

Rapport d'activités – 1^{ère} année

Viet Anh QUACH

23 juin 2025

Table des matières

1	Étude bibliographique	2
1.1	Introduction de la thèse	2
1.2	Méthode des Points Matériels (MPM)	2
1.3	Méthode des Éléments Dicretes (DEM)	3
1.4	Couplage MPM×DEM	4
2	Simulation numérique	6
2.1	Simulation MPM – Déformation d’une poutre en console	6
2.2	Simulation DEM : Compression triaxiale	7
2.2.1	Les caractéristiques mécaniques générales du sol	8
2.2.2	Recherche sur l’impact dynamique	11
2.2.3	Rhéologie $\mu(I)$ résiduelle	12
3	Conclusion	14

Chapitre 1

Étude bibliographique

1.1 Introduction de la thèse

Avec le changement climatique, les risques naturels liés aux écoulements gravitaires en zones montagneuses deviennent de plus en plus fréquents et intenses.

Récemment, le village de Blatten, situé dans les Alpes suisses, a été rayé de la carte à la suite de l'éboulement d'un glacier survenu le 29 mai 2025 ¹.

Malheureusement, les mécanismes fondamentaux de ces phénomènes restent encore mal compris. Dans ce contexte, mon projet de thèse intitulé « Homogénéisation numérique à double échelle pour la modélisation de mouvements gravitaires liés aux changements climatiques » vise à développer une modélisation mécanique numérique adaptée à l'écoulement de matériaux granulaires complexes.

La méthodologie proposée repose sur une approche d'homogénéisation numérique à deux échelles intégrées, combinant deux processus hiérarchiques interconnectés. À l'échelle macroscopique, la Méthode des Points Matériels (MPM) est utilisée pour modéliser le mouvement global du matériau. Parallèlement, à l'échelle microscopique, la Méthode des Éléments Discrets (DEM) joue le rôle de Loi Constitutive Homogénéisée Numériquement (LCHN).

Les détails de cette approche sont présentés dans les sections suivantes.

1.2 Méthode des Points Matériels (MPM)

La Méthode des Points Matériels (MPM) est une méthode numérique hybride combinant une description lagrangienne des particules et un maillage eulérien en arrière-plan. Elle est principalement utilisée en dynamique des fluides et en mécanique des milieux continus, notamment dans les cas de grandes déformations, grâce à sa nature sans maillage fixe (Meshless ou Meshfree Method)[Duverger, 2023].

1. https://www.lemonde.fr/planete/article/2025/05/29/suisse-1-effondrement-d-un-glacier-detruit-le-village-de-blatten_6609070_3244.html

Dans le cadre de cette thèse, on utilise la variante dite Updated Lagrangian MPM (ULMPM). Cette approche repose sur un maillage de fond constitué de nœuds fixes, à travers lequel se déplace le milieu granulaire. En pratique, les nœuds du maillage sont déplacés pendant chaque pas de temps pour les calculs intermédiaires, puis réinitialisés à leur position d'origine à la fin de chaque itération. Cela permet de considérer le maillage comme étant eulérien, dans la mesure où il ne subit jamais de distorsion permanente au cours de la simulation. Le matériau granulaire est discrétisé en points matériels, chacun représentant un volume du matériau et transportant l'ensemble de ses propriétés physiques (masse, position, vitesse, contraintes, variables internes nécessaires aux lois de comportement, etc.). Ces points suivent un cadre lagrangien, fournissant une description de l'état des particules à tout instant [Danies, 2018]. L'algorithme de base de l'ULMPM se décompose en quatre étapes principales :

1. À l'instant t , les informations des particules (points matériels) sont transférées aux nœuds de leur cellule d'influence dans le maillage.
2. L'équation du torseur est résolue aux nœuds ; les propriétés nodales (position, vitesse, accélération, forces) sont mises à jour.
3. Les informations sont ensuite retransférées des nœuds vers les particules, permettant la mise à jour de leurs propriétés (position, vitesse, contrainte, déformation, etc.).
4. Le maillage est réinitialisé à sa configuration initiale, et le cycle se poursuit à l'instant $t + \delta t$.

1.3 Méthode des Éléments Dicretes (DEM)

Originé des dynamiques moléculaires, la Méthode des Éléments Discrets (DEM) a été développée dans le but d'étudier les problèmes mécaniques liés aux matériaux granulaires et géomatériaux. Contrairement aux méthodes en milieu continu telles que MPM ou FEM, DEM modélise le matériau comme un ensemble de particules discrètes.

Dans cette approche, le milieu granulaire est représenté par un assemblage de grains interagissant individuellement. Le mouvement de chaque grain est régi par la seconde loi de Newton, formulée comme suit pour le grain i :

$$F_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

C'est pourquoi la DEM appartient à la famille des méthodes newtoniennes [Radjai and Dubois, 2011]. Grâce à sa flexibilité, elle permet de prendre en compte tous les effets des forces intergranulaires, ajustables selon la nature du problème. La force F_i appliquée à la particule i peut comprendre :

- Les forces de contact F_{ij} exercées par les grains j en contact avec i (la [figure 1.1](#)), comprenant :
 - Force normale f_n : composée d'une contribution élastique ($f_{n,\text{elas}}$), d'un amortissement visqueux ($f_{n,v}$), d'une liaison intergranulaire ($f_{n,\text{bond}}$), et éventuellement d'une composante de cohésion de surface (f_{coh}).

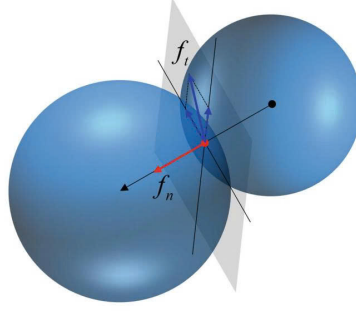


FIGURE 1.1 – Deux grains i et j en contact

- Force tangentielle f_t : comprenant la composante de frottement ($f_{t,\text{fric}}$) et la composante de liaison tangente ($f_{t,\text{bond}}$).
- Les forces externes F_{ext} , telles que :
 - La force gravitationnelle
 - La poussée d'Archimède dans un milieu fluide (par exemple l'eau)
 - D'autres interactions spécifiques selon le cas étudié

Dans cette étude, la forme des grains est sphérique en 3D. Toutefois, il est possible de faire varier leur taille, forme, rigidité, ou tout autre paramètre géométrique ou mécanique afin de s'adapter plus fidèlement au matériau réel.

Lorsqu'aucune contrainte rigide (comme une turbine, une cavité fermée, ou un canal fixe) n'est imposée, les conditions aux limites périodiques sont couramment utilisées. On peut les visualiser intuitivement comme des "portails de téléportation" dans les jeux vidéos : lorsqu'une particule sort par un bord du domaine, elle réapparaît automatiquement du côté opposé, avec les mêmes propriétés physiques.

L'algorithme de base de la DEM peut être divisé en quatre étapes principales :

1. À l'instant t , on détermine les contacts entre particules en fonction de leur position.
2. On calcule le tenseur des efforts (forces et moments) appliqué à chaque grain.
3. À l'aide de la seconde loi de Newton, on déduit l'accélération de chaque particule.
4. On met à jour la position des particules à l'instant suivant $t + \delta t$, puis le cycle recommence.

1.4 Couplage MPM×DEM

Le couplage entre deux méthodes numériques différentes, comme le couplage FEM×DEM [Nguyen, 2013], a déjà été largement utilisé et s'est avéré très efficace [Nguyen et al., 2024]. Dans le cadre de la modélisation des écoulements granulaires, le couplage entre la méthode des points matériels (MPM) et la méthode des éléments discrets (DEM) apparaît particulièrement pertinent, car il permet de tirer parti des atouts respectifs de chaque méthode.

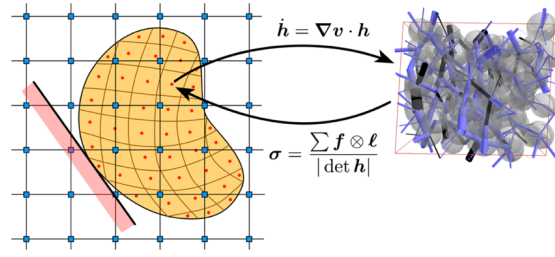


FIGURE 1.2 – Principe d’une approche à deux échelles hiérarchiques [Richefeu et al., 2024].

Comme illustré sur la figure 1.2, la méthode MPM (partie gauche) se charge du calcul des indices à l’échelle macroscopique, notamment du gradient de vitesse ∇v . Ces informations sont ensuite transmises aux points matériels rouges, qui sont ici associés à un volume élémentaire représentatif (VER) modélisé par DEM. Ce modèle discret permet de calculer le tenseur des contraintes σ_p selon la formulation classique Love-Weber plus le terme cinétique $\sum m \dot{r} \otimes \dot{r}$ [Ozenda et al., 2025].

Grâce à l’intégration du modèle DEM au niveau microscopique, il devient possible de résoudre localement les comportements complexes des matériaux, en tenant compte de la microstructure et des interactions entre grains. Cela permet d’aller au-delà des limitations des lois de comportement analytiques classiques, souvent trop simplifiées pour capturer les effets fins liés à la nature granulaire.

Parallèlement, la MPM offre une solution efficace pour représenter le mouvement global du matériau sans souffrir des problèmes de distorsion de maillage, fréquents dans les méthodes lagrangiennes classiques comme la FEM. La combinaison des deux approches permet ainsi de préserver les avantages de chacune tout en compensant leurs faiblesses respectives.

Au laboratoire 3SR, deux programmes de calcul indépendants en C++ ont été développés pour implémenter respectivement la MPM et la DEM. Il s’agit de **MPMbox** pour la MPM, et de **3D_sandstone** pour la DEM. Leur intégration dans une plateforme de calcul multi-échelle est désormais bien établie [Richefeu and Combe, 2025], avec des résultats prometteurs. Toutefois, certains verrous scientifiques restent à résoudre :

- **Équivalence des inerties aux deux échelles** : La méthode MPM, conçue à l’origine pour traiter des problèmes de contact liés au phénomène dynamique [Nguyen et al., 2023], intègre naturellement les effets d’inertie. En revanche, la DEM tend à filtrer les réponses dynamiques en attendant une stabilisation statique [Nguyen et al., 2014]. Le couplage des deux fait émerger des questions théoriques nouvelles concernant l’équivalence des inerties entre les échelles micro et macro, particulièrement critiques dans les contextes hautement dynamiques comme les écoulements granulaires.
- **Conditions aux limites** : L’implémentation actuelle des conditions aux limites périodiques dans la partie DEM reste encore à perfectionner. Cette insuffisance engendre parfois des pics anormaux de contraintes, nuisant à la robustesse et à la représentativité des simulations.

Chapitre 2

Simulation numérique

2.1 Simulation MPM – Déformation d’une poutre en console

Afin de valider la justesse de l’implémentation du programme MPM, une poutre en console encastrée, soumise à son propre poids (gravité), a été choisie comme cas test. La simulation est d’abord effectuée avec une loi de comportement élastique de Hooke (loi de l’élasticité linéaire), et les résultats numériques sont comparés à la solution analytique issue de la résistance des matériaux.

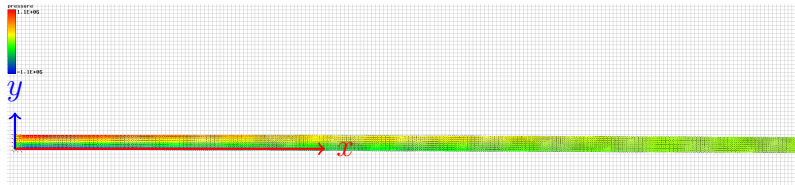


FIGURE 2.1 – Modèle de poutre encastrée en console

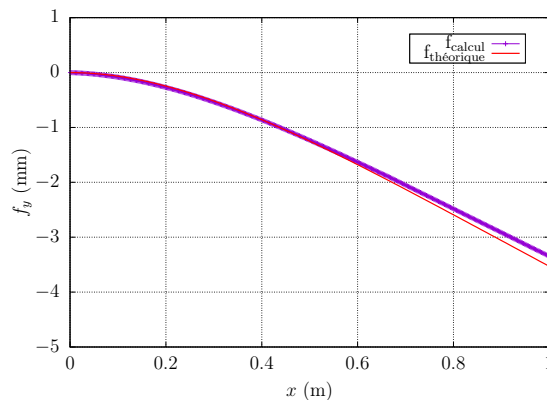


FIGURE 2.2 – Déplacement de la poutre selon l’axe vertical (Y).

La flèche f de la poutre est donnée par l’expression analytique suivante :

$$f(x) = \frac{-qx^2}{24EI} \times (x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad (2.1)$$

où : q est la charge uniformément répartie sur la longueur de la poutre (en N/m), x est la position le long de la poutre (en m), E est le module de Young (en Pa), I est le moment d'inertie (en m⁴), L est la longueur totale de la poutre.

On observe que la déformation obtenue par simulation numérique MPM est en bon accord avec la flèche calculée analytiquement selon l'équation 2.1, comme le montre la figure 2.2.

Il est important de souligner que la condition initiale : la longueur d'encastrement ainsi que la discrétisation du maillage dans le cadre de la MPM doivent être soigneusement ajustées à l'échelle géométrique du modèle étudié pour garantir une précision optimale.

2.2 Simulation DEM : Compression triaxiale

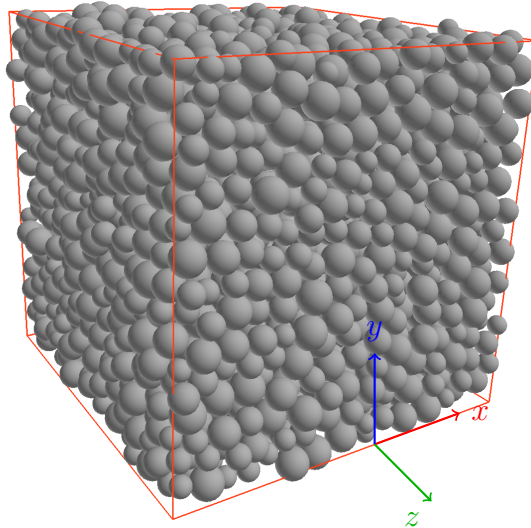


FIGURE 2.3 – Boîte de déformation triaxiale utilisée pour la simulation DEM

Dans cette section, nous réalisons une simulation de compression triaxiale à l'aide de la méthode DEM, qui comprend deux étapes principales :

- **Préparation de l'échantillon** : Un échantillon est constitué d'un boîtier contenant des particules sphériques non cohésives représentant du sable sec. Ces particules sont générées aléatoirement. Un processus de compression isotrope est ensuite appliqué, avec différentes valeurs du coefficient de frottement μ variant de 0 à 1. Cette étape permet de créer des échantillons de densités différentes (plus ou moins compactés), selon l'évolution du paramètre μ .
- **Compression triaxiale** : L'échantillon préparé est ensuite soumis à une contrainte de confinement constant selon les directions x et z (i.e. $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$). Une déformation axiale contrôlée est imposée selon l'axe vertical y — illustrée à la figure 2.3. Une première série de simulations est menée en compactant lentement l'échantillon, afin d'analyser l'effet des conditions initiales (structure de l'échantillon) sur la réponse mécanique macroscopique.

Ensuite, dans la perspective d’une intégration au couplage MPM×DEM, une seconde étude est réalisée en augmentant la vitesse de déformation. Cela permet d’examiner l’influence du nombre d’inertie sur la réponse du matériau, en explorant une large gamme du nombre d’inerti I (de 10^{-6} à 10^{-2}).

2.2.1 Les caractéristiques mécaniques générales du sol

Étude paramétrique sur la fraction solide

La fraction solide caractérise la dispersion des particules solides V_s dans un volume V . C’est un indice important en rhéologie de l’écoulement.

$$\Phi = \frac{V_s}{V} \quad (2.2)$$

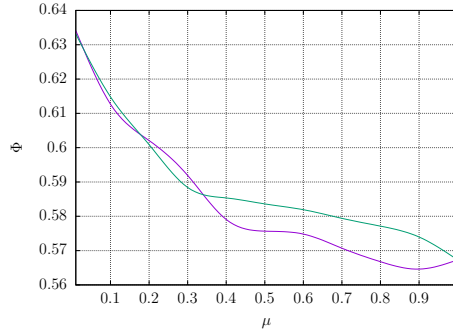


FIGURE 2.4 – La fraction solide. La courbe violette correspond à la moyenne expérimentale de 10 échantillons avec 10 coefficients de frottement différents ; la courbe verte correspond à une seule simulation numérique avec 10 coefficients de frottement décroissants.

La [figure 2.4](#) montre que la valeur maximale Φ_{\max} pour une dispersion désordonnée de sphères en contact dense est approximativement égale à 0.64 [[Combe, 2023](#)].

Un point important est que le paramètre μ augmente de 0 à 1 lors de la préparation des échantillons. Ceci correspond à une diminution progressive de la densité apparente, ce qui est confirmé par le graphique. En effet, plus μ est élevé, plus l’arrangement des grains devient difficile à organiser.

Comportement général des échantillons et état critique

On peut exprimer le rapport q/p par la relation suivante :

$$\frac{q}{p} \approx \frac{\sigma_{yy} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})} \quad (2.3)$$

Grâce aux courbes de contraintes ([figure 2.5](#)), le comportement différencié des échantillons est désormais visible. On observe que, pour différentes valeurs de μ en

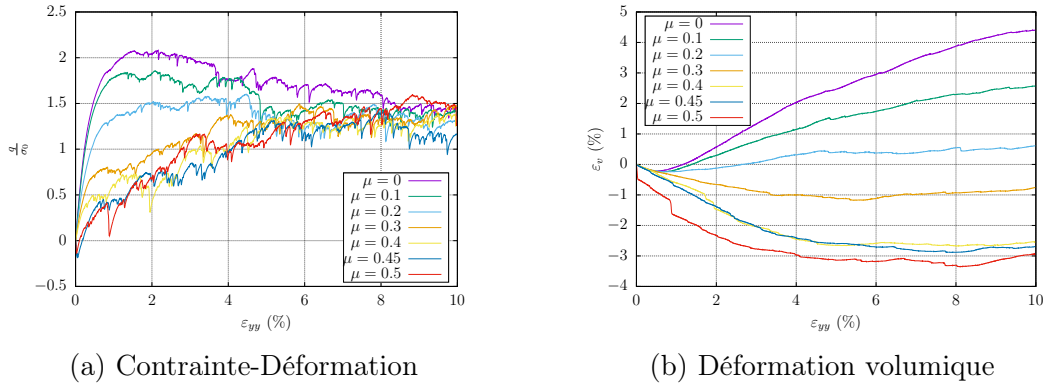


FIGURE 2.5 – Réponses macroscopiques des essais triaxiaux lents

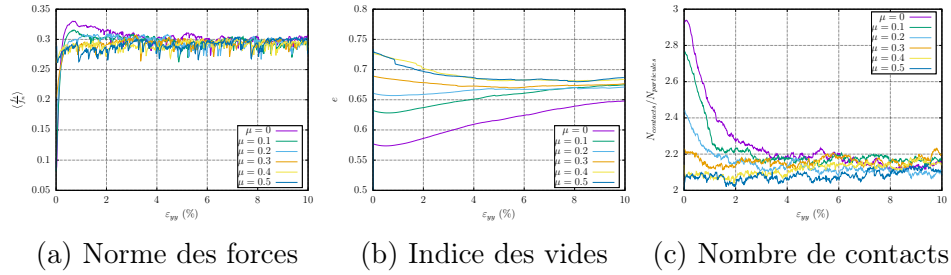


FIGURE 2.6 – Tendence des grandeurs à l'état critique

compression isotrope, on obtient des échantillons avec différentes compacités, ce qui conduit à des comportements très distincts.

Selon la [figure 2.6](#), lorsque la déformation dépasse environ 8 %, les courbes de la norme des forces, de l'indice des vides et du nombre de contacts (ou nombre de coordination) tendent progressivement vers un même palier. Concernant la contrainte, le pic augmente avec la compacité du volume élémentaire (VE). Un VE très lâche ne présente pas de pic. Pour de grandes déformations, tous les échantillons tendent vers un même palier, appelé état critique.

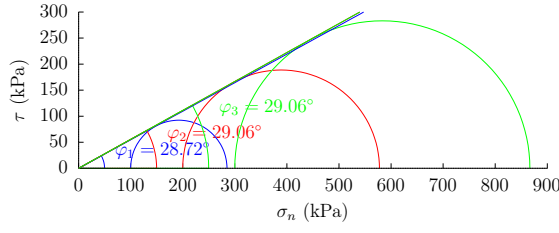
Ces simulations confirment ainsi la théorie de l'état critique en mécanique des sols : une fois cet état atteint, la déformation plastique peut croître indéfiniment à contrainte et indice des vides constants. Cet état est celui utilisé pour la modélisation des écoulements.

Cercle de Mohr

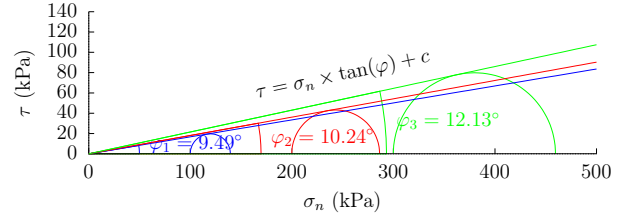
Un point particulier de la méthode DEM est que l'on agit uniquement sur les paramètres microscopiques, alors que les comportements à grande échelle émergent naturellement. Cette propriété peut être vérifiée en comparant avec les comportements macroscopiques bien connus en mécanique des sols.

Le cercle de Mohr est une méthode bien connue pour identifier la résistance au cisaillement maximale du sol. À partir de ses courbes, on peut déterminer la cohésion c et l'angle de frottement interne φ selon la relation :

$$\tau = \sigma_n \tan(\varphi) + c \quad (2.4)$$

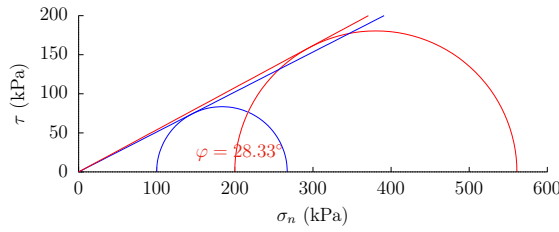


(a) Dense

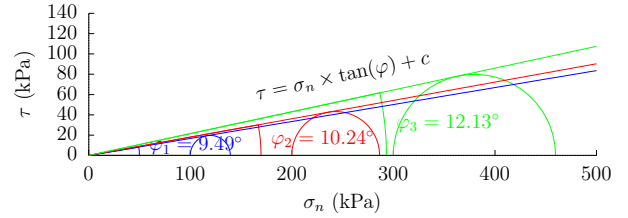


(b) Lâche

FIGURE 2.7 – Cercles de Mohr : les cercles bleu, rouge et vert représentent respectivement $\sigma_3 = 100, 200, 300$ kPa



(a) Dense



(b) Lâche

FIGURE 2.8 – Cercles de Mohr : les cercles bleu, rouge et vert représentent respectivement $\sigma_3 = 100, 200, 300$ kPa

Le point quadrature gauche de chaque cercle sur la [figure 2.8](#) correspond à la contrainte σ_3 , tandis que le point droit représente la contrainte à l'état considéré.

Lors d'essais triaxiaux réalisés sur un même échantillon avec différentes valeurs de σ_3 , plusieurs cercles peuvent être tracés. La droite tangente à ces cercles est la droite limite de Mohr-Coulomb, de la forme de l'[équation 2.4](#).

Nous nous intéressons ici à deux états importants : le pic et l'état critique. Pour un échantillon donné, le pic correspond à la contrainte maximale avant rupture par cisaillement. La pente de la droite tangente aux cercles, soit $\tan(\varphi) = \mu$, reflète le frottement interne à l'état considéré.

La [figure 2.8](#) donne la valeur de $\mu_{\text{transitoire}}$ au pic, c'est-à-dire lorsque la résistance au cisaillement due aux contacts frottants entre grains est maximale. Naturellement, un sol dense ([figure 2.8a](#)) présente un angle de frottement φ plus élevé qu'un sol lâche ([figure 2.8b](#)).

Le $\mu_{\text{résiduel}}$ correspond à la pente de la droite tangente au cercle de Mohr à l'état

critique. On considère généralement que ce $\mu_{\text{résiduel}}$ est une valeur stationnaire.

Ce paramètre est essentiel pour intégrer le modèle MPMxDEM, car le sol en écoulement se comporte comme un matériau à l'état critique : il subit des déformations très importantes, la structure initiale est totalement détruite, et la résistance interne ne dépend plus que du frottement résiduel entre grains.

Dans notre cas, le matériau étudié est du sable sec. Le point d'intersection entre la droite tangente aux cercles et l'axe vertical, selon la théorie, doit être nul, ce qui correspond à une cohésion nulle ($c = 0$).

2.2.2 Recherche sur l'impact dynamique

$I < 10^{-3}$	$10^{-3} < I < 10^{-1}$	$I > 10^{-1}$
Solides	Fluides	Gaz

TABLE 2.1 – Nombre d'inertie

Dans cette section, nous étudions le nombre d'inertie, qui est un verrou mentionné dans l'objet de la thèse. L'augmentation du nombre d'inertie dans un essai triaxial correspond à une augmentation de la vitesse imposée. Normalement, la valeur recommandée de I pour les expériences DEM dans le cadre expérimental est $I < 10^{-7}$. Cependant, en simulation, cette valeur est pratiquement inatteignable en raison du coût temporel élevé. Ainsi, le [tableau 2.1](#) présente les valeurs recommandées par le comité de modélisation des sols. Lors de la réalisation d'un essai triaxial numérique, pour atteindre un état quasi-statique, on choisit généralement $I < 10^{-3}$. À ce stade, le tenseur des contraintes est symétrique et les composantes σ_{xx} ou σ_{zz} sont approximativement stables et proches de la contrainte de confinement imposée. Cependant, dans l'objectif de modéliser un écoulement, nous nous intéressons à des valeurs de I plus élevées, comprises entre 10^{-3} et 10^{-1} , afin d'obtenir un comportement fluide.

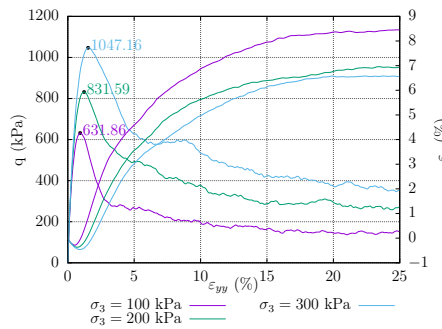


FIGURE 2.9 – Réponses macroscopiques des essais triaxiaux rapides ($I \approx 10^{-2}$)

La [figure 2.9](#) montre clairement que plus le nombre d'inertie est élevé, plus le pic de contrainte est marqué et plus la contrainte de confinement présente de fortes fluctuations. En utilisant ces valeurs, nous traçons les cercles de Mohr comme suit :

Malheureusement, bien que les tangentes aux cercles de Mohr se confondent, la cohésion selon la condition de Mohr ([figure 2.10](#)) au pic n'est pas nulle. Cela

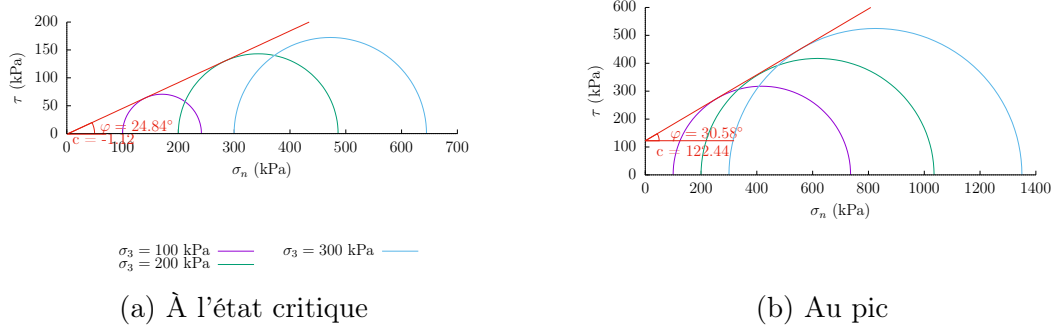


FIGURE 2.10 – Cercle de Mohr d'un échantillon dense quand $I \approx 10^{-2}$

constitue un verrou identifié dans la thèse, lié à un problème des conditions aux limites périodiques. Ce problème est actuellement en cours de résolution. Entre-temps, l'état critique donne une cohésion proche de zéro ($c \approx 0$), ce qui nous permet d'utiliser la rhéologie $\mu(I)$ afin de préparer le couplage avec le modèle d'écoulement.

2.2.3 Rhéologie $\mu(I)$ résiduelle

La rhéologie $\mu(I)$ joue un rôle crucial dans la description des écoulements granulaires. Elle établit une relation constitutive entre le tenseur des contraintes du flux et le tenseur des taux de déformation [Jop et al., 2006] :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu(I)P \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\|\dot{\gamma}\|} \quad (2.5)$$

où :

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{1 + \frac{I_0}{I}} \quad (2.6)$$

$$\Phi(I) = \Phi^{\max} - bI \quad (2.7)$$

$$I = \frac{\dot{\varepsilon} \cdot \bar{a}}{\sqrt{\sigma_{33}/\rho_s}} \quad (2.8)$$

Les coefficients μ_s , μ_2 , I_0 , Φ_{\max} , et b sont déterminés empiriquement.

La petite plage de l'axe des ordonnées de la [figure 2.12](#) indique que les valeurs suivent une tendance cohérente.

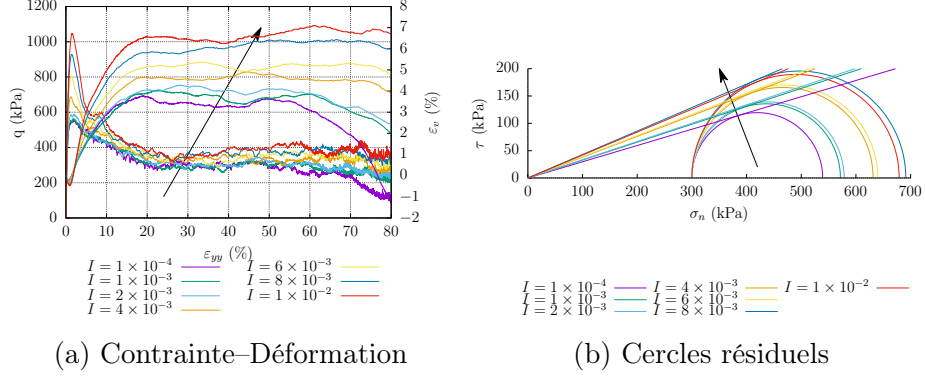


FIGURE 2.11 – Influence du nombre d'inertie sur la condition de Mohr-Coulomb

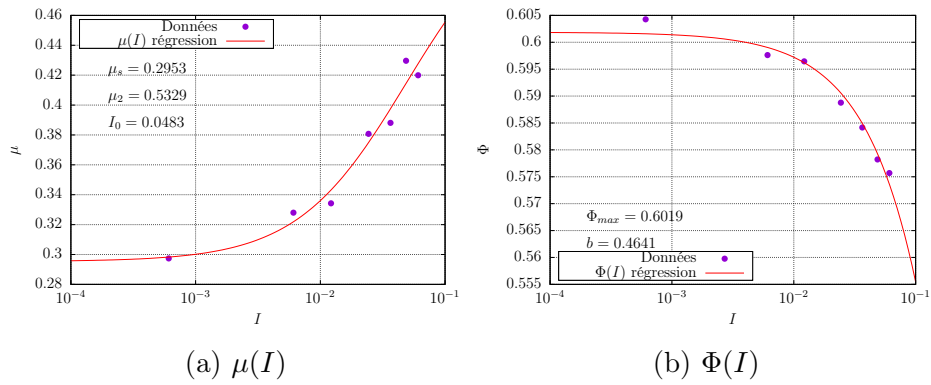


FIGURE 2.12 – Étude de la rhéologie à l'état critique

Chapitre 3

Conclusion

Au cours de ma première année de thèse, j'ai eu l'opportunité de me familiariser avec des méthodes numériques avancées telles que la Méthode des Éléments Discrets (DEM) et la Méthode des Points Matériels (MPM). Sous la direction du Professeur Gaël COMBE, du MCF-HDR Vincent RICHEFEU du laboratoire 3SR, Université Grenoble Alpes, et plus récemment du Professeur Associé Trung Kien NGUYEN de l'École de Génie Civil de Hanoi, j'ai acquis des connaissances fondamentales sur la modélisation des matériaux granulaires, notamment à travers l'étude des essais triaxiaux et l'implémentation des algorithmes DEM/MPM dans des codes numériques.

L'encadrement rigoureux de mes directeurs de thèse m'a permis d'approfondir ma compréhension des problématiques classiques des milieux granulaires et d'accéder à une documentation scientifique de qualité. Par ailleurs, j'ai pu développer mes compétences en programmation (C++), en rédaction scientifique (LaTeX) et en visualisation de données (Gnuplot), outils essentiels pour la conduite de simulations numériques et l'analyse des résultats.

Les travaux réalisés ont validé la robustesse des outils numériques développés, notamment dans le cadre de simulations quasi-statiques. Cependant, certaines limitations persistent, notamment en ce qui concerne la gestion des conditions aux limites dans le couplage MPM-DEM, qui demeure un défi majeur pour la modélisation précise des écoulements granulaires dynamiques. Ce verrou scientifique a été clairement identifié et fait l'objet de développements méthodologiques en cours.

Les perspectives pour la suite de la thèse incluent l'amélioration du couplage entre les deux codes, l'intégration des lois de comportement adaptées à l'état critique, ainsi que la réalisation de simulations à plus grande échelle afin de mieux représenter les phénomènes naturels étudiés.

Bibliographie

- Combe, G. (2023). DEM lecture. <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/s/Lbdg6qWwXNqFZQo>. Diapositive. 8
- Danies, F. G. (2018). *Application de la Méthode des Points Matériels aux phénomènes gravitaires*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes (ComUE). 3
- Duverger, S. (2023). *A multi-scale, MPM \times DEM, numerical modelling approach for geotechnical structures under severe loading*. PhD thesis, Aix-Marseille Université (AMU). 2
- Jop, P., Forterre, Y., and Pouliquen, O. (2006). A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094) :727–730. 12
- Nguyen, T. K. (2013). *Modélisation multi-échelle des matériaux granulaires frottant-cohésifs*. PhD thesis, Université de Grenoble. 4
- Nguyen, T. K., Combe, G., Caillerie, D., and Desrues, J. (2014). Fem \times dem modelling of cohesive granular materials : numerical homogenisation and multi-scale simulations. *Acta Geophysica*, 62 :1109–1126. 5
- Nguyen, T.-K., Desrues, J., Vo, T.-T., and and, G. C. (2024). Macro-micro analysis of ground response to circular tunnel excavation in granular media. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 28(12) :2862–2880. 4
- Nguyen, V. P., De Vaucorbeil, A., and Bordas, S. (2023). The material point method. *Cham : Springer International Publishing*. 5
- Ozenda, O., Chambon, G., Combe, G., and Richefeu, V. (2025). Exploring inertial effects in the flow of granular media : double-scale approach mpm \times dem. *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, XX(YY) :pp–pp. 5
- Radjai, F. and Dubois, F. (2011). *Discrete-element modeling of granular materials*. Wiley-Iste. 3
- Richefeu, V. and Combe, G. (2025). MPM \times DEM programme. <https://github.com/richefeu/mpmxdem>. 5
- Richefeu, V., Combe, G., and Nguyen, T. (2024). Projet de reserche. 5