Taller de integración: puntos teoricos 1 y 2

Luisa Maria Sánchez Rhenals-lm.sanchezr1@uniandes.edu.co
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 13 de Septiembre de 2022)

I. PUNTO 1

Se tiene que la regla del trapecio esta dada por

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Siendo

$$f(x) \cong \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{2}$$

Si se reemplaza $f(x)$ por la ecuación (2) entonces se tiene que la integral es

$$I \cong \int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)dx. \tag{3}$$

El desarrollo fue el siguiente:

$$\int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a)dx + \int_a^b \frac{x-a}{b-a}f(b)dx.$$

$$\frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx$$

$$\frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b$$

$$\frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{b^2}{2} - b^2 - \frac{a^2}{2} + ba\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - ba - \frac{a^2}{2} + a^2\right]$$

Se unen términos dentro de los corchetes cuadrados y se divide por a-b o b-a respectivamente

$$f(a)\left(\frac{-b^2 - 2ab + a^2}{2a-2b}\right) + f(b)\left(\frac{(b-a)^2}{2(b-a)}\right)$$

$$f(a)\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(b)\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

Por lo tanto, si se factoriza el resultado anterior, se tiene que:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \tag{4}$$

Dando un resultado satisfactorio y coherente con el visto en clase.

II. PUNTO 2

El error del método del trapecio esta dado por

$$E = \int_a^b \epsilon(x)dx. \tag{5}$$

siendo ϵ dada por la función

$$\epsilon(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b). \tag{6}$$

Teniendo esto en cuenta, la integral dada por la regla de Simpson termina siendo

$$E = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx. \tag{7}$$

El desarrollo de esta integral empezó al sacar el termino $\frac{f''(\xi)}{2}$ ya que es una constante, considerando que ξ es un numero entre a y b

$$\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx.$$

Después se integro con respecto a x, dando el proceso siguiente

$$\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x^2 - bx - ax + ab)dx.$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + abx\right]_a^b$$

Evaluando en a y b, ademas juntando terminos

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{-b^3 + 3ab^2 + a^3 - 3a^2b}{6}\right]$$

$$\frac{f''(\xi)}{12}\left[-(b-a)^3\right]$$

Teniendo en cuenta que $h = b - a$ termina quedando

$$\frac{-h^3}{12}\left[f''(\xi)\right]$$

Entonces el error dado por la regla del trapecio es:

$$E = \int_a^b \epsilon(x)dx = \frac{-h^3}{12}\left[f''(\xi)\right] \tag{8}$$