

Relatório do EP de MAC0209

Bernardo Pereira Silva : 15509206 Felipe Cordeiro Caram : 15451151
Lucas Martins Próspero : 15471925

6 de junho de 2025

Resumo

Link do vídeo do EP [referenciado aqui](#).

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Objetivos	3
3	Cronograma	4
4	Dados e métodos	4
4.1	Coleta de Dados Experimentais	4
4.1.1	Protocolo de Coleta	4
4.1.2	Processamento dos Dados Reais	5
4.2	Modelagem e Simulação Computacional	5
4.2.1	Modelos de Movimento	5
4.2.2	Estimador do Modelo e Introdução de Ruído	5
4.2.3	Simulação Numérica	5
4.2.4	Geração de Dados Simulados e Análise	6
5	Resultados Experimentais	6
5.1	Análise dos Dados Reais	6
5.1.1	Timestamps dos Dados Reais	7
5.1.2	Velocidade e Aceleração Médias dos Dados Reais	7
5.1.3	Análise Gráfica dos Dados Reais	8
5.2	Análise dos Dados Simulados	13
5.2.1	Timestamps, Velocidades e Acelerações Médias dos Dados Simulados	13
5.2.2	Análise Gráfica dos Dados Simulados	13
5.2.3	Comparação Detalhada: Solução Analítica vs. Método de Euler	16
5.3	Análise Comparativa e Considerações Finais	18
6	Discussão e Conclusão	19

1 Introdução

Este relatório trata sobre o Exercício Programa Mobilidade Pedestre, um trabalho que consiste na coleta de dados de movimentação de um pedestre em um certo trecho e simulações, modeladas com base neles, de movimentação utilizando solução analítica e de Euler.

A motivação por trás dessa coleta é realizar a comparação entre os resultados de um fenômeno físico captado e interpretado e os dados resultantes de um modelo que tenta imitar este fenômeno em certo grau.

Diante do exposto, os capítulos a seguir descreverão os passos deste processo e os resultados e conclusões deste exercício.

2 Objetivos

O presente relatório tem como objetivo principal **analisar a captura e a modelagem acerca da mobilidade de pedestres**. Para tal, propomo-nos a:

- Coletar dados de movimento de pedestres em trajetos pré-definidos (reto e zigue-zague) utilizando sensores de smartphones e o aplicativo SideSeeing.
- Processar os dados experimentais para extrair parâmetros relevantes, como velocidade e aceleração, a partir dos sinais do acelerômetro.
- Desenvolver e implementar modelos de simulação para o movimento de pedestres, utilizando tanto soluções analíticas quanto o método de Euler.
- Incorporar variabilidade aos modelos simulados através da introdução de ruído estocástico, buscando uma representação mais fidedigna da realidade.
- Comparar os resultados obtidos nas simulações com os dados reais coletados, avaliando a acurácia e as limitações dos modelos propostos.
- Apresentar e interpretar os dados, tabelas e gráficos gerados, visando extrair conclusões sobre a dinâmica do movimento pedestre e a eficácia das abordagens de modelagem utilizadas.

Estando neste relatório toda a apresentação do que fizemos, assim como a conclusão e análise acerca de todo o processo.

3 Cronograma

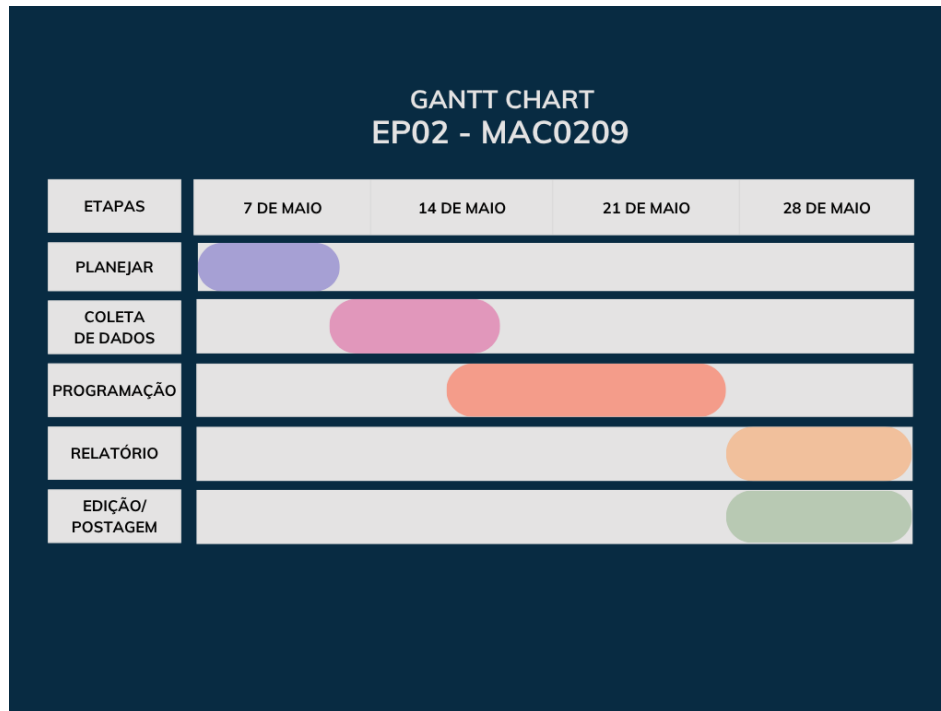


Figura 1: Gantt chart com distribuição das etapas do projeto.

4 Dados e métodos

Nesta seção, detalhamos os procedimentos adotados para a coleta de dados experimentais e os métodos computacionais desenvolvidos para a simulação da mobilidade de pedestres, conforme o enunciado do trabalho.

4.1 Coleta de Dados Experimentais

A aquisição de dados reais de mobilidade pedestre seguiu o protocolo experimental descrito no enunciado do EP2. Foram realizados experimentos de caminhada em dois tipos de trajetos: reto e em zigue-zague, cada um com uma extensão total de 32 metros.

4.1.1 Protocolo de Coleta

Para cada trajeto, definimos quatro *checkpoints* intermediários, localizados a cada 8 metros, totalizando cinco pontos de marcação temporal (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4). A coleta dos dados de movimento foi realizada utilizando um smartphone equipado com o aplicativo SideSeeing, que registra dados do acelerômetro e os respectivos *timestamps*.

Conforme sua descrição, para marcar a passagem por cada *checkpoint* (incluindo o início t_0 e o final t_4), realizamos um movimento deliberado com o celular no eixo Y (vertical), enquanto o deslocamento principal do pedestre ocorria ao longo do eixo X. Este movimento brusco foi projetado para gerar picos detectáveis nos dados do acelerômetro, permitindo a identificação precisa dos instantes de passagem pelos *checkpoints*.

Cada combinação de tipo de movimento (Movimento Uniforme - MU, e Movimento Uniformemente Acelerado - MUA) e tipo de trajeto (Reto e Zigue-Zague) foi repetida 5 vezes, totalizando 20 coletas de dados, conforme a tabela de controle.

4.1.2 Processamento dos Dados Reais

Os dados brutos do acelerômetro, fornecidos pelo SideSeeing, foram processados para identificar os *timestamps* correspondentes a cada *checkpoint* (t_0 a t_4). A partir desses tempos, calculamos a velocidade média para os experimentos de MU e a aceleração média para os experimentos de MUA em cada uma das 5 repetições. A média e o desvio padrão desses parâmetros (k_v para velocidade no MU e k_a para aceleração no MUA) foram então calculados sobre as repetições para servirem de base para as simulações. Estes dados foram organizados na aba "Dados Reais" da planilha CSV, conforme solicitado.

4.2 Modelagem e Simulação Computacional

Desenvolvemos um conjunto de funções em Python para simular o movimento de pedestres com base nos modelos de MU e MUA, incorporando variabilidade por meio de ruído estocástico.

4.2.1 Modelos de Movimento

Adotamos dois modelos cinemáticos básicos:

- **Movimento Uniforme (MU):** Caracterizado por uma velocidade constante k . A posição $x(t)$ é dada por $x(t) = x_0 + k \cdot t$.
- **Movimento Uniformemente Acelerado (MUA):** Caracterizado por uma aceleração constante k . A posição $x(t)$ é dada por $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} k \cdot t^2$. Para nossas simulações, consideramos $v_0 = 0$.

4.2.2 Estimador do Modelo e Introdução de Ruído

O parâmetro k de cada modelo (velocidade para MU, aceleração para MUA) foi estimado a partir da média dos valores obtidos nos experimentos reais. Para introduzir realismo e variabilidade nas simulações, aplicamos um ruído gaussiano ao estimador k , resultando em um estimador estocástico k_S :

$$k_S = k + N(\mu, \sigma) \quad (1)$$

onde $N(\mu, \sigma)$ é uma variável aleatória normal com média $\mu = 0$ e desvio padrão σ . O valor de σ utilizado foi o desvio padrão do parâmetro k observado nos dados experimentais. Esta etapa é implementada pela função `fks(k, mi, sigma)` em nosso código.

4.2.3 Simulação Numérica

As simulações foram realizadas utilizando dois métodos para a atualização do estado do pedestre ao longo do tempo: o método de Euler e uma solução analítica.

Vetor de Estado: O estado do pedestre em qualquer instante t é representado por um vetor $\mathbf{s} = [x, v, a, t]$, onde x é a posição, v a velocidade, a a aceleração e t o tempo corrente. A inicialização deste vetor é feita pela função `SVinit()`, que o define como $\mathbf{s}_0 = [0, 0, 0, 0]$.

Método de Euler: Para a atualização do estado pelo método de Euler, a cada passo de tempo Δt , calculamos as taxas de variação da posição e velocidade. A função `rate(sv, dt)` calcula o vetor de taxas $\mathbf{r} = [\Delta x, \Delta v, 0, \Delta t]$, onde $\Delta x = v \cdot \Delta t$ e $\Delta v = a \cdot \Delta t$. O vetor de estado é então atualizado pela função `SVEupdate(sve, r)` como $\mathbf{sve}_{i+1} = \mathbf{sve}_i + \mathbf{r}_i$.

Solução Analítica: Paralelamente, implementamos uma atualização baseada nas equações analíticas do movimento. A função `SVAupdate(sva, marker, t)` calcula a posição e velocidade diretamente em função do tempo total t decorrido, utilizando k_S :

- Para MU (identificado por `marker ≤ 1`): $x(t) = k_S \cdot t$. A velocidade v é k_S .
- Para MUA (identificado por `marker > 1`): $x(t) = \frac{1}{2} k_S \cdot t^2$ e $v(t) = k_S \cdot t$. A aceleração a é k_S .

O vetor de estado analítico `sva` é atualizado com esses valores.

4.2.4 Geração de Dados Simulados e Análise

A função principal `simulateMU(all_k, all_std, N)` orquestra o processo de simulação. Para cada tipo de movimento e trajeto (definido por `marker` e os respectivos k e σ de `all_k` e `all_std`), são realizadas N simulações de Monte Carlo (conforme especificado na planilha do EP, tipicamente $N = 50$).

Em cada uma das N iterações:

1. Um valor estocástico k_S é gerado usando `fks`.
2. Os vetores de estado para Euler (`sve`) e Analítico (`sva`) são inicializados. A velocidade (para MU) ou aceleração (para MUA) inicial é definida com k_S .
3. A simulação prossegue em passos de tempo $\Delta t = 0.001s$ até que a posição simulada atinja 32 metros.
4. A cada passo, as posições $x_e(t)$ (Euler) e $x_a(t)$ (Analítico) são registradas.
5. Os *timestamps* em que o pedestre simulado atinge os *checkpoints* (8m, 16m, 24m, 32m) são registrados para ambos os métodos (Euler e Analítico) pela função `TSupdate(timestamps, x, t, delta)`, utilizando uma margem de tolerância $\delta = 0.1m$.

Ao final das N simulações, calculamos:

- As trajetórias médias $\bar{x}_e(t)$ e $\bar{x}_a(t)$.
- As médias e desvios padrão dos *timestamps* (t_1, t_2, t_3, t_4) para cada *checkpoint*, tanto para Euler quanto para Analítico.
- As velocidades médias simuladas (para MU) e seus desvios padrão, utilizando `getVsimu(all_ts_e)` e `getVsimu(all_ts_a)`.
- As acelerações médias simuladas (para MUA) e seus desvios padrão, utilizando `getAsimu(all_ts_e)` e `getAsimu(all_ts_a)`.

Estes resultados simulados preenchem as abas "Solução Analítica" e "Algoritmo de Euler" da planilha CSV. Adicionalmente, a função `posR(k, marker, dt)` é utilizada para gerar a trajetória teórica ("Real") do modelo, sem a adição de ruído, para fins comparativos nos gráficos.

5 Resultados Experimentais

Apresentam-se, nesta seção, os resultados obtidos a partir dos experimentos de mobilidade pedestre e das simulações computacionais. A análise está dividida em três subseções: a primeira aborda os dados coletados em campo (dados reais), a segunda foca nos dados gerados por simulação (métodos de Euler e Analítico) e, por fim, uma análise comparativa e considerações finais são tecidas. O objetivo é capturar dados de mobilidade, modelar o experimento e realizar simulações para comparação com os dados reais.

5.1 Análise dos Dados Reais

Os dados reais foram coletados utilizando um smartphone com o aplicativo SideSeeing, conforme especificado no protocolo do EP. Foram realizados experimentos de caminhada em dois tipos de trajetos (Reto e Zigue-Zague) e dois tipos de movimento (Uniforme - MU, e Uniformemente Acelerado - MUA). Para cada uma das quatro combinações de cenário, foram realizadas 5 repetições, totalizando 20 aquisições. Os instantes cruciais t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 (correspondentes a segmentos de 8 metros de deslocamento) foram marcados por meio de picos de variação no acelerômetro, gerados intencionalmente por oscilações verticais das mãos do participante. Esta técnica de marcação é visualmente confirmada nos gráficos de aceleração resultante.

5.1.1 Timestamps dos Dados Reais

As tabelas 1 e 2 apresentam os timestamps coletados. Observa-se uma variabilidade inerente aos tempos entre as diferentes gravações para um mesmo cenário, o que é esperado em experimentos envolvendo movimento humano e marcações manuais, mesmo que auxiliadas por picos de acelerômetro.

Tabela 1: Timestamps (s) coletados para Movimento Uniforme (MU) - Dados Reais. Cada linha representa uma gravação (1 a 5).

Cenário / Timestamp	t0	t1	t2	t3	t4
MU Linha Reta (G1-G5)					
Gravação 1	1.460	8.110	14.230	21.110	27.060
Gravação 2	1.401	7.501	13.081	18.701	24.531
Gravação 3	0.951	7.131	13.491	19.421	25.501
Gravação 4	1.456	8.455	14.436	20.616	26.156
Gravação 5	1.126	7.886	14.476	21.136	28.066
MU Zigue-Zague (G1-G5)					
Gravação 1	1.551	9.941	15.931	22.311	28.941
Gravação 2	1.020	8.360	14.750	22.270	28.720
Gravação 3	1.905	10.266	16.786	22.786	30.446
Gravação 4	1.556	9.226	16.656	23.856	31.166
Gravação 5	1.096	7.965	14.885	21.496	27.916

Tabela 2: Timestamps (s) coletados para Movimento Uniformemente Acelerado (MUA) - Dados Reais. Cada linha representa uma gravação (1 a 5).

Cenário / Timestamp	t0	t1	t2	t3	t4
MUA Linha Reta (G1-G5)					
Gravação 1	1.440	8.960	14.260	18.640	22.220
Gravação 2	0.901	8.941	14.881	18.691	22.270
Gravação 3	0.991	7.661	13.031	17.200	20.920
Gravação 4	0.985	8.325	13.785	18.656	22.456
Gravação 5	0.975	8.234	13.374	17.885	21.275
MUA Zigue-Zague (G1-G5)					
Gravação 1	1.091	9.151	14.201	19.261	23.160
Gravação 2	1.345	7.905	13.975	17.875	22.185
Gravação 3	0.800	9.491	14.241	18.821	22.810
Gravação 4	0.491	9.211	13.631	18.121	22.481
Gravação 5	1.191	9.571	14.761	19.020	23.500

5.1.2 Velocidade e Aceleração Médias dos Dados Reais

As tabelas 3 e 4 resumizam as métricas de velocidade e aceleração médias. Os desvios padrão refletem a variabilidade entre as repetições.

Tabela 3: Velocidade média e Aceleração média (\pm Desvio Padrão) para Movimento Uniforme (MU) - Dados Reais.

Cenário	Velocidade Média (m/s)	Aceleração Média (m/s ²)
MU Linha Reta	1.284 ± 0.065	0.103 ± 0.010
MU Zigue-Zague	1.144 ± 0.039	0.082 ± 0.006

Tabela 4: Velocidade média e Aceleração média (\pm Desvio Padrão) para Movimento Uniformemente Acelerado (MUA) - Dados Reais.

Cenário	Velocidade Média (m/s)	Aceleração Média (m/s ²)
MUA Linha Reta	1.542 ± 0.044	0.149 ± 0.009
MUA Zigue-Zague	1.466 ± 0.036	0.134 ± 0.007

5.1.3 Análise Gráfica dos Dados Reais

Os gráficos extraídos dos dados do acelerômetro são cruciais para entender a natureza dos movimentos e a variabilidade experimental. As figuras a seguir representam esses dados.

Analisando os gráficos de aceleração resultante para as 5 gravações de cada cenário (e.g., Figuras 8, 11, 2, 5), observa-se a ocorrência de picos de aceleração acentuados. Esses picos correspondem aos momentos de oscilação manual para marcação dos tempos (t_0 a t_4), conforme o protocolo experimental. Entre esses picos de marcação, o sinal do acelerômetro reflete a dinâmica da caminhada. No MUA, espera-se uma tendência de aumento da intensidade das acelerações ou uma aceleração resultante média não nula, enquanto no MU, as acelerações deveriam idealmente oscilar em torno de zero, exceto pelas variações naturais do caminhar humano. A variabilidade entre as 5 gravações é notável tanto na amplitude quanto no tempo exato dos picos de marcação, o que é natural em coletas manuais.

Os gráficos do sinal médio da aceleração com barras de desvio padrão (e.g., Figuras 10, 13, 4, 7) suavizam essas variações individuais e destacam o comportamento central. Os picos de marcação ainda são evidentes, e as barras de desvio padrão em torno deles indicam a consistência (ou dispersão) dessas marcações entre as repetições.

Os gráficos de velocidade/aceleração média por gravação (Figuras 9, 12, 3, 6) ilustram como o valor médio final de cada uma das 5 repetições varia, complementando os dados das Tabelas 3 e 4.

MU Linha Reta - Dados Reais

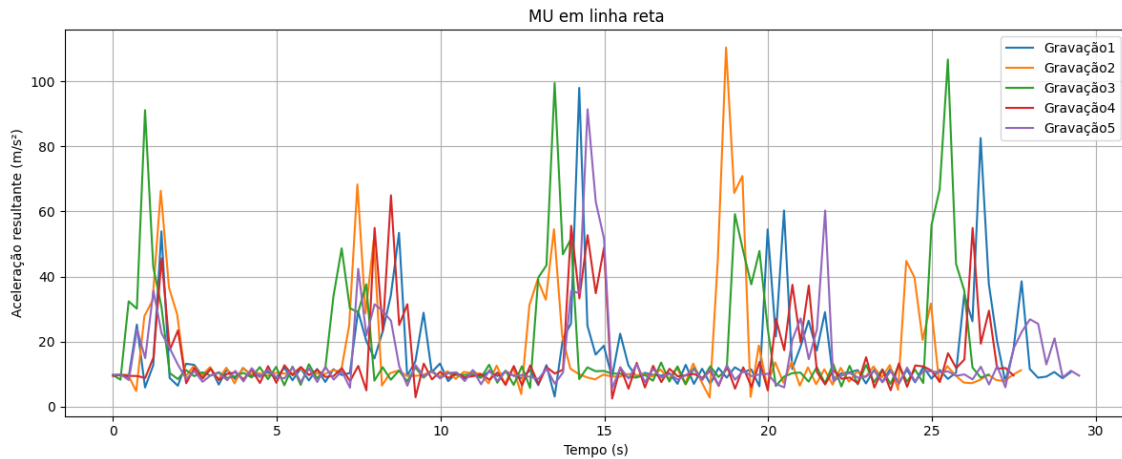


Figura 2: Aceleração resultante (MU em linha reta) - 5 Gravações.

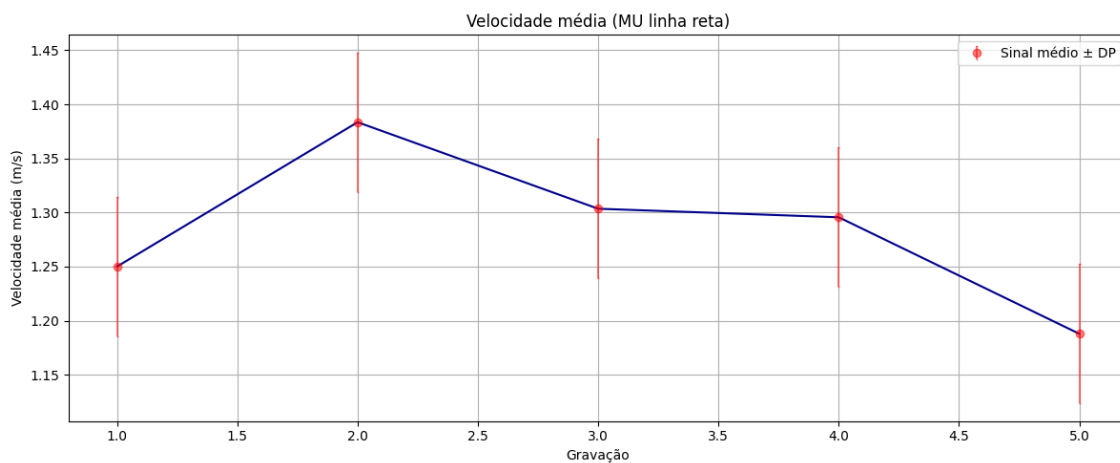


Figura 3: Velocidade média por gravação (\pm DP) (MU em linha reta).

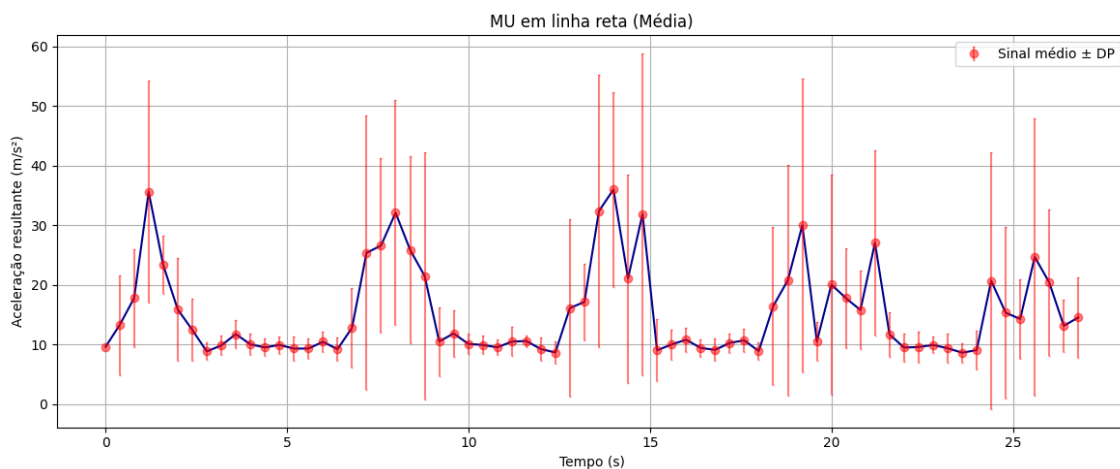


Figura 4: Sinal médio da aceleração resultante (\pm DP) (MU em linha reta).

MU Zigue-Zague - Dados Reais

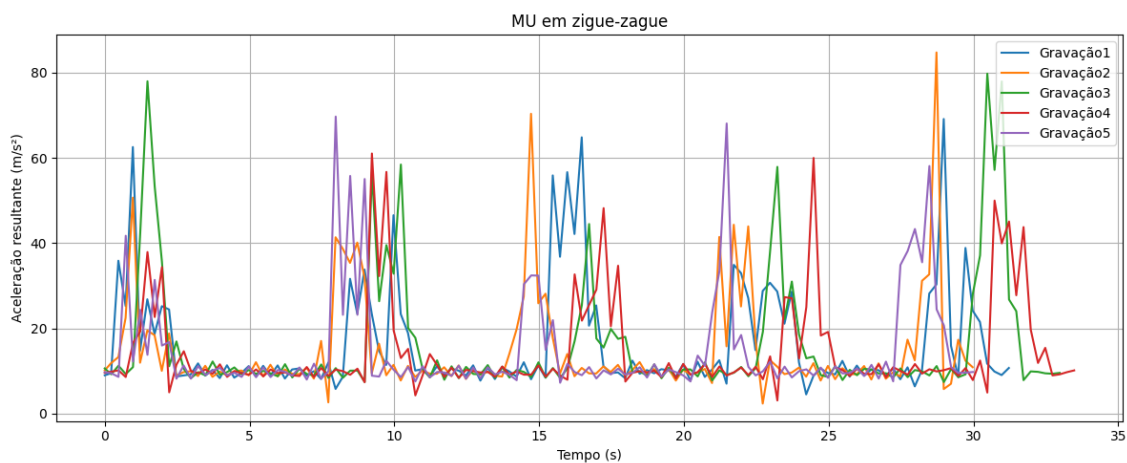


Figura 5: Aceleração resultante (MU em zigue-zague) - 5 Gravações.

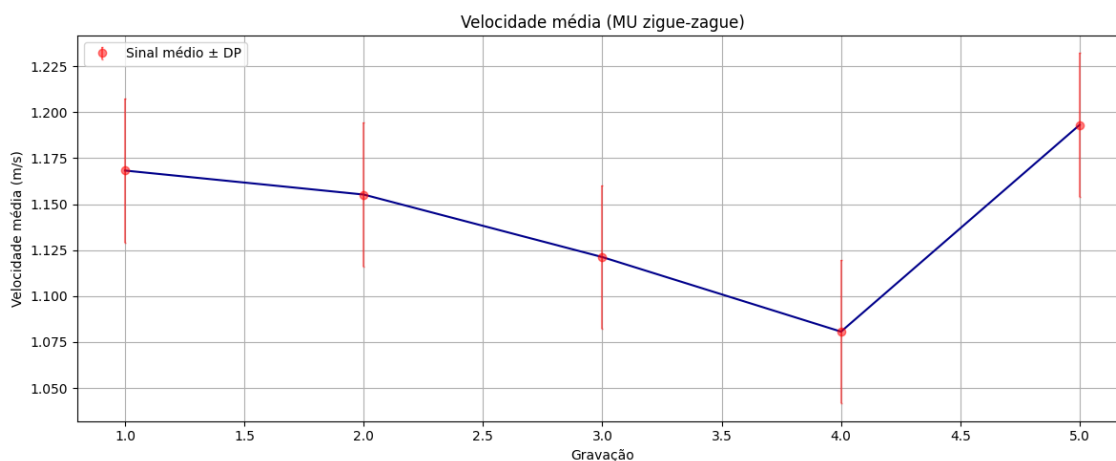


Figura 6: Velocidade média por gravação (\pm DP) (MU em zigue-zague).

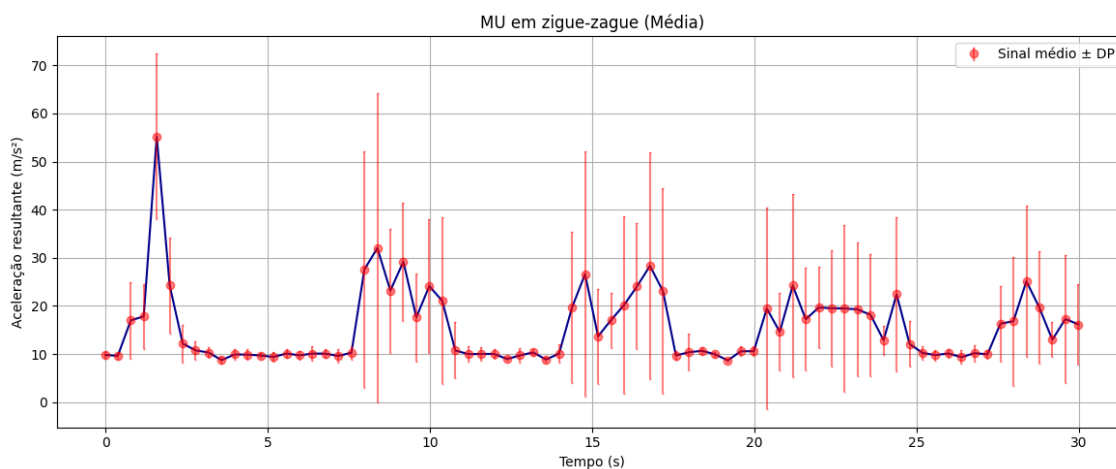


Figura 7: Sinal médio da aceleração resultante (\pm DP) (MU em zigue-zague).

MUA Linha Reta - Dados Reais

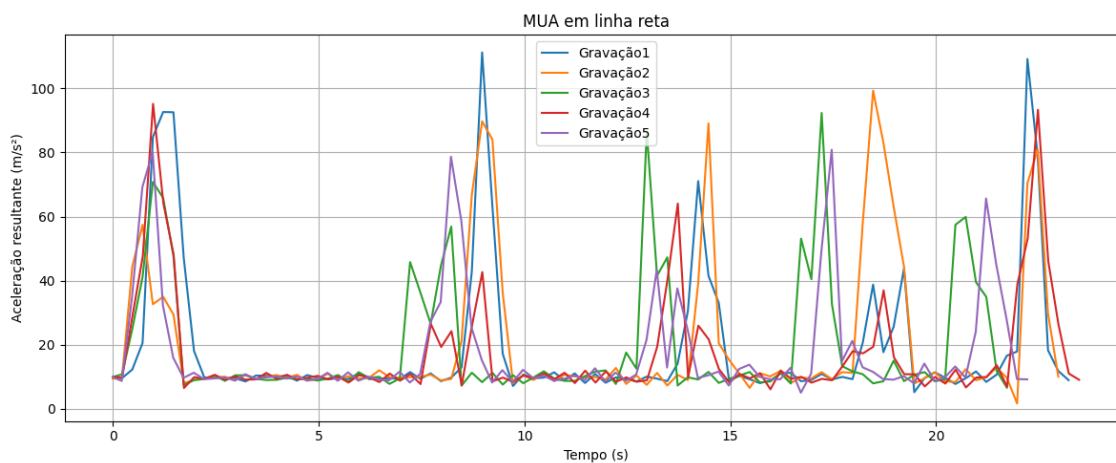


Figura 8: Aceleração resultante (MUA em linha reta) - 5 Gravações.

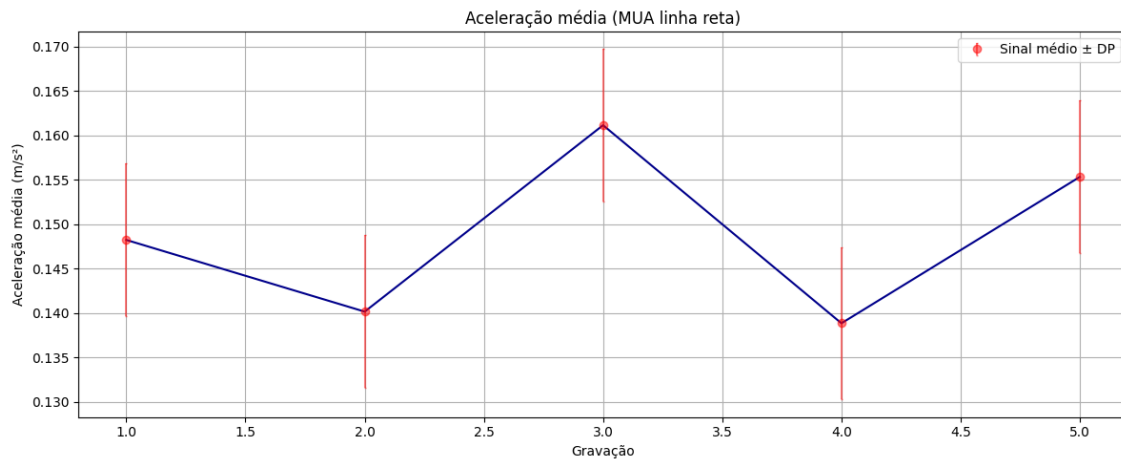


Figura 9: Aceleração média por gravação ($\pm DP$) (MUA em linha reta).

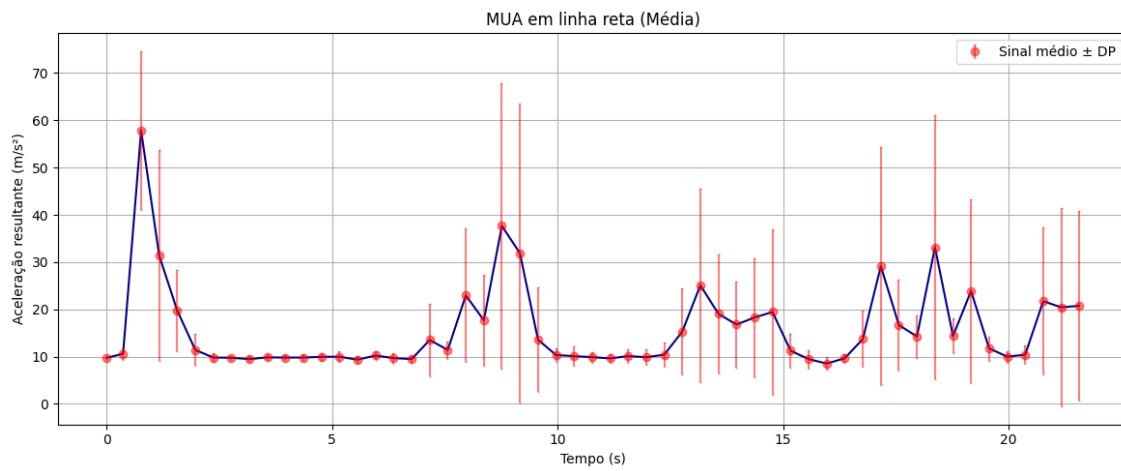


Figura 10: Sinal médio da aceleração resultante ($\pm DP$) (MUA em linha reta).

MUA Zigue-Zague - Dados Reais

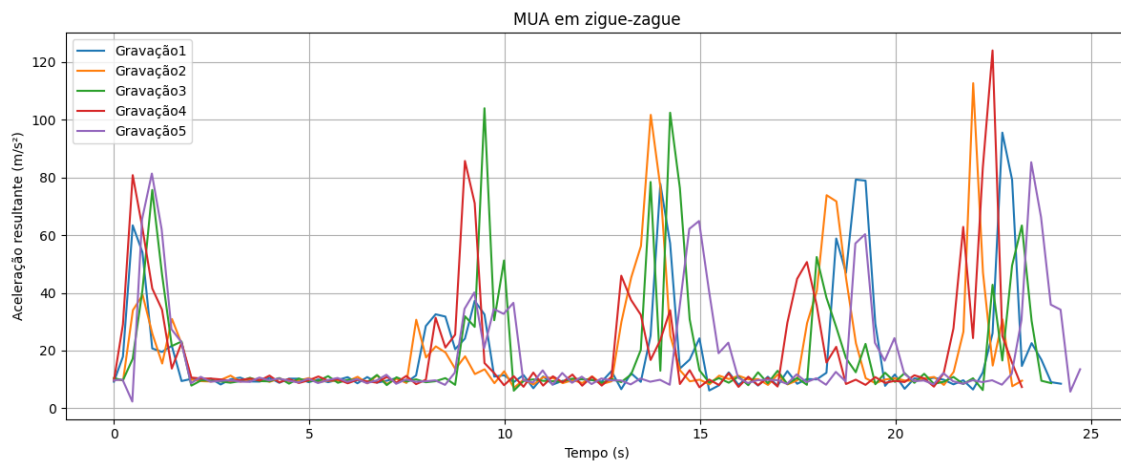


Figura 11: Aceleração resultante (MUA em zigue-zague) - 5 Gravações.

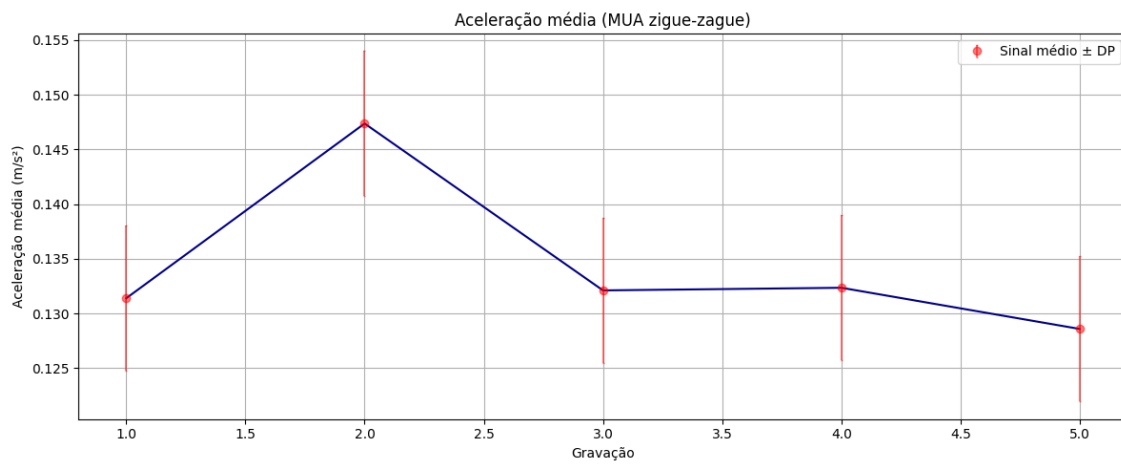


Figura 12: Aceleração média por gravação (\pm DP) (MUA em zigue-zague).

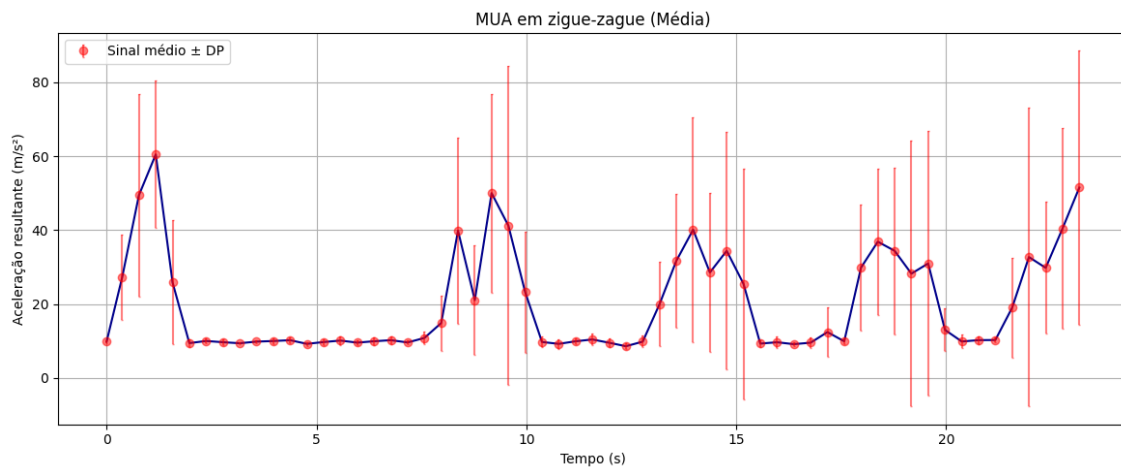


Figura 13: Sinal médio da aceleração resultante (\pm DP) (MUA em zigue-zague).

5.2 Análise dos Dados Simulados

As simulações foram realizadas seguindo os modelos cinemáticos de Movimento Uniforme (MU) e Movimento Uniformemente Acelerado (MUA). Os parâmetros k (velocidade constante para MU, aceleração constante para MUA) foram estimados a partir dos dados reais. As trajetórias foram calculadas utilizando a solução analítica e o método numérico de Euler, onde as duas ideias se mostraram idênticas no caso uniforme e bem parecidas na situação acelerada, o que é visto mais afundo na **subseção 1.2.3**. Para incorporar a variabilidade observada experimentalmente, as simulações de Monte Carlo foram conduzidas introduzindo um ruído gaussiano $N(\mu = 0, \sigma_{exp})$ ao parâmetro k , resultando em $k_S = k + N(0, \sigma_{exp})$, onde σ_{exp} é o desvio padrão de k medido nos dados reais.

5.2.1 Timestamps, Velocidades e Acelerações Médias dos Dados Simulados

As tabelas 5 a 8 apresentam os resultados médios e desvios padrão para as grandezas cinemáticas simuladas. Os desvios padrão são consequência direta da componente estocástica adicionada.

Tabela 5: Timestamps médios (s) e Desvios Padrão (DP) - Simulações MU.

Cenário	Método	t0 ± DP	t1 ± DP	t2 ± DP	t3 ± DP	t4 ± DP
MU Linha Reta	Euler	0 ± 0	6.244 ± 0.325	12.566 ± 0.654	18.888 ± 0.983	25.211 ± 1.312
	Analítico	0 ± 0	6.244 ± 0.325	12.566 ± 0.654	18.888 ± 0.983	25.211 ± 1.312
MU Zigue-Zague	Euler	0 ± 0	6.925 ± 0.265	13.937 ± 0.533	20.949 ± 0.801	27.961 ± 1.070
	Analítico	0 ± 0	6.925 ± 0.265	13.937 ± 0.533	20.949 ± 0.801	27.961 ± 1.070

Tabela 6: Timestamps médios (s) e Desvios Padrão (DP) - Simulações MUA.

Cenário	Método	t0 ± DP	t1 ± DP	t2 ± DP	t3 ± DP	t4 ± DP
MUA Linha Reta	Euler	0 ± 0	10.304 ± 0.282	14.617 ± 0.399	17.921 ± 0.490	20.704 ± 0.566
	Analítico	0 ± 0	10.303 ± 0.282	14.617 ± 0.400	17.920 ± 0.490	20.703 ± 0.566
MUA Zigue-Zague	Euler	0 ± 0	10.753 ± 0.248	15.255 ± 0.352	18.703 ± 0.431	21.608 ± 0.498
	Analítico	0 ± 0	10.753 ± 0.248	15.255 ± 0.352	18.702 ± 0.431	21.607 ± 0.498

Tabela 7: Velocidade e Aceleração Médias (± DP) - Simulações MU.

Cenário	Método	Velocidade Média (m/s)	Aceleração Média (m/s ²)
MU Linha Reta	Euler	1.273 ± 0.065	0.101 ± 0.010
	Analítico	1.273 ± 0.065	0.101 ± 0.010
MU Zigue-Zague	Euler	1.146 ± 0.043	0.082 ± 0.006
	Analítico	1.146 ± 0.043	0.082 ± 0.006

Tabela 8: Velocidade e Aceleração Médias (± DP) - Simulações MUA.

Cenário	Método	Velocidade Média (m/s)	Aceleração Média (m/s ²)
MUA Linha Reta	Euler	1.547 ± 0.042	0.150 ± 0.008
	Analítico	1.547 ± 0.042	0.150 ± 0.008
MUA Zigue-Zague	Euler	1.482 ± 0.034	0.137 ± 0.006
	Analítico	1.482 ± 0.034	0.137 ± 0.006

5.2.2 Análise Gráfica dos Dados Simulados

Os gráficos de posição média simulada (Figuras 14, 15, 16, 17) comparam as trajetórias obtidas pelos métodos Euleriano e Analítico com a curva extraída da média dos dados reais.

A curva "Real", quando comparada, mostra o quão bem o modelo médio (alimentado pelo k médio dos dados reais) representa a trajetória média experimental. Pequenas divergências entre a curva "Real" e as simuladas (Euler/Analítico) podem indicar que a média dos parâmetros k talvez não capture perfeitamente a evolução temporal da posição média, ou que a forma de calcular a trajetória "Real" tem suas próprias simplificações. A dispersão devido à simulação estocástica (não explicitamente mostrada como bandas de erro nestes gráficos de posição, mas implícita nos desvios padrão das tabelas) é fundamental para entender que o modelo não produz uma única trajetória, mas uma família delas.

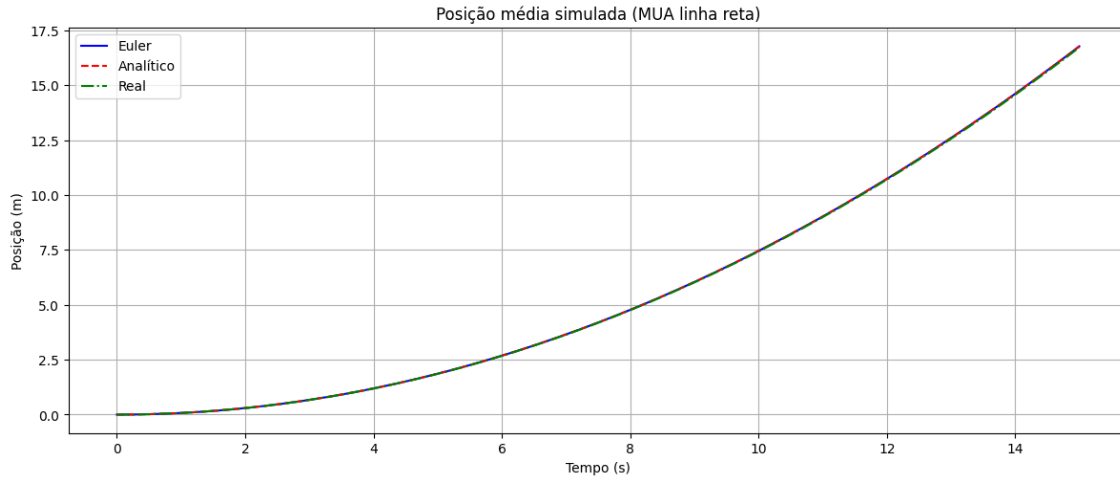


Figura 14: Posição média simulada (MUA linha reta) - Euler, Analítico, Real.

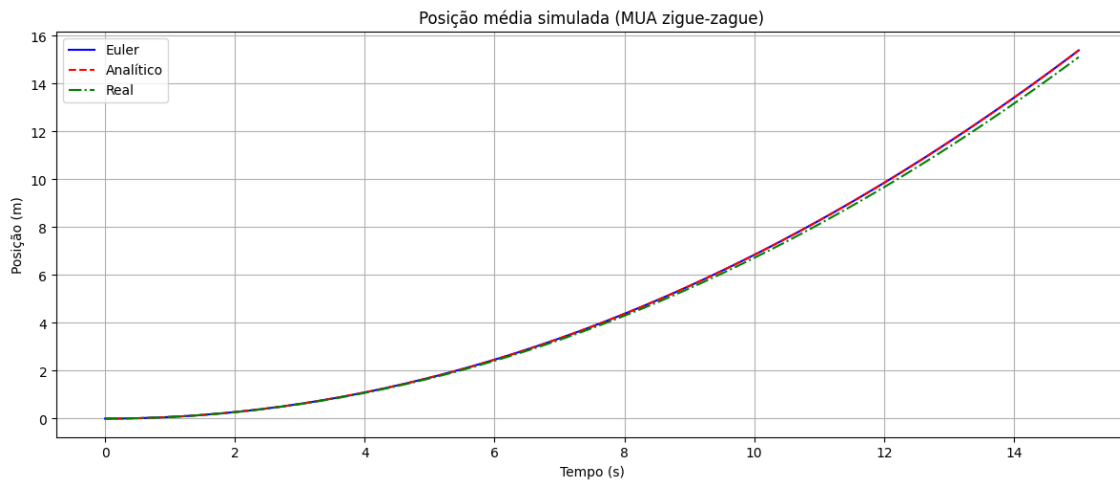


Figura 15: Posição média simulada (MUA zigue-zague) - Euler, Analítico, Real.

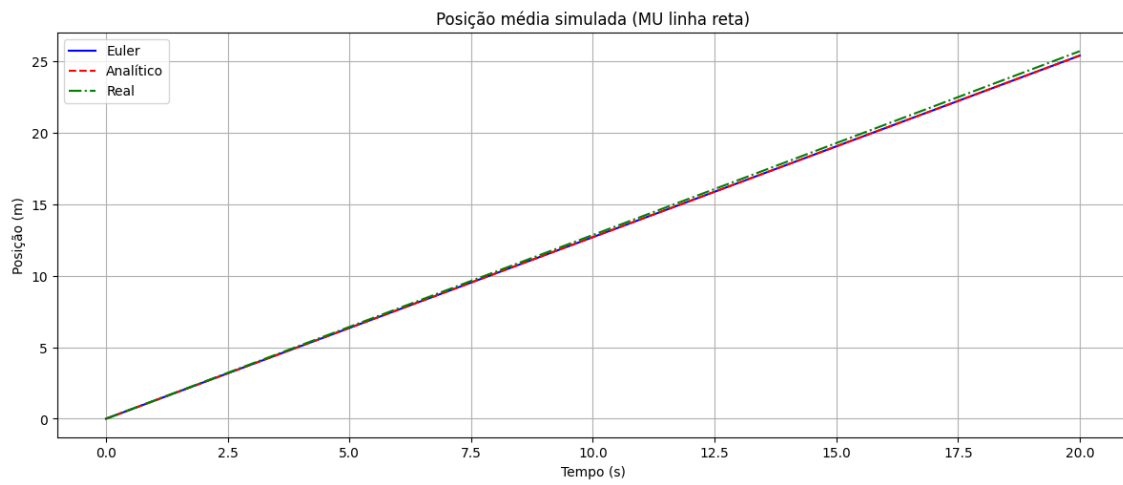


Figura 16: Posição média simulada (MU linha reta) - Euler, Analítico, Real.

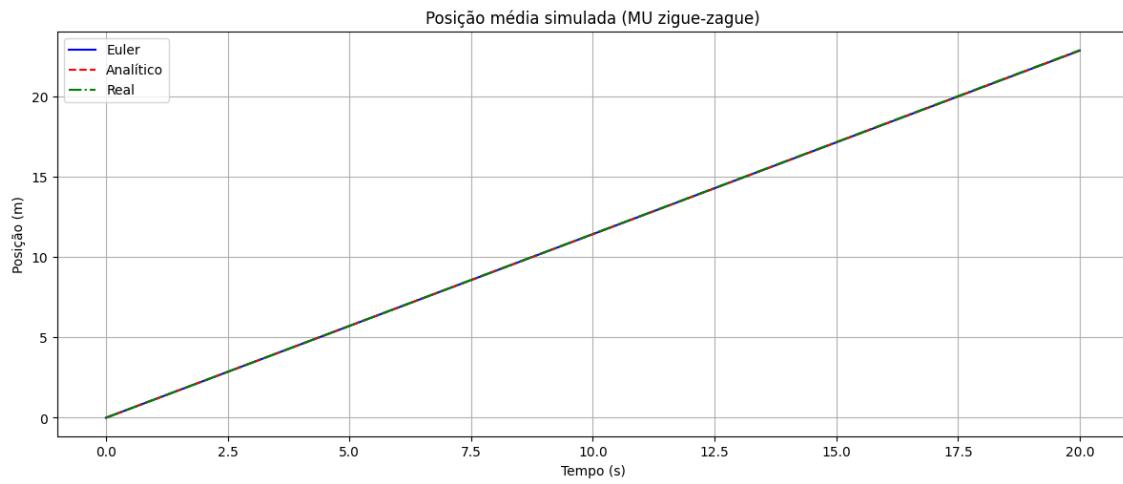


Figura 17: Posição média simulada (MU zigue-zague) - Euler, Analítico, Real.

5.2.3 Comparação Detalhada: Solução Analítica vs. Método de Euler

Uma análise mais aprofundada da relação entre a solução analítica e a solução numérica obtida pelo método de Euler para os casos de Movimento Uniforme (MU) e Movimento Uniformemente Acelerado (MUA) revela nuances importantes.

Movimento Uniforme (MU)

No Movimento Uniforme, a velocidade é constante ($v(t) = v_0$) e a aceleração é nula ($a(t) = 0$).

Solução Analítica: A equação horária da posição é dada por:

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad (2)$$

onde x_0 é a posição inicial e v_0 é a velocidade constante.

Método de Euler: O método de Euler atualiza a velocidade e a posição em passos discretos de tempo Δt :

$$a_i = 0 \quad (3)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t \quad (4)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t \quad (5)$$

Como $a_i = 0$, a Equação (4) resulta em $v_{i+1} = v_i$. Isso significa que, se a velocidade inicial é v_0 , ela permanece v_0 em todos os passos subsequentes: $v_i = v_0$ para todo i . Substituindo $v_i = v_0$ na Equação (5), temos:

$$x_{i+1} = x_i + v_0 \Delta t \quad (6)$$

Aplicando esta relação iterativamente a partir de x_0 :

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

$$x_2 = x_1 + v_0 \Delta t = (x_0 + v_0 \Delta t) + v_0 \Delta t = x_0 + 2v_0 \Delta t$$

$$x_3 = x_2 + v_0 \Delta t = (x_0 + 2v_0 \Delta t) + v_0 \Delta t = x_0 + 3v_0 \Delta t$$

$$\vdots$$

$$x_N = x_0 + N v_0 \Delta t$$

Se o tempo total é $t = N \Delta t$, então a posição calculada pelo método de Euler após N passos é:

$$x_N = x_0 + v_0 (N \Delta t) = x_0 + v_0 t \quad (7)$$

Esta é **idêntica** à solução analítica (Equação (2)). Portanto, para o Movimento Uniforme, o método de Euler fornece a solução exata, assumindo ausência de erros de arredondamento computacional.

Movimento Uniformemente Acelerado (MUA)

No Movimento Uniformemente Acelerado, a aceleração é constante ($a(t) = k \neq 0$). Para esta análise, consideraremos o caso em que a velocidade inicial $v_0 = 0$ e a posição inicial $x_0 = 0$, conforme o contexto experimental.

Solução Analítica: As equações para a velocidade e a posição são:

$$v(t) = kt \quad (8)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} kt^2 \quad (9)$$

Método de Euler: As equações de atualização são:

$$a_i = k \quad (10)$$

$$v_{i+1} = v_i + k\Delta t \quad (11)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i\Delta t \quad (12)$$

É crucial notar que v_i na Equação (12) é a velocidade no *início* do intervalo Δt . Aplicando iterativamente, com $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$:

- Para $i = 0$ (início, $t = 0$): $v_0 = 0$, $x_0 = 0$.
- Para $i = 1$ (após $t_1 = \Delta t$):

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + k\Delta t = k\Delta t \\ x_1 &= x_0 + v_0\Delta t = 0 + (0)\Delta t = 0 \end{aligned}$$

- Para $i = 2$ (após $t_2 = 2\Delta t$):

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + k\Delta t = k\Delta t + k\Delta t = 2k\Delta t \\ x_2 &= x_1 + v_1\Delta t = 0 + (k\Delta t)\Delta t = k(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

- Para $i = 3$ (após $t_3 = 3\Delta t$):

$$\begin{aligned} v_3 &= v_2 + k\Delta t = 2k\Delta t + k\Delta t = 3k\Delta t \\ x_3 &= x_2 + v_2\Delta t = k(\Delta t)^2 + (2k\Delta t)\Delta t = 3k(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Generalizando, a velocidade no início do $(i + 1)$ -ésimo intervalo (ou seja, v_i que é a velocidade ao final do i -ésimo intervalo, no tempo $t_i = i\Delta t$) é $v_i = ik\Delta t$. A posição x_N no tempo $t_N = N\Delta t$ é a soma dos incrementos:

$$x_N^{\text{Euler}} = \sum_{i=0}^{N-1} v_i\Delta t = \sum_{i=0}^{N-1} (ik\Delta t)\Delta t = k(\Delta t)^2 \sum_{i=0}^{N-1} i \quad (13)$$

Sabendo que $\sum_{i=0}^{N-1} i = \frac{(N-1)N}{2}$, temos:

$$x_N^{\text{Euler}} = k(\Delta t)^2 \frac{N(N-1)}{2} \quad (14)$$

Substituindo $t = N\Delta t$ (ou seja, $\Delta t = t/N$):

$$x_N^{\text{Euler}} = k \left(\frac{t}{N} \right)^2 \frac{N(N-1)}{2} = \frac{1}{2}kt^2 \left(\frac{N-1}{N} \right) \quad (15)$$

Comparando a Equação (15) com a solução analítica $x(t)^{\text{Analytic}} = \frac{1}{2}kt^2$ (Equação (9)), vemos que a solução de Euler para a posição no MUA (com $v_0 = 0$) é a solução analítica multiplicada pelo fator $\frac{N-1}{N}$. Como $N \geq 1$, este fator é sempre menor ou igual a 1 (igual apenas no limite $N \rightarrow \infty$ para $\Delta t \rightarrow 0$, ou se $N = 1$ o que implica $t = \Delta t$ e $x_1^{\text{Euler}} = 0$ enquanto $x_1^{\text{Analytic}} = \frac{1}{2}k(\Delta t)^2$). O método de Euler, neste caso específico, sistematicamente subestima a distância percorrida porque usa a velocidade no início de cada intervalo para calcular o deslocamento, e essa velocidade é sempre menor que a velocidade média durante o intervalo quando a aceleração é positiva.

Em tempos significativamente maiores t (não explorados na análise feita), mantendo-se k e Δt constantes, o erro absoluto $E(t) = \frac{1}{2}kt\Delta t$ aumentaria linearmente com t . Eventualmente, essa diferença acumulada se tornaria grande o suficiente para ser claramente perceptível nas primeiras casas decimais, ou mesmo em valores inteiros, destacando a natureza aproximada do método de Euler para o MUA.

5.3 Análise Comparativa e Considerações Finais

A comparação entre os resultados médios dos dados reais (Tabelas 3 e 4) e os dados simulados (Tabelas 7 e 8) revela uma boa concordância geral. As velocidades e acelerações médias simuladas são muito próximas das observadas experimentalmente. Por exemplo, no MU em linha reta, a velocidade média real foi de 1.284 ± 0.065 m/s, enquanto a simulada (Euler/Analítico) foi de 1.273 ± 0.065 m/s. No MUA em linha reta, a aceleração média real foi de 0.149 ± 0.009 m/s², e a simulada de 0.150 ± 0.008 m/s². Essa proximidade é, em parte, esperada, pois os parâmetros k dos modelos simulados foram calibrados com base na média dos dados reais. Os desvios padrão também são de magnitude similar, indicando que a introdução do ruído estocástico $N(0, \sigma_{exp})$ nas simulações foi capaz de reproduzir um nível de variabilidade comparável ao observado nos experimentos reais.

As pequenas divergências entre a trajetória "Real" média e as trajetórias simuladas (baseadas no k médio) podem ser atribuídas à complexidade não capturada pelo modelo simples (e.g. o k real pode não ser perfeitamente constante durante todo o trajeto, mesmo em média).

As principais fontes de discrepância e limitações incluem:

- **Complexidade do Movimento Humano vs. Simplicidade do Modelo:** O caminhar humano é um processo biomecânico complexo, com variações contínuas de velocidade e aceleração, mesmo quando se tenta manter um movimento "uniforme" ou "uniformemente acelerado". Os modelos MU e MUA são idealizações. Fatores como a oscilação vertical do centro de massa, a variabilidade de cada passada e as sutis correções de trajetória não são explicitamente contemplados.
- **Protocolo de Marcação Temporal:** A marcação dos tempos t_0 a t_4 via oscilação manual e detecção de picos no acelerômetro, embora engenhosa para um experimento com recursos limitados, está sujeita a imprecisões. A forma exata da oscilação manual pode variar, e a identificação do "pico exato" no software pode ter sua própria margem de erro. Isso se reflete na variabilidade dos timestamps reais.
- **Trajetos em Zigue-Zague:** Particularmente no zigue-zague, o modelo de k constante (seja para velocidade ou aceleração) é uma aproximação mais grosseira, pois as curvas implicam em acelerações laterais e variações na velocidade tangencial que não são parte dos modelos 1D simples de MU/MUA.
- **Estimativa dos Parâmetros do Modelo:** A adoção da média dos parâmetros k das 5 repetições para alimentar as simulações determinísticas (Euler/Analítico) e como base para a simulação estocástica é uma abordagem razoável, mas essa média pode não representar perfeitamente cada evento individual ou mesmo a "verdadeira" propensão do movimento.

Em suma, os experimentos e as simulações realizadas forneceram insights valiosos sobre a modelagem da mobilidade pedestre. Os modelos cinemáticos básicos, quando parametrizados com dados experimentais e com a inclusão de variabilidade estocástica, conseguem replicar as características médias e a dispersão dos movimentos observados. A metodologia de coleta demonstrou ser aplicável, mas a precisão dos resultados está intrinsecamente ligada à consistência na execução do protocolo experimental.

6 Discussão e Conclusão

O desenvolvimento deste Exercício Programa permitiu percorrer um ciclo completo de modelagem e simulação, desde a concepção de um protocolo experimental e a coleta de dados de um fenômeno físico — a mobilidade pedestre — até a implementação de modelos computacionais e a análise comparativa entre o real e o simulado. A discussão a seguir aborda os principais aspectos e aprendizados deste processo.

A metodologia de coleta de dados, utilizando sensores de um smartphone e o aplicativo SideSeeing, provou-se uma abordagem acessível e eficaz para capturar a dinâmica do movimento. No entanto, o protocolo de marcação temporal, baseado na oscilação manual do aparelho para gerar picos no acelerômetro, emergiu como um ponto central de discussão. Embora engenhosa e funcional, essa técnica introduziu uma variabilidade inerente aos resultados, visível na dispersão dos timestamps e, conseqüentemente, nos valores calculados de velocidade e aceleração. Essa variabilidade não é apenas um ruído a ser eliminado, mas uma representação fidedigna das imprecisões e da natureza não-determinística de experimentos no mundo real.

A escolha dos modelos de Movimento Uniforme (MU) e Movimento Uniformemente Acelerado (MUA) serviu como uma excelente base para a simulação, por representarem idealizações fundamentais da cinemática. A análise dos resultados demonstrou que, para o movimento em linha reta, esses modelos simplificados, quando calibrados com os parâmetros médios extraídos dos dados reais, foram capazes de replicar o comportamento médio experimental com notável acurácia. Contudo, para o trajeto em zigue-zague, as limitações dos modelos 1D tornaram-se mais evidentes. As manobras de mudança de direção, que envolvem acelerações laterais e variações de velocidade tangencial, não são explicitamente contempladas, fazendo com que o modelo seja uma aproximação mais grosseira da realidade nesse cenário.

Um dos resultados mais significativos foi a validação da abordagem estocástica. A introdução de um ruído gaussiano, parametrizado pelo desvio padrão observado nos dados reais, foi crucial para que as simulações não apenas reproduzissem a tendência central do movimento, mas também a sua dispersão. Isso reforça um princípio fundamental da modelagem: um modelo robusto não deve apenas prever o valor médio, mas também capturar a gama de resultados prováveis, refletindo a incerteza e a variabilidade do sistema real. Adicionalmente, a comparação entre as soluções de Euler e Analítica confirmou que, para os modelos e o passo de integração utilizados, o método numérico foi altamente preciso, com diferenças desprezíveis em relação à solução exata.

Em conclusão, este trabalho demonstrou com sucesso a aplicação de conceitos de modelagem e simulação para analisar a mobilidade pedestre. Foi possível constatar que mesmo modelos cinemáticos simples, como o MU e o MUA, podem gerar representações eficazes de um fenômeno complexo, desde que seus parâmetros sejam devidamente calibrados a partir de dados experimentais e que a sua natureza estocástica seja considerada. As discrepâncias observadas entre o real e o simulado não invalidam os modelos, mas, ao contrário, oferecem insights valiosos sobre suas limitações e sobre as fontes de incerteza do processo experimental. Como trabalhos futuros, sugere-se a exploração de modelos de movimento mais sofisticados, que possam incorporar a dinâmica de trajetórias curvas, ou o uso de técnicas de processamento de sinal para filtrar os dados do acelerômetro de forma mais avançada, potencialmente aprimorando a precisão na extração de parâmetros.