UNIDAD Nº 3 - OPERACIONES

ADICION DE MATRICES

Para poder sumar dos matrices, estas deben tener el mismo orden o dimensión.
Cada elemento de la matriz resultado se obtiene sumando los elementos ubicados en las mismas posiciones de las matrices a sumar.

Ejemplo

Dadas las matrices A y B , obtener la matriz A + B.

A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

A + B = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ A + B = $\begin{bmatrix} 3+2 & 5+1 & 9+(-2) \\ 2+1 & 4+(-1) & 1+1 \end{bmatrix}$

A + B = $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Es importante resaltar que para sumar matrices se deben cumplir todos los pasos , sin saltear ninguno.

PROPIEDADES DE LA ADICION O DE LA SUMA DE MATRICES

a) Propiedad de clausura

La suma de dos matrices da por resultado otra matriz del mismo orden o dimensión que las matrices sumadas.

b) Propiedad conmutativa

A + B = B + A

c) Propiedad asociativa

(A + B) + C = A + (B + C)

d) Existencia de elemento neutro

Si a una matriz A de cualquier orden o dimensión , le sumamos una matriz nula del mismo orden , el resultado es la matriz A , o sea la matriz nula en la suma no ejerce ningún efecto , por eso se la llama elemento neutro.
El elemento neutro para la suma es la matriz nula (N).

e) Existencia de elemento opuesto

Dada una matriz A cualquiera , su matriz opuesta se designa – A .
La matriz opuesta cumple **A + (– A) = N .**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Es importante aclarar que esta última propiedad es la que se utiliza para restar matrices. La resta de matrices no existe hay que transformarla en una suma , mediante esta última propiedad.

Ejemplo

Dadas las matrices A y B , se pide hallar A – B .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A – B = A + (– B)

$$-B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -1+(-4) & 2+(-5) \\ 5+2 & 1+(-3) & -3+(-5) \end{bmatrix} =$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 7 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

PRODUCTO DE UN NUMERO POR UNA MATRIZ

Para multiplicar un número cualquiera por una matriz , se multiplica cada elemento de la matriz por ese número.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad -3.A = -3 \,.\, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.3 & -3.(-1) & -3.2 \\ -3.5 & -3.1 & -3.(-3) \end{bmatrix}$$

$$-3.A = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -6 \\ -15 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN NUMERO POR UNA MATRIZ

a) Propiedad de clausura

El producto de un número por una matriz da por resultado otra matriz del mismo orden o dimensión que la matriz multiplicada.

b) Propiedad asociativa

Sea A una matriz , α y β son números reales

$\alpha \,.\, (\beta \,.\, A) = (\alpha \,.\, \beta) \,.\, A$

c) Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices

Sea A y B dos matrices del mismo orden o dimensión , α un número real

$$\alpha . (A + B) = \alpha . A + \alpha . B$$

d) Propiedad distributiva respecto de la suma de números

Sea A una matriz de cualquier orden o dimensión , α y β son números reales

$$(\alpha + \beta) . A = \alpha . A + \beta . A$$

d) Existencia de elemento neutro

Sea una matriz A de cualquier orden o dimensión , el elemento neutro para el producto de un número por una matriz es el número 1 , pues si hacemos

$$1 . A = A$$

PRODUCTO DE MATRICES

Sea una matriz A y otra matriz B , para poder realizar el producto A . B en ese orden , **es necesario , que la cantidad de columnas de la primer matriz , en este caso A , sea igual al número de filas de la segunda matriz , en este caso B.**

El resultado de este producto será otra matriz que llamaremos C , que tendrá la misma cantidad de filas que la primer matriz (A) y la misma cantidad de columnas que la segunda matriz (B).

Supongamos una matriz A de orden **m x n ,** y otra matriz B de orden **n x p** , el producto de A . B daría por resultado otra matriz C de orden **m x p.**

Cada elemento de la matriz resultado se obtiene multiplicando una fila de la primer matriz por una columna de la segunda matriz.

Ejemplo

Dadas las matrices A y B , realizar si es posible los sig. productos , A . B y B . A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Para realizar el producto A . B debe verificarse que la cantidad de columnas de A , en este caso 2 , sea igual a la cantidad de filas de B , en este caso también es 2 , como la igualdad se verifica podrá hacerse A . B y dará por resultado la matriz C , que tendrá por orden 3x3.

$$\mathbf{C = A . B =} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+1.6 & 2.3+1.2 & 2.4+1.5 \\ 0.1+4.6 & 0.3+4.2 & 0.4+4.5 \\ 3.1+5.6 & 3.3+5.2 & 3.4+5.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 13 \\ 24 & 8 & 20 \\ 33 & 19 & 37 \end{bmatrix}$$

Para realizar el producto B . A debe verificarse que la cantidad de columnas de B , en este caso 3 , sea igual a la cantidad de filas de A , en este caso también es 3 , como la igualdad se verifica podrá hacerse B . A y dará por resultado la matriz D , que tendrá por orden 2x2.

$$\mathbf{D = B . A =} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+3.0+4.3 & 1.1+3.4+4.5 \\ 6.2+2.0+5.3 & 6.1+2.4+5.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 33 \\ 27 & 39 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa pues

A . B $\neq$ B . A

MATRIZ TRASPUESTA

Dada una matriz **A** de orden m x n , para designar la matriz traspuesta de la matriz **A** lo hacemos con **At .**
Si quisiéramos expresar la matriz traspuesta de la matriz **A + B** lo hacemos con **(A + B)t** .
Si la matriz **A** tiene orden m x n , su matriz traspuesta (**At**) tiene orden n x m.

Ejemplo

Dada la matriz B hallar su matriz traspuesta.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad Bt = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz traspuesta Bt , hacemos lo siguiente , lo que es primer fila para la matriz B se convierte en primer columna para la matriz Bt , lo que es segunda fila para la matriz B se convierte en segunda columna para la matriz Bt.

MATRIZ SIMETRICA

Una matriz cuadrada se dice que es simétrica , si y solo sí , es igual a su traspuesta.
Para que esto se cumpla , en la matriz los elementos simétricos respecto a la diagonal principal deben ser todos iguales.

Ejemplo

Analizar si la matriz A es simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \qquad At = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Como A = At $\Rightarrow$ la matriz A es simétrica.

A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

Los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son , el a_{12} y el a_{21} , el a_{13} y el a_{31} , el a_{23} y el a_{32} .

MATRIZ ANTISIMETRICA

Una matriz cuadrada se dice que es antisimétrica , si y solo sí , es igual a la opuesta de su traspuesta.
Para que esto se cumpla , en la matriz original los elementos de la diagonal principal deben ser todos ceros , los elementos simétricos respecto a la diagonal principal deben ser ahora opuestos.

Ejemplo

Analizar si la matriz A es antisimétrica.

A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ At = $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ – At = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Como A = – At $\Rightarrow$ la matriz A es antisimétrica.