El archivo **“fullSpatialJacobian.nii”** contiene el **gradiente de deformación (F)**, el cual describe cómo se transforman los vectores de posición del material durante el proceso de deformación. A partir de este gradiente es posible cuantificar los cambios locales de forma y tamaño en cada punto del volumen.

Para el análisis de tejidos blandos, donde las deformaciones pueden ser finitas y no se asume un régimen lineal, resulta más adecuado utilizar el **tensor de deformación de Green–Lagrange (E)**. Este tensor se obtiene a partir del **tensor de Cauchy–Green derecho (C).** Finalmente, el tensor de Green–Lagrange se calcula mediante la relación:

$$E = \frac{1}{2}(C - I)$$

donde Ies el tensor identidad. Este tensor Epermite evaluar las deformaciones verdaderas en el material considerando tanto los efectos de rotación como los de estiramiento.

1. Cauchy – Green Tensor

The deformation of soft tissues is often described by means of the right and left Cauchy-Green tensors defined as:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \text{ and } \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

Where **F** is the deformation gradient. The principal components of the right or left Cauchy-Green tensors are λ_i^2 with $i = 1, \ldots, 3$; λ_i are the principal stretches. The logarithmic strains are simply expressed as $\epsilon_i = \ln(\lambda_i)$

2. Green-Lagrange Strain

The Green-Lagrange strain tensor is directly defined in function of the right strain tensor by:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) \qquad E = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix}$$

Where **I** is the identity tensor, and its components are noted E_{ij} with $i, j = 1, \ldots, 3$. As the strain tensor components, values depend on the basis in which they are written, some use the strain invariants to express the constitutive law. These invariants are given for isotropic media by:

$$I_1 = tr(\mathbf{C}),\ I_2 = \frac{1}{2}[tr(\mathbf{C})^2 - tr(\mathbf{C}^2)],\ and\ I_3 = det(\mathbf{C}),$$

where "tr" is the trace operator, and "det" the determinant operator. Note that for incompressible material $I_3 = 1$.

Reference

Chagnon, G., Ohayon, J., Martiel, J.-L., & Favier, D. (2017). Hyperelasticity modeling for incompressible passive biological tissues. In Y. Payan & J. Ohayon (Eds.), *Translational epigenetics: Biomechanics of living organs* (Vol. 1, pp. 3–30). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-804009-6.00001-8

Código

Primero, se carga el volumen que contiene, en cada voxel, los nueve valores aplanados del tensor Jacobiano (gradiente de deformación, F). A continuación, estos valores se reorganizan para formar una matriz física de 3×3 en cada punto, que describe cómo se deforman los vectores locales del material en ese voxel.

Posteriormente, se calcula el determinante del gradiente de deformación, el cual representa el cambio local de volumen durante la deformación.

Luego, se obtiene el tensor de Cauchy–Green derecho (C) mediante la operación:

$$C = F^T F$$

Esta operación se implementa con la función np.einsum, que utiliza la notación de sumatoria de Einstein para expresar operaciones tensoriales de manera compacta y eficiente. En este caso, einsum realiza la multiplicación $F^T F$sin necesidad de bucles explícitos ni del uso de np.matmul, lo que permite vectorizar el cálculo en todo el volumen 3D.

La siguiente etapa corresponde al cálculo del tensor de deformación de Green–Lagrange (E), sin embargo, en este punto surge la duda sobre la forma más adecuada de implementarlo correctamente en el código.