《数学分析》读书报告——探究 Tauber 定理

陆青阳　191850128

2021 年 1 月 16 日

Tauber定理最初是Tauber提出的一个用于给出数项级数收敛充分条件的定理，经过一百多年的发展，在函数项级数、调和分析等领域也都产生了对应的Tauber定理，其英文也变为了Tauberian theory，足以看出这一类定理的伟大。

讨论Tauber定理，需要先考虑Abel意义下的求和，如果$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$存在且有限，则称$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在Abel意义下可求和，记作$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ (A)，Abel连续性定理就是说

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = l \text{ (A)}$$

很自然地，我们要考虑这一定理的逆命题是否成立，而答案通常是否定的，例如$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$发散，但$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$，因此，为了使逆命题成立，必须增加一些条件。Tauber提出了一个充分条件$a_n = o(\frac{1}{n})$，从而打开了这一类定理的大门。

小o Tauber定理的证明第二版书上已有，就不在此重复了。分析其证明过程，主要难点在于要同时处理两个极限$x \to 1^-$和$n \to \infty$，如果先令$x \to 1^-$，则$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$难以控制，而如果先令$n \to \infty$，则又无法用$x$来限制$\sum_{k=1}^{n}(1 - x^k)|a_k|$，这样一来，像证明中那样建立$x$与$n$的联系似乎便成了必然的选择了。通过将两个变量进行“绑定”，看似减少了可行的操作空间，但实际上，通过“绑定”过程中巧妙地赋值，就可以在简化问题的同时，让两个变量一致地趋于极限，类似一对反作用力，保持我们对于不等式的估计，从而达到事半功倍的效果。从证明过程来看，Tauber对定理的证明有三处较为宽松的放缩，一是在前两个求和中均将a_n放缩至$|a_n|$，二是在$k > n$时将a_k放缩为$\frac{ka_k}{n+1}$，三是在赋值$x = 1 - \frac{1}{n}$时并没有很严格的限制，即可选的赋值函数不止这一个。因此，后续出现各种加强版的命题也就不足为奇了。

Tauber定理的“最强”版本是由Hardy和Littlewood提出的：

$$\text{如果 } ka_k \le C < \infty, \forall k \in \mathbb{N}, \text{ 则Abel连续性定理可逆}$$

以下是Wielandt的证明：

WLOG，设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ (A)

考虑函数空间

$$\Sigma := \{f| \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x^n) = 0\}$$

则显然Σ是线性空间，且所有满足$p(0)=0$的多项式均在其中（因为$x^k \in \Sigma, \forall k \in \mathbb{N}^*$）
考虑$g(x) := \chi_{[\frac{1}{2},1]}$，则$\forall \epsilon > 0$，存在多项式$p_1, p_2$满足$p_1(0) = p_2(0) = 0, p_1(1) = p_2(1) = 1$，

$$p_1(x) \le g(x) \le p_2(x), \forall 0 \le x \le 1, \int_0^1 \frac{p_2(t) - p_1(t)}{t(1-t)} dt < \frac{\epsilon}{C}$$

记$q(x) = \frac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)} =: \sum_{k=0}^m b_k x^k$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n) &\le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{n} \\
&= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \\
&\le C(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n) \\
&= C(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} b_k x^{kn+n} \\
&= C \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \\
\text{as } x \to 1^-, &\to C \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{k+1} \\
&= C \int_0^1 q(t) dt < \epsilon
\end{aligned}$$

这就说明

$$\limsup_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) < \epsilon$$

同理，比较g和p_2，可以得到

$$\liminf_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) > -\epsilon$$

这就说明$g \in \Sigma$，特别地，取$N = \lfloor \frac{-ln2}{lnx} \rfloor$，则$g(x^n) = 1, \forall n \le N, g(x^n) = 0, \forall n > N$
从而

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n)$$

令$x \to 1$即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$$

这个证明中最令人费解的部分就是为什么存在满足条件的多项式逼近？我的想法是这样的：

首先考虑$h(x) := \frac{g(x)-x}{x(1-x)} = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{x}, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

注意到$h(x)$在0和1处都不是瑕点，从而存在连续函数$\phi_1(x), \phi_2(x)$，满足

$$\phi_1(x) \le h(x) - \epsilon, h(x) + \epsilon \le \phi_2(x), \forall x \in [0,1], \int_0^1 |h(t) - \phi_i(t)| dt < 2\epsilon, i = 1, 2$$

从而由Weierstrass逼近定理的推论，存在多项式$r_1(x), r_2(x)$满足

$$|r_1(x) - \psi_1(x)| < \epsilon, |r_2(x) - \psi_2(x)| < \epsilon, \forall x \in [0,1]$$

此时自然成立

$$r_1(x) \le h(x) \le r_2(x), \forall x \in [0,1], \int_0^1 r_2(t) - r_1(t) dt \le 6\epsilon$$

再取$p_i(x) = r_i(x)x(1-x) + x, i = 1, 2$即得满足条件的多项式

这个定理之所以被称作“最强”是因为条件中只要求单侧有界，但是容易注意到在a_n不变号的情形下Abel连续性定理显然是可逆的，因此我们可以理解为$na_n \le C$将正的部分控制住，而负的部分则由不变号的性质控制，这样看来，得到这样的结论也并不令人惊讶。

回顾定理的证明过程，我认为其核心思想是“化静为动”，从函数项级数的角度来研究数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性本身就是把静态的问题化为动态的问题进行研究，Wielandt则更进一步，将1处的取值这一静态的问题利用阶梯函数扩充到$[\frac{1}{2}, 1]$上进行研究，这一手法和我们使用参变量积分的思想不谋而合——微积分的本质是要研究动态的问题，不论是微分还是积分，总是要让变量动起来才能施展技巧，在含参变量积分中，我们将参数看作变量，从而能够对其进行微分以解决问题，而在上面的证明中，将一点处的取值扩展到一个区间，看似增加了问题的难度，却也同时增加了我们处理问题的手段。当然，不可否认的是采用多项式逼近的手段实在是神来之笔，尤其是逼近多项式的选取十分巧妙，并没有简单地要求$\int_0^1 p_2(t) - p_1(t) dt < \epsilon$，而是充分利用端点值相等这一条件，将公因子约去后再积分，从而提供了更强的性质，为解决问题提供方便，这一技巧十分值得学习。同时，我们也看到在小o Tauber定理中运用的“赋值绑定”的手段在这里再一次发挥了关键的作用，足以看出这一技巧在处理两个变量的极限过程中的强大威力。