UTNFra

Matemática Inicial

Curso de ingreso

Tecnicatura Universitaria en Programación

Autores: Ing. *Darío Miguel Cuda*

Revisores: --

Curso: 000

Versión : 0.3

Unidad 1. Ecuaciones de 1° Grado

Comenzaremos con el estudio de las llamadas ecuaciones lineales o de .1° grado. Estas son ecuaciones del tipo polinómicas, o sea:

$$P(x) = 0$$

Donde P(x) es en este caso un polinomio de 1° grado. La igualdad recibe el nombre de ecuación entera de variable o Incógnita x.

Si el grado del polinomio P(x) es 1, la ecuación se dice lineal o de 1° grado.

Resolver una ecuación P(x) = 0 es entonces hallar todos los números reales que la verifican.

Tal conjunto se llama Conjunto Solución de la ecuación, y sus elementos son las raíces o soluciones de dicha ecuación.

De acuerdo a su conjunto solución clasificamos a las ecuaciones de la siguiente forma:

a) **Compatibles Determinadas:** Cuando la solución es única.

b) **Compatibles Indeterminadas:** Cuando tiene infinitas soluciones.

c) **Incompatibles:** Cuando no tienen solución o el conjunto solución no tiene elementos.

Una ecuación de 1°.grado en x es del tipo:

$$ax + b = 0$$

En este caso, puede suceder que:

a) si $a \neq 0$ entonces resulta que: $x = \left(-\frac{b}{a}\right)$ con lo que la solución es única y así resulta que la ecuación es **compatible y determinada**.

b) Si a = b = 0 resulta que , es 0x = 0 , lo que significa que hay infinitos valores de x que verifican la igualdad, se dice que la ecuación es **Compatible Indeterminada**.

c) si $a = 0$ y $b \neq 0$, reemplazando en la ecuación general resulta que 0x = b, por lo tanto no existe ningún valor de x que cumpla con la ecuación con lo que la misma resulta **Incompatible**.

Ahora bien, para resolver una ecuación lineal hagamos hincapié en los siguientes conceptos:Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución:

Por ejemplo:

$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1$$
$$4x + 2 = 0$$

Ya que todas ellas tienen por solución el mismo conjunto de elementos : $x = -\frac{1}{2}$

Es posible que en este caso particular la solución se haga más evidente en esta nueva ecuación equivalente:

$$2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Esto último nos muestra que para hallar el conjunto solución de una ecuación lineal (o de 1° grado) , lo que tenemos que hacer es transformar ésta en una ecuación equivalente más sencilla, en la que sea más simple encontrar el valor que la verifica y para realizar esta tarea, hay algunas operaciones que podemos realizar.:

- Sumar o restar un mismo número a los dos miembros de una ecuación
- Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero.

Veamos un problema que podemos resolver planteando una ecuación lineal de 1°

grado.

Ramiro recibió $ 14350 una semana por trabajar 52 horas.

En su trabajo pagan 1,5 veces cada hora extra por encima de 40 horas de trabajo.

¿Cuál es el salario por hora que recibe Ramiro?

Antes de intentar resolver el problema, léalo nuevamente y trate de identificar la incógnita del mismo.

Llamaremos x = " Salario por hora de Ramiro”

En estas condiciones, resulta que Ramiro, hasta la “hora 40” semanal de trabajo recibe un salario, y en las restantes un salario 1.5 veces mayor, con lo que podríamos decir que:

$$14384 = 40 \cdot x + 12 \cdot 1{,}5 \cdot x$$
$$14384 = 40 \cdot x + 18 \cdot x$$
$$14384 = 58 \cdot x$$

$$\frac{14384}{58} = \frac{58}{58} \cdot x \Rightarrow x = 248.-$$

Una vez resuelta la ecuación anterior, es necesario volver al problema para “responder” a la pregunta que nos habían hecho, así que el problema termina con:

Rta: Ramiro cobra un salario de $ 248.- por hora.

Veamos otro ejemplo.

Para comprar un traje y un abrigo, un señor gasta 300 €. ¿Cuánto le costó' el traje si pagó por él 20 € menos que por abrigo ?.

En este problema quizás para resolverlo estemos tentados en asignar dos incógnitas, pero si leemos un par de veces detenidamente el texto vemos que lo que se pagó por el traje tiene relación con lo que se pagó por el abrigo, 20 € menos..

Llamaremos entonces x =" Precio pagado por el abrigo"

De lo anterior surge que (x-20) es el precio pagado por el traje.

Por lo tanto la ecuación resultaría:

$$x + (x-20) = 300$$
$$2 \cdot x - 20 = 300$$
$$2 \cdot x - 20 + 20 = 300 + 20$$
$$2 . x = 320$$
$$\frac{2 . x}{2} = \frac{320}{2} = 160 \Rightarrow X = 160$$

De la ecuación anterior y considerando que habíamos planteado que “X” era el precio del traje, podremos decir que:

Se pagaron 160€ por el traje y 140€ por el abrigo.

Es muy probable que cuando resolvemos una ecuación no apliquemos las operaciones elementales para despejar la incógnita, pero es necesario saber que las reglas de despeje utilizadas salen de hacer una simplificación de las operaciones elementales.

Ejercitación:

1. $3x+1=1$
2. $3x-2=x+1$
3. $4(x+1)-2x=x$
4. $-5(x+5)-x=-3x+2x$
5. $\frac{(2x+8)}{2}-x=4$
6. $2x+a=2+3x$
7. $\frac{3x+1}{2}=\frac{2x-1}{4}$
8. $3x-2\sqrt{2}=2x+2\sqrt{2}$
9. $(x+2)(x-3)-(x+1)^2=0$
10. $a+b=\frac{a-1}{a}x$
11. $\frac{3x-1}{4}+\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{8}$
12. $(x-1)^2=(x+1)(x-1)$
13. $(t-2)^2=(1+t)(t-3)$
14. $a-b=\frac{a+1}{a}x$

15. $2(x+2)-5(2x-3)=3$

16. $(3x-3)^2-(2x-7)=(3x-5)(3x+5)$

17. $(x-7)^2-(1+x)^2=2(3x-4)$

18. $\frac{2x+13}{3}-\frac{6-x}{4}=1$

19. $x-\frac{2+x}{6}=\frac{1}{2}$

20. $\frac{8x-9}{100}+\frac{7x-2}{25}-\frac{3+2x}{30}=\frac{x}{750}$

21. $\frac{8-2x}{3}+\frac{5-2x}{7}+4=5-(8x-6)+\frac{1}{2}$

22. $6+(2z-5)-(3z+4)-\frac{z+1}{2}=2$

23. $6x-(2x-1)(2x+1)=2-(3+2x)^2$

24. $\frac{4-9x}{5}-\frac{2(3-4x)}{2}-1=x$

25. $33{,}7-(1{,}5x+2{,}3)=3{,}4x-(0{,}4-5{,}7x)$

26. $\frac{4}{3}\cdot\frac{2(5-2x)}{3}-x=\frac{1}{2}-3x$

27. $4-2(x+7)-(3x+5)=2x+(4x-9+3x)-(x-3)$

Resolver los siguientes problemas planteando una ecuación lineal o de 1° grado.

1.) Hallar un número tal que su triple menos 5 sea igual a su doble más 2.

2). El triple de un número es igual al quíntuplo del mismo menos 20. ¿Cuál es este número?.

3.) ¿Cuál es el número que disminuido de 12 da lo mismo que el numero disminuido en 36 ?.

4.) ¿Cuál es el número cuya tercera parte más 7 da 29 ?

5) Hallar un número tal que sumando su mitad y su tercera parte más 25 dé por suma 320.

6.) Añadiendo 5 unidades al doble de un número más los 3/4 del mismo, da por resultado el doble de dicho número más 2. ¿Cuál es el número ?.

7.) Se reparten 170€ entre 3 personas de forma que la segunda recibe 25€ más que la primera y la tercera tanto como las otras dos juntas,¿Cuánto ha recibido cada una ?

8.) Se desea distribuir una suma de $400 entre 3 personas de modo que la primera reciba $60 más que.la segunda y $20 más que la tercera:¿Cuánto tocará a cada una ?.

9.) Dos personas tienen juntas 2.500 u$s; una de ellas tiene 500 u$s más que la otra, ¿Cuánto tiene cada una?

10.) Unas gafas con su funda valen juntos 30 € Las gafas cuestan 20 € más que la funda. ¿Cuánto vale cada cosa?

11.) En una familia la suma de las edades de los 4 hijos es 28 años. ¿Cuál es la edad de cada uno si el mayor tiene 4 años más que el 2°, el Segundo 2 años más que el 3° y éste 4 más que el pequeño ?.

12). La suma de 4 números impares consecutivos es 112. ¿Cuáles son dichos números?

13). Se reparte una herencia de U$D 29.000 entre 3 hermanos de modo que el 2° recibe el doble de lo que recibe el 3° y el mayor recibe tanto como los otros dos juntos menos U$D1.000.¿Cuánto recibe cada uno ?.

14). La guarnición de un cuartel se compone de 1.000 hombres.

Sabiendo que hay triple número de soldados de caballería que artilleros y el doble de infantería que de caballería, se pregunta cuántos soldados hay de cada clase.

15). Hállese un número tal que si se le quitan 10 unidades queda el doble que si de dicho número se quitan 80.

16). El precio de venta de un producto, después de un descuento del 25%, es de $3.800. ¿ Cuál es el precio antes del descuento?.

17). Una empresa de computación ha reducido el precio de una computadora en 15 %. ¿ Cuál es el precio original de la computadora si el precio de oferta es U$D 1.275 ?.

18). Un taller producirá 126 artículos diarios.

Como resultado del perfeccionamiento técnico su producción diaria aumentó hasta 189 artículos. ¿ En qué tanto por ciento se incrementó el rendimiento ?.

Respuestas de las ecuaciones lineales:

1. 0
2. $\frac{3}{2}$
3. -4
4. -5
5. Se verifica para cualquier número real
6. $a-2$
7. $-\frac{3}{4}$
8. $3\sqrt{2}$
9. $-\frac{7}{3}$
10. $\frac{(a^2+ab)}{(a-1)}$
11. $-\frac{1}{3}$
12. 1
13. $\frac{7}{2}$
14. $\frac{(a^2-ab)}{(a+1)}$
15. 2
16. $\frac{41}{20}$
17. $\frac{28}{11}$
18. -2
19. 1
20. $\frac{135}{146}$
21. $\frac{173}{296}$
22. $-\frac{11}{3}$
23. $-\frac{4}{9}$
24. $\frac{8}{3}$
25. 3
26. $-\frac{71}{4}$
27. $-\frac{9}{13}$

Respuestas a los problemas:

1. 7
2. 10
3. 24
4. 66
5. 354
6. -2
7. 30, 55, 85
8. 100, 120, 150
9. 1000, 1500
10. 25, 5
11. 2, 6, 8, 12
12. 25, 27, 29, 31
13. 14000, 10000, 5000
14. 100, 300, 600
15. 150
16. 5066, 66
17. 1500
18. 50%

Unidad 2. Sistemas Numéricos.

Los sistemas numéricos se clasifican en dos grandes grupos: "no posicionales" y "posicionales".

Sistemas no posicionales: cada símbolo tiene un significado particular, independiente de su ubicación.

Ejemplo 1:

Si con este símbolo (**1**) represento un día, para representar los días que tiene una semana tendría siete veces ese símbolo: 1111111.

Se pueden imaginar lo incómodo que sería representar los días que tiene una década.

Ejemplo 2:

Los romanos utilizaron un sistema de signos de valores crecientes: 1,V,X,L,C,D,M, etc. que se agrupaban de derecha a izquierda, sumándose o restándose entre sí, según siguieran o no el orden creciente:

CXVII = cien + diez + cinco + uno + uno **(117)**

MCMV = mil + (mil — cien) + cinco **(1905)**

Sistemas Posicionales: Fueron desarrollados por pueblos orientales e indoamericanos (Mayas). Consisten en un conjunto limitado y constante de símbolos, entre los cuales se encuentra el "cero" para indicar ausencia de elementos.

Cada símbolo representa dos cosas: ·

a) El número de unidades considerado aisladamente.

b) Según la posición que ocupa en el grupo de caracteres (del que forma parte) tiene un significado o "peso" distinto.

Nota: los caracteres se denominan "dígitos".

En general será:

Dado un número $b \in N \wedge b > 1$, llamado base del sistema de numeración, todo número n se representa como la combinación de potencias sucesivas de b con coeficientes, a, que toman valores comprendidos entre 0 y (b - 1) .

A partir de esto el número **n** :

$$a_k\, a_{k-1}\, a_{k-2} \ldots\ldots\ldots\, a_2\, a_1\, a_0\, ,\, a_{-1}\, a_{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se podrá escribir:

$$n = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + a_{k-2} \cdot b^{k-2} + \ldots\ldots\ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 + , a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pregunta: ¿cuántos dígitos tiene el número "n" recientemente escrito?.

Veamos esto aplicado en el sistema decimal (la base b = 10) : ($10 \in N \wedge 10 > 1$)

Diez dígitos: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9.

(Valores comprendidos entre 0 y (b —1) = (10 — 1) = 9)

Ejemplos:

a) Año de la ley universitaria:

$$1918 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 1000 + 900 + 10 + 8 = 1918$$

b) “pulgada” expresada en mm 1” = 25.4mm.

$$25{,}4 = 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} = 20 + 5 + 0{,}4 = 25{,}4$$

c) Longitud de una hormiga: 0,57 cm

$$0{,}57 = 0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 0 + 0{,}5 + 0{,}07 = 0{,}57$$

d) Número Pi = 3,1415926539

$$3{,}1415926539\ldots.. = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-7} + 5 \cdot 10^{-8} + 3 \cdot 10^{-9} + \ldots\ldots.$$
$$= 3 + 0{,}1 + 0{,}04 + + 0{,}001 + 0{,}0005 + 0{,}00009 + 0{,}000002 + 0{,}0000006 + 0{,}0000005 + 0{,}000000003 + 0{,}0000000009 + \ldots. = \pi$$

Nota: Las computadoras usan los números en sistema binario para seleccionar posiciones de memoria entre otras cosas.

Cada posición se asigna a un único número denominado dirección. Por ejemplo, en los microprocesadores de “32 bits” hay 32 líneas de dirección que pueden seleccionar

2^{32}= (4.294.967.296) posiciones unívocas .

Las direcciones “IPv6” están compuestas por 128 dígitos binarios, para lograr una elevadísima cantidad de direcciones diferentes (más de 340 sextillones) y para ello, suele usarse el sistema hexadecimal (base 16) para representarlo en luagr del binario, como veremos más adelante.

De esta manera es posible “elegir” el sistema de numeración en el que es conveniente trabajar en función de las capacidades y características de cada caso.

Cuenta la historia, que la humanidad definió el sistema “decimal” debido a los diez dedos que tenemos en las manos, como una forma sencilla de expresarse, en tanto que para la electrónica “digital” es mucho más sencilla la utilización del sistema binario, ya que estos dos valores se pueden elegir en función de la existencia o no de determinada magnitud eléctrica,

Por último el sistema “hexadecimal” tiene la ventaja de que con pocos dígitos es muy sencillo expresar valores del sistema binario, ya que cada dígito hexadecimal equivale exactamente a 4 dígitos binarios. (en el caso de las direcciones IPv6 expresadas anteriormente, los 124 dígitos binarios, se pueden escribir como 32 dígitos hexadecimales, ya que :

128/4 =32

Tabla de equivalencias:

Decimal	Binario	Hexadecimal
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	10000	10
17	10001	11
18	10010	12
19	10010	13
20	10100	14
21	10101	15
22	10110	16
23	10111	17
24	11000	18
25	11001	19
26	11010	1A
27	11011	1B
28	11100	1C

29	11101	1D
30	11110	1E
31	11111	1F

Cuando se trabaja con números en distintos sistemas de numeración de manera simultánea, es conveniente utilizar subíndices, que indiquen el sistema de numeración al que determinado número corresponde, de manera que:

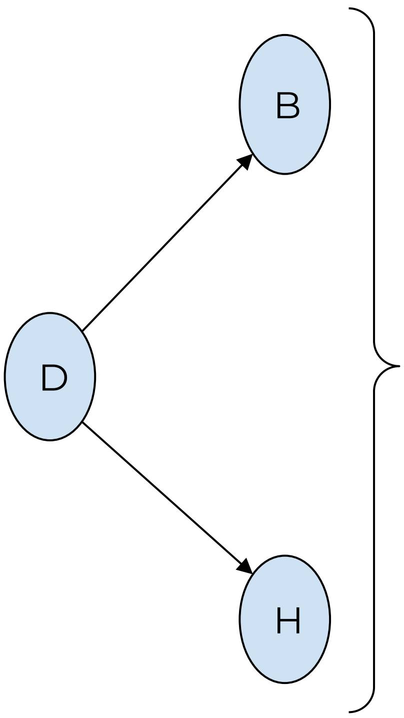
El número 10 [uno y cero) en sistema binario: $10_{(2)}$ o $10_{(B)}$

El número 10 (uno y cero) en sistema decimal $10_{(10)}$ o $10_{(D)}$

El número 10 (uno y cero) en sistema hexadecimal: $10_{(16)}$ o $10_{(H)}$

¿Cómo pasamos entonces de un sistema de numeración a otro?

Desde Decimal:



Para obtener la parte entera se realizan divisiones sucesivas por la base, quedándose con los restos.

Para la parte fraccionaria, se realizan sucesivas multiplicaciones por la base, quedandonos con la parte entera de dicho producto.

Veámoslo con un ejemplo:

$2{,}625_D = 10{,}101_B$
$2{,}625_D = 2{,}A_H$

Cálculos:

Pasaje de decimal a binario:

$$\begin{array}{l|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

$\longleftarrow$ Se toma el último de los cocientes (y luego todos los restos, en el sentido de la flecha, con lo que $2_D = 10_B$)

La parte fraccionaria:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}625 \cdot 2 = 1{,}25 \Rightarrow \text{ me quedo con el } 1 \text{ de la parte entera} \\ 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5 \Rightarrow \text{ me quedo con el } 0 \text{ de la parte entera} \\ 0{,}5 \,.\, 2 = 1 \Rightarrow \text{ me quedo con el } 0 \text{ de la parte entera.} \end{array}\right\} = 0{,}101_B$$

al sumar la parte entera más la fraccionaria, obtengo el 10,101 binario que buscaba.

Para pasar del decimal al hexadecimal;

$$\begin{array}{l|l} 2 & 16 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$$

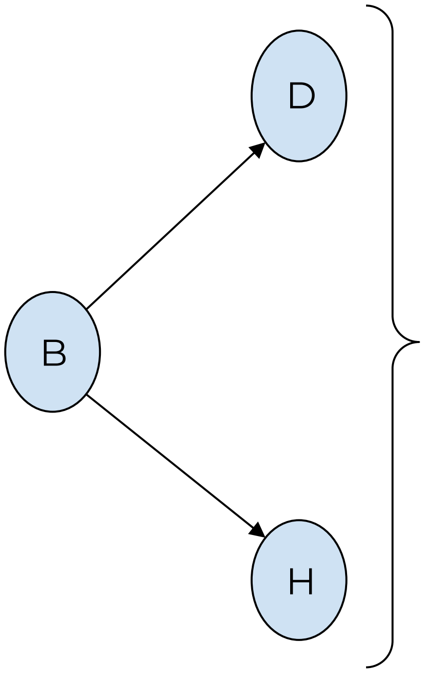
$\longleftarrow$ Se toma el último de los cocientes (y luego todos los restos, en el sentido de la flecha, con lo que $2_D = 2_H$).

La parte fraccionaria:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}625 \cdot 16 = 10 \Rightarrow \text{ me quedo con el } 10 \text{ de la parte entera} \\ \text{pero } 10_d = A_h \end{array}\right\} = 0{,}A_B$$

al sumar la parte entera más la fraccionaria, obtengo el 2,A hexadecimal que buscaba.

Desde binario:



Suma de productos de los dígitos por la posición en base 2 correspondiente

Como cada dígito hexadecimal son 4 dígitos binarios, podemos directamente tomar estos grupos de 4 dígitos

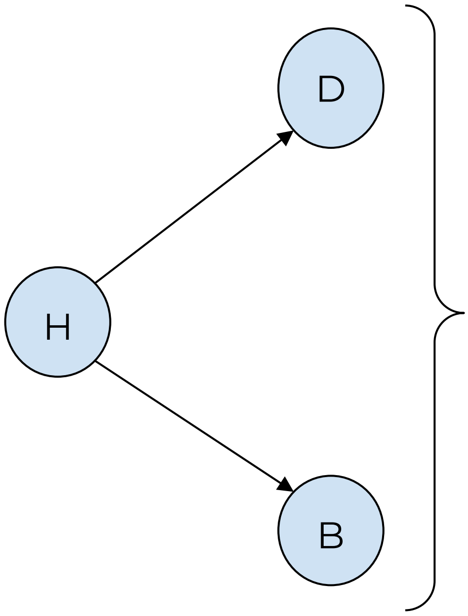
Veámoslo con un ejemplo:

$10{,}1_B = 2{,}5_D$
$10{,}1_B = 2{,}8_H$

Cálculos:

$10{,}1_B = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 2 + 0 + 0{,}5 = 2{,}5_D$
$10{,}1_B = 0010{,}1000_B = 2{,}8_H$

Desde Hexadecimal:



Suma de productos de los dígitos por la posición en base 16 correspondiente

Como cada dígito hexadecimal son 4 dígitos binarios, podemos directamente reemplazar un dígito hexadecimal por 4 binarios

Ejemplo de cálculo:

$DB_H = D \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = 13 \cdot 16 + 11 = 219_D$

$DB_H = 11011011_B$

UNIDAD 2 - Problemas

Pasaje entre sistemas

1) Dados los siguientes números decimales, pasarlos a:

a) 55 d) 10,4 g) 376,4303

b) 48 e) 83,45

c) 204 t) 2131,48

A) Binario B) Hexadecimal

2) Dados los siguientes números binarios, pasarlos a:

a) 1011 c) 11 0011,11 e) 100 0001,111

b) 1 1101 d) 10 1010,01 f) 111 1111, 1111 1

A) Decimal B} Hexadecimal

3) Dados los siguientes números hexadecimales, pasarlos a:

a) 38 c) 7E e) 4100 g) 8A9D

b) 59 d) A14 f) FB17

A) Decimal B) Binario

Respuestas:

1) Binario:

   a. 110111
   b. 110000
   c. 11001100
   d. $1010,\overline{0110}$
   e. 1010011,011100
   f. 100001010011,011110
   g. 101111000,011011

   Hexadecimal

   a. 37
   b. 30
   c. CC
   d. $A,\overline{6}$
   e. $53,\overline{73}$
   f. $853,\overline{7AE14}$
   g. 178,6E2823

2) Decimal:

   a. 11
   b. 29
   c. 51,75
   d. 42,25
   e. 65,875
   f. 127,96875

   Hexadecimal

   a. B
   b. 1D
   c. 33,C
   d. 2A,4
   e. 41,E
   f. 7F,F8

3) Decimal:

   a. 56
   b. 89
   c. 126
   d. 2580
   e. 16640
   f. 64279
   g. 35845

   Binario

   a. 00111000
   b. 01011001
   c. 01111110
   d. 101000010100
   e. 0100000100000000
   f. 1111101100010111
   g. 1000101001001101

Unidad 3. Lógica Proposicional.

Cuando un matemático desea ofrecer una demostración de una situación dada, debe utilizar un sistema de lógica. Esto también alcanza a los profesionales de la informática, los cuales desarrollan los algoritmos necesarios para un programa o sistemas de programas.

La lógica de la matemática se utiliza en múltiples campos del saber.

En el desarrollo de cualquier teoría se analizan la veracidad o no de determinadas oraciones.

Definiremos como una **proposición** a una oración para la cual tiene sentido preguntarse si es verdadera o falsa.

Por ejemplo: “Eduardo Galeano es un escritor uruguayo” es una proposición , pues tiene sentido preguntarse si Eduardo Galeano es uruguayo o no; como además sabemos que Eduardo Galeano es un escritor uruguayo , diremos que esta es una proposición verdadera.

Por convención, las proposiciones se representan con letras minúsculas (p,q,r,s,t).

Para expresar simbólicamente que la proposición anterior es verdadera lo haremos de la siguiente manera:

p =”Eduardo Galeano es un escritor uruguayo "

$V_{(p)} = 1$

Expresiones como " ¡ Que bonita tarde ! " o " Levántate y haz tus tareas” no son proposiciones, ya que la primera es una exclamación y la segunda es una orden, y en ninguna de ellas, tiene sentido preguntarse acerca de la veracidad o falsedad de la misma.

Dada una o más proposiciones se pueden obtener otras, a partir de operar con ellas.

Para las distintas operaciones entre proposiciones se utilizan diferentes símbolos que se llaman conectivos. Veremos los siguientes.

a) Negación

b) Conjunción

c) Disyunción (en sentido incluyente y en sentido excluyente)

d) Condicional

e) Bicondicional

NEGACIÓN:

Dada una proposición **p** se obtiene su negación anteponiendo la palabra **no**, es decir diremos **" no p "** desde el punto de vista coloquial y la simbolizamos -p.

Si considerarnos la proposición::

p = " El oxígeno es un metal " la negación de la proposición p es:

-p = " **No** el oxígeno es un metal " (Matemáticamente correcto, pero no coloquialmente o incómodo de leer.)

Usando el lenguaje usual sería:

-p = “oxígeno no es un metal "

aunque también sería correcto decir:

-p = " No es cierto que el oxígeno sea un metal "; porque de una forma u otra estamos negando la afirmación de que el oxígeno es un metal.

Nótese, que no es importante desde el punto de vista de la lógica proposicional, si la proposición es verdadera o falsa, siempre puede negarse.

Utilizaremos el “Valor de Verdad” =1 cuando queremos simbolizar que una proposición es verdadera e =0, para decir que es falsa.

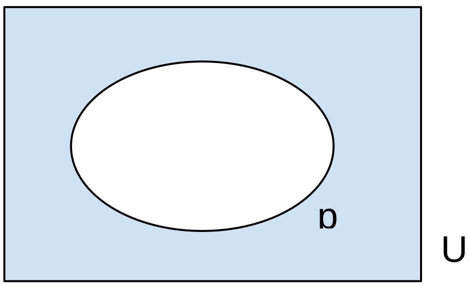
En estas condiciones, para las operaciones entre proposiciones, usaremos “Tablas de Verdad” y “Diagramas de Venn” para “mostrar” el valor de verdad de las proposiciones o de la combinación de varias de ellas.

Para el caso de la negación que nos ocupa ahora tenemos:

Tabla de Verdad:

p	-p
0	1
1	0

Diagrama de Venn:



Conjunción:

La conjunción es una “operación” entre proposiciones que requiere al menos dos proposiciones diferentes.

Dadas estas dos proposiciones que llamaremos p y q , se obtiene una nueva proposición al unir ambas con la conjunción, proposición que leeremos " p y q " ya que será verdadera, cuando ambas “p” y “q” sean verdaderas de manera simultánea.

Se simboliza " $p \wedge q$".

Consideremos las proposiciones:

p = " El oxígeno es un metal”

q = " El hidrógeno es un gas”

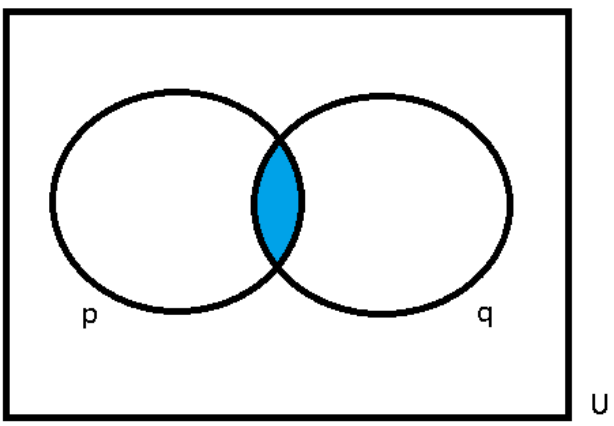
Podemos definir la **conjunción** de ellas diciendo:

$p \wedge q$ = " El oxígeno es un metal y el hidrógeno es un gas " , que resultará verdadera, sólo si ambas proposiciones son verdaderas al mismo tiempo, (como es este el caso).

Tabla de Verdad:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Diagrama de Venn:



Disyunción “o”:

El vocablo "o" tiene , en castellano , dos usos que lo hacen ambiguo, por ejemplo podemos decir “Cristóbal Colon nació en Argentina o Colón descubrió América "

" Será declarado culpable o inocente "

En ambas tenemos una proposición que surge de unir dos proposiciones con la disyunción “o”, pero en ellas el sentido de este " o " es distinto por el significado de la proposición que se define.

Por ello, en lógica, se distinguen dos casos de disyunción distintos: : inclusiva y excluyente.

DISYUNCION INCLUSIVA

Dadas dos proposiciones p y q , queda definida una nueva proposición al unirlas con el vocablo **o** que leeremos "**p ó q**" y si su sentido es incluyente la simbolizaremos:

p v q

De las proposiciones que definimos inicialmente , la proposición:

" Cristóbal Colón nació en Argentina o Colón descubrió América "

es una disyunción en sentido incluyente que indicamos simbólicamente **p v q** , donde

p = " Cristóbal Colón nació en Argentina "

q= " Colón descubrió América "

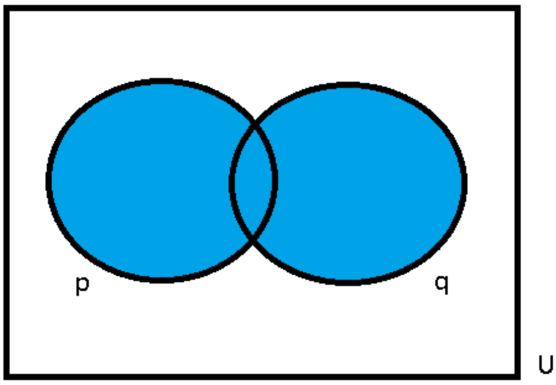
La disyunción es en sentido incluyente pues enuncia una alternativa que no excluye que ocurran ambas acciones. es decir que Colón haya nacido en Argentina que o también descubriera América.

La tabla de valores de verdad de la disyunción en sentido incluyente es :

Tabla de Verdad:

p	q	p v q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Diagrama de Venn:



DISYUNCIÓN EXCLUYENTE

Dadas. dos proposiciones p y q , queda definida una nueva proposición al unirlas con el vocablo “o”, que leeremos "p o q" y si su sentido es excluyente la simbolizaremos.

$$p \veebar q$$

Un ejemplo de disyunción en sentido excluyente es la proposición enunciada anteriormente. " Será declarado culpable o inocente "

Es una disyunción en sentido excluyente , pues las alternativas que plantea no pueden ocurrir a la vez.

Si llamamos t = "Será declarado culpable"

s = "Será declarado inocente"

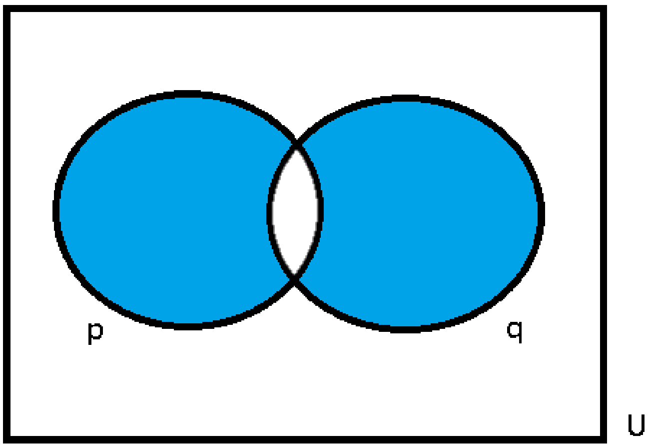
La expresión simbólica de la disyunción entre ambas será: $t \veebar s$

Mientras que:

Tabla de Verdad:

p	q	p v q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

El diagrama de Venn:



Condicional (Entonces)

Dadas dos proposiciones p y q , en ese orden , y las palabras "Si .... entonces ......" queda definida una nueva proposición que leeremos:

“Si p entonces q” o bien “p implica q” y la llamaremos condicional.

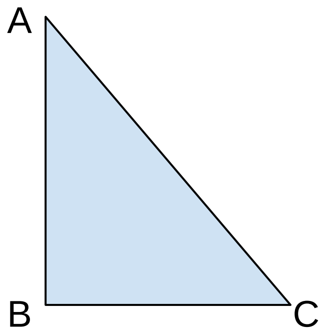
El condicional se simboliza: $p \Rightarrow q$

En el condicional a la proposición p se le llama **antecedente** y a la proposición q se le llama **consecuente.** En esta situación, no solo es importante el nombre, sucede que la condicional, es la única de todas las operaciones entre proposiciones que veremos donde no es aplicable la propiedad conmutativa, es muy importante tener claro que :

$$p \Rightarrow q \neq q \Rightarrow p$$

Un ejemplo de condicional sería

"Si ABC es un triángulo rectángulo entonces B es un ángulo recto "

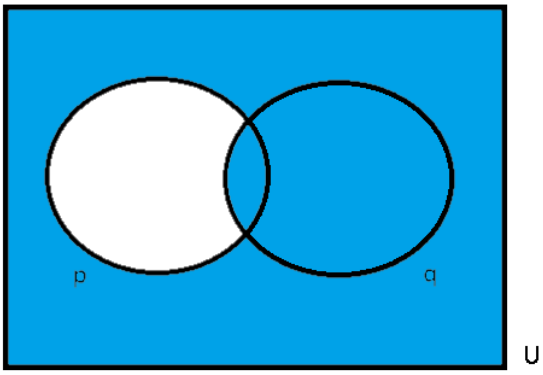


La tabla de Verdad será:

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Nota:Suele ser de utilidad recordar que el único caso en que el “entonces” devuelve un cero como resultado, es cuando el **antecedente** es Verdadero (1) y el **consecuente** es falso (0).

Mientras que el diagrama de Venn que corresponde a esta proposición es:



Bicondicional

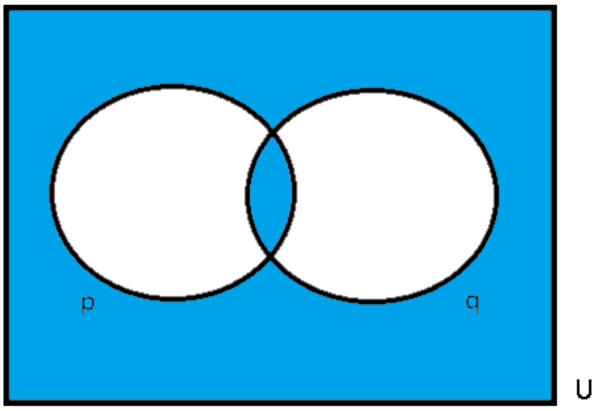
Dadas dos proposiciones p y q puede definirse una nueva proposición al unir ambas con las palabras " si y solo si " esta nueva proposición recibe el nombre de bicondicional y se simboliza $p \Leftrightarrow q$

que será verdadera, solo si ambas proposiciones p y q son falsas a la vez, o si ambas son a la vez verdaderas, es decir:

.La tabla de Verdad será:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Y su diagrama de Venn correspondiente es:



Por último definiremos algunos nombres que reciben las proposiciones (o mejor dicho la combinación mediante operaciones de las mismas) en función de su comportamiento:

TAUTOLOGÍA

Una proposición compleja o compuesta es una **TAUTOLOGÍA** sí y sólo si cualquiera sean los valores de verdad de proposiciones elementales que la componen, la proposición es siempre verdadera.

CONTRADICCIÓN

Una proposición compleja o compuesta es una **CONTRADICCIÓN** si y solo sí cualquiera sean los valores de verdad de las proposiciones elementales que la componen , la proposición es siempre falsa.

CONTINGENCIA

Una proposición compleja o compuesta es una **CONTINGENCIA** si y solo si no es una tautología y no es una contradicción. (O sea, el caso más general).

Definiciones

Consideremos la siguiente proposición:

p = " Chile es un país sudamericano”

En la estructura de una proposición o de una oración, puede establecerse un objeto o un sujeto, sobre el que en la proposición se dice algo.

En este caso, esta oración tiene un sujeto que es **Chile** y un predicado que es: **“es un país sudamericano”.** En este caso sobre el objeto o sujeto, **Chile**, se está afirmando algo, que es un país sudamericano.

Si en la proposición **p** anterior reemplazamos Chile por Egipto queda definida una nueva proposición, sin importar el valor de verdad de la misma.

q = " Egipto es un país sudamericano”

Si reemplazamos Chile por la palabra camisa, la oración " camisa es un país sudamericano " entonces podemos decir que no es una proposición, ya que no tiene podemos considerar que no tiene sentido, ¿o si?.

Podríamos reemplazar el objeto o sujeto considerado por un símbolo indeterminado, por ejemplo la letra “**x”** y quedaría la expresión:

" x es un país sudamericano "

Dado que podemos asignar a x un objeto cualquiera la llamaremos variable.

En base a todo lo anteriormente enunciado definiremos como **“forma proposicional”** a la expresión que se obtiene al tomar una variable como un objeto o sujeto, al que se le atribuye un predicado.

Una forma proposicional **no** es una proposición, pero da lugar a una proposición si reemplazamos la variable por un objeto conveniente.

Las formas proposicionales se indican con la notación: $p_{(x)}$, $q_{(x)}$, $r_{(x)}$, etc.

El “**conjunto”** de los elementos que transforman una forma proposicional en una proposición recibe el nombre de Dominio. (D)

Aquellos elementos del Dominio que transforman una forma proposicional en una proposición verdadera definen lo que se denomina **Conjunto de verdad. (Cv)**

En el ejemplo que estamos analizando el Dominio podría ser

D = "son todos los países del mundo"   ó D = {países de América}

Volvamos al ejemplo: p(x) = " x es un país sudamericano "

Si tomamos como dominio al conjunto D = { son todos los países del mundo)

y modificamos la expresión correspondiente a p(x) anteponiendo la frase : "para todo x" resulta: " para todo x , x es un país sudamericano "

Esta afirmación equivale a decir que todos los países del mundo son sudamericanos, lo cual de manera evidente, resulta una proposición y además falsa.

La frase " para todo x " designa a lo que se llama cuantificador universal y se simboliza " $\forall x$"

O sea la frase anterior puede escribirse

"$\forall x$: x es un país sudamericano " o bien " $\forall x : p(x)$"

De manera similar, si anteponemos a p(x) la expresión "existe x tal que" queda **"Existe x tal que x es un país sudamericano"**

Esta afirmación equivale a decir que existe algún país en el mundo que es sudamericano, lo que evidentemente resulta una proporción y en este caso verdadera.

La frase " existe x " designa a lo que se llama **cuantificador existencial** y se simboliza " $\exists x$". En este caso la proposición obtenida se escribe:

"$\exists x / x$ es un país sudamericano "o bien "$\exists x / p(x)$"

Con todo esto visto, afirmaremos que:

-Una forma proposicional p(x) se transforma en una proposición si:

a) Reemplazamos la variable x de una forma proposicional por un elemento cualquiera del dominio. "

b) Si anteponemos a la forma proposicional un cuantificador universal.

c) Si anteponemos a la forma proposicional un cuantificador existencial.

Tanto "$\forall x : p(x)$" como "$\exists x / p(x)$ " son proposiciones por lo tanto tienen asociado un valor de verdad, es decir que pueden ser verdaderas o falsas.

Diremos que la proposición "$\forall x : p(x)$" es verdadera **sí y solo sí el conjunto de verdad de p (x) es el conjunto Universal o Dominio.**

Diremos que la proposición "$\forall x : p(x)$" es falsa **sí el conjunto de verdad de p (x) NO es el conjunto Universal o Dominio.**

La proposición "$\exists x / p(x)$" es verdadera si el conjunto de verdad de p(x) tiene al menos un elemento (es decir que no es el conjunto vacío).

La proposición "$\exists x / p(x)$" es falsa si el conjunto de verdad de p(x) no tiene elementos o dicho de otro modo, si es el conjunto vacío.

Ejemplo:

Expresar en lenguaje lógico las siguientes proposiciones:

a) Hay políticos y además hay corruptos.
b) Hay políticos y además ellos son corruptos.
c) Todos los políticos son corruptos.
d) Todos son políticos y corruptos.
e) No todos los políticos son corruptos.

Solución:

En todas las proposiciones anteriormente expresadas en lenguaje coloquial, se distinguen dos clases de personas. :

P = { x / x es un político}

C = { x / x es un corrupto}

Podríamos decir que ambos conjuntos de personas se encuentran contenidos en el Universal

U= {x/x es un ser humano}

De este modo, las expresiones "en lenguaje lógico" de las expresiones anteriores serán:

a. Hay polítios y además hay corruptos:	$[\exists x: P(x)] \wedge [\exists x: C(x)]$
b. Hay políticos y además ellos son corruptos	$\exists x: [P(x) \wedge C(x)]$
c. Todos los políticos son corruptos	$\forall x: [P(x) \Rightarrow C(x)]$
d. Todos son políticos y corruptos	$\forall x: [P(x) \wedge C(x)]$
e. No todos los políticos son corruptos	$-\{\forall x: [P(x) \Rightarrow C(x)]\}$

Problemas:

1) Determine cuál de las siguientes oraciones son proposiciones.

a) En 1990 Argentina se consagró campeón mundial de fútbol.
b) Si $x \in \mathbb{N}$ entonces x + 3 es un entero positivo.
c) Quince es un número par.
d) Qué hora es ?
e) Tengo un vecino que es alto.
f) Hasta el año 2000 Argentina habla ganado 2 mundiales de fútbol.

2) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) El 25 de Mayo de 1810 se declaró la independencia.
b) El 9 de Julio de 1816 se formó la 1° Junta de Gobierno.
c) Hipólito Yrigoyen fue presidente de la República.

d) El 25 de Mayo de 1810 se nombró la 1° Junta de Gobierno patrio.

e) Todos los números impares son primos.

f) En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

3) Construya la tabla de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a. $p \wedge (-p)$
b. $[\ p \wedge (-q)] \Rightarrow r$
c. $[(p \vee q) \wedge (q \vee p)] \Rightarrow (p \vee q)$
d. $[\ p \wedge (-p)] \Rightarrow q$
e. $[\ p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p$
f. $\{[\ p \wedge (-q)] \Rightarrow r\} \wedge [\ (p \vee q) \Rightarrow r]$

4) Indicar si las proposiciones del ejercicio anterior son: **Tautología, Contradicción o Contingencia**

5) Considerando las siguientes proposiciones:

p = " 5 es un número mayor que 3”

q = " 13 es un número mayor que 15”

Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a. $(p \wedge q)$
b. $(q \wedge p)$
c. $[(-p) \wedge q]$
d. $[(-p) \wedge (-q)]$

6) Determine el valor de verdad de la proposición compuesta:

$$[(-p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge q)$$

Siendo las proposiciones:

p=“3 es un número menor que 5”

q=“13 es un número mayor que 15”

r=“24 es múltiplo de 6”

7) Considerando las siguientes proposiciones

p = " Estudiaré Matemática Discreta”

q = " Iré al cine”

r = " Estoy de buen humor”

Escribir en lenguaje simbólico las siguientes oraciones.

a) Si no estoy de buen humor, entonces iré a un cine.
b) No iré a un cine y estudiaré Matemática Discreta.
c) Si no estoy de buen humor, iré a un cine y no estudiaré Matemática Discreta.
d) Si no estudio Matemática Discreta, entonces no estoy de buen humor.

8) Realizar la tabla de verdad para las proposiciones de los Ítems a), b), c) y d) del ejercicio anterior.

9) Si $V(p \Rightarrow q) = 0$, determinar el valor de verdad de $-(p \wedge q) \Rightarrow q$

10) considerando los siguientes valores de verdad:

$$V[q \underline{\vee} s] = 1$$
$$V[-p \Rightarrow r] = 0$$
$$V[-p \Rightarrow (q \wedge -r)] = 0$$

Deducir de ser posible el valor de verdad de las proposiciones intervinientes.

11) Con los valores hallados en el ejercicio 10), calcule el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$[(q \Rightarrow -r) \wedge (-q \vee s)]$$

12) Sea el conjunto universal U = R (números reales) y las formas proposicionales:

p(x) = "x es solución de $2x^3 - 8x = 0$"

q(x) = "4x + 3 = -3"

a) Hallar los conjuntos de verdad de las formas proposicionales: p(x) y q(x)
b) ¿Cómo se modifican los conjuntos de verdad si los conjuntos universales son::
   i) U = N (Naturales)
   ii) U = Z (Enteros)
   iii) U = Q (Racionales)
   iv) $U = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

y qué conclusión puede sacar?

c) Hallar el valor de verdad de: p(-2), q(2) y q(-2).
d) Hallar los valores de verdad de :

   i. $-p_{(2)} \wedge q_{(-2)}$
   ii. $p_{(2)} \Rightarrow q_{(2)}$
   iii. $\forall x : q_{(x)}$
   iv. $\exists x / q_{(x)}$

e) Si el conjunto universal es $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ ¿Qué valor de verdad tiene $\forall x$:q(x)?

13) Dado el conjunto universal U = {-5 , -4 ,-3 ,-2 -1,1 , 2 , 3 , 4) y las formas proposicionales:

a) p (x)= " x es negativo mayor o igual a -4 ".
b) q (x) = " x es mayor que -2"
c) r (x) = "x^2 es par "

I) Hallar el conjunto de verdad de las siguientes formas proposicionales: p(x), q(x), -q(x), r(x)

II) Visualizar los conjuntos en un solo diagrama de Venn.

III) Hallar el conjunto de verdad de las siguientes proposiciones:

A. $r_{(x)} \vee p_{(x)}$ B. $r_{(x)} \underline{\vee} p_{(x)}$ C. $r_{(x)} \wedge -p_{(x)}$

D. $r_{(x)} \Rightarrow p_{(x)}$ E. $-[r_{(x)} \Leftrightarrow p_{(x)}]$ F. $[r_{(x)} \wedge p_{(x)}] \Rightarrow -q_{(x)}$

1V) Visualizar los conjuntos (del ítem III) mediante diagramas de Venn.

Respuestas

1) a) Proposición b) Proposición c) Proposición

d) No es proposición e) Discútalo con su docente f) Proposición

2) a) Falso c) Verdadero e) Falso

b) Falso d) Verdadero f) Verdadero

3) a)

p	-p	$p \wedge (-p)$
0	1	0
1	0	0

b)

p	q	-q	p^(-q)	r	p^(-q)->r
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

c)

p	q	p v q	p v q	(p v q) ^ (q v p)	p v q	(p v q) ^ (q v p)-->p v q
0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

d)

p	-p	p ^ (-p)	q	[p^(-p)]-->q
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

e)

p	q	r	q v r	p ^ (q v r)	p	[p ^ (q v r)]-->p
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

f)

p	q	-q	p ^ (-q)	r	(p ^ (-q)) --> r	p v q	r	(p v q) --> r	(p ^ (-q)) --> r ^ (p v q) --> r
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1

4)

a) CONTRADICCIÓN b) CONTINGENCIA c) TAUTOLOGÍA

d) TAUTOLOGÍA e) TAUTOLOGÍA f) CONTINGENCIA

5)

a. $V_{(p \wedge q)} = 0$
b. $V_{(q \wedge p)} = 0$
c. $V_{[(-p) \wedge q]} = 0$
d. $V_{[(-p) \wedge (-q)]} = 0$

6) $V_{[(-p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge q)} = 0$

7)

a. $(-r) \Rightarrow q$
b. $(-q) \wedge p$
c. $(-r) \Rightarrow [q \wedge (-p)]$
d. $(-p) \Rightarrow (-r)$

8) a)

r	-r	q	(-r)-->q
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1

b)

q	-q	p	(-q) ^ p
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

c)

r	-r	q	p	-p	q ^(-p)	(-r)-->[q ^(-p)]
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1

d)

p	-p	r	-r	(-p)-->(-r)
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	1

9)

$$V_{-(p \wedge q) \Rightarrow q} = 0$$

10)

$$V_{(t)} = 0$$
$$V_{(p)} = 0$$
$$V_{(q)} = 0$$
$$V_{(s)} = 1$$

11) $V_{[(q \Rightarrow -r) \wedge (-q \vee s)]} = 1$

12)

a. $Cv[p_{(x)}] = \{-2,0,2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

b. i. $Cv[p_{(x)}] = \{0,2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \{\ \}$

ii. $Cv[p_{(x)}] = \{-2,0,2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \{\ \}$

iii. $Cv[p_{(x)}] = \{-2,0,2\}$ $Cv[q_{(x)}] = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

iv. $Cv[p_{(x)}] = \{\ \}$ $Cv[q_{(x)}] = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

c. $V_{p(-2)} = 1$ $V_{q(2)} = 0$ $V_{q(-2)} = 0$

d. $V_{[p(-2) \wedge q(-2)]} = 0$ $V_{[p(2) \wedge q(2)]} = 0$

$V_{\forall x: q(x)} = 0$ $V_{\exists x: q(x)} = 1$

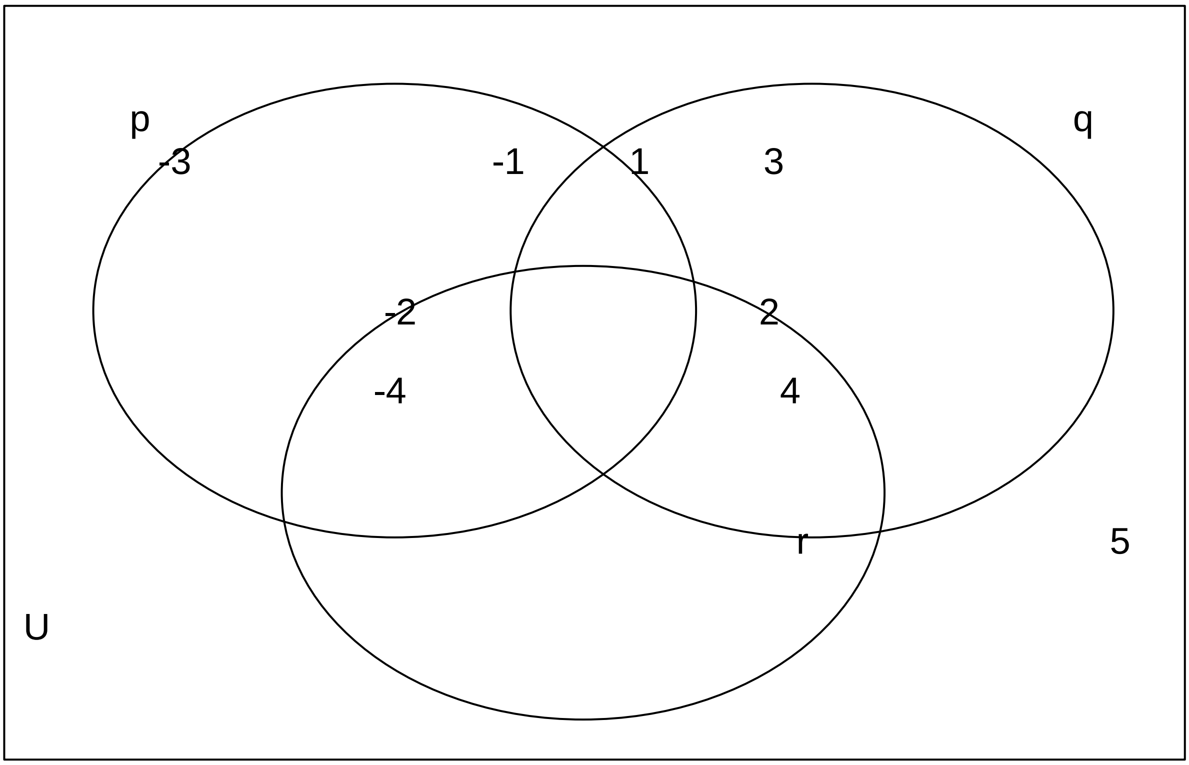
e. $V_{\forall x: q(x)} = 1$

13)

i.

$$Cv[p(x)] = \{-4,-3,-2,-1\}$$
$$Cv[q(x)] = \{-1,1,2,3,4\}$$
$$Cv[-q(x)] = \{-5,-4,-3,-2\}$$
$$Cv[r(x)] = \{-4,-2, 2, 4\}$$

ii.



iii.

$$
\begin{aligned}
&a. \quad Cv = \{-4, -3, -2, -1, 2, 4\} \\
&b. \quad Cv = \{-3, -1, 2, 4\} \\
&c. \quad Cv = \{2, 4\} \\
&d. \quad Cv = \{-4, -3, -2, -1, 1, 3\} \\
&e. \quad Cv = \{-3, -1, 2, 4\} \\
&f. \quad Cv = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}
$$