

Restauración

Estudio de técnicas en la
restauración de imágenes

1. Introducción y Conceptos generales

1.1. Formación de Imágenes

En la figura 1 esta representado el esquema general que nos permitirá explicar como se forma una imagen.

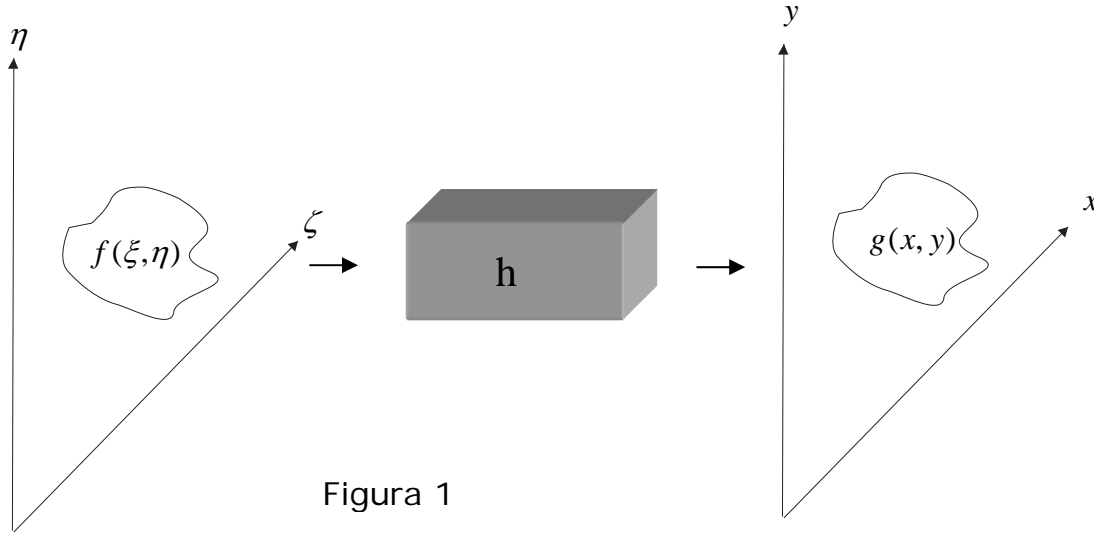


Figura 1

Supongamos que tenemos un objeto que se encuentra en el plano (ζ, η) (plano objeto) dicho objeto puede ser iluminado por una fuente de radiación luminosa o bien dicha radiación puede provenir de dicho objeto. Cualquiera sea el caso la energía radiante $f(\zeta, \eta)$ es reflejada, transmitida o emitida por el objeto y se propaga por el espacio. Un sistema de formación de imágenes h intercepta dicha energía irradiada y la transforma de manera que permite la formación de una imagen en el plano (x, y) (plano imagen). La distribución de la energía en este plano la llamaremos $g(x, y)$. Resulta entonces que las imágenes son representaciones de objetos cuya radiación es capturada en forma indirecta y transportada por diferentes mecanismos que permiten el sensado o formación de la imagen. La energía emitida (o reflejada) por el objeto es modificada por el sistema que forma la imagen (h) para dar lugar a la distribución de energía $g(x, y)$ en el plano imagen. Podemos entonces decir que la función $g(x, y)$ estará relacionada en forma general con $f(\zeta, \eta)$ mediante la siguiente expresión:

$$g(x, y) = h(x, y, \eta, \zeta, f(\zeta, \eta)) \quad (0.1)$$

Esta última expresión nos dice que la distribución de la energía radiante en el plano imagen es función de la distribución de energía radiante en el plano objeto y de ambas coordenadas (ζ, η) y (x, y) dado que debe tenerse en cuenta el cambio de la distribución de la energía radiante en ambos planos. Si en lugar de trabajar con puntos lo extendemos a un objeto continuo debemos sumar la contribución infinitesimal de todos los puntos que forman al objeto, en este caso la ecuación general para la formación de una imagen estará dada por:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, \zeta, \eta, f(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta \quad (0.2)$$

Si asumimos que el sistema es lineal la ecuación 1.2 quedara:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, \zeta, \eta) f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (0.3)$$

y si además asumimos que el sistema es espacialmente invariante tendremos que:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \zeta, y - \eta) f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (0.4)$$

La función h es conocida por el nombre de point spread function (PSF). Si nos basamos en la terminología usada para los sistemas lineales se puede ver a esta función como la respuesta impulsiva del sistema que forma la imagen y por lo tanto la Ec. 1.4 no es otra cosa que la convolucion entre h y f . Esta ultima ecuación tiene un papel fundamental en la descripción matemática de la formación de una imagen pero no debe olvidarse que su validez esta sustentada en el principio de superposición (linealidad) e invarianza espacial del sistema que forma la imagen.

Se puede introducir una simplificación adicional si suponemos que la PSF es separable. Una PSF es separable si se cumple que:

$$h(x, y, \zeta, \eta) = h_1(x - \zeta) h_2(y - \eta)$$

En este caso la integración puede hacerse de manera secuencial es decir:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x, \zeta) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(y, \eta) f(\zeta, \eta) d\eta \right] d\zeta$$

(0.5)

O bien:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(y, \eta) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x, \zeta) f(\zeta, \eta) d\zeta \right] d\eta \quad (0.6)$$

Nuevamente asumiendo invariancia espacial tenemos que:

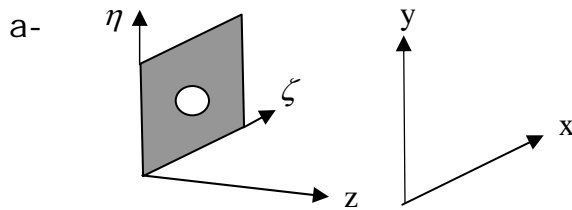
$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x - \zeta) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(y - \eta) f(\zeta, \eta) d\eta \right] d\zeta \quad (0.7)$$

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(y - \eta) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x - \zeta) f(\zeta, \eta) d\zeta \right] d\eta \quad (0.8)$$

Estas ecuaciones representan el proceso de formación de una imagen independientemente de la formación horizontal y vertical de la misma. Las ecuaciones 1.7 y 1.8 y son la descripción matemática fundamental para la formación de una imagen

1.2. Sistemas ópticos

Para concretar ideas podemos nombrar algunas PSF de sistemas ópticos



En este caso tenemos una abertura en el plano y la distribución del campo en el plano imagen esta dada por [Goodman 1968]:

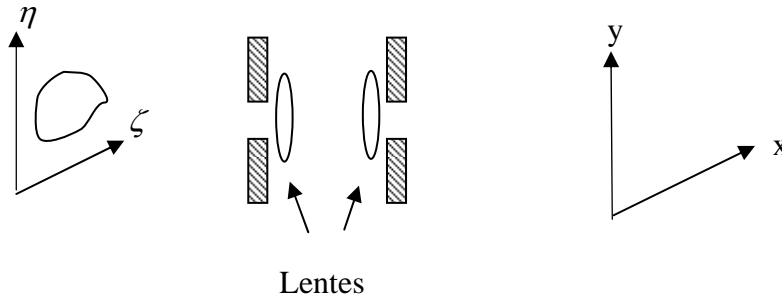
$$(2.1) \quad g(x, y) = K_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \eta) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} ((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2) \right] d\zeta d\eta$$

Siendo la PSF:

$$(2.2) \quad PSF = \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} ((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2) \right]$$

Donde λ es la longitud de onda, z la distancia del objeto al plano imagen y K_1 una constante compleja. La ecuación 2.1 esta relacionada con la teoría de difracción de fresnel.

b- Un caso más habitual que la difracción es un sistema con una apertura de entrada una apertura de salida y lentes.



En este caso la formación de la imagen esta dada por:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \eta) |h(x, \zeta, y, \eta)|^2 d\zeta d\eta$$

Otros casos que intervienen en la formación de una imagen son:

- Degradación por movimiento (Motion Blur)

Provocado por el movimiento de la cámara o un rápido movimiento del objeto lo que se traduce en el promediado local en una dimensión de los píxeles vecinos

$$h(i) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq i \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{en los demas casos} \end{cases}$$

- Degradación por turbulencia atmosférica (Atmospheric turbulence Blur)

Este tipo de degradación es frecuente en sensado remoto o tomas aéreas y puede ser modelado mediante una PSF gaussiana K es una constante de normalización mientras que σ^2 es la varianza que determina la intensidad de la degradación.

$$h(x, y) = k \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Degradación por lente fuera de foco

Este tipo de degradación es encontrado típicamente en sistemas ópticos donde se modela como una intensidad uniforme dentro de un área circular.

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

1.3. Detección y grabación de imágenes

Existen una gran variedad de sistemas para capturar una imagen. Estos se pueden dividir en dos grandes grupos: fotoquímicos y fotoeléctricos. En el caso de los primeros podemos mencionar a la película fotográfica que sirve como medio de captura y al almacenamiento a la vez. En el caso de los fotoeléctricos tenemos las cámaras de televisión como ejemplo. Lo que interesa puntualizar es que tanto en un caso como en el otro se produce un error durante el proceso de captura que es propio de cada uno de estos medios. Por ejemplo en el caso de la película fotográfica el se introduce un ruido por la distribución no uniforme de las partículas de plata que forman la película. Esta situación es modelada mediante la distribución de Poisson. En el caso fotoeléctrico la situación es algo más compleja. En este caso se tienen dos fuentes que contribuyen al ruido en la imagen. El primero es la distribución aleatoria del número de fotones en la superficie activa del detector. En segundo lugar se tiene el efecto producido por el ruido térmico en los circuitos de adquisición y procesamiento de la señal.

Este último caso es bien conocido y se modela como un proceso gaussiano de media cero y cuyo espectro de potencia es uniforme (blanco). **[Hunt p23]**.

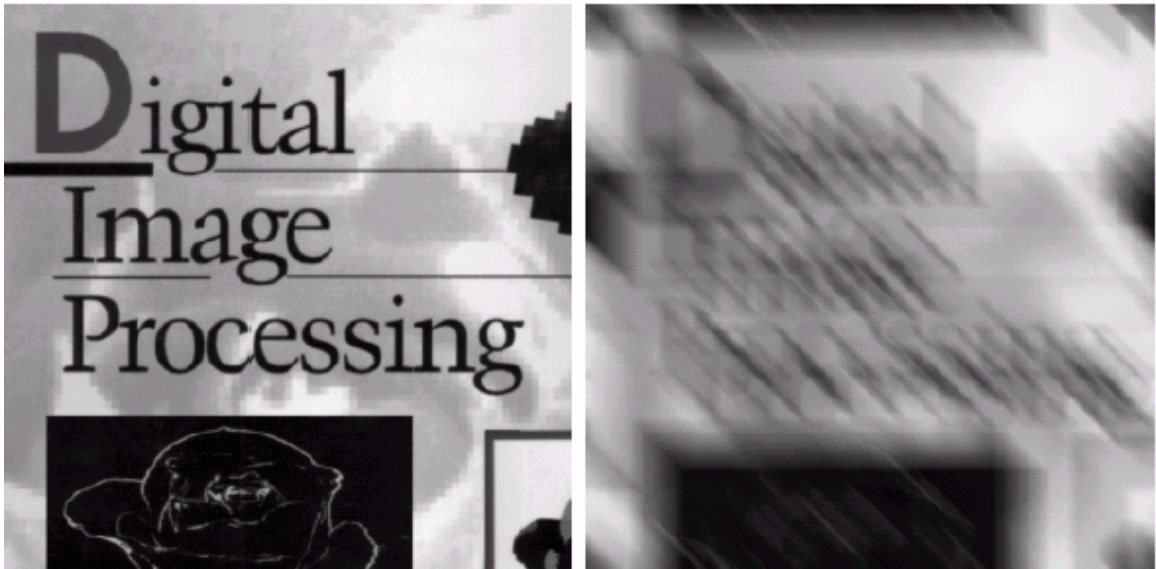
1.4. Degradación vs. restauración

Introduciremos los conceptos para comprender el campo de estudio del presente informe. La restauración de imágenes busca obtener un resultado lo más próximo al modelo original a partir de la imagen degradada. Dentro del campo de la restauración de imágenes existen dos áreas de estudio: la identificación de imágenes, cuyo objetivo es modelar el proceso de degradación, y la restauración propiamente dicha, cuyo fin es tratar de invertir el proceso de degradación.

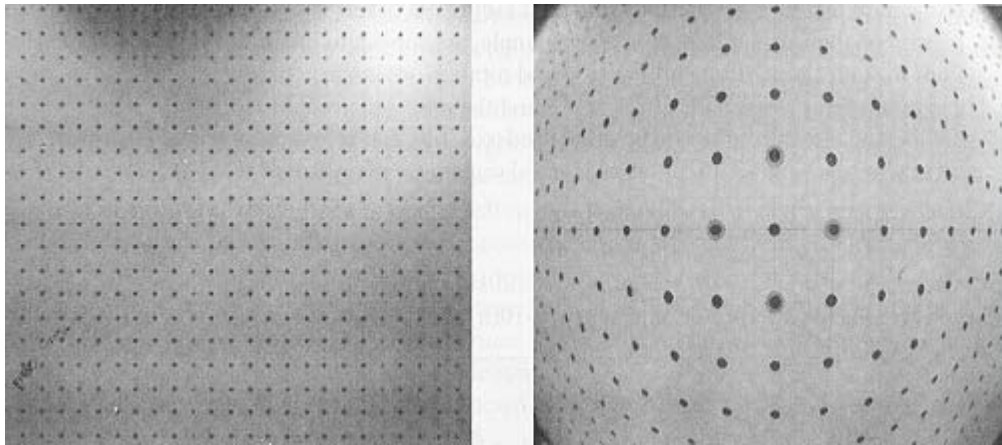
A continuación se presentan imágenes de distintos tipos de distorsiones o degradaciones donde las causas y los efectos son claros y orientan tanto a la identificación como a la restauración.



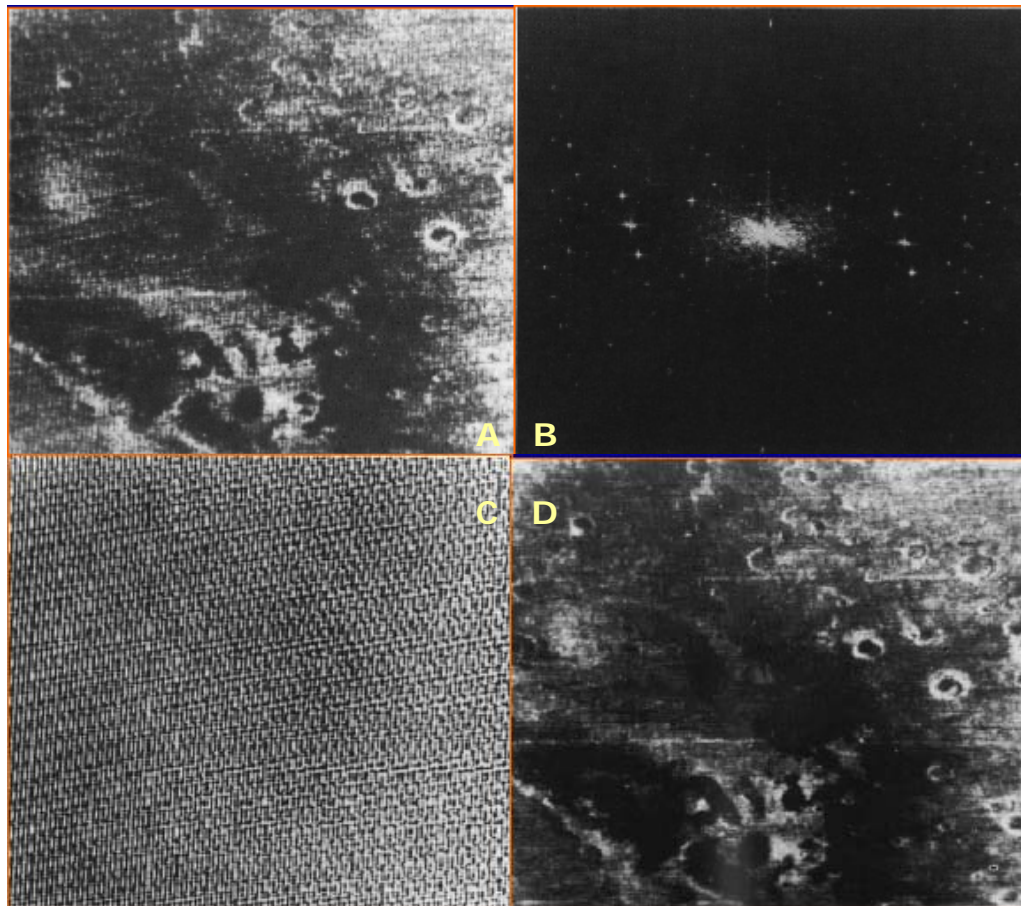
Desplazamiento lineal uniforme (2 casos en distintas direcciones)



Este último ejemplo corresponde al libro [5]



Rectificaciones geométricas

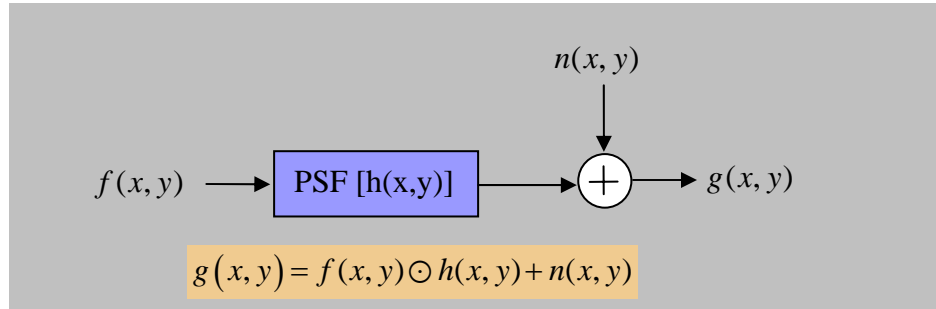


Interferencia periódica

(A- Imagen original; B- Transformada de la imagen ; C- Modelo de interferencia; D-Imagen restaurada)

2. Terminología – Modelo de degradación

De lo visto anteriormente queda claro que en el proceso de formación de una imagen intervienen dos factores el medio óptico y el ruido. El siguiente modelo reúne ambos efectos y es de vital importancia en la restauración de imágenes.



Dominio temporal

$$g(x,y) = f(x,y) \odot h(x,y) + n(x,y)$$

Donde

- $g(x,y)$ Imagen degradada (Blurred image)
- $f(x,y)$ Imagen Original (ideal o verdadera)
- $h(x,y)$ PSF (Point spread function)
- $n(x,y)$ Ruido aditivo
- \odot Operador convolucion

Dominio de la Frecuencia

$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v) + N(u,v)$$

Donde:

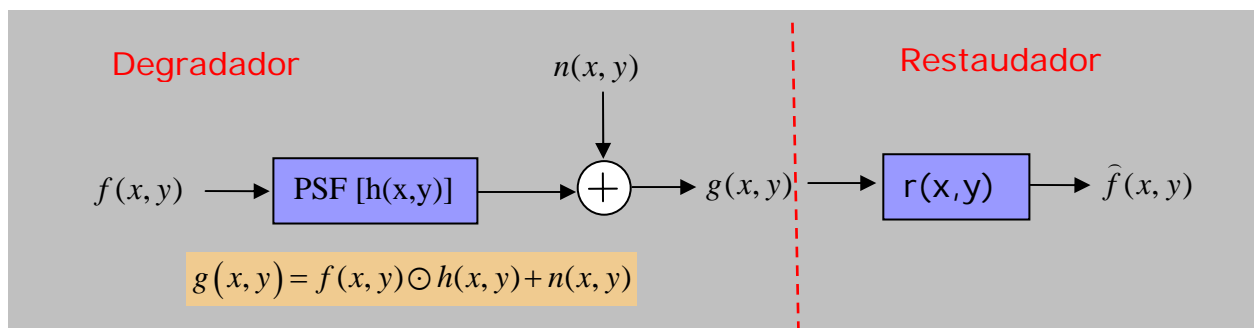
- $G(u,v) = \text{DFT} (g(x,y))$
- $F(u,v) = \text{DFT} (f(x,y))$
- $H(u,v) = \text{DFT} (h(x,y)) = \text{OTF} (\text{Optical transfer function})$
- $N(u,v) = \text{DFT} (n(x,y))$

En este modelo de degradación de una imagen nos basaremos para analizar algunos de los métodos más comunes de restauración

Nota: Dde aquí en mas las letras en mayúsculas representan transformadas.

2.1. El Proceso de degradación

En el modelo de degradación de la figura de la página previa la imagen original $f(x,y)$ es convolucionada con la $h(x,y)$ si omitimos por un momento la existencia de ruido el resultado de esta convolución es la imagen degradada $g(x,y)$. Es por lo tanto lógico pensar que si conocemos la $h(x,y)$ podemos obtener la imagen original $f(x,y)$ haciendo el proceso inverso es decir deconvolucionar. Desafortunadamente solo se puede estimar la PSF del sistema haciendo algún tipo de hipótesis sobre la misma de acuerdo con lo presentado en apartados previos. Lo mismo ocurre con el ruido este deberá ser estimado de alguna manera. Así resulta que el esquema completo tendría la siguiente forma:



La salida del restaurador la llamaremos \hat{f} que es la imagen estimada por el proceso de restauración. Nuevamente debe enfatizarse que no se tiene acceso a la imagen original $f(x,y)$ ni se conoce con exactitud la PSF y el ruido. Es por eso que en el proceso de restauración se deberá modelar a estos dos últimos.

3. Métodos más comunes para la restauración

Como se ha mencionado antes el camino más simple para realizar la restauración es invertir el proceso de degradación para lo cual podemos definir el filtro inverso como

$$R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H(\omega_x, \omega_y)}$$

Bajo estas condiciones la imagen restaurada \hat{F} será:

$$\hat{F} = R G = R[N + HF] = \frac{1}{H}[N + HF] = \frac{N}{H} + F$$

Es decir:

$$\hat{F} = \frac{N}{H} + F$$

De esta última expresión se puede sacar una conclusión importante y es que al figurar H en el denominador \hat{F} puede llegar a tomar valores muy grandes si H se hace muy pequeña en particular si se hace cero para alguna frecuencia. Visto de otra manera el ruido N puede quedar muy amplificado cuando ocurre esto. Esto puede verse en la figura siguiente la cual fue filtrada mediante el filtro inverso solamente (SNR=30 dB)



El término N/H de la expresión anterior puede dominar el proceso de restauración si se tiene en cuenta que H es un filtro pasa bajos y el modulo de su respuesta en frecuencia cae rápidamente al alejarse del origen del plano ω mientras que el ruido lo hace más lentamente. En estas situaciones es a veces conveniente realizar la restauración solamente en las proximidades del origen de manera de evitar pequeños valores de H. En términos matemáticos esto se conoce como un problema mal condicionado ([1] p.30) La teoría de la regularización provee herramientas de análisis de problemas mal condicionados mediante el estudio de casos bien condicionados.

4. Filtro de Wiener

Este filtro intenta resolver el problema de la amplificación del ruido buscando una solución de compromiso entre la calidad de la restauración y la amplificación del ruido.

La idea básica detrás de este filtro es la siguiente: Supongamos que tenemos una señal $s(x,y)$ y un ruido $n(x,y)$ que son muestras de un proceso aleatorio estacionario de media cero. La observación de la señal contaminada por ruido $o(x,y)$ estará dada por

$$o(x,y) = s(x,y) + n(x,y)$$

si deseamos determinar $s(x,y)$ a partir de $o(x,y)$ usando un estimador lineal dado por

$$\hat{s}(x,y) = o(x,y) * h(x,y)$$

El estimador lineal será un sistema lineal dado que estamos tratando de un proceso aleatorio estacionario. El criterio del error a usar será:

$$Error = E[|e(x,y)|^2]$$

donde

$$e(x,y) = s(x,y) - \hat{s}(x,y)$$

Esto se conoce como un problema de la determinación error cuadrático medio mínimo lineal pues estamos usando un estimador lineal para minimizar el error cuadrático medio entre :

$$s(x,y) \quad y \quad \hat{s}(x,y)$$

Resolviendo lo planteado se llega a la ecuación del Filtro de Wiener que esta dado por:

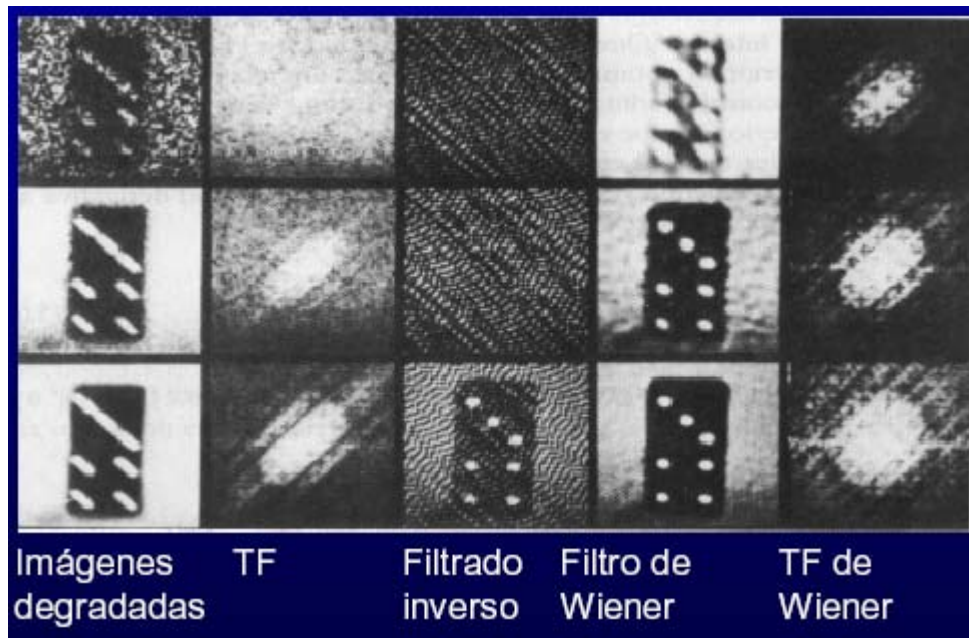
$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y) S_{xx}(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 S_{xx}(\omega_x, \omega_y) + S_{nn}(\omega_x, \omega_y)}$$

o bien

$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \frac{S_{nn}(\omega_x, \omega_y)}{S_{xx}(\omega_x, \omega_y)}}$$

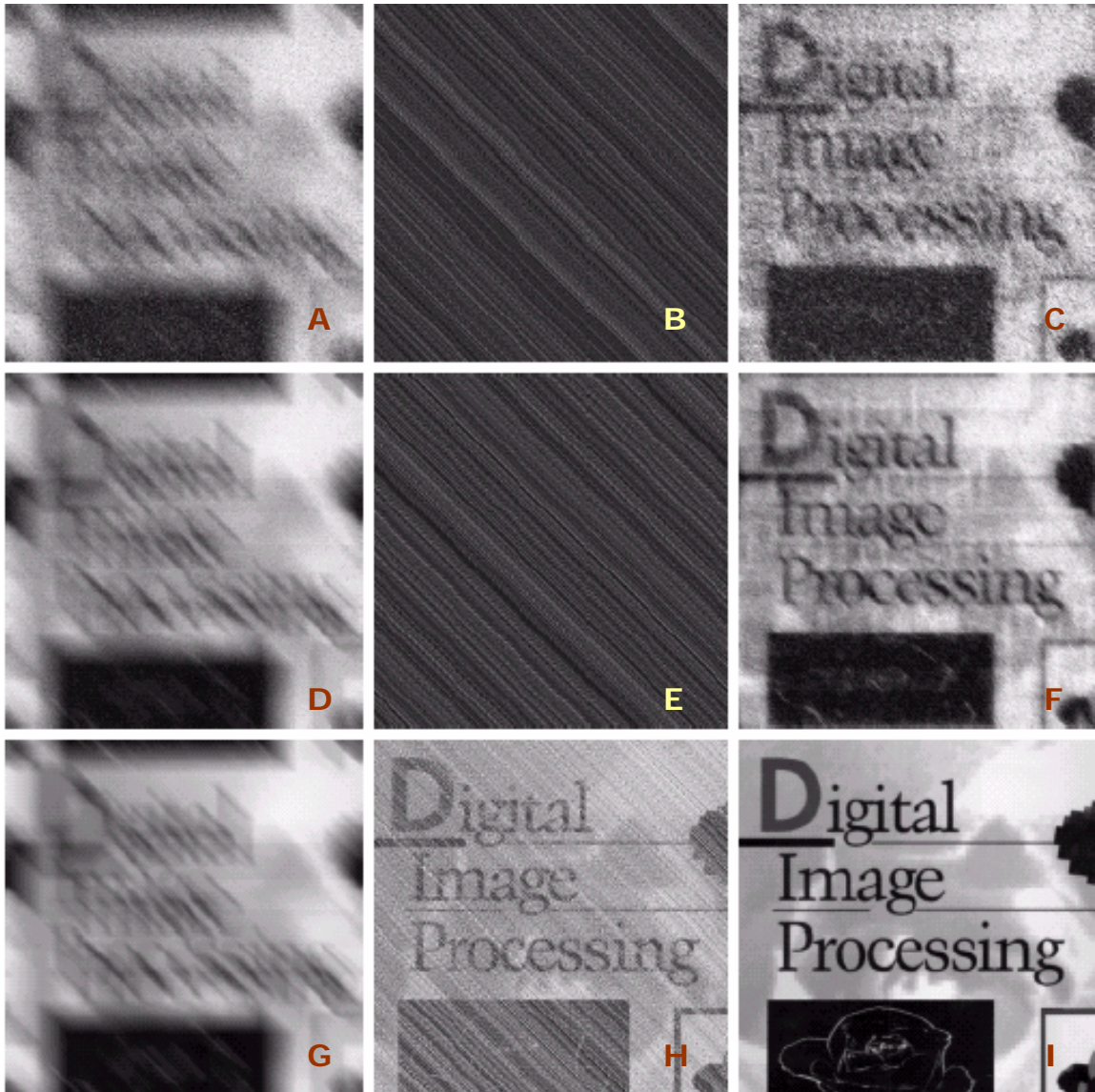
Siendo S_{xx} y S_{nn} las densidades espectrales del ruido y H la respuesta en frecuencia del filtro degradador. Nótese que en ausencia de ruido ($S_{nn}=0$) el filtro de Wiener se transforma en el filtro inverso. Este filtro requiere que se conozcan las densidades espectrales del ruido a si como de la señal. Dado que esto no es siempre posible se deberán estimar por otros medios.

Las siguientes imágenes permiten ver las mejoras que puede introducir el filtrado por Wiener frente a otros métodos.



Se observan en la figura diversas imágenes degradadas, junto con su transformada frecuencial. A continuación el resultado de la restauración mediante filtrado inverso y filtrado de Wiener, así como la respuesta en frecuencia del filtro de Wiener.

Se puede ver claramente la ventaja de trabajar con el método adaptativo sobre el filtrado inverso, que se torna altamente dependiente de las frecuencias de corte del filtro de degradación. Cuando el ruido está distribuido en todas las frecuencias, como se observa en la primera fila, el filtrado inverso es inútil. En condiciones mas apropiadas para este ultimo, como es el tercer caso, igualmente el filtrado de Wiener resulta altamente superior.



En esta nueva figura podemos ver similares efectos:

- A- Imagen corrupta debido a ruido aditivo y distorsión borrosa provocada por movimiento lineal.
- B- Resultado de filtrado inverso.
- C- Resultado de filtrado Wiener.
- D-E-F Idem fila anterior, pero con variancia 10 veces inferior.
- G-H-I Idem primera fila, pero con variancia 50 veces menor.

Recién en H se observa la ganancia que provee el filtro inverso, pero en todos los casos mostrados el filtrado de Wiener resulta superior.

5. Restauración con regularización

La teoría de la regularización tiene por objeto la resolución de problemas mal condicionados a través del estudio de problemas bien condicionados como se menciono antes. Los métodos de regularización más comunes se dividen en directos, iterativos, recursivos y estocásticos. No debe perderse de vista que lo que buscan todos estos métodos es encontrar una solución de compromiso entre la calidad de la restauración y la amplificación del ruido. En todos los casos se debe partir de ciertas premisas sobre el tipo de degradación y el ruido dicho en otros términos se debe partir de un modelo bien condicionado. Se hará una breve descripción de dichos métodos.

5.1. Métodos de regularización directa

Si el modelo que previamente usamos para representar la degradación de la imagen dado por la ecuación:

$$g(x, y) = f(x, y) \odot h(x, y) + n(x, y)$$

es resuelto en forma regularizada, nos permite la aplicación de métodos directos de restauración. Esto es valido ya sea que el modelo para la imagen original se considere estocástico o deterministico. En ambos casos el modelo representa información a priori de la solución que puede ser utilizada para convertir el problema en bien condicionado.

5.2. Regularización estocástica

Esta solución permite la elección de un filtrado lineal que evalúa el valor estimado de la imagen original (\hat{f}) de acuerdo a:

$\min E \left\{ \|f - \hat{f}\|^2 \right\}$ sujeto a que la matrices covarianza de f y n :

$$R_{ff} = E \{ ff^T \} \quad R_{nn} = E \{ nn^T \} \quad \text{sean conocidas [1]p30.}$$

Para usar un modelo estocástico para f y n es necesario tener un conocimiento previo de los datos que serán utilizados para regularizar el problema. El estimador lineal que minimiza a la expresión previa es:

$$\hat{f} = R_{ff} H^T (H R_{ff} H^T + R_{nn})^{-1} g$$

La matriz $(H R_{ff} H^T + R_{nn})$ que ahora debe ser invertida es un mejor estimador que $(H H^T)$ en el caso del filtro inverso. Esta ecuación es la formulación clásica del filtro de Wiener [3]. Asumiendo que todas las matrices de la expresión previa son "*block circulant*" podemos evaluar el valor de \hat{f} en el dominio de la frecuencia como:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \frac{S_{ff}(\omega_x, \omega_y) H^*(\omega_x, \omega_y) Y(\omega_x, \omega_y)}{S_{ff}(\omega_x, \omega_y) |H(\omega_x, \omega_y)|^2 + S_{nn}(\omega_x, \omega_y)}$$

Donde $S_{ff}(\omega_x, \omega_y)$ y $S_{nn}(\omega_x, \omega_y)$ representan los espectros de potencia de la señal original y del ruido respectivamente. Nótese de que para cada frecuencia (ω_x, ω_y) el valor de F se evalúa realizando las operaciones indicadas en forma escalar y también debe tenerse presente que ω_x y ω_y son discretas. El conocimiento a priori de los espectros de potencia de la señal original y del ruido es de importancia primordial.

En muchos casos la $S_{nn}(\omega_x, \omega_y)$ es conocida o puede ser estimada a partir de una región uniforme de la imagen observada $g(x,y)$ [3]. Respecto a $S_{ff}(\omega_x, \omega_y)$ lo habitual es estimarla a partir del espectro de la imagen observada $S_{gg}(\omega_x, \omega_y)$. También se puede usar el periodograma para estimar el espectro de potencia [1] p.30

5.3. Regularización determinista

El uso de información determinística a priori puede ser usada para regularizar el problema de la restauración. Por ejemplo si se usa el método de mínimos cuadrados sujeto a una condición la restauración puede ser formulada de manera eligiendo \hat{f} tal que minimice el lagraniano:

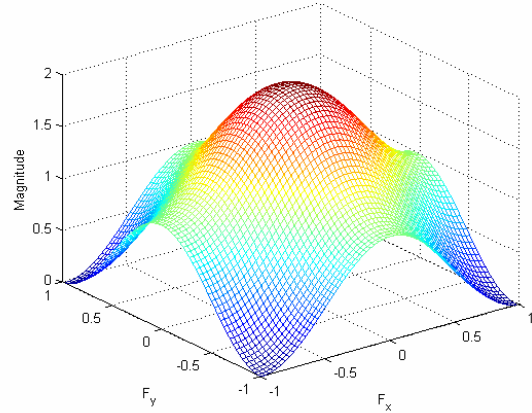
$$\min E \left\{ \|g - H\hat{f}\|^2 + \alpha \|C\hat{f}\|^2 \right\}$$

donde $C\hat{f}$ representa a una versión de \hat{f} que fue filtrada por un filtro pasa altos. De esta manera se puede tener un control sobre el contenido de alta frecuencia que es donde mas se amplifica el ruido porque justamente allí es donde la H tiene valores singulares. Mientras que por otro lado se dejan inalterados los valores en baja frecuencia. El parámetro C habitualmente es el operador laplaciano en 2D dado por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & -1 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la minimización de

$$\min E \left\{ \|g - H\hat{f}\|^2 + \alpha \|C\hat{f}\|^2 \right\}$$



Da lugar a una ecuación de la forma:

$$\hat{f} = (H^T H + \alpha C^T C) H^T g$$

Es conocida como regularización de Tikhonov-Miller. Al igual que en el caso anterior se puede resolver en el dominio de la frecuencia. El punto más crítico es la selección del parámetro α para lo cual existen numerosos estudios [4][1]p.25 que permiten encontrar un valor óptimo para un numero variado de información acerca de la señal y del ruido.

6. Restauración iterativa

La restauración iterativa es de especial interés en este trabajo ya que se exploran sus alcances. La ventaja primaria sobre las demás es que no se requiere de la inversión de ningún operador o matriz y lo mas interesante es que el proceso puede ser monitoreado a medida que progresa. Además los efectos del ruido pueden ser controlados poniendo ciertas restricciones y los parámetros que determinan la solución pueden ser actualizados durante el proceso.

A modo de ejemplo podemos mencionar uno de los métodos iterativos determinísticos mas comunes que consiste en resolver:

$$(H^T H + \alpha C^T C) f = H^T g$$

por el método de aproximaciones sucesivas [1]

Esto da origen a la siguiente formula de iteración para \hat{f}

$$f_0 = \beta H^T g$$

$$f_{k-1} = f_k H^T g - (H^T H + \alpha C^T C) f_k = H^T g$$

Esta iteración converge si: $0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$

Donde λ_{\max} es el mayor auto valor de $(H^T H + \alpha C^T C)$

Este método es conocido por CLS (*Constrained Least Squares*) o Tikhonov-Miller dependiendo de cómo se encuentre el valor de α . Nuevamente si las matrices H y C son *Block Circulantes* se puede resolver el problema en el dominio de la frecuencia. Usando un criterio de comparar la energía normalizada entre cada iteración contra un umbral como criterio de terminación se efectúa el proceso de restauración.

En nuestro caso en particular se estudiarán los resultados que se obtienen cuando se usan sistemas iterativos para desensibilizar el proceso de la restauración respecto de las variaciones que puedan tener los parámetros que forman parte del proceso. La idea es que dado que como se menciono antes las variaciones en la estimación de ruido y los parámetros de la imagen original pueden ser importantes

se debe buscar una manera de independizarse de estos cambios durante el proceso de restauración.

6.1. Evaluación de la calidad de la imagen restaurada

Para medir la eficacia de un algoritmo de restauración frente a otro es necesario establecer patrones de medición de la calidad de una imagen.

Las herramientas para la medición de la calidad de la imagen restaurada se basan en variaciones del error entre la imagen restaurada y la original. Dos de las más utilizadas son la BSNR (*Blurred Signal to Noise Ratio*) o la ISNR (*Improved SNR*)[1][5] y se definen como:

$$BSNR = 10\log_{10} \left[\frac{\frac{1}{MN} \sum_{i,j} (g(i,j) - E[g(i,j)])^2}{\sigma_n^2} \right]$$

$$ISNR = 10\log_{10} \left[\frac{\sum_{i,j} (f(i,j) - g(i,j))^2}{\sum_{i,j} (f(i,j) - r(i,j))^2} \right]$$

Estas medidas evalúan la calidad de un modo formal, y no guardan información de la zona donde se produjo el error, por ejemplo si es un borde o una zona plana. En esos casos, un observador percibirá de forma diferente el error. Esto hace que se tienda a evaluaciones subjetivas de calidad dado que es en definitiva el ojo humano el ultimo observador. Claramente la subjetividad debería jugar un rol destacado en el proceso de medición del error, pero hasta el momento no se han encontrado sistemas eficaces de medición de parámetros subjetivos.

Referencias

- [1] M.R. Banham and A.K. Katsaggelos, "Digital Image Restoration", IEEE Signal Processing Magazine, pp 24-41, March 1997.
- [2] Two Dimensional Signal and Image Processing Jae S. Lim Prentice Hall Signal Processing Series
- [3] H.C. Andrews and B.R. Hunt, Digital Image Restoration, Prentice Hall, Englewood Cliffs ,1977.
- [4] N.P. Galatsanos and A.K. Katsaggelos, "Methods for Choosing the Regularization Parameter and Estimating the Noise Variance in Image Restoration and their Relation," IEEE Trans. Image Proc., vol. 1, pp. 322-336. July 1992.
- [5] R.C. Gonzalez and R.E. Woods, "Digital image processing", Addison Wesley Publishing Company, 1993.
- [6] Jae S. Lim, " Two-Dimensional Signal and Image Processing", Prentice Hall, 1990.