UNIDAD Nº II - TEORIA DE CONJUNTOS

NOCIONES DE CONJUNTOS

El concepto de conjunto es intuitivo y podríamos definirlo simplemente como una colección de objetos.
Se entiende por conjunto a la agrupación de objetos bien diferenciados , todos de una misma clase , por lo cuál tenga sentido agruparlos.
Así podemos hablar de un conjunto de personas , un conjunto de ciudades , un conjunto de números.
Un conjunto está bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no al conjunto.
Llamaremos elemento a cada uno de los objetos que forman parte de un conjunto , estos elementos tienen carácter individual , tienen cualidades que nos permiten diferenciarlos , y cada uno de ellos es único , no habiendo en un conjunto elementos duplicados o repetidos.
Los conjuntos se designan con letras mayúsculas , A , B , C , D , étc.
Los conjuntos se definen de dos formas por extensión y por comprensión.
Definimos un conjunto por **extensión** cuando damos cada uno de los elementos que forman parte del conjunto.
Definimos un conjunto por **comprensión** cuando damos la propiedad que caracteriza a cada uno de los elementos que forman parte del conjunto.

CONJUNTOS NUMERICOS

Definamos algunos conjuntos numéricos necesarios para definir conjuntos.
Naturales , se designan con la letra **N** , son todos los enteros positivos , a este conjunto también se los designa con la letra Z^+.

$$N = Z^+ = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11..........\}$$

Los naturales ampliado , son el conjunto de los naturales más el cero.

$$N_0 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11..........\}$$

Los enteros negativos se designan con Z^-.

$$Z^- = \{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10,-11..........\}$$

El conjunto de los Z , agrupa a los Z^+ , al cero , y a los Z^- .

$$Z = \{\ldots\ldots -11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Ejemplo

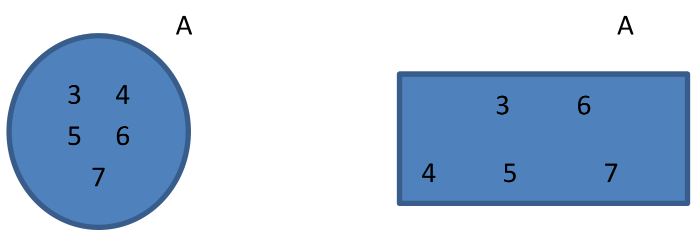
Dado el sig. conjunto $A = \{3,4,5,6,7\}$ expresarlo por comprensión.

$A = \{ x / x \ \varepsilon \ N \wedge 3 \leq x \leq 7 \}$ o $A = \{ x / x \ \varepsilon \ Z \wedge 3 \leq x \leq 7 \}$ o

$A = \{ x / x \ \varepsilon \ Z^{+} \wedge 3 \leq x \leq 7 \}$ o $A = \{ x / x \ \varepsilon \ N_0 \wedge 3 \leq x \leq 7 \}$

REPRESENTACION GRAFICA DE CONJUNTOS

La representación gráfica de conjuntos se hace mediante los diagramas de Venn.
Los diagramas de Venn son figuras planas cerradas.



El borde de la figura plana se llama **frontera** , es el contorno de la figura , la letra que representa el conjunto , en este caso A , se ubica afuera de la figura y cerca de la frontera.
En el interior se ubican los elementos que pertenecen al conjunto.
No importa si otras fronteras atraviesan la frontera de un conjunto , para saber los elementos que forman un conjunto , hay que distinguir o conocer su frontera y todos los elementos que están en su interior pertenecerán a él.
Nunca los conjuntos se presentan aislados , por lo que en las sucesivas representaciones gráficas de conjuntos siempre deberá estar presente el conjunto universal , es el llamado conjunto marco , el mismo se representará siempre con la letra U.

INCLUSION Y PERTENENCIA

Sean A y B dos conjuntos , si ocurre que todo elemento del conjunto A también pertenece al conjunto B , diremos que el conjunto A está incluido en el conjunto B.
El símbolo de inclusión es $\subset$, y se utiliza únicamente entre dos conjuntos , es decir , A $\subset$ B.
En forma simbólica se define la inclusión de conjuntos de la sig. manera.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\ x : x\ \varepsilon\ A \Rightarrow x\ \varepsilon\ B$$

El símbolo de pertenencia ε se utiliza únicamente entre un elemento y un conjunto.
$4\ \varepsilon\ A$ o $6\ \varepsilon\ A$.

Nunca el símbolo de pertenencia puede vincular dos conjuntos.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

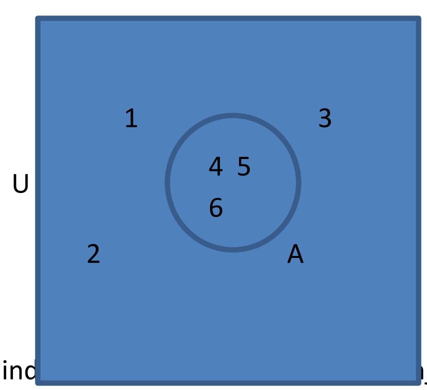
IGUALDAD DE CONJUNTOS

Es evidente que dos conjuntos son iguales si son idénticos , es decir , si tienen los mismos elementos.
Entonces , todo elemento del primer conjunto pertenece al segundo , y todo elemento del segundo pertenece al primero.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

COMPLEMENTACION DE CONJUNTOS

El complemento del conjunto A , es el conjunto formado por los elementos del conjunto universal U que no pertenecen a A.
El conjunto universal se designa siempre con la letra U , es el conjunto marco que contiene a todos los conjuntos de la situación.



En esta situación representada gráficamente mediante diagramas de Venn.

$A = \{ 4 , 5 , 6 \}$

$U = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

El símbolo para inc … junto A es $-A$, o A^C o $\overline{A}$.

Es exactamente el concepto de la negación , o sea el complemento del conjunto A son todos los elementos del universal que no pertenecen al conjunto A.

En forma simbólica $\overline{A} = \left\{ x \in U \ / \ x \notin A \right\}$

Con x designamos en forma simbólica a los elementos de un conjunto.

En la fig. anterior $\overline{A} = \left\{ 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \right\}$

INTERSECCION DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B , es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B.

El símbolo de intersección es $\cap$.

Definimos simbólicamente la intersección entre dos conjuntos A y B de la sig. manera.

$$A \cap B = \left\{ x \in U \ / \ x \in A \wedge x \in B \right\}$$

La propiedad que caracteriza a los elementos de la intersección , es la de pertenecer simultáneamente a los dos conjuntos , que teniendo en cuenta los conectivos lógicos ya estudiados , corresponde a una conjunción.

Ejemplo

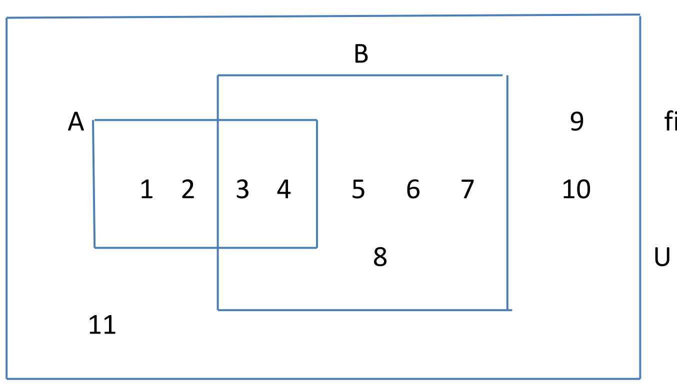


fig. 1

Definamos cada conjunto por extensión , haciendo la sig. aclaración , los elementos pertenecientes a un conjunto son todos los que están adentro de la frontera de ese conjunto , sin importar si la frontera del conjunto a definir es atravesada por otras fronteras.

$A = \left\{ 1 , 2 , 3 , 4 \right\}$ $B = \left\{ 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \right\}$ $U = \left\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 \right\}$

$A \cap B = \{ 3, 4 \}$ $\quad$ $B \cap A = \{ 3, 4 \}$

Supongamos ahora otra situación

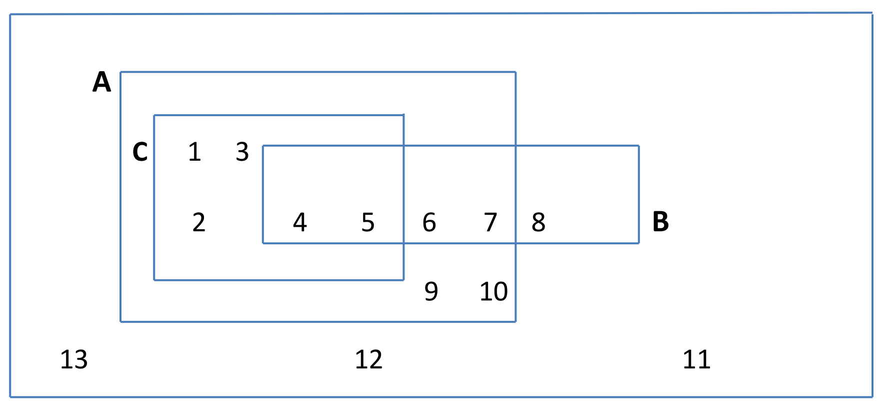


fig. 2

Definamos los conjuntos por extensión.

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 \}$ $\quad$ $B = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$ $\quad$ $C = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \}$

Calculemos a) $A \cap B$ b) $B \cap C$ c) $A \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

a) $A \cap B = \{ 4, 5, 6, 7 \}$

b) $B \cap C = \{ 4, 5 \}$

c) $A \cap C = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

d) $A \cap B \cap C = \{ 4, 5 \}$

UNION DE CONJUNTOS

La unión de dos conjuntos A y B , es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B.
El símbolo de la unión es $\cup$.
Definimos simbólicamente la unión entre dos conjuntos A y B de la sig. manera.

$$A \cup B = \{ x \in U \,/\, x \in A \vee x \in B \}$$

La propiedad que caracteriza a los elementos de la unión , es la de pertenecer a un conjunto o al otro , que teniendo en cuenta los conectivos lógicos ya estudiados , corresponde a una disjunción en sentido incluyente.
Volvamos al ejemplo de la fig.1

Ejemplo

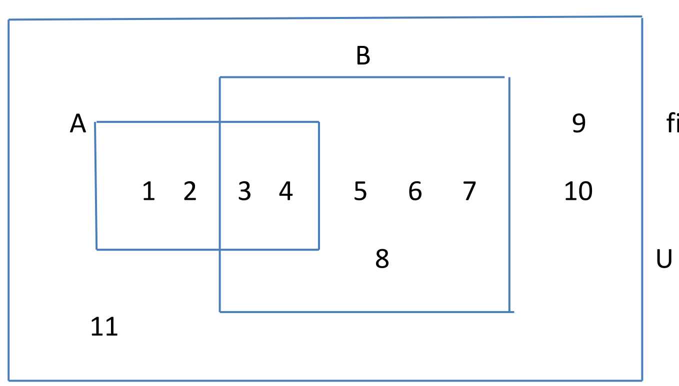


fig. 1

$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$ $B = \{ 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$ $U = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 \}$

Si ahora calculamos a) $A \cup B$

$A \cup B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$

$B \cup A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$

La idea de unir dos conjuntos es la de agregar , no la de sumar , es decir , cuando quiero calcular

$A \cup B$, a los elementos del conjunto A le voy a agregar los elementos del conjunto B , sin repetir elementos.

Trabajemos con el ejemplo de la fig.2.

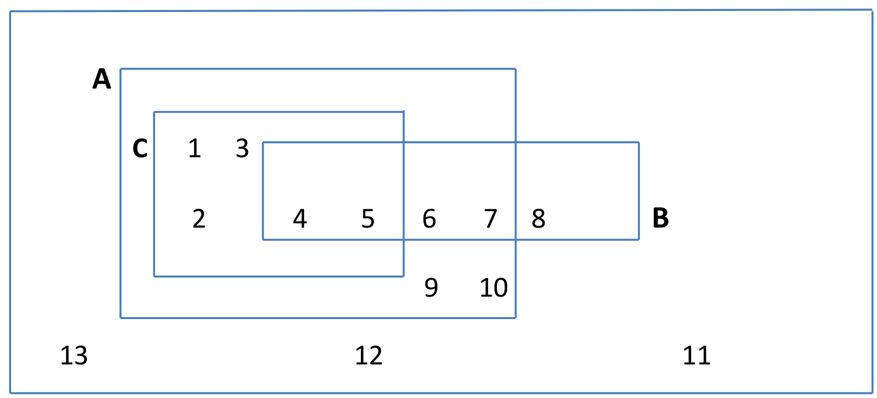


fig. 2

Definimos los conjuntos por extensión.

$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 9 , 10 \}$ $B = \{ 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$ $C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$

$U = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 \}$

Calculemos a) $A \cup B$ b) $B \cup C$ c) $A \cup C$ d) $A \cup B \cup C$

a) $A \cup B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \}$

b) $B \cup C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$

c) $A \cup C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 9 , 10 \}$

d) $A \cup B \cup C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \}$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia entre dos conjuntos A y B se expresa en forma simbólica $A - B$.
Son los elementos que pertenecen al conjunto universal , que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B.
En forma simbólica expresamos la diferencia entre dos conjuntos A y B de la sig. manera.

$$A - B = \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

Si la diferencia a calcular fuera $B - A$.

$$B - A = \{ x \in U \mid x \in B \wedge x \notin A \}$$

Volvamos al ejemplo de la fig.1.

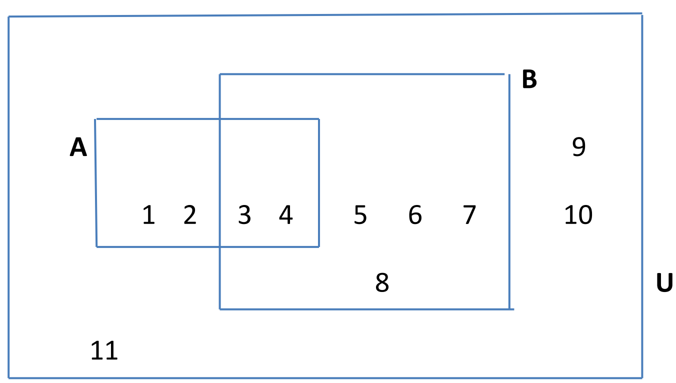


fig. 1

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}$

Si ahora calculamos a) $A - B$ y b) $B - A$

$A - B = \{ 1, 2 \}$

$B - A = \{ 5, 6, 7, 8 \}$

Si trabajamos con el ejemplo de la fig.2.

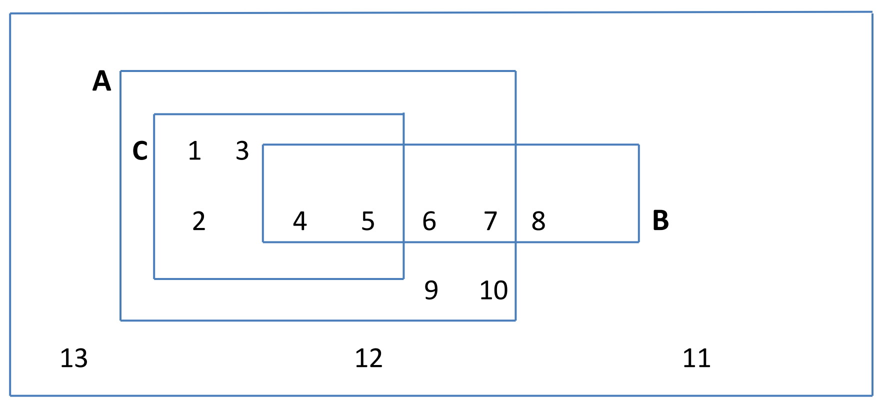


fig. 2

Definimos los conjuntos por extensión.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$ $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

Calculemos a) $A - B$ b) $B - C$ c) $A - C$ d) $A - (B \cup C)$

a) $A - B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$

b) $B - C = \{6, 7, 8\}$

c) $A - C = \{6, 7, 9, 10\}$

d) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A - (B \cup C) = \{9, 10\}$