《数学分析》读书报告——探究 Riemann-Zeta 函数

陆青阳　191850128

2021 年 1 月 15 日

Riemann-Zeta 函数的定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

在实变量的情形下考虑，这是定义在$(1,+\infty)$上的光滑函数。如果考虑复数域，情况则要复杂得多。著名的Riemann猜想就是说，Zeta函数的所有非平凡零点都位于$\mathrm{Re}\ s=\frac{1}{2}$这条直线上。看到这里，很自然的问题是，Zeta函数的平凡零点是什么？如果说所有负偶数都是Zeta函数的零点，恐怕更令人大吃一惊。为了弄清楚这个问题，需要首先尝试将Zeta函数的定义域进行扩充。

Riemann首先证明了Zeta函数满足非平凡的函数方程

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

他的证明如下：首先考虑

$$\int_0^{\infty}x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}dx\xlongequal{y=n^2\pi x}\frac{1}{n^s\pi^{\frac{s}{2}}}\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}s-1}e^{-y}dy=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{n^s\pi^{\frac{s}{2}}}$$

这样就得到

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^{\infty}x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}dx=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^{\infty}x^{\frac{1}{2}s-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}dx$$

其中积分求和次序可交换是由于$x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}\le x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-\pi x}$，从而由Weierstrass判别法知一致收敛。

记$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$，则由书上已证明的恒等式$\sqrt{x}\vartheta(x)=\vartheta(\frac{1}{x})$可立即得到

$$\sqrt{x}(2\psi(x)+1)=2\psi(\frac{1}{x})+1$$

从而有

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\
&\xlongequal{y=x^{-1}} \int_1^\infty y^{-1-\frac{s}{2}}\psi(\frac{1}{y})dy + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\
&= \int_1^\infty (x^{-1-\frac{s}{2}}(\frac{\sqrt{x}}{2}(2\psi(x)+1)-\frac{1}{2}) + x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x))dx \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty (x^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx
\end{aligned}$$

注意到最后一式在变量替换$s \to 1-s$ 下保持不变，这就证明了函数方程。
观察函数方程，我们不难看出$\mathrm{Re}\ s = \frac{1}{2}$在Zeta函数中有着特殊的地位，这或许正是Riemann提出他著名猜想的灵感所在。
从函数方程出发，依次利用余元公式及倍元公式，我们就得到

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) &= \pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) \\
\zeta(s) &= \pi^{s-\frac{3}{2}}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})\zeta(1-s) \\
\zeta(s) &= \pi^{s-1}2^s\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \qquad (*)
\end{aligned}$$

从而可以得到Zeta函数在$(-\infty, 0)$上的取值，特别地，$\zeta(-2n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

当然，证明中还有一个小问题，那就是余元公式为何对$s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$成立。
首先，利用$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$将Gamma函数的定义延拓到$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$上
不妨设$s > 0$，则可以得到

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= (s-1)\Gamma(s-1)\Gamma(1-s) \\
&= -\Gamma(s-1)\Gamma(2-s) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{\lfloor s \rfloor}\Gamma(s-\lfloor s \rfloor)\Gamma(1+\lfloor s \rfloor - s) \\
&= (-1)^{\lfloor s \rfloor}\frac{\pi}{\sin(\pi(s-\lfloor s \rfloor))} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}
\end{aligned}$$

从而上述证明在s不是负整数时成立，又由于$(*)$式右端关于$s < 0$是连续的，因此对Zeta函数在负整数处的取值也是定义合理的。

毫无疑问，在整个证明过程中最为精妙的就是Theta函数，或者更进一步，Poisson求和公式的使用。处理Riemann-Zeta函数的主要难点就是它是无穷求和的形式，这导致我们无法对它进行换元、分部等无穷积分中的常见操作。而Poisson求和公式构造了两个无穷求和

之间的恒等式，从而自然地生成了类似Theta函数的支持某些换元操作的函数，这就丰富了我们对无穷求和可进行的操作，给处理问题带来了极大的方便。当然，Riemann巧妙的处理也十分关键，他将$\frac{1}{n^s}$转化为Gamma函数及无穷积分的形式，这一手法与我们在含参变量积分中将一重积分化为二重积分的思想一致，看似南辕北辙，其实能够帮助我们改变处理问题的先后次序，从而起到简化问题的作用。至于他是如何敏锐地看出Zeta函数和Gamma函数之间的联系的，这恐怕就是Riemann不同于其他人的伟大之处吧。

由于尚未深入学习复变函数，要探讨Zeta函数在复数域上的性质可能较为困难。不过，即使仅考虑Zeta函数在整数处的取值，也绝非易事。Riemann-Zeta函数在偶数处的取值已经由书上公式

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}$$

给出，但奇数点处的函数值的探究则要困难得多。直到1979年，才由Apery给出首个$\zeta(3)$是无理数的证明。这一证明过于复杂，就不在此进行分析了。不过，在我看来，证明的关键在于他发现了一个恒等式

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$$

这给出了$\zeta(3)$的一种更快的逼近方式。众所周知，如果一个数能被一列有理数快速地逼近却无法达到，那么它一定是无理数。因此，证明的主要工作便是对第二个级数的逼近速度进行估计了。不过，遗憾的是，对于更大的奇数，类似的满足逼近速度要求的恒等式尚未被发现。换言之，对于$\zeta(5),\zeta(7),\cdots$，我们对其无理性都知之甚少。由此看来，即使把目光局限在整数上，Riemann-Zeta函数尚有很多问题等待我们去探索。

Riemann-Zeta函数的另一重要之处就是它与素数息息相关。我们已知恒等式

$$\zeta(s) = \prod_{p\text{ prime}}(1-p^{-s})^{-1}$$

从这一恒等式出发，素数有无穷多个以及素数的倒数和发散这两个命题都是直接的推论，由此便可窥见Zeta函数的巨大威力。更进一步，考虑下面的问题：任取n个正整数，它们的最大公因数是1的概率是多少？事实上，考虑每个素数p，它整除所有n个数的概率是p^{-n}，因此这n个数最大公因数是1的概率就是

$$\prod_{p}(1-p^{-n}) = \frac{1}{\zeta(n)}$$

由此看来，Zeta函数在数论中也发挥着关键的作用。Riemann仅仅利用Zeta函数的非平凡零点的实部都在0和1之间的性质就证明了素数定理$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$，如果Riemann猜想被证明，即我们知道Riemann-Zeta函数的所有零点，那么所有素数的分布规律便可以被更加精确的估计，综上所述，Zeta函数以及Riemann猜想在现代数学中发挥的关键作用便不言而喻了。