UNIDAD Nº 4

RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Sea una relación entre dos conjuntos A y B , donde se que A = B , en este caso la relación está definida en un conjunto A , y será un subconjunto del producto cartesiano A.A = A^2 .

Ejemplo

Dado el conjunto A = $\{ 2 , 4 , 6 \}$, se pide hallar el producto cartesiano A.A = A^2 , la relación R : A $\rightarrow$ A / " x es mayor o igual que " , dominio e imagen de la relación.

A.A = A^2 = $\{ (2;2), (2;4), (2;6), (4;2), (4;4), (4;6), (6;2), (6;4), (6;6) \}$

R = $\{ (2;2)\ (4;2), (4;4), (6;2), (6;4), (6;6) \}$

D = $\{ 2, 4, 6 \}$

I = $\{ 2, 4, 6 \}$

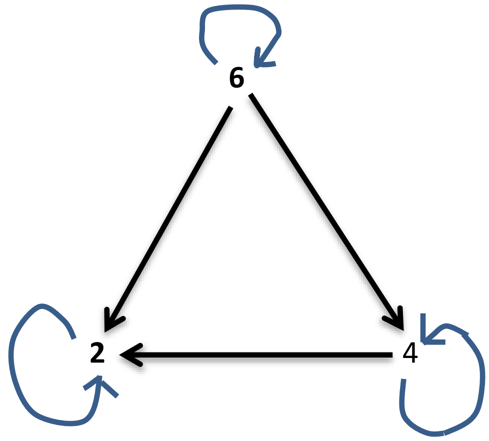
REPRESENTACION GRAFICA DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Las relaciones definidas en un conjunto se representan gráficamente mediante grafos. Los grafos están compuestos por vértices y arcos , los vértices representan cada uno de los elementos del conjunto A , los arcos representan cada uno de los pares ordenados de la relación.

Ejemplo

Dado el conjunto A = $\{ 2 , 4 , 6 \}$ y la relación R : A $\rightarrow$ A / " x es mayor o igual que " , se pide representar gráficamente la relación mediante un grafo.

R = $\{ (2;2)\ (4;2), (4;4), (6;2), (6;4), (6;6) \}$



Cada uno de los arcos del grafo representa un par ordenado de la relación.
El arco que va desde el vértice 6 hasta el vértice 2 , representa el par ordenado (6 ; 2) de la relación , el 6 se llama extremo inicial del arco , el 2 se llama extremo final del arco.
Los vértices (6 ; 4) y (4 ; 2) son arcos adyacentes , pues son arcos distintos pero tienen un vértice en común , (6 ; 4) y (6 ; 2) también son arcos adyacentes.
Un camino , es una sucesión de arcos adyacentes , en los que el extremo final de un arco coincide con el extremo inicial del siguiente.
Los vértices (6 ; 4) , (4 ; 2) es un camino de longitud 2.
Un circuito es un camino en el cuál el vértice inicial del primer arco coincide con el extremo final del último.
Tanto la longitud de los caminos , como la longitud de los circuitos , está dada por la cantidad de arcos que forman la sucesión.
Los circuitos de longitud 1 reciben el nombre de bucle , el arco (6 ; 6) , es un circuito de longitud 1 , por lo tanto es un bucle.

MATRICES BOOLEANAS

Las matrices booleanas son matrices formadas por unos y ceros exclusivamente.
Las matrices booleanas representarán las relaciones definidas en un conjunto.
Los unos representarán los pares ordenados de la relación.

Ejemplo

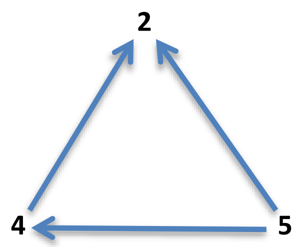
Dado el conjunto A = $\{ \ 2 ; 4 ; 5 \ \}$, se pide hallar por extensión la sig. relación

R : A $\rightarrow$ B / " es mayor que " , representar la relación con un grafo , hallar la matriz asociada a la relación.

$$\mathbf{A^2 = A \cdot A} = \{ (2;2), (2;4), (2;5), (4;2), (4;4), (4;5), (5;2), (5;4), (5;5) \}$$

$$\mathbf{R} = \{ (4;2), (5;2), (5;4) \}$$

G = (A ; R)



$$M = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz M , por representar una relación definida en un conjunto , será siempre una matriz cuadrada.
Si la primer fila de la matriz corresponde al elemento 2 , la primer columna de la matriz también debe corresponder al elemento 2.
Los unos de la matriz representan los pares ordenados de la relación.

SUMA BOOLEANA – OPERACIÓN OR

Para sumar dos matrices en Algebra de Boole se deben cumplir las mismas condiciones que para sumar dos matrices cualesquiera.
Los resultados de cada suma saldrán de la sig. tabla.

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 1

Ejemplo

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M1 + M2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO BOOLEANO – OPERACIÓN AND

Para poder realizar el producto booleano u operación AND , es necesario que las dos matrices tengan el mismo orden o dimensión , la matriz resultado tendrá el mismo orden o dimensión que las matrices operadas.

La operatoria es la misma que para la suma , para obtener un elemento de la matriz resultado es necesario realizar la operación AND entre los elementos ubicados en la misma posición de las matrices a operar.

0 x 0 = 0
0 x 1 = 0
1 x 0 = 0
1 x 1 = 1

Ejemplo

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M1 \cap M2 = M1 \text{ (AND) } M2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M1 \cap M2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

El producto de dos matrices booleanas en un cierto orden , se efectúa de la misma manera que si multiplicaramos dos matrices cualesquiera.
Se deben cumplir las mismas condiciones y la operatoria es la misma.
Lo único que cambia es que al multiplicar una fila de la primer matriz por una columna de la segunda matriz , los productos son operaciones AND y las sumas son operaciones OR.

Ejemplo

M1 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **M2 =** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

M1 . M2 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.0 & 1.0+0.1 & 1.1+0.0 \\ 0.1+1.0 & 0.0+1.1 & 0.1+1.0 \\ 1.1+1.0 & 1.0+1.1 & 1.1+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

El producto de una matriz M por si misma , se designa M^2 .
De la misma manera el producto de una matriz M por una matriz M^2 , se designa M^3 .
Este es uno de los casos en que el producto de matrices cumple con la propiedad conmutativa , es decir , $M . M^2 = M^2 . M = M^3$.