UNIDAD Nº 3

ECUACIONES MATRICIALES

Ejemplo

Dadas las matrices **A** y **B** , hallar la matriz **X** , que haga que se cumpla la sig. igualdad.

2A – 3X = 4B

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **B =** $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Lo primero que hay que hacer para resolver esta ecuación es , transformarla en una suma de matrices.

2A + (– 3X) = 4B

La matriz X para poder sumarse con la matriz 2A tiene que tener el mismo orden o dimensión que ella , por lo tanto la matriz X tendrá orden o dimensión 2x3 .

X = $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$

El objetivo es hallar la matriz X , ahora haremos el producto de 2 por la matriz A.

2.A = 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.(-2) \\ 2.3 & 2.(-1) & 2.4 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Luego haremos el producto de – 3 por la matriz X.

– 3.X = – 3. $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} -3.x_{11} & -3.x_{12} & -3.x_{13} \\ -3.x_{21} & -3.x_{22} & -3.x_{23} \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} -3x_{11} & -3x_{12} & -3x_{13} \\ -3x_{21} & -3x_{22} & -3x_{23} \end{bmatrix}$

Por último hallamos la matriz 4B.

4B = 4. $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 4.(-3) & 4.(-2) & 4.(-1) \\ 4.2 & 4.(-4) & 4.1 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & 4 \end{bmatrix}$

2A – 3X = 4B $\Rightarrow$ **2A + (– 3X) = 4B** $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_{11} & -3x_{12} & -3x_{13} \\ -3x_{21} & -3x_{22} & -3x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+(-3x_{11}) & 4+(-3x_{12}) & -4+(-3x_{13}) \\ 6+(-3x_{21}) & -2+(-3x_{22}) & 8+(-3x_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora para que estas dos matrices sean iguales , además de tener el mismo orden o dimensión , los elementos ubicados en las mismas posiciones deben ser todos iguales.

$$2-3x_{11}=-12 \quad \Rightarrow \quad -3x_{11}=-12-2 \quad \Rightarrow \quad -3x_{11}=-14 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{11}=\frac{14}{3}}$$

$$4-3x_{12}=-8 \quad \Rightarrow \quad -3x_{12}=-8-4 \quad \Rightarrow \quad -3x_{12}=-12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{12}=4}$$

$$-4-3x_{13}=-4 \quad \Rightarrow \quad -3x_{13}=-4+4 \quad \Rightarrow \quad -3x_{13}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{13}=0}$$

$$6-3x_{21}=8 \quad \Rightarrow \quad -3x_{21}=8-6 \quad \Rightarrow \quad -3x_{21}=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{21}=-\frac{2}{3}}$$

$$-2-3x_{22}=-16 \quad \Rightarrow \quad -3x_{22}=-16+2 \quad \Rightarrow \quad -3x_{22}=-14 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{22}=\frac{14}{3}}$$

$$8-3x_{23}=4 \quad \Rightarrow \quad -3x_{23}=4-8 \quad \Rightarrow \quad -3x_{23}=-4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{23}=\frac{4}{3}}$$

Por lo tanto la matriz **X** es **X =** $\begin{bmatrix} \frac{14}{3} & 4 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Vamos a resolver el mismo ejercicio aplicando las propiedades de las operaciones entre matrices ya vistas.

2A – 3X = 4B , 2A + (– 3X) = 4B

Para empezar a despejar la matriz X , el primer paso es , sumar a ambos miembros de la igualdad la matriz – 2A .

2A + (– 3X) + (– 2A) = 4B + (– 2A)

2A + (– 2A) + (– 3X) = 4B + (– 2A)

N + (– 3X) = 4B + (– 2A)

(– 3X) = 4B + (– 2A)

Para obtener la matriz X es necesario multiplicar ambos miembros de la igualdad por $-\frac{1}{3}$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3X) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left[4B+(-2A)\right]$$

$$X = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left[4B+(-2A)\right]$$

4B = 4.$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 4.(-3) & 4.(-2) & 4.(-1) \\ 4.2 & 4.(-4) & 4.1 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & 4 \end{bmatrix}$

– 2.A = – 2.$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} -2.1 & -2.2 & -2.(-2) \\ -2.3 & -2.(-1) & -2.4 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

4B + (– 2A) = $\begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & 4 \end{bmatrix}$ **+** $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} -14 & -12 & 0 \\ 2 & -14 & -4 \end{bmatrix}$

$$\textbf{X =} \left(-\frac{1}{3}\right) . \left[4B + (-2A)\right]$$

X = $\left(-\frac{1}{3}\right)$ **.** $\begin{bmatrix} -14 & -12 & 0 \\ 2 & -14 & -4 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} \frac{14}{3} & 4 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Como se ve , por ambos métodos , se llega al mismo resultado.

Ejemplo

Dadas las matrices **A** y **B** , hallar la matriz **X** , que haga que se cumpla la sig. igualdad.

A.X = B

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **B =** $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

Para multiplicar la matriz A por la matriz X , se debe cumplir que la cantidad de columnas de la matriz A sea igual a la cantidad de filas de la matriz X , como la matriz A tiene 2 columnas , la matriz X tendrá 2 filas.

Pero para que el producto de la matriz A por la matriz X de por resultado una matriz de 3x1 , es necesario que la matriz X tenga una columna.
A tiene orden 3x2 , X tiene orden 2x1 , se pueden multiplicar en ese orden porque la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de X , y además el producto dá por resultado una matriz de orden 3x1.

A.X = B

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.x_{11} + 1.x_{21} \\ -1.x_{11} + 3.x_{21} \\ 0.x_{11} + (-2).x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices debe cumplirse

$$\begin{cases} 2x_{11} + x_{21} = -5 \\ -x_{11} + 3x_{21} = 6 \\ -2x_{21} = -2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{21} = 1} \end{cases}$$

reemplazo este valor en las dos primeras ecuaciones

$$2x_{11} + 1 = -5 \quad \Rightarrow \quad 2x_{11} = -5 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2x_{11} = -6 \quad \Rightarrow \quad x_{11} = -3$$

$$-x_{11} + 3x_{21} = 6 \quad \Rightarrow \quad -x_{11} + 3.1 = 6 \quad \Rightarrow \quad -x_{11} + 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad -x_{11} = 6 - 3 \quad \Rightarrow \quad x_{11} = -3$$

X = $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$