MATEMÁTICA

UNIDAD 1: LOGICA:
Lógica Proposicional y Función Proposicional

UNIDAD 2: CONJUNTO:
Noción de conjuntos. Inclusión. Subconjuntos. Conjuntos numéricos. Unión. Intersección. Complemento. Diferencia. Diferencia simétrica. Leyes de De Margan. Problemas de conteo. Traducción de lenguaje coloquial a notación conjuntista.

UNIDAD 3: MATRICES
Matriz. Orden. Fila. Columna. Matrices cuadradas y rectangulares. Propiedades. Matriz traspuesta. Matriz simétrica. Operación: suma, resta y multiplicación de matrices.

UNIDAD 4: RELACIONES
Producto cartesiano. Relaciones binarias. Dominio. Imagen. Representación. Relaciones en un conjunto. Grafos dirigidos como representación de una relación. Camino. Algebra de boole, operación OR y operación AND, multiplicación. Matriz asociada a una relación. Propiedades. Representación en computadoras de relaciones y grafos.
Propiedades de una relación. Clasificación. Relaciones de equivalencia y orden. Análisis de las propiedades según la matriz asociada a la relación y el dígrafo correspondiente. Diagrama de Hasse.

UNIDAD 5: SISTEMA BINARIO
Pasajes de sistema binario a decimal y viceversa. Operaciones: suma, resta y multiplicación

UNIDAD 6: GRAFOS Y ARBOLES
Grafos no dirigidos. Camino, circuito, trayectoria. Arboles binarios. Recorrido en orden inicial, intermedio y final. Valor numérico.
Redes. Problemas de aplicación.

Bibliografía:

- **Álgebra I.** Armando Rojo. Editorial El Ateneo
- **Álgebra II.** Armando Rojo. Editorial El Ateneo
- **Matemática discreta.** Grassman. Editorial PRENTICE - HALL

TABLA DE SISMBOLOS O NOTACIONES:

$\mathbb{N}$ *conjunto de números naturales*

$\mathbb{N}_0$*conjunto de números naturarles incluido el cero*

$\mathbb{Z}$ *conjunto de números enteros*

$\mathbb{Q}$ *conjunto de números racionales*

I *conjunto de números irracionales*

$\mathbb{R}$ *conjunto de números reales*

$\mathbb{C}$ *conjunto de números complejos*

$\mathbb{R}^+$ *conjunto de números reales positivos*

$\mathbb{R}^-$*conjunto de números reales negativos*

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *conjunto de números reaales positivos incluido el cero*

$\subset$ *se lee "esta incluido estrictamente en" o "incluye estrictamente en"*

$\subseteq$ *e lee "esta incluido ampliamente en" o "incluye ampliamente en"*

$\not\subset$ *e lee "no esta incluido" o "no contine"*

$\in$ *se lee "pertenece"*

$\notin$ *se lee "no perrtenece"*

$\exists$ *se lee "existe por lo menos uno"*

$\nexists$ *se lee "no existe"*

$\exists^*$*se lee "existeuno y solo uno"*

$\Longrightarrow$ *se lee "inplica"*

$\Longleftrightarrow$ *se lee "si y solo si"*

$\forall$ *se lee "para todo"*

$|x|$*se lee "valor absolutode x"*

$\emptyset$ *se lee "conjunto vacio"*

$\mathbb{U}$ *se lee "conjunto universal"*

$/$ *se lee "tal que"*

$\wedge$ *se lee "y"*

$\vee$ *se lee "o"*

$<$ *se lee "menor" estrictamente*

$\leq$ *se lee "menoro igual"*

$>$ *se lee "mayor" estrictamente*

$\geq$ *se lee "mayor o igual"*

$\cong$ *se lee "igual o semejante"*

$\neq$ *se lee "no es igual"*

$\equiv$ *se lee "equivalente"*

$\cup$ *se lee "unión"*

$\cap$ *se lee "intersección"*

$\notin$ *se lee "no perrtenece"*

$\#$ *se lee "cardinal"*

Unidad 1. Lógica

1) Determine cuál de las sigs. oraciones son **proposiciones**.

a) En 1990 Argentina se consagró campeón mundial de fútbol.
b) Si **x € N**, entonces **x + 3** es un número entero positivo.
c) Quince es un número par.
d) ¿Qué hora es?
e) Cristóbal Colón descubrió América en 1810?

2) Determine el **valor de verdad** de las sig. **proposiciones**.
a) El 25 de Mayo de 1810 se declaró la independencia de Argentina.
b) El 9 de Julio de 1816 se formó la Primera Junta de Gobierno.
c) Hipólito Irigoyen fue presidente de Argentina.
d) El 25 de Mayo de 1810 se nombró la Primera Junta de Gobierno patrio.
e) Todos los números impares son primos.
f) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

3) Construya la **tabla de verdad** de cada una de las sigs. proposiciones.

a) $p \wedge (-p)$
b) $[p \wedge (-q)] \Rightarrow r$
c) $[(p \vee q) \wedge (q \vee p)] \Rightarrow (p \vee q)$
d) $[p \wedge (-p)] \Rightarrow q$
e) $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p$
f) $\{[p \wedge (-q)] \Rightarrow r\} \wedge [(p \vee q) \Rightarrow r]$

4) Indicar si las proposiciones del ejercicio anterior son, **Tautología, Contradicción o Contingencia**.

5) Considerando las sigs. proposiciones

p: "5 es un número mayor que 3 "
q: "13 es un número mayor que 15 "

Analizar el **valor de verdad** de las sigs. proposiciones
a) $(p \wedge q)$
b) $(q \wedge p)$
c) $(-p) \wedge q$
d) $(-p) \wedge (-q)$

6) Determinar el valor de verdad de la proposición compuesta

$[(-p \wedge q) \vee r)] \Rightarrow (p \wedge q)$

Siendo las proposiciones "**p: "3 es un número menor que 5 "**
q: "13 es un número mayor que 15 "
r: "24 es múltiplo de 6 "

7) Considerando las sig. proposiciones **p: "Estudiaré Matemática Discreta "**
q: "Iré al cine "
r: "Hoy estoy de buen humor "

Escribir en lenguaje simbólico las sigs. oraciones
a) Si no estoy de buen humor, entonces iré al cine ".
b) No iré al cine y estudiaré Matemática Discreta.
c) Si hoy no estoy de buen humor, iré al cine y no estudiaré Matemática Discreta.
d) Si no estudio Matemática Discreta, entonces hoy no estoy de buen humor.

8) Realizar la **tabla de verdad** para las **proposiciones** de los ítems**, a) , b) , c) y d) del ejercicio anterior.**

9) **Si** $V_{(p \Rightarrow q)} = 0$ **,** determinar **el valor de verdad** de la sig. **proposición** $-(p \wedge q) \Rightarrow q$ **.**

10) Considerando los **valores de verdad de las sigs. proposiciones**

$V_{(-p \Rightarrow r)} = 0$
$V_{[-p \Rightarrow (q \wedge -r)]} = 0$

Deducir, si es posible, **los valores de verdad de todas las proposiciones simples** que intervienen**.**

11) Con los valores hallados en el ejercicio 10) calcule **el valor de verdad** de la sig. proposición.

$$V_{[(q \Rightarrow -r) \wedge (-p \vee r)]}$$

12) Sea el conjunto Universal U = R (Números Reales) y las sigs. formas proposicionales

$p_{(x)}$: " x es solución de $2x^3 - 8x = 0$ "
$q_{(x)}$: " $4x + 3 = -3$ "

a) Hallar el conjunto de valores de verdad de las formas proposicionales, $p_{(x)}$ y $q_{(x)}$.
b) Como se modifican los conjuntos de valores de verdad si el conjunto Universal es

i) U = N (Naturales   ii) U = Z (Enteros   iii) U = Q (Racionales
iiii) U = $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

c) Hallar el valor de verdad de $p_{(-2)}$, $q_{(2)}$, $q_{(-2)}$.
d) Hallar el valor de verdad de

i) $-p_{(2)} \wedge q_{(-2)}$ ii) $p_{(2)} \Rightarrow q_{(2)}$ iii) $\forall x : q_{(x)}$ iiii) $\exists x / q_{(x)}$

e) Si el conjunto Universal es U = $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ ¿ qué valor de verdad tiene $\forall x : q_{(x)}$?

13) Dado el conjunto Universal = $\{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$ y las formas proposicionales.

a) $p_{(x)}$: " x es un entero negativo mayor o igual a -4 "
b) $q_{(x)}$: " x es un entero mayor que -2 "
c) $r_{(x)}$: " x es un entero y x^2 es par "

i) Hallar el conjunto de Valores de Verdad de las sigs. formas proposicionales, $p_{(x)}$, $q_{(x)}$, $-q_{(x)}$, $r_{(x)}$.
ii) Visualizar los conjuntos en un solo diagrama de Venn.
iii) Hallar el conjunto de Valores de Verdad de las sigs. formas proposicionales.

A) $r_{(x)} \vee p_{(x)}$ B) $r_{(x)} \wedge -p_{(x)}$ C) $r_{(x)} \Rightarrow p_{(x)}$ D) $-\left[r_{(x)} \Leftrightarrow p_{(x)}\right]$
E) $\left[r_{(x)} \wedge p_{(x)}\right] \Rightarrow -q_{(x)}$

Unidad 1. Lógica. Respuestas

1)
a) Proposición
b) Proposición
c) Proposición
d) No es una Proposición, es una pregunta
e) Proposición

2)
a) Falso
b) Falso
c) Verdadero
d) Verdadero
e) Falso
f) Verdadero

3)

a)

p	- p
1	0
0	1

b)

p	q	- q	p ∧ (- q)	r	$[p \wedge (-q)] \Rightarrow r$
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1

c)

p	q	p	p ∨ q	q ∨ p	(p ∨ q) ∧ (q ∨ p)	p ∨ q	$[(p \vee q) \wedge (q \vee p)] \Rightarrow (p \vee q)$
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1

p	q	- q	p $\wedge$ (- q)	r	$[p\wedge(-q)]\Rightarrow r$	p $\vee$ q	r	(p $\vee$ q) $\Rightarrow$ r	$\{[p\wedge(-q)]\Rightarrow r\}\wedge[(p\vee q)\Rightarrow r]$
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0

d)

e)

p	- p	p $\wedge$ (- p)	q	$[p\wedge(-p)]\Rightarrow q$
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1

f)

p	q	r	q $\vee$ r	p $\wedge$ (q $\vee$ r)	p	$[p\wedge(q\vee r)]\Rightarrow p$
1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1

4)

a) Contradicción b) Contingencia c) Tautología d) Tautología
e) Tautología f) Contingencia

5)

a) $V_{(p\wedge q)}=0$ b) $V_{(q\wedge p)}=0$ c) $V_{[(-p)\wedge q]}=0$

d) $V_{[(-p)\wedge(-q)]}=0$

6) $V_{\{[-p\wedge q]\vee r\}\Rightarrow(p\wedge q)}=0$

7)

a) $(-r)\Rightarrow q$ b) $(-q)\wedge p$ c) $(-r)\Rightarrow[q\wedge(-p)]$

d) $(-p)\Rightarrow(-r)$

8)

a)

r	$-$ r	q	$(-r)\Rightarrow q$
1	0	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1

b)

q	$-$ q	p	$(-q)\wedge p$
1	0	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

c)

r	$-$ r	q	p	$-$ p	$q\wedge(-p)$	$(-r)\Rightarrow[q\wedge(-p)]$
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1

p	− p	r	− r	$(-p)\Rightarrow(-r)$
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0

0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1

d)

9)

$V_{[-(p\wedge q)]\Rightarrow q}=0$

10)

$V_{(p)}=0$ $\quad V_{(q)}=0$ $\quad V_{(r)}=0$

11)

$V_{[(q\Rightarrow -r)\wedge(-p\vee r)]}=1$

12)

a) $C_V\left[p_{(x)}\right]=\{-2{,}0{,}2\}$ $\quad C_V\left[q_{(x)}\right]=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

b)

i) $C_V\left[p_{(x)}\right]=\{0{,}2\}$ $\quad C_V\left[q_{(x)}\right]=\{\ \}$

ii) $C_V\left[p_{(x)}\right]=\{-2{,}0{,}2\}$ $\quad C_V\left[q_{(x)}\right]=\{\ \}$

iii) $C_V\left[p_{(x)}\right]=\{-2{,}0{,}2\}$ $\quad C_V\left[q_{(x)}\right]=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

iiii) $C_V\left[p_{(x)}\right]=\{\ \}$ $\quad C_V\left[q_{(x)}\right]=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

c)

$V_{p(-2)}=1$ $\quad V_{q(2)}=0$ $\quad V_{q(-2)}=0$

d)

i) $V_{[-p(2)\wedge q(-2)]}=0$

ii) $V_{[p(2)\Rightarrow q(2)]}=0$

iii) $V_{[\forall x:q_{(x)}]}=0$

iiii) $V_{[\exists x/q_{(x)}]}=1$

e)

$V_{[\forall x:q_{(x)}]}=1$

13)

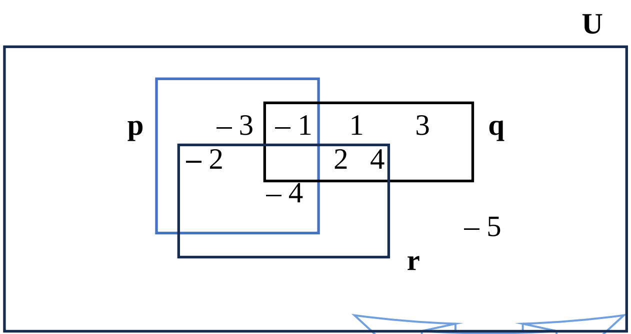
i) $C_V\left[p_{(x)}\right]=\{-4,-3,-2,-1\}$

$C_V\left[q_{(x)}\right]=\{-1{,}1{,}2{,}3{,}4\}$

$C_V\left[-q_{(x)}\right]=\{-5,-4,-3,-2\}$

$C_V\left[r_{(x)}\right]=\{-4,-2{,}2{,}4\}$

ii)



iii)

A) $C_V = \{-4,-3,-2,-1,2,4\}$

B) $C_V = \{2,4\}$

C) $C_V = \{-5,-4,-3,-2,-1,1,3\}$

D) $C_V = \{-3,-1,2,4\}$

E) $C_V = \{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$

Unidad 2. CONJUNTOS

DEFINICIÓN: Cuando decimos $A = \{ x / x$ tiene la propiedad " p " $\}$, cualquier elemento que tenga esa propiedad pertenece al conjunto. En símbolos es $x \in A$, en consecuencia (∴) la pertenencia es una relación de elemento a conjunto.

1) Sea $A = \{1, 2, 4, a, b, c\}$. Indicar cada uno de los siguientes casos como verdadero " V " o falso " F ".

a)	b)	c)	d)	e)
$2 \in A$	$3 \in A$	$c \notin A$	$\varnothing \in A$	$A \in A$
☐	☐	☐	☐	☐

DEFINICIÓN: Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro, se dice que está incluido. En consecuencia (∴) la inclusión es una relación de conjunto a conjunto.

$\subseteq$ se lee " está incluido ampliamente en " o " incluye ampliamente a "
Simbólicamente: $A \subseteq B \iff \forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$

$\subset$ se lee " está incluido estrictamente en " o " incluye estrictamente a "
Simbólicamente: $A \subset B \iff \forall\, x \in A \Rightarrow x \in B \ \wedge\ \exists\ y \in B \ / \ y \notin A$

2) Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, a, 2, b, c\}$, $C = \{b, c\}$, $D = \{a, b\}$, $E = \{1, a, 2, b, c, d\}$

Completar con incluido: $\subset$ o no incluido: $\not\subset$, para dar un enunciado verdadero.

a) A ☐ B b) $\varnothing$ ☐ A c) B ☐ C d) C ☐ E e) D ☐ C f) B ☐ E

3) Escribir el conjunto de potencia de B , ($P_{(B)}$) , siendo el conjunto B = { C# ; JAVA ; VB.NET. }.

4) A) Considerando los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d\}$ con dominio $D = \{a, b, c, d, e\}$ y las formas proposicionales:

$p_{(x)}$ = x pertenece al conjunto A , $q_{(x)}$ = x pertenece al conjunto B

Definir por extensión el conjunto de verdad correspondiente a:

a) $p_{(x)} \wedge q_{(x)}$ b) $p_{(x)} \vee q_{(x)}$ c) $p_{(x)} \wedge -q_{(x)}$ d) $-p_{(x)} \wedge q_{(x)}$ e) $-p_{(x)}$

f) $-[\,p_{(x)} \wedge q_{(x)}\,]$ g) $-p_{(x)} \vee -q_{(x)}$ h) $-p_{(x)} \wedge -q_{(x)}$ i) $-[\,p_{(x)} \vee q_{(x)}\,]$

B) Sombrear en un diagrama de **Venn** el conjunto verdad correspondiente a cada uno de los casos anteriores, considerando dominio D = U

5) Considerando las formas proposicionales:

$p_{(x)}$ = x pertenece al conjunto A , $q_{(x)}$ = x pertenece al conjunto B

a) Escribir en lenguaje simbólico la siguiente proposición:

" Todos los elementos del dominio verifican que si pertenecen al conjunto A, entonces pertenecen al conjunto B".

b) Dar el valor de verdad siendo:

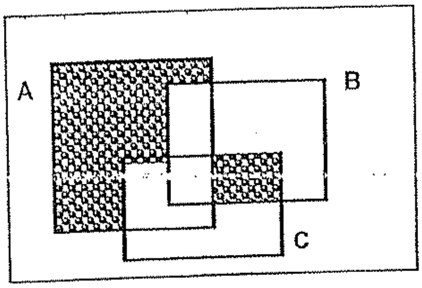
b_1) $A = \{1, 2, 3\} \wedge B = \{1, 2, 3, 4, 0\}$

b_2) $A = \{1, 2, 3, 4, 0\} \wedge B = \{3, 2, 1\}$

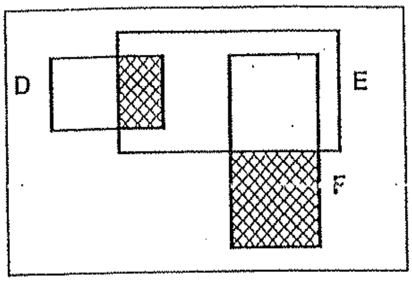
b_3) $A = \varnothing \wedge B = \{-1, 0, 1\}$

6) Escribir con notación conjuntista una operación que represente las regiones sombreadas en los siguientes diagramas

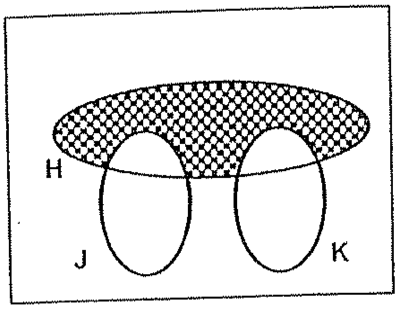
a)



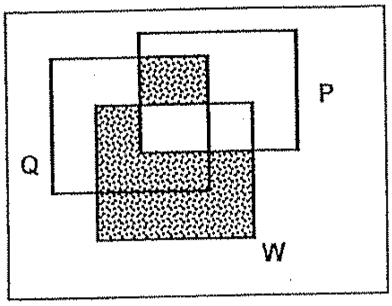
b)



c)



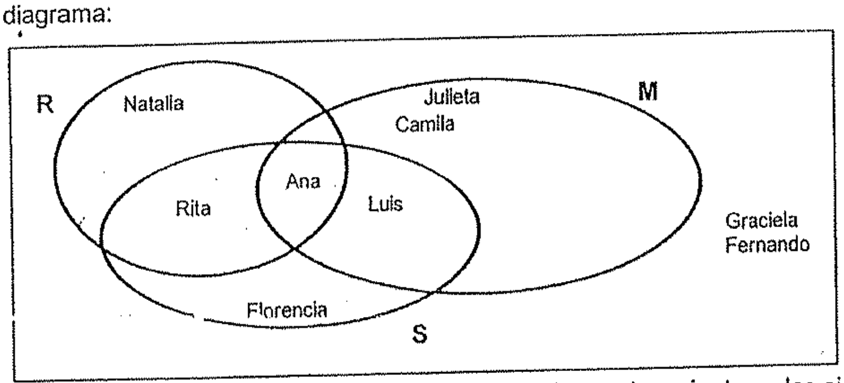
d)



7) Verificar mediante diagramas de **Venn** las leyes de **De Morgan** para tres conjuntos.

PROBLEMAS DE CONTEO

8) Dados los conjuntos:
R = personas de cabello rubio   M = personas con ojos marrones   S =personas que miden menos de 1,70 m
y el siguiente diagrama:



Definir por extensión y describir las características de los elementos pertenecientes a los siguientes conjuntos:

a) $R \cap \overline{M} \cap \overline{S}$ **b)** $R - M$ **c)** $\overline{R} \cap \overline{M} \cap \overline{S}$ **d)** $M \cap S \cap \overline{R}$ **e)** $R \cap \overline{S} \cap M$

9) Sombrear en un diagrama la región correspondiente a:

a) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ **b)** $A \cap B \cap \overline{C}$ **c)** $\overline{A \cup B \cup C}$ **d)** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

10) Dados tres conjuntos sombrear en un diagrama de **Venn** la región donde ubicarla a:

a) Los elementos que pertenecen **por lo menos a dos** de los conjuntos.
b) Los elementos que pertenecen **a sólo dos** de los conjuntos.
c) Los elementos que pertenecen **a lo sumo a uno** de los conjuntos.
d) Los elementos que pertenecen **exactamente a uno** de los conjuntos.

11) Sabiendo que:

$\#(A \cup B \cup C) = 65 \qquad \#(A \cap B \cap C) = 3 \qquad \#(A \cap B) = 20 \qquad \#A = \#B = 35$

$\#(B \cap C) = 10 \qquad \#[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)] = 32$

Calcular:

a) $\#[C \cap (\bar{A} \cap \bar{B})]$

b) La cantidad de elementos que pertenecen **a sólo** un conjunto, escribirlo en notación conjuntista.

---

12) Se tienen tres conjuntos **A**, **B** y **C**. Sabiendo que:

$\#\overline{(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})} = 90 \qquad \#(A \cap B \cap \bar{C}) = 5 \qquad \#(B \cap C) = 16 \qquad \#[\overline{(A \cup B \cup C)}] = 20$

$\#A = 50 \qquad \#B = 30 \qquad \#[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = 30 \qquad \#(A \cap B) = 17$

a) ¿Cuántos elementos hay **a lo sumo** en dos conjuntos?.

b) ¿Cuántos elementos hay **solamente** en dos conjuntos?.

c) ¿Cuántos elementos **tiene** el conjunto **C**?.

Nota: en los siguientes problemas realizar el diagrama de Venn correspondiente y expresar los datos y las respuestas en notación conjuntista.

---

13) En un atlas hay **97** mapas de **Argentina**, de los cuales **35** están **coloreados**.
El atlas **tiene** un total de **128** mapas **coloreados**. Hay **30** mapas que **no** tienen **color ni** son de **Argentina**.

a) ¿Cuántos mapas **tiene** el atlas?.

b) ¿Cuántos mapas son de **Argentina** pero **sin color**?.

c) ¿Cuántos mapas **coloreados no** son **de Argentina**?.

---

14) Sobre un total de **80** personas se sabe que:

44 se inscribieron en un curso de **Windows**
5 " " " " " " **Windows** y **DOS** solamente
16 en **DOS** y **Cobol**
17 en **Windows** y **DOS**
28 se inscribieron por lo menos en dos cursos
17 en ninguno de esos cursos
30 en **DOS**

Se pide:
- **a)** ¿Cuántos se anotaron en un **solo** curso?
- **b)** ¿Cuántos se anotaron **a lo sumo** en dos cursos?
- **c)** ¿Cuántos se anotaron **solamente** en dos cursos?

SOLUCIÓN: (no es única)

A partir de los datos podemos calcular los valores que necesitamos para completar el diagrama:

Primero:

$$D = (D \cap W \cap \bar{C}) \cup (D \cap C \cap W) \cup (D \cap C \cap \bar{W}) \cup (D \cap \bar{C} \cap \bar{W})$$

$$30 = 5 + 12 + 4 + \#(D \cap \bar{C} \cap \bar{W})$$

$$\#(D \cap \bar{C} \cap \bar{W}) = 9$$

Segundo:

$$U = \overline{(W \cup D \cup C)} \cup W \cup (D \cap C \cap \bar{W}) \cup (D \cap C \cap W) \cup (C \cap \bar{D} \cap \bar{W})$$

$$80 = 17 + 44 + 4 + 9 + \#(C \cap \bar{D} \cap \bar{W})$$

$$\#(C \cap \bar{D} \cap \bar{W}) = 6$$

Tercero:

$$28 = \#(D \cap W \cap \overline{C}) + \#(D \cap C \cap \overline{W}) + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + \#(D \cap C \cap W)$$

$$28 = 5 + 4 + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + 12$$

$$\#(C \cap W \cap \overline{D}) = 7$$

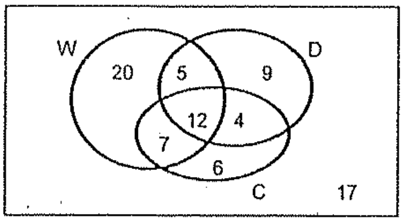
Cuarto:

$$W = \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap D \cap C) + \#(W \cap C \cap \overline{D}) + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$44 = 5 + 12 + 7 + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) = 20$$

El diagrama completo es:



a) Los que se anotan en **un solo** curso son:

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) =$$
$$20 + 6 + 9 = 35$$

b) Los que se anotaron a **lo sumo** en dos cursos son:

En ningún curso: $\#(\overline{W \cup D \cup C}) = 17$

En un curso: $\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) = 20 + 6 + 9 = 35$

En dos cursos: $\#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = 16$

El total será: 17 + 35 + 16 = **68**

c) Los que se anotaron **solamente** en dos cursos son:

En dos cursos: $\#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = 16$

---

15) En una encuesta se supo que:

4 personas leen las revistas: Caras, El Gráfico y Muy Interesante.
6 leen solamente la revista **M I**
16 las revistas **M I** y **E G**
20 leen **C** pero no **M I**
12 leen **C** y **E G**
4 sólo leen **E G**
26 leen **C**
50 ninguna de las tres revista

Se desea saber:
- **a)** ¿Cuántas personas leen alguna de las tres revistas?
- **b)** ¿Cuántas leen una sola revista?
- **c)** ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- **d)** ¿Cuántas personas leen por lo menos dos revistas?

---

16) En el primer año de una carrera de computación se registró la siguiente estadística:
El 10% de los alumnos estudiaban **por lo menos** una de las siguientes materias: Matemática, Programación I e Ingles. Además 28 estudian Matemática, 22 Programación I, y 28 Ingles; **sólo 2** alumnos estudian las tres materias, 12 estudian Matemática e Ingles, 12 estudian Programación I e Ingles y **10 sólo** Matemática.

Se pide:

a) ¿Cuántos alumnos estudian **alguna** de las tres materias?
b) ¿Cuál es la cantidad **total** de alumnos?
c) ¿Cuántos estudian Matemática **y** Programación I pero **no** Ingles?
d) ¿Cuántos estudian **sólo 2** materias?

---

17) Un video club cuenta con **200** películas, de las cuales **125** son de cortometraje y **94** son de color. Además **38** de las películas de largometraje son de color.

a) ¿ Cuántas películas blanco y negro hay ? b) ¿ Cuántas de las de cortometraje son de color ?

---

18) En una ciudad existen tres cadenas de supermercados: **A , B , C.**
Una encuesta indicó que el **70 %** de los habitantes compra en alguno de esos supermercados, el **30 %** compra en por lo menos dos de ellos, mientras que el **25 %** lo hace exactamente en dos de ellos.
Hay un **5 %** de habitantes que compra sólo en **B** y **C**.
Se sabe, además, que el porcentaje de personas que compra sólo en A y B es igual al que compra sólo en A y C.
La cadena A acapara el **40 %** del público al igual que la cadena B.

a) ¿Qué cantidad de personas compra **sólo** en la cadena B?.
b) ¿Qué porcentaje lo hace en una sola de las cadenas existentes?.

---

19) Los empleados de una gran empresa de insumos para computación, cuando asisten a Buenos Aires, pueden hospedarse en tres grandes hoteles: el **Sheraton**, el **Bauen** y el **Libertador**, o bien por su cuenta en algún otro.
Se sabe por experiencias anteriores, que el **80 %** elige uno de los tres hoteles citados. Además, el **20 %** se hospedó alguna vez en el **Sheraton** y el **Bauen**, el **15 %** en los tres hoteles, el **12 %** eligió sólo el **Bauen** y el **Libertador** y nadie eligió sólo el **Sheraton** y el **Libertador**.
Si los porcentajes de personas que prefieren sólo uno de los hoteles mencionados son iguales, se pide:

a) ¿Qué porcentaje de personas se aloja en **sólo uno** de los hoteles citados?.
b) ¿Qué porcentaje lo hace en **por lo menos dos** de ellos?.

---

20) Un video – club ofrece a sus socios tres estrenos: una película de **acción**, una de **terror** y una **comedia**.
Se sabe que **46** de los **100** socios que tiene el video aceptaron la propuesta, de los cuales **40** alquilaron por lo menos dos de las películas, **6** alquilaron las **3**,
30 alquilaron la película de **acción** y la de **terror**, mientras que **4** alquilaron sólo la película de **acción** y la **comedia**, **3** alquilaron sólo la **comedia** y la película de **acción** la alquilaron **37** personas.

El dueño del video quiere saber:

a) ¿Cuántas personas alquilaron **sólo** la película de **terror**?.
b) ¿Cuántas personas alquilaron **sólo dos** películas?.

---

21) En el museo de Bellas Artes hubo una muestra de tres pintores: **Joan Miró, Juan Gris y Kandinsky.**
Se sabe que el fin de semana fueron al museo **3540** personas de las cuales el **40 %** visitaron las muestras, el **30 %** visitaron por lo menos dos de las muestras, el **5 %** visitaron las tres muestras.
Las muestras de **Joan Miró** y **Juan Gris** la visitaron un **20 %**, un **3 %** fue sólo a la muestra de **Joan Miró** y **Kandinsky**, un **2 %** fueron sólo a la de **Kandinsky** y a la muestra de **Juan Gris** fue un **32 %**.

Se pide:

a) ¿Qué porcentaje visitó sólo la muestra de **Joan Miró**?.
b) ¿Qué porcentaje visitó la muestra de **Joan Miró** y **Juan Gris** pero no la de **Kandinsky**?.
c) ¿Cuántas personas no visitó ninguna de las tres muestras?.

---

22) Entre los **76** alumnos de primer año de un colegio, se efectuó un test de tres preguntas. Acerca de los resultados se tienen los siguientes datos:
44 alumnos respondieron bien la **segunda** pregunta y **28** bien la **tercera**; **12** alumnos respondieron bien la **primera** y la **segunda**, **2** la **primera** y la **tercera**, **10** alumnos respondieron bien sólo la **primera** pregunta, en tanto **18** respondieron bien la tercera pero no la **segunda**, ninguno respondió bien sólo la **primera** y la **tercera**.

a) ¿Cuántos alumnos no respondieron bien **ninguna** pregunta?.
b) ¿Cuántos alumnos respondieron bien la **primer** pregunta?.
c) ¿Cuántos alumnos respondieron **por lo menos dos** preguntas?.

23) Se realiza una encuesta entre 50 alumnos de un aula preguntándoles que tipo de música les gustaba: **clásica, heavy** o **tecno.**
A 30 de los alumnos les agradaba la música **clásica**, pero a 10 de ellos les gustaba **sólo** la música **clásica**, 20 alumnos se inclinaron por **heavy** pero a 5 de ellos **sólo heavy** y **tecno**. Hubo 12 personas que admitieron no escuchar ningún tipo de música, **uno** dijo que escuchaba **sólo heavy** y 16 que escuchaban **tecno.**

a) ¿Cuántos alumnos escuchaban los tres tipos de música?.
b) ¿Cuántos alumnos escuchaban **sólo heavy** y **clásica**?.

24) En una cierta encuesta, se preguntó a 500 ejecutivos acerca de su lectura de los periódicos **Barricada, Lucha** y **Construcción.**
Las respuestas mostraron que

250 leían **Barricada**
270 leían **Construcción**
190 leían **Lucha**
70 leían **Barricada** y el **Construcción**
20 leían los tres periódicos.
50 leían el **Barricada** y el **Lucha**
110 leían **Lucha** y el **Construcción**

Calcular:
a) La cantidad de personas que leían **a lo sumo un** periódico.
b) La cantidad de personas que no leen ninguno de estos periódicos.

25) Se entrevistó a un universo de personas que solamente escuchan las siguientes radios (en AM): **La Voz de las Madres** (530), **Cooperativa** (740) y **Nacional** (870), obteniéndose los siguientes datos:

140 escuchan **La Voz de las Madres** , 40 escuchan **La Voz de las Madres** y **Cooperativa,**
100 escuchan **Cooperativa,** 50 escuchan **La Vóz de las Madres** y **Nacional**, 60 escuchan **Nacional .**

Se sabe que nadie escucha las tres emisoras simultáneamente y no hay ningún oyente que escuche la emisora **Nacional** exclusivamente.

Calcular:
a) La cantidad de personas que escuchan **por lo menos una** radio.
b) La cantidad de personas que escuchan **sólo Cooperativa.**

26) De los 200 estudiantes a ingresar en una universidad, 98 son mujeres.
60 estudian comunicación.
60 son mujeres que no estudian comunicación.
¿ Cuántos hombres no estudian comunicación ?.

27) En una academia se realiza una encuesta a 120 jóvenes y se obtienen los siguientes datos:
80 quieren ser actores.
70 quieren ser cantantes.
50 quieren ser actores y cantantes.

Determinar:
a) no quieren ser cantantes.
b) no quieren ser actores.
c) quieren ser cantantes, pero no actores.
d) quieren ser actores, pero no cantantes.
e) no quieren ser actores ni cantantes.

28) De 200 profesores de una universidad, 115 son licenciados y 60 son investigadores.
De los licenciados 33 son investigadores.

Indique cuántos de estos profesores:
a) son licenciados o investigadores
b) no son licenciados ni investigadores.

29) En un concurso de baile hay **55** parejas.

38 son latinas.
27 bailan tango y **46** bailan salsa.
13 son latinas y bailan tango.
18 bailan tango y salsa.
Todas las latinas bailan salsa.
Todas las parejas tienen al menos una de las características anteriores.

a) ¿ Cuántas tienen las **tres** características ?.
b) ¿ Cuántas tienen exactamente **dos** características ?.
c) ¿ Cuántas tienen exactamente **una** característica ?.

---

30) En una investigación hecha en un grupo de **100** estudiantes, la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas fueron las siguientes:

Español, **28.**	Español y alemán, **8.**	Los tres idiomas, **3.**
Alemán, **30.**	Español y francés, **10.**	
Francés, **42.**	Alemán y francés, **5.**	

a) ¿ Cuántos alumnos no estudian **ningún** idioma ?.
b) ¿ Cuántos alumnos tenían al francés como **único** idioma de estudio ?.

---

31) En un análisis posterior sobre los **100** estudiantes (del ejercicio anterior) la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas resultaron ser:

Alemán únicamente, **18.**
Alemán pero no español, **23.**
Alemán y francés, 8.
Alemán, **26.**
Francés, **48.**
Francés y español, **8.**
Ningún idioma, **24.**

a) ¿Cuántos estudiantes aprendían el español ?.
b) ¿Cuántos estudiantes aprendían alemán y español pero no francés ?.

Unidad 2. Conjunto. Respuestas

PROBLEMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

1) a) V   b) F   c) F   d) F   e) F

2) a) $A \subset B$ b) $\varnothing \subset A$ c) $B \not\subset C$ d) $C \subset E$ e) $D \not\subset C$ f) $B \subset E$

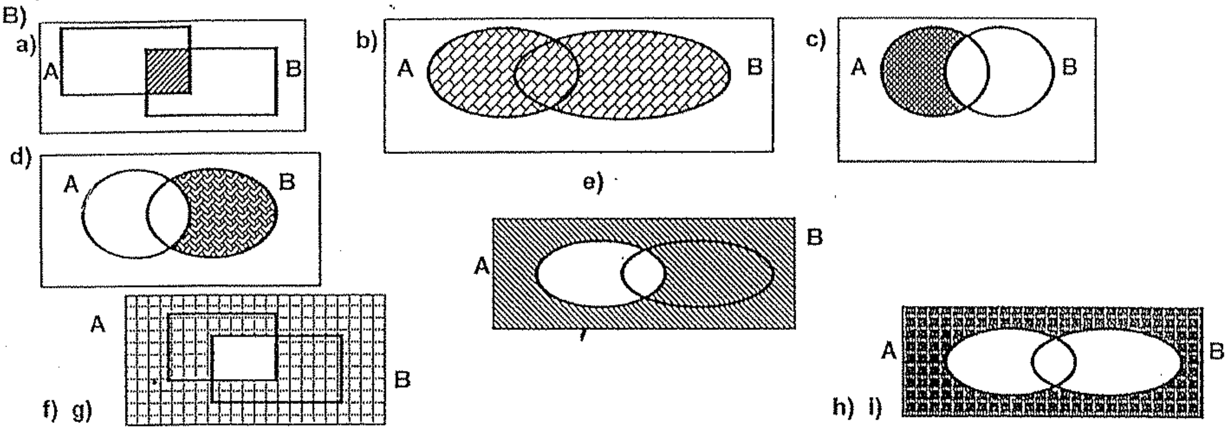
3) $P_{(B)}$ = { { C # ; JAVA ; VB.NET. } ; { C # , JAVA } ; { C # , VB.NET. } ; { JAVA , VB.NET. } ; { C # } ; { JAVA } ; { VB. NET. } ; ∅ }

4) A)

a) Cv = { b , c }   b) Cv = { a , b , c , d }   c) Cv = { a }   d) Cv = { d }

e) Cv = { d , e }   f) Cv = { a , d , e }   g) Cv = { a , d , e }   h) Cv = { e }   i) Cv = { e }

B)



5) a) $\forall x / x \in p_{(x)} \Rightarrow x \in q_{(x)}$ b_1) $V_v = 1$ b_2) $V_v = 0$ b_3) $V_v = 0$

6) a) $[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$ b) $(D \cap E) \cup (F - E)$

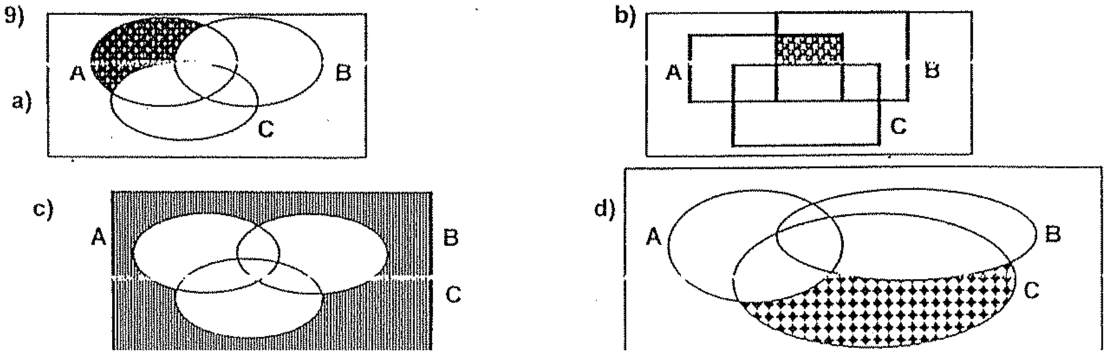
c) $H \cap \overline{J} \cap \overline{K}$ d) $(P \cap Q \cap \overline{W}) \cup (W - P)$

7) a) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ b) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

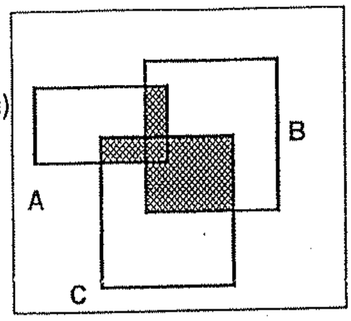
PROBLEMAS DE CONTEO

8) a) Natalia   b) Natalia , Rita   c) Graciela , Fernando   d) Luis   e) ∅

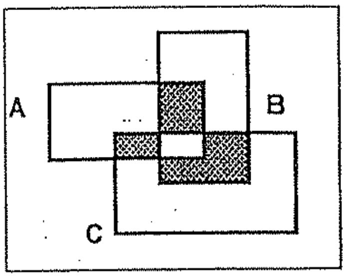
9)



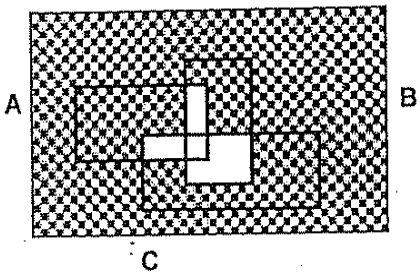
10) a)



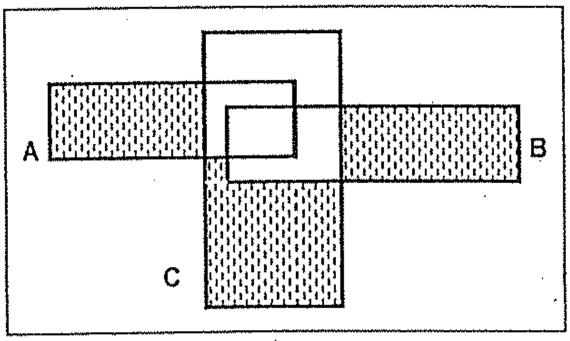
b)



c)



d)



---

11) a) 15 b) 30

12) a) 98 b) 18 c) 52

13) a) 220 b) 62 c) 93

14) a) , b) , c) está resuelto

15) a) 48 b) 22 c) 98 d) 26

16) a) 48 b) 480 c) 6 d) 26

17) a) 106 b) 56

18) a) 20 % b) 40 %

19) a) 48 % b) 32 %

20) a) 0 b) 34

21) a) 3 % b) 15 % c) 2124

22) a) 4 b) 22 c) 20

23) a) 3 b) 11

24) a) 310 b) 0

25) a) 200 b) 50

26) 80

27) a) 50 b) 40 c) 20 d) 30 e) 20

28) a) 142 b) 58

29) a) 13 b) 30 c) 12

30) a) 20 b) 30

31) a) 18 b) 0

Unidad 3. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos.
El elemento a_{ij} de la matriz A ocupa la fila i y la columna j del arreglo.
Se dice que una matriz con m filas y n columnas tiene el orden o el tamaño $m * n$

a) Una matriz **cuadrada** tiene $m = n$.
b) Un **vector fila** es una matriz con un renglón y n columnas.
c) Un **vector columna** es una matriz con m filas y **una** columna.

1) Escriba las siguientes matrices definidas en forma explícita:

a) $A \in R^{3*4} \;/\; a_{ij} = i + j$

b) $B \in R^{3*3} \;/\; b_{ij} = (-1)^{i+j}$

c) $C \in R^{4*4} \;/\; c_{ij} = 1$ (si $i + j$ es primo); $c_{ij} = 0$ (si $i + j$ no es primo)

d) $D \in R^{n*n} \;/\; d_{ij} = 1$ (si $i = j$); $d_{ij} = 0$ (si $i \neq j$)

SUMA DE MATRICES

La suma de matrices se define entre matrices que tienen el mismo número de renglones y de columnas (o sea del mismo tamaño: $m * n$). Matrices conformes.

Siendo:

$A = [a_{ij}] \wedge B = [b_{ij}]$ y la operación: $A + B = C$

Los elementos de la matriz C se obtienen haciendo:

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 4+5 & -1+3 \\ 5+0 & 0+(-3) & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Sean las matrices de R^{2*3}:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $2A - 3B$ d) $\sqrt{2}\, A + 0\, B$

3) Hallar $X \in R^{2*4} \;/\; A + X = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4) Calcular x, y, z para que las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ y & 5 & 2 \\ 4 & -4 & z \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Condición de existencia de producto: $A \in R^{m*n} \wedge B \in R^{n*r}$

Si: (la cantidad de columnas de A) = (la cantidad de filas de B)

Existe: $A * B$ y su tamaño es: $A * B \in R^{m*r}$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3/16 & 0 & -1/16 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\ 3/16 + 0\,(-1/2) + 4\,(-1/8) & 8\,0 + 0\,1 + 4\,0 & 8\,(-1/16) + 0\,(-1/4) + 4\ 1/8 \\ 6\ 3/16 + 1\,(-1/2) + 5\,(-1/8) & 6\,0 + 1\,1 + 5\,0 & 6\,(-1/16) + 1\,(-1/4) + 5\ 1/8 \\ 8\ 3/16 + 0\,(-1/2) + 12\,(-1/8) & 8\,0 + 0\,1 + 12\,0 & 8\,(-1/16) + 0\,(-1/4) + 12\ 1/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 - 1/2 & 0 & -1/2 + 1/2 \\ 9/8 - 4/8 - 5/8 & 1 & -3/8 - 2/8 + 5/8 \\ 3/2 - 3/2 & 0 & -1/2 + 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Efectuar, si es posible, los siguientes productos:

a)

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6) Siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2 y A^3

b) Dado $P_{(x)} = x^2 - 3x + 2 * I$, compruebe que: $P_{(A)} = A^2 - 3A + 2 * I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz identidad (I):
se define con los elementos de la diagonal principal todos " **1** " y el resto " **0** "

Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Unidad 3. Matrices. Respuestas

1) a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$

SUMA DE MATRICES

2) a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} - 1/2 \\ \sqrt{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \sqrt{2} + 1/2 \\ -\sqrt{2} & 4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2\sqrt{2} + 3/2 \\ -3\sqrt{2} & 9 & -2 \end{pmatrix}$ d) $2A + 0B = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 4) $(x, y, z) = (-3, 0, 6)$

PRODUCTO DE MATRICES

5) a) $\begin{pmatrix} 13 & 35 & 18 \\ 20 & 26 & 20 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 58 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 7 & 16 \end{bmatrix}$ e) no existe

6) a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$

Unidad 4. Relaciones

) Encontrar x ó y de manera que el enunciado sea verdadero.
a) $(x, 3) = (4, 3)$ b) $(4x, 6) = (16, y)$ c) $(3x+1, 2) = (7, 2)$ d) $(x^2, 5) = (49, y)$

2) Siendo $A = \{p, q\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ hallar:
a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) A^2 d) B^2

3) Un experimento de genética clasifica las moscas de la fruta de acuerdo con los dos siguientes criterios:
Género: masculino **(M)**, femenino **(F)**
Alas extendidas: cortas **(c)**, medianas **(m)**, largas **(l)**
a) ¿Cuántas categorías hay en este esquema de clasificación?.
b) Hacer una lista de todas las categorías de este esquema de clasificación.

4) Siendo $A = \{ a / a$ **es un número real** $\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.
Hacer un esquema de cada uno de los siguientes casos en el plano cartesiano.
a) $A \times B$ b) $B \times A$

5) Siendo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $A_2 = \{5, 6, 7\}$ $A_3 = \{4, 5, 7, 9\}$ $A_4 = \{4, 8, 10\}$
$A_5 = \{8, 9, 10\}$ $A_6 = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$
Decir cuales de las siguientes son particiones de A. Justificar.
a) $\{A_1, A_2, A_5\}$ b) $\{A_1, A_3, A_5\}$ c) $\{A_3, A_6\}$ d) $\{A_2, A_3, A_4\}$

6) Utilizar los conjuntos:
$A = \{1, 2, 4\}$ $B = \{2, 5, 7\}$ $C = \{1, 3, 7\}$
Para analizar si se cumple la siguiente igualdad:
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
Investigue que pasa en la unión.
Explique sus conclusiones.

Relación; Dados dos conjuntos A y B y una propiedad P, se llama relación al conjunto:
$$R = \{(x, y) \in A \times B \ / \ P_{(x,y)}\}$$
Interpretación: De todos los pares ordenados de $A \times B$, tomo sólo los que cumplen la propiedad.

7) Si A tiene **n** elementos y B tiene **m** elementos. ¿ Cuántas **relaciones diferentes** hay de A a B?.

8) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$
Se definen las relaciones $R : A \rightarrow B$
I) $R_1 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3)\}$
II) $R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2)\}$
III) $R_3 = \{(a, 1); (b, 1); (c, 2); (d, 2)\}$

En cada caso indicar:
a) Dominio e imagen.
b) Su representación por tabla de doble entrada y diagramas de Venn.
c) Definir por extensión una relación $R : B \rightarrow A$ tal que el dominio de la misma coincida con el conjunto de partida y la imagen con el conjunto de llegada.

9) Determinar, en cada caso, dominio, imagen, matriz y cuando A = B el dígrafo de la relación R.
a) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3\}$
$R: A \rightarrow B \ / \ R = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (c, 2); (d, 1)\}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$
$R = \{(x, y) \in A^2 \ / \ x + y \leq 9\}$

c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$R = \{(x, y) \in A \times B \;/\; y = x^2\}$

d) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$R = \{(a, b) \in A^2 \;/\; b < a\}$

e) $A = \{x \in N \;/\; x < 5\}$

$R = \{(x, y) \in A^2 \;/\; x - y < 0\}$

---

10) Una línea aérea da servicio a cinco ciudades: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. La tabla muestra el costo (en dólares) del viaje desde C_i a C_j.

Hasta:	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Desde:					
C_1		140	100	150	200
C_2	190		200	160	220
C_3	110	180		190	250
C_4	190	200	120		150

Se define la siguiente relación R sobre el conjunto de las cinco ciudades:

"C_i R C_j si y sólo si el costo de ir de C_i a C_j es menor o igual a 180 dólares"

Determinar la relación R por extensión.

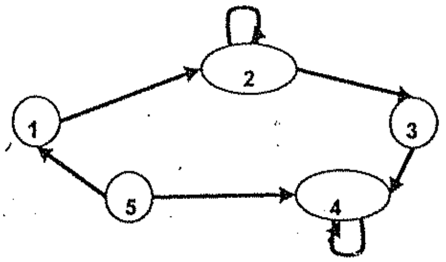
---

11) Dar por extensión la relación R definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y su **dígrafo**, siendo su matriz asociada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

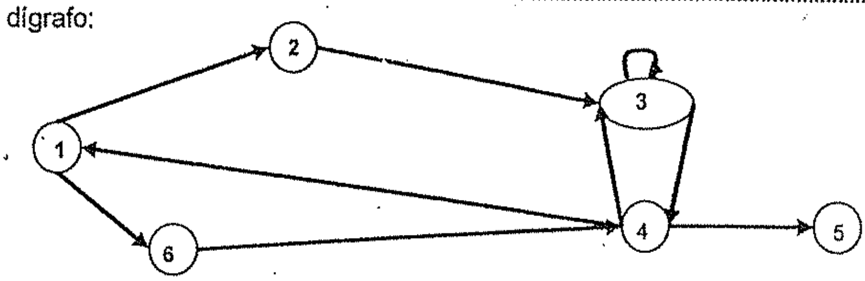
---

12) Dar por extensión la relación R y su **matriz** asociada, siendo su dígrafo:



---

13) Dado el siguiente dígrafo:



Indicar:

a) Todas las trayectorias de **longitud** 2, que inicien en el **vértice** 2.

b) Todas las trayectorias de **longitud 3**

c) Un **ciclo** que comience en el **vértice 6**

d) Todas las trayectorias de **longitud 1**

---

14) Dado el conjunto: $A = \{x \;/\; x \in Z : -3 < x \leq 2\}$ y la relación: $R = \{(x, y) \in A^2 \;/\; x^2 - y \geq 2\}$

a) Definir por extensión A y R. **b)** Determinar la matriz asociada y el dígrafo.

c) Indicar dos trayectorias de longitud 4 que inicie en el vértice – 2. **d)** Indicar un ciclo que comience en el vértice – 1.

---

15) Determinar en cada relación definida en A = { 1 , 2 , 3 , 4 } si es reflexiva, arreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

a) R = { (1 , 1) ; (1 , 2) ; (2 , 1) ; (2 , 2) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 3) ; (4 , 4) }

b) R = { (1 , 3) ; (1 , 1) ; (3 , 1) ; (1 , 2) ; (3 , 3) ; (4 , 4) }

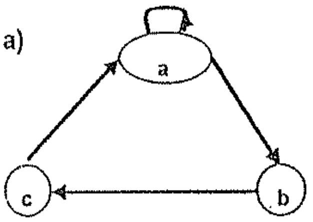
c) R = { (1 , 2) ; (1 , 3) ; (3 , 1) ; (1 , 1) ; (3 , 3) ; (3 , 2) ; (1 , 4) ; (4 , 2) ; (3 , 4) }

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

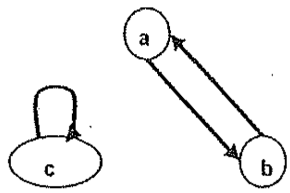
(completar con **si** v no según corresponda)

16) Dados los siguientes dígrafos:

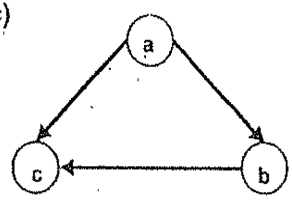
a)



b)



c)



Analizar sus propiedades y clasificar si es posible.

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

(completar con **si** v no según corresponda)

17) Para completar: ¿ qué características deben observarse en la **matriz** ? asociada a una relación que sea:

a) reflexiva: ....

b) irrefexiva: ....

c) simétrica: ....

d) asimétrica: ....

e) antisimétrica: ....

f) transitiva: ....

18) Para completar: ¿ qué características deben observarse en el **dígrafo** ? asociado a una relación que sea:

a) reflexiva: ....

b) irrefexiva: ....

c) simétrica: ....

d) asimétrica: ....

e) antisimétrica: ....

f) transitiva: ....

19) Escribir la **matriz** o el **dígrafo** que represente a una relación que resulte:

a) Reflexiva pero no simétrica b) Sólo transitiva

c) Antisimétrica pero no reflexiva d) Simétrica y no transitiva

Explicar el razonamiento.

Relación de orden: establecen jerarquías entre los elementos de un conjunto, pueden compararse.

Cumplen con ser: **reflexiva – antisimétrica – transitiva**

Relación de equivalencia: permite agrupar los elementos de un conjunto A en subconjuntos no vacíos del conjunto A, disjuntos, y tal que la unión resulta ser el conjunto A.
(Estos subconjuntos se llaman clases de equivalencia).

Cumplen con ser: **reflexiva – simétrica – transitiva**

---

20) Analizar las propiedades y clasificar, si es posible, las relaciones R cuyas matrices asociadas son:

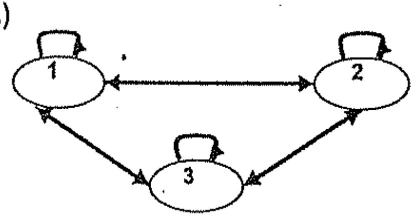
a)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

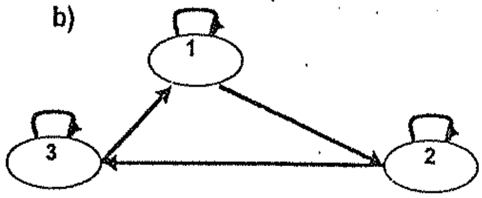
---

21) Determinar si la relación R, cuyo dígrafo se proporciona, es una **relación de equivalencia**. Justificar.

a)



b)



---

22) Siendo $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$ una partición del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
Determinar la relación de equivalencia correspondiente R.

---

23) Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$

a) analizar las propiedades de la relación:

b) clasificar la relación si es posible

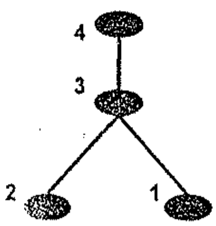
$$R = \{(1,1); (1,2); (2,2); (2,4); (1,3); (3,3); (3,4); (1,4); (4,4)\}$$

En caso de que resulte de orden parcial, determinar el **diagrama de Hasse**.

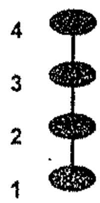
---

24) Escribir los pares ordenados en la relación determinada por el **diagrama de Hasse** sobre el conjunto A.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

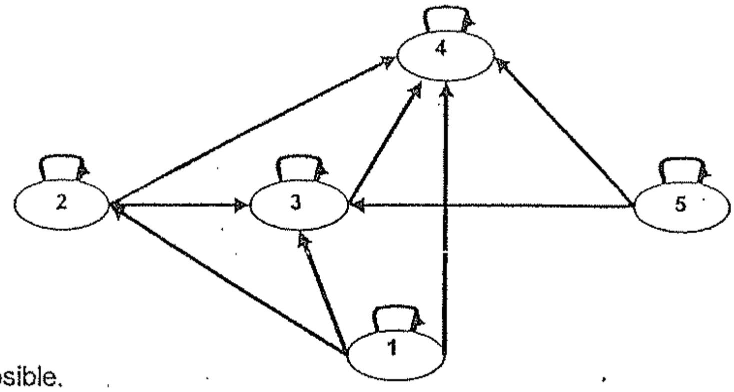


b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$



---

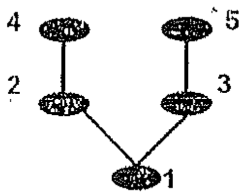
25) Dado el siguiente dígrafo:



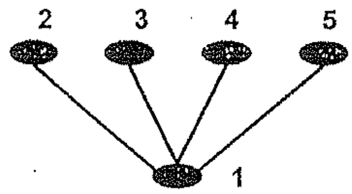
a) Definir por extensión la relación.
b) Hallar su matriz asociada.
c) Analizar sus propiedades y clasificarla.
d) Realizar el diagrama de Hasse, si es posible.

26) Determinar, en cada caso, las matrices de orden parcial con los diagramas de Hasse dados.

a)



b)



PROBLEMAS

27) Sea (A , R)

Siendo A = **{ serpiente , pollito , canario , gato , león , hormiga , araña }**

Siendo R : **" tiene menos patas que o es el mismo animal que "**

Hacer el diagrama de Hasse.

28) Sea (B , R)

Siendo B = **{ Laura , Karina , Juan , Sebastián , Ariel }**

ALUMNO	**Laura**	**Karina**	**Juan**	**Sebastián**	**Ariel**
NOTA	**7**	**9**	**8**	**7**	**10**

Siendo R : x R y $\Leftrightarrow$ **" x sacó mayor nota que y "** $\vee$ **x = y**

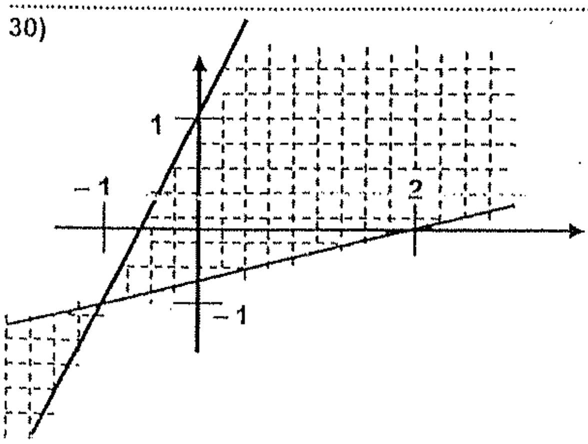
Hacer el diagrama de Hasse.

29) Sea A = **{ 1 , 2 , 4 , 5 , 9 }**

Se tiene en A la siguiente relación R = **{ (1 , 1) , (2 , 2) , (4 , 2) , (2 , 9) , (9 , 9) }**

Se pide agregar a R la menor cantidad posible de pares ordenados para que resulte una relación de equivalencia en A .

30)



Si se considera la siguiente relación definida en R a través de su gráfica, decir si resulta:

reflexiva
simétrica
antisimétrica
transitiva

(se sugiere utilizar argumentos de tipo gráfico)

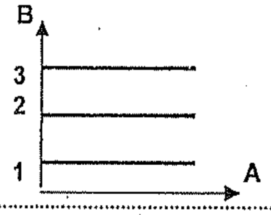
Unidad 4. Relaciones. Respuestas

1) a) $x = 4$ b) $x = 4$, $y = 6$ c) $x = 2$ d) $x = 7 \vee x = -7 \wedge y = 5$

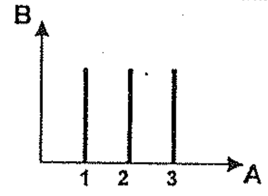
2) a) (p , 4) ; (p , 5) ; (p , 6) ; (q , 4) ; (q , 5) ; (q , 6)
b) (4 , p) ; (4 , q) ; (5 , p) ; (5 , q) ; (6 , p) ; (6 , q)
c) (p , p) ; (p , q) ; (q , p) ; (q , q)
d) (4 , 4) ; (4 , 5) ; (4 , 6) ; (5 , 4) ; (5 , 5) ; (5 , 6) ; (6 , 4) ; (6 , 5) , (6 , 6)

3) a) 6 categorías b) $G \times A$ = { (M , c) ; (M , m) ; (M , l) ; (F , c) ; (F , m) ; (F , l) }

4) a)



b)



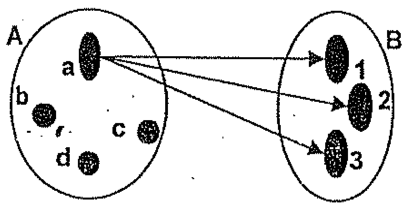
5) a) si b) no c) si d) no

6) Conclusión: el producto cartesiano es distributivo en la unión y en la intersección 7) $2^{n\,m}$

8) I) a) D_R = { a } I_R = { 1 ; 2 ; 3 }

b)

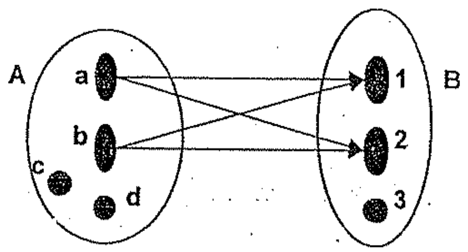
A \ B	1	2	3
a	1	1	1
b	0	0	0
c	0	0	0
d	0	0	0



II) a) D_R = { a ; b } I_R = { 1 ; 2 }

b)

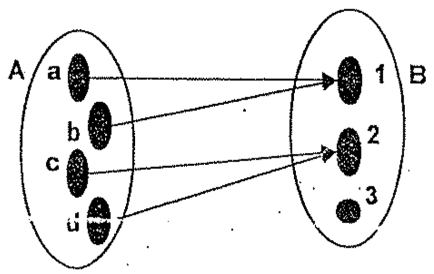
A \ B	1	2	3
a	1	1	0
b	1	1	0
c	0	0	0
d	0	0	0



III) a) D_R = { a ; b ; c ; d } I_R = { 1 ; 2 }

b)

A \ B	1	2	3
a	1	0	0
b	1	0	0
c	0	1	0
d	0	1	0

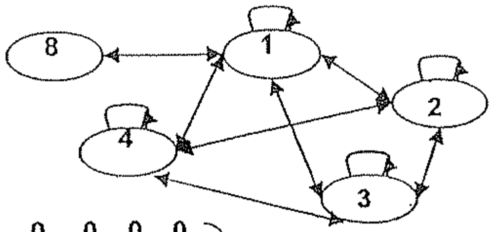


9) a)

D_R = { a ; b ; c ; d } I_R = { 1 ; 2 } $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

$D_R = I_R = \{1;2;3;4;8\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

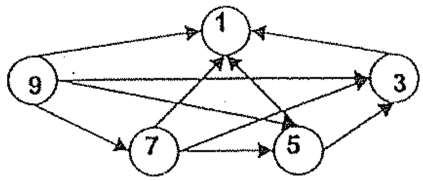


c)

$D_R = \{1;2;3\}$ $\quad I_R = \{1;4;9\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

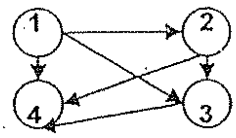
d)

$D_R = \{3;5;7;9\}$
$I_R = \{1;3;5;7\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



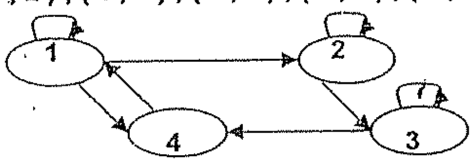
e)

$D_R = \{1;2;3\}$ $\quad I_R = \{2;3;4\}$ $\quad M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



10) $R = \{(C_1, C_2); (C_1, C_3); (C_1, C_4); (C_2, C_4); (C_3, C_1); (C_3, C_2); (C_4, C_3); (C_4, C_5)\}$

11) $R = \{(1,1); (1,2); (1,4); (2,2); (2,3); (3,3); (3,4); (4,1)\}$



12) $R = \{(1,2); (2,2); (2,3); (3,4); (4,4); (5,1); (5,4)\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13)a) $2 \to 3 \to 3$ $\qquad 2 \to 3 \to 4$

b)

1 – 2 – 3 – 3	2 – 3 – 3 – 3	3 – 3 – 3 – 3	4 – 1 – 2 – 3	6 – 4 – 1 – 2
1 – 2 – 3 – 4	2 – 3 – 3 – 4	3 – 3 – 3 – 4	4 – 1 – 6 – 4	6 – 4 – 1 – 6
1 – 6 – 4 – 1	2 – 3 – 4 – 1	3 – 3 – 4 – 1	4 – 3 – 3 – 3	6 – 4 – 3 – 3
1 – 6 – 4 – 3	2 – 3 – 4 – 3	3 – 3 – 4 – 3	4 – 3 – 3 – 4	6 – 4 – 3 – 4
1 – 6 – 4 – 5	2 – 3 – 4 – 5	3 – 3 – 4 – 5	4 – 3 – 4 – 1	
		3 – 4 – 1 – 2	4 – 3 – 4 – 3	
		3 – 4 – 1 – 6	4 – 3 – 4 – 5	
		3 – 4 – 3 – 3		
		3 – 4 – 3 – 4		

c) $6 \to 4 \to 1 \to 6$

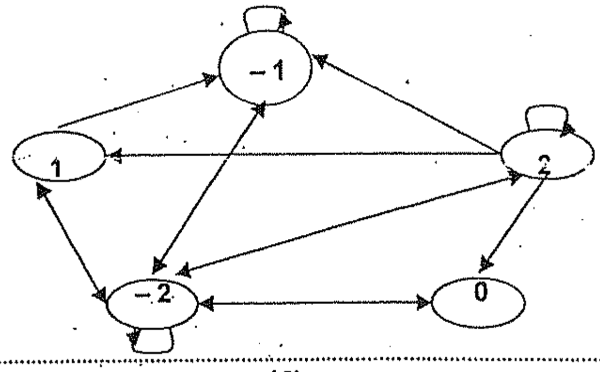
d)

1 – 2	2 – 3	3 – 3	4 – 1	6 – 4
1 – 6		3 – 4	4 – 3	
			4 – 5	

14) a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$R = \{(-2,-2);(-2,-1);(-2,0);(-2,1);(-2,2);(-1,-2);(-1,-1);(0,-2);(1,-2);(1,-1);(2,-2);(2,-1);$
$(2,0);(2,1);(2,2)\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



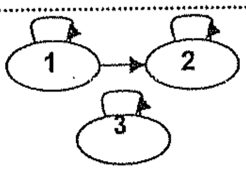
c) $-2, -2, -1, -1, -2$—
$-2, 1, -2, 0, -2$

d) $-1, -2, -1$

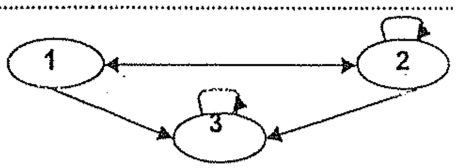
	15) a)	15) b)	15) c)	16) a)	16) b)	16) c)
Reflexiva	si	no	no	no	no	no
Arreflexiva	no	no	no	no	no	si
Simétrica	si	no	no	no	si	no
Asimétrica	no	no	no	no	no	si
Antisimétrica	no	no	no	si	no	si
Transitiva	si	no	si	no	no	si

17) $\wedge$ 18) Ver teoría

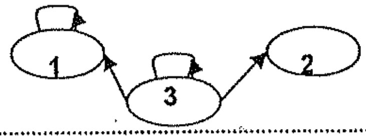
19) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



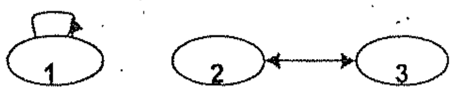
b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



20)

	a)	b)	clasificación
Reflexiva	no	si	
Arreflexiva	si	no	
Simétrica	si	si	equivalencia
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	no	no	
Transitiva	no	si	

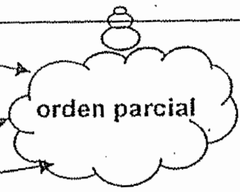
21)

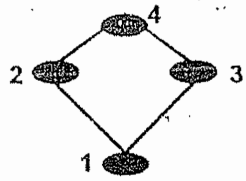
	b)	a)	clasificación
Reflexiva	si	si	
Arreflexiva	no	no	
Simétrica	no	si	equivalencia
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	si	no	
Transitiva	no	si	

22) $R = \{(a,a);(a,b);(a,c);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c);$
$(d,d);(d,e);(d,f);(e,d);(e,e);(e,f);(f,d);(f,e);(f,f)\}$

23)

	propiedades	clasificación	Hasse
Reflexiva	si	orden parcial	
Arreflexiva	no		
Simétrica	no		
Asimétrica	no		
Antisimétrica	si		
Transitiva	si		





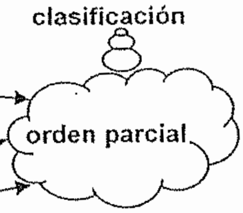
24) a) R = { (1 , 1) ; (1 , 3) ; (1 , 4) ; (2 , 2) ; (2 , 3) ; (2 , 4) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 4) }
b) R = { (1 , 1) ; (1 , 2) ; (1 , 3) ; (1 , 4) ; (2 , 2) ; (2 , 3) ; (2 , 4) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 4) }

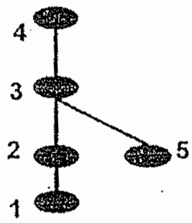
25) a) R = { (1 , 1) ; (1 , 2) ; (1 , 3) ; (1 , 4) ; (2 , 2) ; (2 , 3) ; (2 , 4) ; (3 , 3) ; (3 , 4) ; (4 , 4) ;
(5 , 3) ; (5 , 4) ; (5 , 5) }

b) matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

	c) propiedades	clasificación	d) Hasse
Reflexiva	si	orden parcial	
Arreflexiva	no		
Simétrica	no		
Asimétrica	no		
Antisimétrica	si		
Transitiva	si		





26)

a)

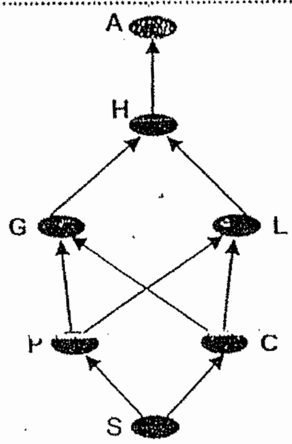
$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

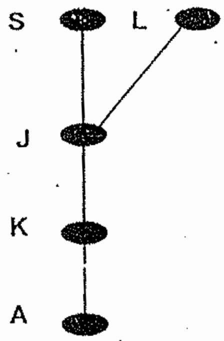
$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

27)



28)



29) R = { (1 , 1) , (2 , 2) , (4 , 2) , (9 , 9) , (2 , 9) , (9 , 9) , (4 , 4) , (5 , 5) , (2 , 4) , (9 , 2) , (4 , 9) , (9 , 4) }

30) Reflexiva (si) Simétrica (no) Antisimétrica (no) Transitiva (no)

UNIDAD 5: SISTEMA BINARIO

1) Dados los sigs. números decimales pasarlos a **Sistema Binario**.
a) 55 b) 48 c) 204 d) 10,4 e) 83,45 f) 2131,48 g) 376,4303

2) Dados los sigs. números binarios pasarlos a **Sistema Decimal**.
a) 1011 b) 11101 c) 110011,11 d) 101010,01 e) 10000001,111 f) 1111111,11111

3) Expresar los sigs. números en potencias de **10**.
a) 10 b) 1000 c) 0,01 d) 100000 e) 0,1 f) 10000000

4) Cuál es el **mayor número decimal** que se puede representar con **4 dígitos decimales**.

5) Cuál será el **mayor número decimal** que se puede representar con.
a) 2 Bits b) 7 Bits c) 10 Bits

6) Cuántos bits necesitamos **en Sistema Binario** para representar los sigs. números decimales.
a) 17 b) 81 c) 35 d) 32

7) Realizar las sigs. sumas en el Sistema Binario.
a) 11 + 01 b) 10 + 10 c) 101 + 11 d) 111 + 110 e) 1001 + 101 f) 101011,101 + 111100,01

8) Realizar las sig. **restas** en el Sistema Binario.
a) 101 - 100 b) 110 - 101 c) 1110 - 11 d) 1100 - 1001 e) 11010 -10111

9) Realizar las sig. **multiplicaciones** en el Sistema Binario.
a) 11 • 11 b) 100 • 10 c) 1001 • 110 d) 1101 • 1101 e) 1110 • 1101

10) Realizar las sig. **divisiones** en el Sistema Binario.
a) 1101 ÷ 10 b) 10111 ÷ 101 c) 10001 ÷ 11 d) 1000 ÷ 11 e) 101101 ÷ 110

11) Calcular la resta binaria 110101 - 100110.
Posteriormente convertir al sistema decimal los datos y el resultado.
Comprobar que la resta es correcta.

12) Convertir a binario y calcular la división 333 / 42 .

Unidad 5. Sistema Binario. Respuestas

1)
a) 110111 b) 110000 c) 11001100 d) $1010,\overline{0110}$
e) 10100111,0111001100110
f) 100001010011,0000110001001……..
g) 101111000,0110111000101000001001………

2)
a) 11 b) 29 c) 51,75 d) 42,25 e) 65,875 f) 127,96875

3)
a) 10^{1} b) 10^{3} c) 10^{-2} d) 10^{5} e) 10^{-1} f) 10^{7}

4) 9999

5)
a) 3 b) 127 c) 1023

6)
a) 5 b) 7 c) 6 d) 6

7)
a) 100 b) 100 c) 1000 d) 1101 e) 1110 f) 101110,101

8)
a) 1 b) 1 c) 1011 d) 11 e) 11

9)
a) 1001 b) 1000 c) 110110 d) 10101001 e) 10110110

10)
a) 110 , Resto 1 b) 100 , Resto 11 c) 101 , Resto 10 d) 10 , Resto 10
e) 111 , Resto 11

11)
Resta 1111
12)
Resultado División 111 , Resto 100111

Unidad 6. Grafos y arboles

EJEMPLO – DEFINICIONES

Red: conjunto de nodos y conjunto de arcos

Red dirigida: la que tiene todos los arcos dirigidos

Ruta: secuencia de arcos distintos que unen dos nodos (no importa la dirección del flujo de cada arco)

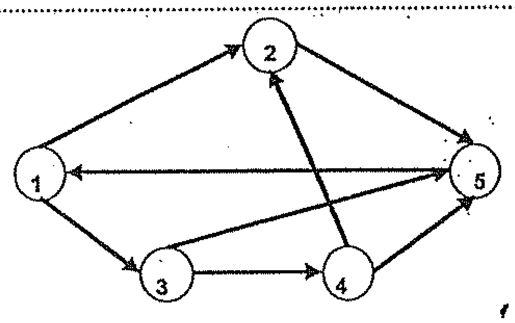
Lazo o ciclo: ruta que conecta un nodo con si mismo (circulo)

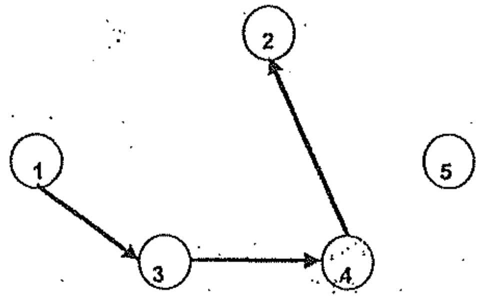
Lazo dirigido o circuito: circulo en el que todos los arcos están orientados en la misma dirección

Red conectada: dos nodos distintos están unidos por lo menos por una ruta

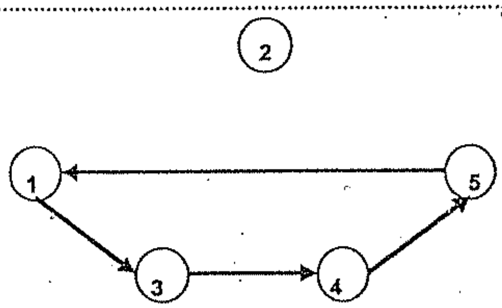
Árbol: red conectada que puede incluir sólo un subconjunto de todos los nodos de la red

Árbol de expansión: une todos los nodos de la red sin permitir ningún lazo

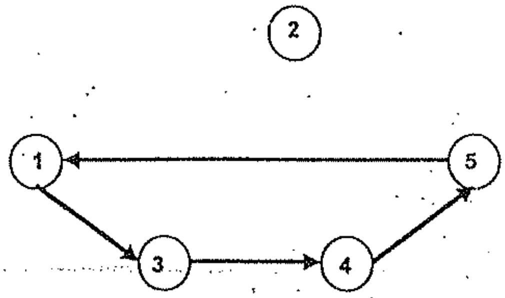




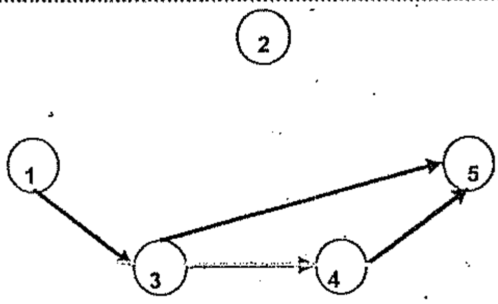
Ruta: 1 – 3 – 4 – 2



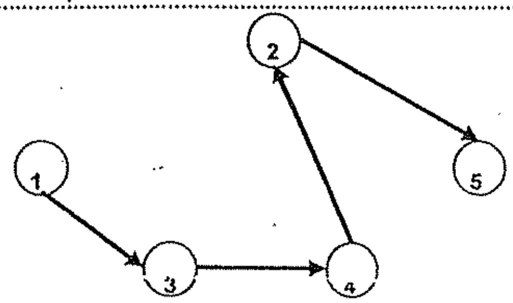
Lazo: 1 – 5 – 4 – 3 – 1



Lazo dirigido (circuito): 1 – 3 – 4 – 5 – 1



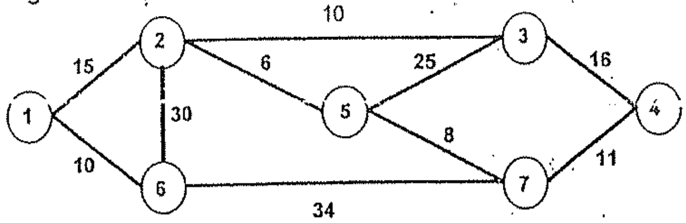
Árbol: { 1 – 3 , 3 – 4 , 3 – 5 , 4 – 5 }



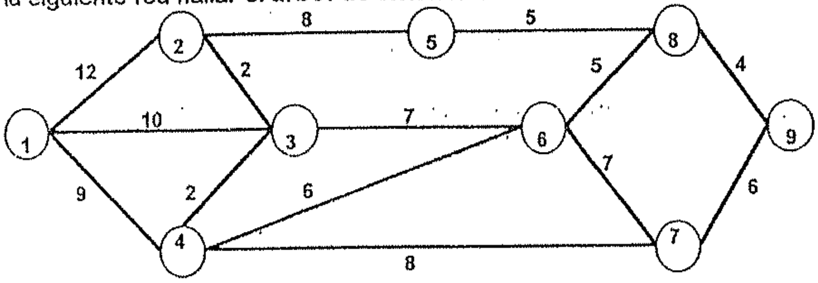
Árbol de expansión: { 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 2 , 2 – 5 }

REDES – Arbol de extensión mínima

1) Para la siguiente red hallar el **árbol de extensión mínima.**



2) Para la siguiente red hallar el **árbol de extensión mínima.**

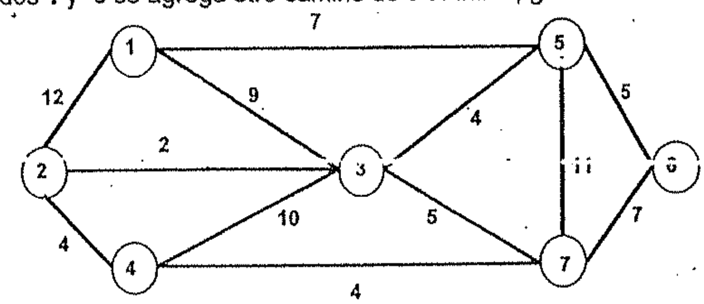


3) Una zona de 7 chacras debe ser conectada mediante una **ruta** asfaltada al **menor costo** posible.
Los datos indican en Km. las distancias entre chacras, considerando el Indice de la fila y de la columna el número de la chacra.
Se da una matriz simétrica, por lo que sólo se escribió el triángulo superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ & & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & & & & 0 & 4 & 7 \\ & & & & & 0 & 2 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Es necesario pavimentar el tramo **1 – 2** ya que en el medio se halla la estación de bomberos y se sabe que la ruta entre las chacras **6 – 7** ya está pavimentada.
Determinar el costo de la **ruta de extensión mínima** que vincule todas las chacras con las condiciones dadas, sabiendo que el costo del Km. es de **$ 100.000**

4) Cablevisión acaba de obtener la aprobación para ofrecer su servicio al barrio de Versalles.
Los nodos representan los puntos de distribución que deben llevar las líneas primarias de cables de la compañia.
Los arcos indican las cuadras que hay entre los puntos de distribución.
a) Determinar la solución que permitirá a Cablevisión llegar a todos los puntos de distribución con una **longitud mínima** de la línea de cable primario.
b) Si entre los nodos **1** y **6** se agrega otro camino de **8** cuadras, ¿se modifica en algo la respuesta?.



5) Ocho chacras de las cercanías de Mar del Plata se hallan conectadas por calles de tierra.
El intendente desea pavimentar la **menor cantidad** de calles de tal modo que se enlacen todas las chacras, pero desea que la calle **E – H** sea una de las asfaltadas, ya que allí se encuentra una sala de primeros auxilios.
¿Cuál sería el trayecto de pavimento?.
Distancias:

A – B = 11 Km	B – C = 13 Km	A – D = 12 Km	A – E = 14 Km	B – D = 9 Km
C – D = 18 Km	D – G = 17 Km	C – G = 12 Km	E – F = 10 Km	F – G = 11 Km
G – H = 8 Km	F – H = 10 Km	**E – H = 22 Km**		

6) La zona cercana a la desembocadura del Salado tiene ocho esteros que deben ser comunicados mediante canales. Suponiendo que todos los canales tienen la misma sección, **3 m** de ancho y **2 m** de profundidad, Determinar que **cantidad mínima** de tierra se debe mover para que los esteros queden comunicados.
Distancias:

A – B = 11 Km	B – C = 13 Km	A – D = 12 Km	A – E = 14 Km	B – D = 9 Km
C – D = 18 Km	D – G = 17 Km	C – G = 12 Km	E – F = 10 Km	F – G = 11 Km
G – H = 8 Km	F – H = 10 Km	E – H = 22 Km		

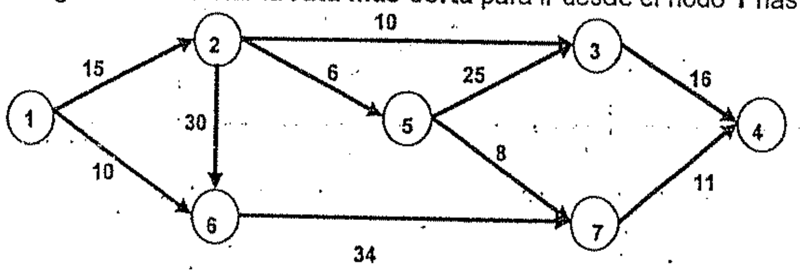
7) La siguiente tabla muestra la distancia entre cada dos ciudades:

	Bloom	Evans	Fort	Gary	Indian	Southb
Evans	**119**					
Fort	**174**	**290**				
Gary			**132**			
Indian	**51**			**153**		
Southb		**303**	**79**	**58**	**140**	
Haute	**58**	**113**			**71**	**196**

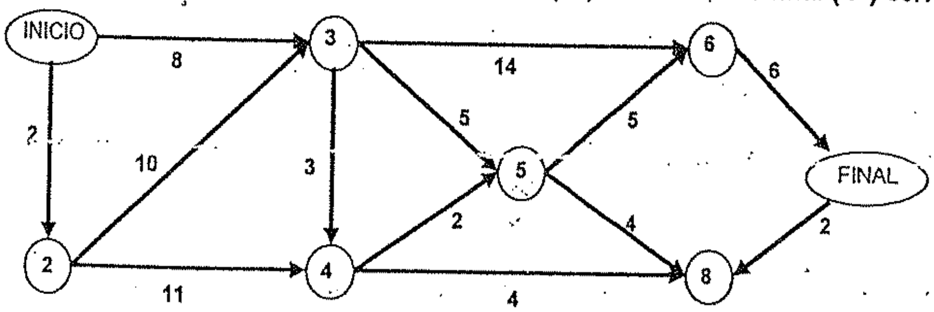
Se piensa construir un sistema de carreteras que comunique las siete ciudades.
Determinar que carreteras deben construirse para que el **costo** de construcción sea **mínimo.**
(Se supone que el costo de un Km. es el mínimo sin importar cuales son las ciudades).

REDES – Ruta mas corta

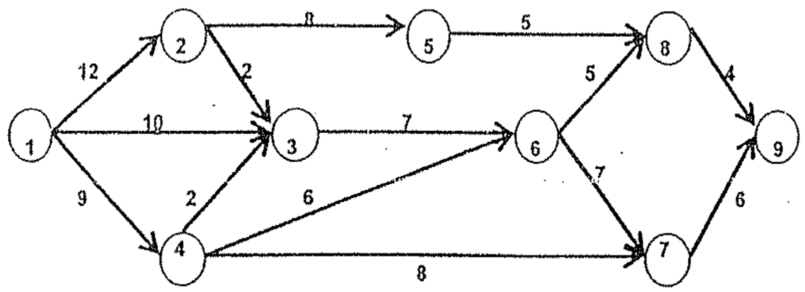
8) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo **1** hasta el nodo **4**.



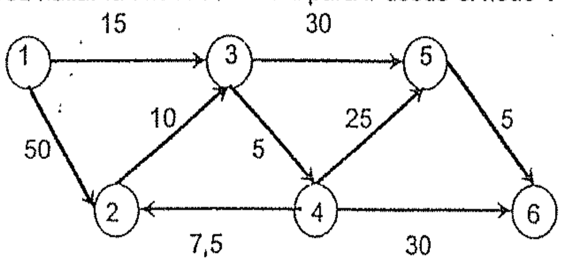
9) Encontrar la **ruta más corta** desde el nodo **inicio (1)** hasta el nodo **final (7)** correspondiente a la siguiente red.



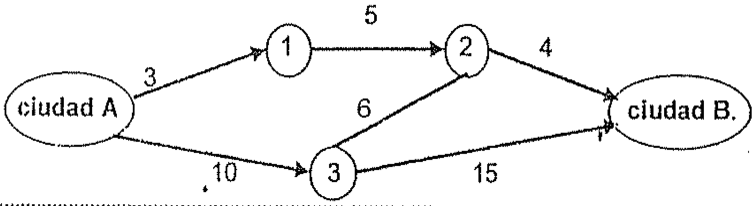
10) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo **1** hasta el nodo **7**.



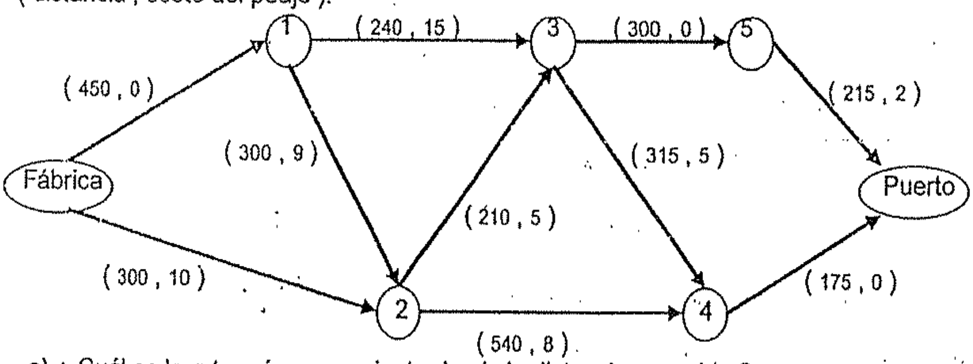
11) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo **1** hasta el nodo **6**. ¿ Es ruta única ?.



12) Para la red de la figura encuentre la **ruta mas corta** entre la **ciudad A** y la **ciudad B**.
Las distancias están dadas en kilómetros.
El arco **(2 , 3)** es bi direccional.



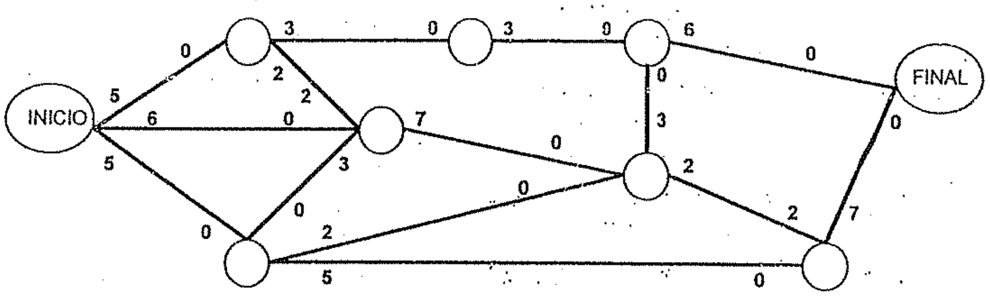
13) La división transporte, de una fábrica, desea saber que ruta le conviene usar para llevar sus productos al puerto donde van ha ser embarcados.
Para tomar la decisión se construye una red de los posibles caminos, en kilómetros, conjuntamente con el valor del peaje en cada tramo, en pesos; o sea que en cada arco de la red está indicado como par ordenado: (distancia , costo del peaje).



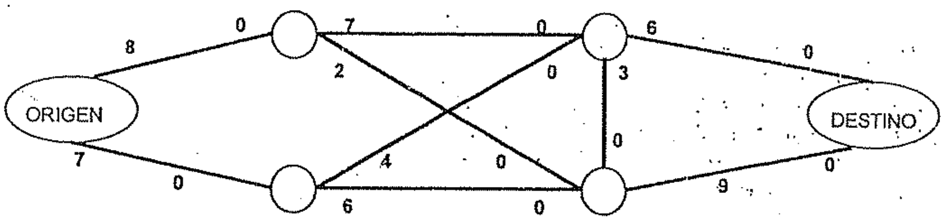
a) ¿ Cuál es la ruta más conveniente desde la distancia recorrida ?.
b) ¿ Cuál es la ruta más conveniente desde el costo del peaje ?.
c) Dar el par ordenado en cada caso.
d) Si usted tuviera que decidir ¿ qué opción elige ?.

REDES – Flujo máximo

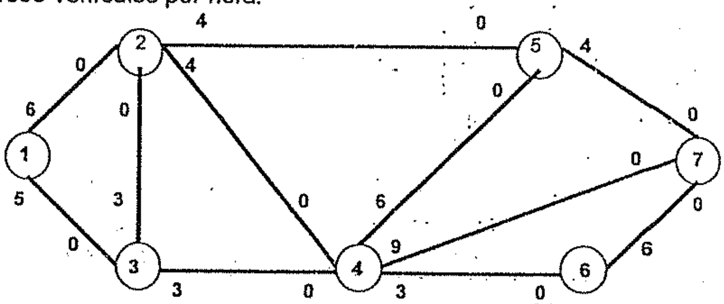
14) Encontrar el **flujo máximo** desde el nodo **INICIO** hasta el nodo **FINAL** en la siguiente red:



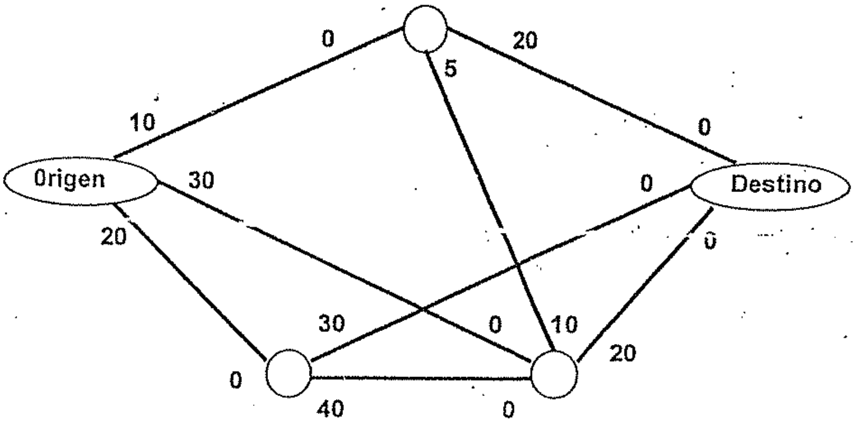
15) Para el sistema de red de carreteras que se muestra en la figura determinar el **flujo máximo** de vehículos por hora.
Se sabe que cada unidad representa **1000** vehículos por hora.



16) La siguiente red representa una serie de autopistas interconectadas.
En la misma se muestran las distintas capacidades de flujo de cada una de ellas.
Determinar el **flujo máximo** desde el punto **1** al **7** durante un día, suponiendo que las unidades detalladas marcan un flujo de **1000** vehículos por hora.



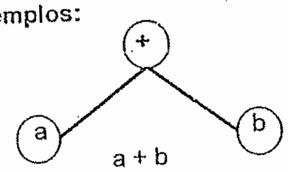
17) Encontrar el **flujo máximo** desde el nodo **Origen** hasta el nodo **Destino** en la siguiente red:



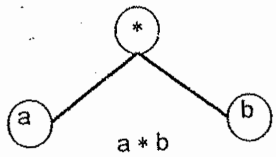
ÁRBOLES – Representación de expresiones algebraicas

Cada operación binaria es representada por un subárbol, cuya raíz contiene la operación aritmética (operador), a izquierda y derecha están los operandos.

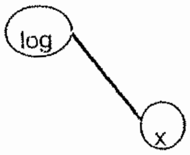
Ejemplos:



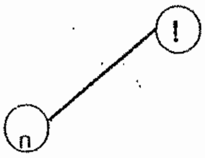
a + b



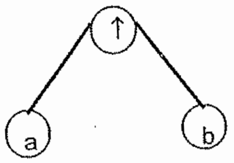
a * b



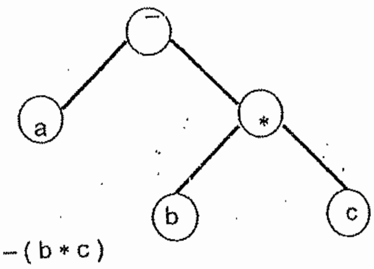
log x



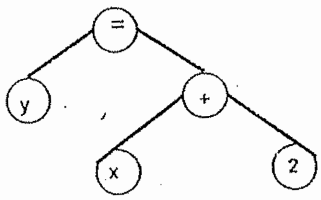
n !



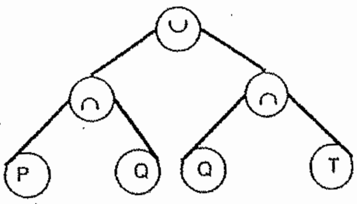
$a^b \equiv a \uparrow b$



a – (b * c)



y = x + 2



$(P \cap Q) \cup (Q \cap T)$

1) Representar en un árbol binario las siguientes expresiones algebraicas:

a) $(x + 1)^4 * (y - \ln 2)$

b) $[- A + B^2] - [C * (A - B)^2 + 2 A]$

c) $\{ [(A + B) / C] - (C + B) \} * [A * (B - C)]$

d) $(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$

e) $a^2 - b^2 = (a + b) * (a - b)$

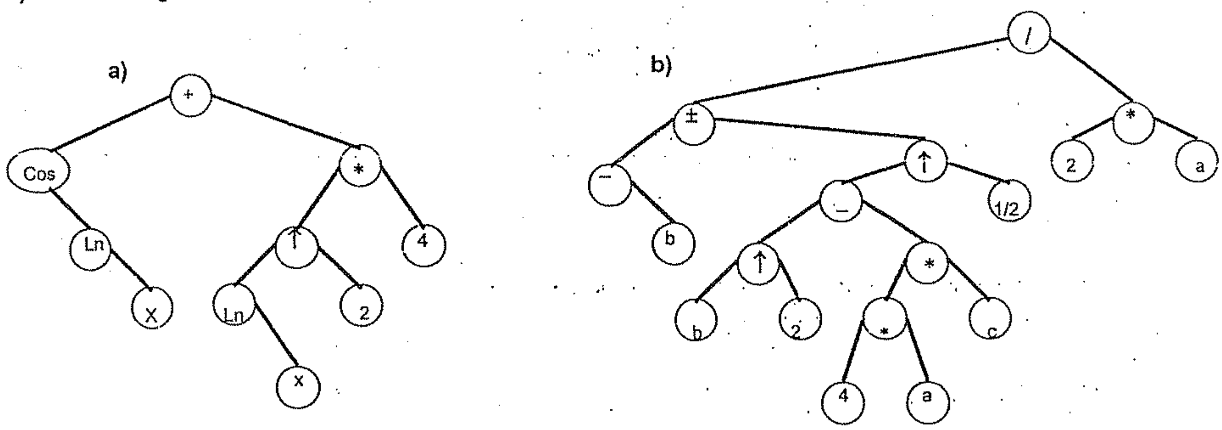
f) $\cos (x + 2)^5 * \log (2 x - 3)^3$

g) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

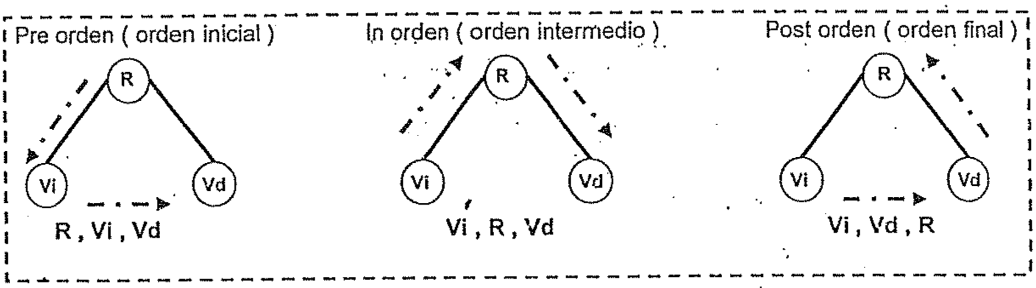
h) $x = 4 \wedge x = - 1 / 2$

i) $\begin{cases} 5 * x + 5 * y = 9 \\ - 5 * x + 9 * y = - 9 \end{cases}$

2) Dados los siguientes árboles binarios escribir la **expresión algebraica** correspondiente:



ÁRBOLES – Recorrido



3) Efectuar los recorridos (**pre orden** , **in orden** , **post orden**) de los árboles binarios obtenidos a partir de las expresiones algebraicas del ejercicio **1)**.

4) Siendo: **A = 1 , B = 2 , C = 3 , D = 4**

Calcular el **valor numérico** de las siguientes expresiones dadas en **post orden**.

a) A B + C –

b) A B C + –

c) A D B C D ∗ – + ∗

d) A B A B ∗ + ∗ D ∗

e) A B C ∗ ∗ A B C + + –

f) A B + C D ∗ A A / – – B ∗

5) Dada la siguiente escritura de un árbol según **post orden**:

3 x 2 – 5 ↑ ∗ x 1 + ! ∗

Se pide dibujar el árbol en cuestión y luego dar su escritura según **in orden**.

ÁRBOLES – Representación de árbol binario de búsqueda

condiciones
- todo elemento en el subárbol izquierdo es < que el elemento raíz
- " " " " " derecho " > " " " "
- cada subárbol izquierdo y derecho es un árbol de búsqueda

6) El código de ciertos artículos está expresado en el siguiente conjunto de datos:

{ 30 , 25 , 98 , 67 , 31 , 4 , 22 , 90 , 100 }

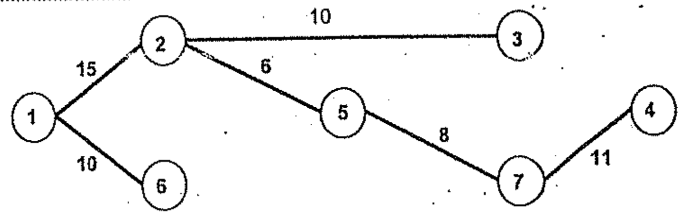
a) construir el árbol binario de búsqueda.
b) ¿como insertaría en el árbol el código: **45** ?.
c) recorrer el árbol en las tres formas canónicas (preorden – inorden – postorden).
d) ¿cuál es el recorrido conveniente para mostrar en pantalla los códigos ordenados en forma creciente?.

7) Para ingeniosos ó ingeniosas
Ordenar alfabéticamente el siguiente conjunto de mujeres utilizando el árbol de búsqueda.
Mujeres = { Elena , Beatriz , Ana , Hilda , Graciela , Daniela ; Carla ; Florencia }.

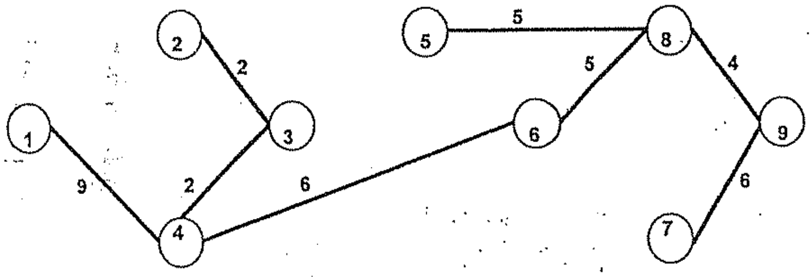
Unidad 6. Árboles y grafos. Respuestas

REDES – Árbol de extensión mínima

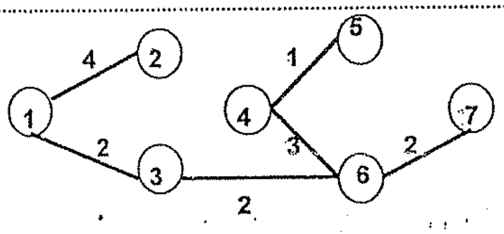
1)



2)

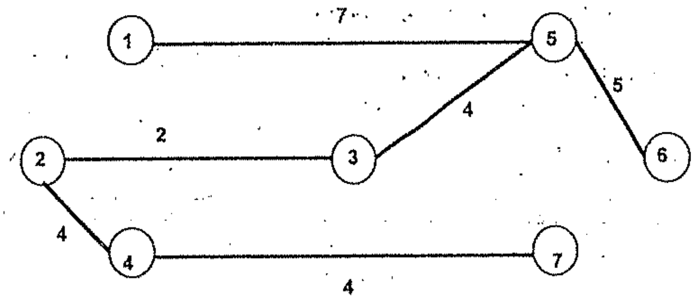


3)



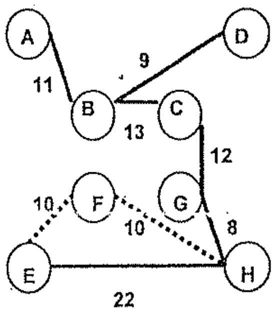
Costo = $ 1 200 000

4)

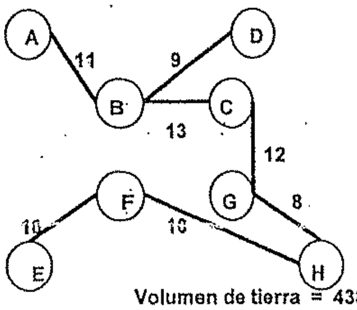


a) Longitud = 26
b) No modifica

5)

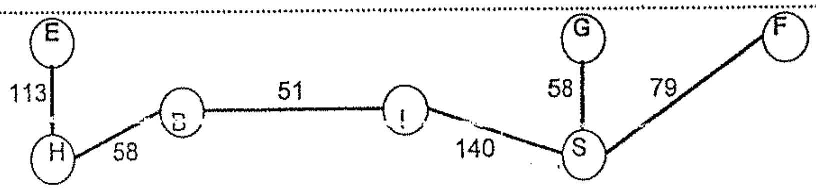


6)



Volumen de tierra = 438 000 m^3

7)



REDES – Ruta mas corta

8) 1 – 2 – 5 – 7 – 4 = 40 9) Inicio – 3 – 4 – 5 – 6 – Final = 24 ∨ Inicio – 3 – 5 – 6 – Final = 24

10) 1 – 4 – 7 = 17 11) 50 . No es ruta única. 12) ciudad A – 1 – 2 – ciudad B distancia: 12 Km.

13) a) F – 2 – 3 – 4 – P b) F – 1 – 2 – 3 – 5 – P c) (1000Km , $ 20) (1475 Km , $ 16)

REDES – Flujo máximo

14) Flujo máximo = 13 15) Flujo máximo de vehículos / hora = 15.000 vehículos

16) Flujo máximo / día = 264.000 vehículos 17) Flujo máximo = 60

ÁRBOLES – Representación de expresiones algebraicas

1) a) b) c) d) e) f) g) h) i)

2)

a) $[\cos \ln(x)] + [\ln^2(x) * 4]$ b) $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \ / \ 2a$

ÁRBOLES – Recorrido

3)

	pre orden	in orden	post orden
a)	* ↑ + x 1 4 – y ln 2	x + 1 ↑ 4 y – ln 2	x 1 + 4 ↑ y 2 ln – *
b)	– + – A ↑ B 2 + * C ↑ – A B 2 * 2 A	– A + B ↑ 2 – C * A – B ↑ 2 + 2 * A	A – B 2 ↑ + C A B – 2 ↑ * 2 A * + –
c)	* – / + A B C + C B * A – B C	A + B / C – C + B * A * B – C	A B + C / C B + – A B C – * *
d)			
e)			
f)			
g)			
h)			
i)			

4) a) 0 b) – 4 c) – 6 d) 16 e) 0 f) – 16

5) la lectura en in orden es: $3(x-2)^5 * (x+1)!$

ÁRBOLES – Representación de árbol binario de búsqueda

6)

c) preorden: 30 , 25 , 4 , 22 , 98 , 67 , 31 , 45 , 90 , 100
inorden: 4 , 22 , 25 , 30 , 31 , 45 , 67 , 90 , 98 , 100
postorden: 22 , 4 , 25 , 45 , 31 , 90 , 67 , 100 , 98 , 30

d) inorden

7) Mujeres = { Ana , Beatriz , Carla , Daniela , Elena , Florencia , Graciela , Hilda }.