\ (I \cap A) = 5$

$\#\ (R \cap I \cap A) = 3$

El dato $\#\ U = 60$ no se puede ubicar en el diagrama , pues lo que indica es que la cantidad total de elementos de ese conjunto es 60 , pero lo que no sabemos es como se compone la suma para llegar a 60.
El segundo dato si se puede ubicar , pues me dice que hay 15 alumnos que estudian ruso solamente y eso se puede ubicar en una única zona del diagrama.



Siguiendo con el mismo razonamiento el cuarto dato también se puede ubicar , pues los que hablan alemán **solamente ,** están en una única zona del diagrama.
Lo mismo pasa con el sexto dato , los que hablan inglés solamente son 10 , y con el último dato , 3 hablan los 3 idiomas.
En todas las otras zonas del diagrama que no tienen datos van incógnitas.
Ahora planteamos las ecuaciones con los datos que no se pudieron ubicar en el diagrama.

a) $12 + X + 15 + Z + 3 + Y + 10 + W = 60$

b) $3 + Y = 11 \quad \Rightarrow \quad Y = 11 - 3 \quad Y = 8$

c) $X + 3 = 8 \quad \Rightarrow \quad X = 8 - 3 \quad X = 5$

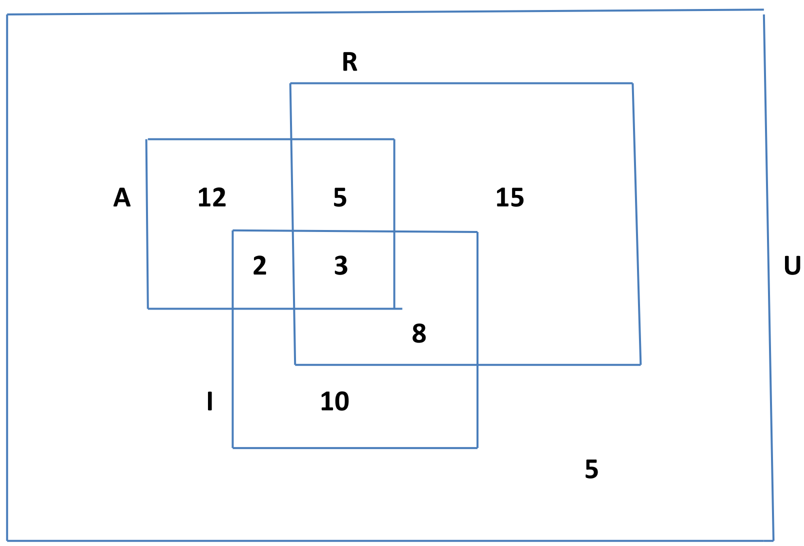
d) $Z + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad Z = 5 - 3 \quad Z = 2$

Reemplazamos estos valores en la primera ecuación.

$12 + 5 + + 15 + 2 + 3 + 8 + 10 + W = 60$

$55 + W = 60 \qquad W = 60 - 55 \qquad W = 5$

Ahora volvemos a realizar el gráfico y volcamos todos los valores de las incógnitas halladas.



Ahora estamos en condiciones de contestar todas las preguntas.

a) ¿ Cuántos alumnos no estudian ningún idioma ?

RTA : 5

b) Cuántos alumnos estudian alemán ?

RTA : 22

c) ¿ Cuántos alumnos estudian sólo alemán e inglés ?

RTA : 2

d) ¿ Cuántos alumnos estudian ruso ?

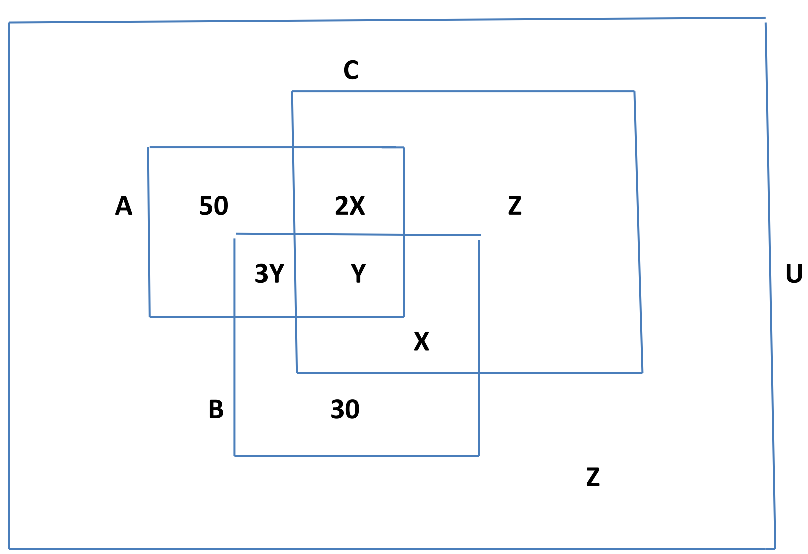
RTA : 31

En una encuesta realizada a 150 personas sobre sus preferencias acerca de tres productos A , B y C , se obtuvieron los sig. resultados , 82 personas consumen el producto A , 54 el producto B , 50 consumen únicamente el producto A , 30 sólo el producto B , el número de personas que consumen sólo B y C es la mitad del número de personas que consumen sólo A y C , el número de personas que consumen sólo A y B es el triplo del número de las que consumen los tres productos , y hay tantas personas que no consumen los productos mencionados como las que consumen solo el C.

Determinar a) El número de personas que consumen solo dos de los productos.

b) El número de personas que no consumen ninguno de los tres productos.

c) El número de personas que consumen al menos uno de los tres productos.



$\# \ U = 150$

$\# \ A = 82$

$\# \ B = 54$

$\# \left(A - (B \cup C) \right) = 50$

$\# \left(B - (A \cup C) \right) = 30$

Hay que aclarar el término **solo o únicamente** , es distinto decir que consumen los productos B y C , que decir que consumen **solo** los productos B y C , en ese caso los que consumen **solo** los productos B y C se puede ubicar en el gráfico , los que consumen los productos B y C no.

a) $50 + 3Y + 30 + 2X + Y + X + Z + Z = 150$

b) $50 + 3Y + 2X + Y = 82$

c) $3Y + 30 + Y + X = 54$

Si reducimos las dos últimas ecuaciones queda b) $2X + 4Y = 32$

c) $X + 4Y = 24$

$$\begin{cases} 2X + 4Y = 32 \\ X + 4Y = 24 \end{cases}$$ queda un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Vamos a resolver el sistema aplicando el método de sustitución.

Despejo de la segunda ecuación $X = 24 - 4Y$ lo reemplazamos en la primera quedando

$2. (24 - 4Y) + 4Y = 32$

$48 - 8Y + 4Y = 32$

$- 4Y = 32 - 48$

$- 4Y = - 16$

$\mathbf{Y = 4}$

$X = 24 - 4Y$ $X = 24 - 4.4$ $X = 24 - 16$ $\mathbf{X = 8}$

Ahora reemplazamos los valoras de **X** e **Y** hallados en la primera ecuación.

50 + 3Y + 30 + 2X + Y + X + Z + Z = 150

50 + 3.4 + 30 + 2.8 + 4 + 8 + Z + Z = 150

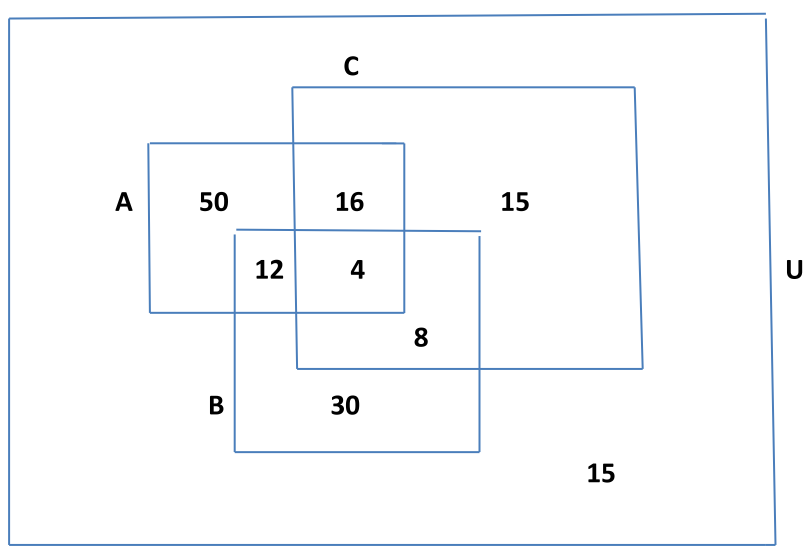
50 + 12 + 30 + 16 + 4 + 8 + 2Z = 150

120 + 2Z = 150

2Z = 150 – 120

2Z = 30

Z = 15



a) El número de personas que consumen solo dos de los productos.

RTA : 12 + 16 + 8 = 36

b) El número de personas que no consumen ninguno de los tres productos.

RTA : 15

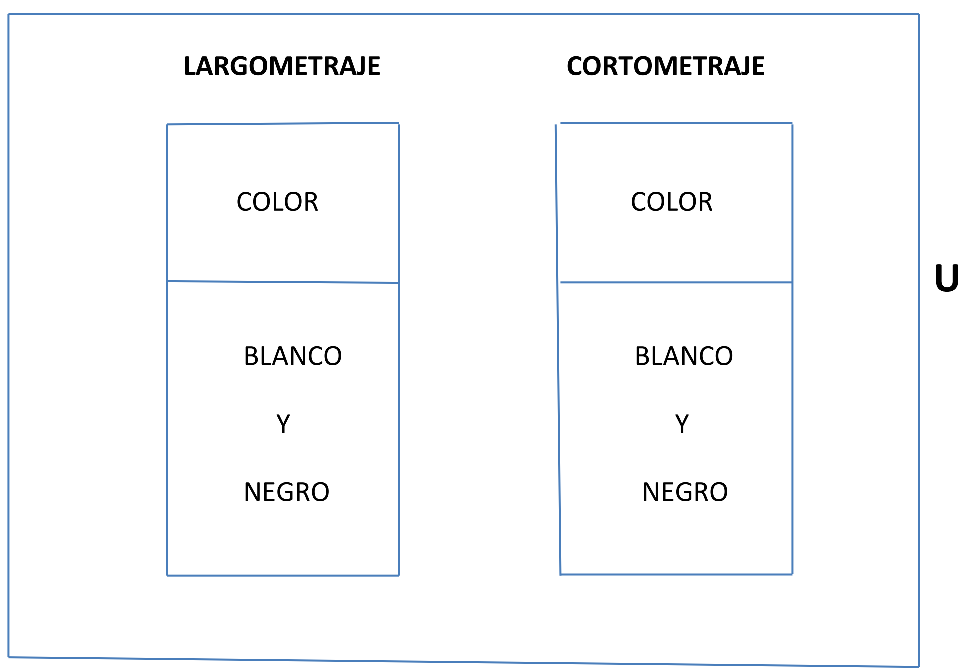
c) El número de personas que consumen al menos uno de los tres

RTA : 50 + 30 + 15 + 12 + 16 + 8 + 4 = 135

Veamos otro problema de conteo.

Un videoclub cuenta con 200 películas , de las cuáles 125 son de cortometraje y 94 son de color. Además 38 de las películas de largometraje son de color.
a) ¿ Cuántas películas blanco y negro hay ?
b) ¿ Cuántas de las de cortometraje son de color ?

De la lectura del problema identificamos 4 conjuntos , a saber , películas de largometraje , películas de cortometraje , películas de color y películas de blanco y negro.
Podríamos graficar la situación de la sig. manera.



Los datos del problema escritos en notación conjuntista quedarían.

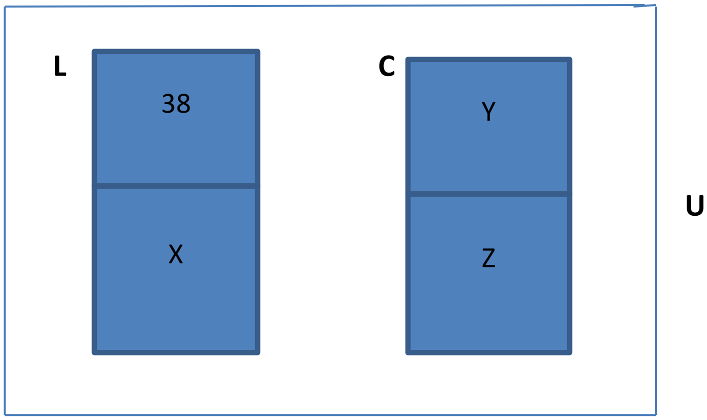
U = 200

CORTO = 125

COLOR = 94

$\# \left[(\text{LARGO}) \cap (\text{COLOR}) \right] = 38$

El único dato que se puede ubicar en el diagrama es el último.



Planteamos las ecuaciones.

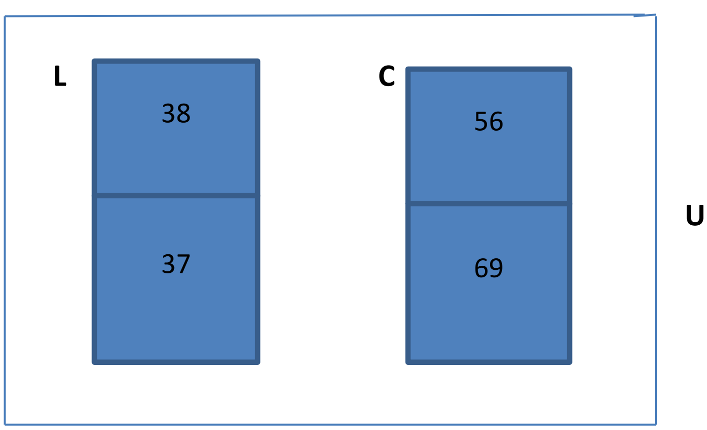
a) $38 + X + Y + Z = 200$

b) $Y + Z = 125$

c) $38 + Y = 94 \Rightarrow Y = 94 - 38 \Rightarrow Y = 56$

b) $56 + Z = 125 \Rightarrow Z = 125 - 56 \Rightarrow Z = 69$

a) $38 + X + 56 + 69 = 200 \Rightarrow X + 163 = 200 \Rightarrow X = 200 - 163 \Rightarrow X = 37$



a) ¿ Cuántas películas blanco y negro hay ?

RTA : 37 + 69 = 106

b) ¿ Cuántas de las de cortometraje son de color ?

RTA : 56

Veamos otro ejemplo.

$\# \ (A \cup B \cup C) = 65$

$\# \ (A \cap B \cap C) = 3$

$\# \ (A \cap B) = 20$

$\# \ A = \# \ B = 35$

$\# \ (B \cap C) = 10$

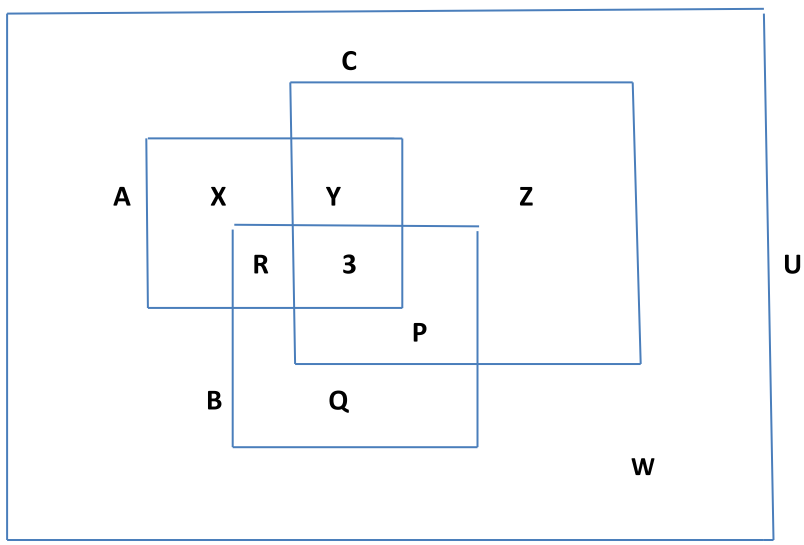
$$\# \left((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \right) = 32$$

Calcular

a) $\# \left(C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \right)$

b) La cantidad de elementos que pertenecen **a solo** un conjunto , escribirlo en notación conjuntista.

Este ejercicio es más fácil que los anteriores , el motivo es que los datos no lo tuvimos que deducir de un texto , sino que son datos.
Realizamos el gráfico de la situación , que como en este caso son 3 conjuntos , siempre graficaremos de la misma forma.



Como se ve , hay un solo dato que se puede ubicar , todos los otros datos no se pueden ubicar puesto que no corresponden a una única zona del diagrama.

Planteamos las ecuaciones.

a) $X + Y + Z + R + 3 + P + Q = 65$

b) $R + 3 = 20$

c) $X + Y + R + 3 = 35$

d) $R + 3 + P + Q = 35$

e) $3 + P = 10$

f) $R + Y + P = 32$

b) $R = 20 - 3 \quad \Rightarrow \quad R = 17$

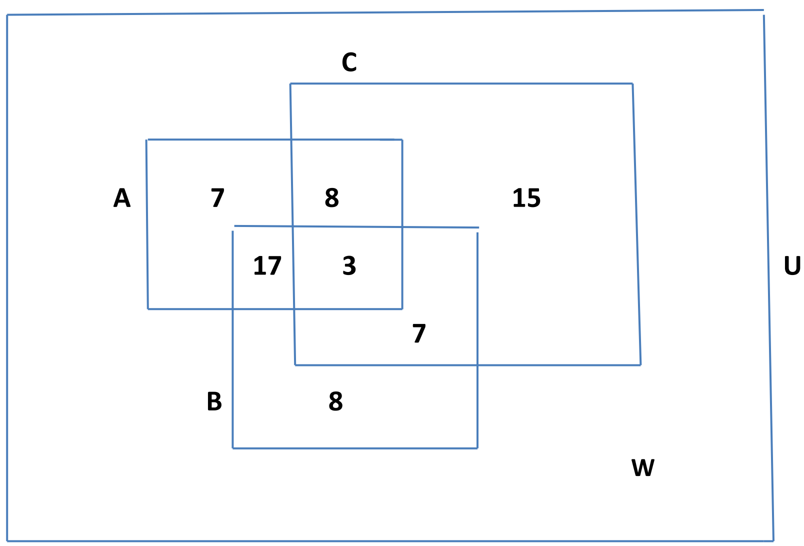
e) $P = 10 - 3 \quad \Rightarrow \quad P = 7$

d) $17 + 3 + 7 + Q = 35 \quad \Rightarrow \quad 27 + Q = 35 \quad \Rightarrow \quad Q = 35 - 27 \quad \Rightarrow \quad Q = 8$

f) $17 + Y + 7 = 32 \quad \Rightarrow \quad Y + 24 = 32 \quad \Rightarrow \quad Y = 32 - 24 \quad \Rightarrow \quad Y = 8$

c) $X + 8 + 17 + 3 = 35 \implies X + 28 = 35 \implies X = 35 - 28 \implies X = 7$

a) $7 + 8 + Z + 17 + 3 + 7 + 8 = 65 \implies Z + 50 = 65 \implies Z = 65 - 50 \implies Z = 15$



Como se observa , la única incógnita que no se pudo calcular es W .
Esto ocurre porque en ninguna de las ecuaciones aparece W , y esto pasa por no tener el dato de # U .
Por lo tanto tomaremos W = 0 .

Calcular

a) $\#\left[\, C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \,\right] = 15$

b) La cantidad de elementos que pertenecen **a solo** un conjunto , escribirlo en notación conjuntista.

$\# \; (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) = 7 + 8 + 15 = 30$