

Lab 08: Dynamic Programming

5 พฤศจิกายน 2567

ซิกแซก (Z)

เราจะให้ลำดับของ y_1, y_2, \dots, y_n เป็นลำดับซิกแซก ถ้าสมาชิกสามตัวที่อยู่ติดกัน (y_i, y_{i+1}, y_{i+2}) มีสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่งในสองข้อนี้:

- $y_i < y_{i+1}$ และ $y_{i+1} > y_{i+2}$
- $y_i > y_{i+1}$ และ $y_{i+1} < y_{i+2}$

เมื่อให้ลำดับ x_1, x_2, \dots, x_n มา เป้าหมายของเราคือการทำ Dynamic Programming เพื่อหาความยาวที่ยาวที่สุดของลำดับย่อย (Subsequence) ที่ซิกแซก โดยให้นิยามว่า $DP(i, b)$ คือความยาวของลำดับย่อยซิกแซกที่ยาวที่สุดที่จบด้วย x_i และมีเงื่อนไขสำหรับตัว b ต่อไปนี้

- หากว่า b มีค่าเป็น TRUE หมายความว่าต้องจบด้วยตัว x_i ที่คู่สุดท้ายเป็นแบบ Ascending Pair (ตัวก่อนสุดท้ายมีค่าน้อยกว่า x_i)
- หากว่า b มีค่าเป็น FALSE หมายความว่าต้องจบด้วยตัว x_i ที่คู่สุดท้ายเป็นแบบ Descending Pair (ตัวก่อนสุดท้ายมีค่ามากกว่า x_i)

และหากมีความยาวเพียง 1 จะถือว่าเป็นลำดับซิกแซกแบบทั้งจบด้วย Ascending และ Descending Pair

ยกตัวอย่างสมมติเรามีลำดับต่อไปนี้

$$x_1 = 13, \quad x_2 = 93, \quad x_3 = 86, \quad x_4 = 50, \quad x_5 = 63, \quad x_6 = 4$$

เราจะได้ว่า $DP(5, \text{TRUE})$ จะมีค่าเท่ากับ 4 เพราะว่าลำดับย่อยซิกแซกที่ยาวที่สุดที่จบที่ x_5 และคู่สุดท้ายเป็นแบบ Ascending Pair คือ x_1, x_2, x_4, x_5 หรือ x_1, x_3, x_4, x_5 ในขณะที่ $DP(5, \text{FALSE}) = 3$ โดยเป็นลำดับย่อย x_1, x_3, x_5 (เราจะได้ข้อสังเกตว่าลำดับย่อย (Subsequence) สมาชิกไม่จำเป็นต้องเป็นตัวติดกันก็ได้)

งานของนักศึกษา

เมื่อให้ลำดับมาเป็น $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ จงหา $DP(i, b)$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ และ $b = \text{True}, \text{False}$ (ลองดูตัวอย่างประกอบ)

ข้อมูลนำเข้า (Input)

บรรทัดที่ 1	จำนวนเต็ม n บอก จำนวน ของ สมาชิก ใน ลำดับ ดัง กล่าว โดยที่ $1 \leq n \leq 1,000,000$
บรรทัดที่ 2	จำนวนเต็ม x_1, x_2, \dots, x_n แทนสมาชิกในลำดับ แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง

ข้อมูลส่งออก (Output)

บรรทัดที่ 1	ผลการคำนวณของ $DP(1, \text{True})$, $DP(2, \text{True})$, ..., $DP(n, \text{True})$ แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง
บรรทัดที่ 2	ผล การ คำนวณ ของ $DP(1, \text{False})$, $DP(2, \text{False})$, ..., $DP(n, \text{False})$ แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า ส่งออก (Examples of Input & Output)

Input	Output
6 13 93 86 50 63 4	1 2 2 2 4 1 1 1 3 3 3 5
10 1 45 2 44 3 43 4 42 5 41	1 2 2 4 4 6 6 8 8 10 1 1 3 3 5 5 7 7 9 9
11 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

ดีไอจ็อน (The Ijon)

บอสคัน เป็นผู้บริหารใหญ่ของบริษัทดีไอจ็อน บริษัทที่ดำเนินธุรกิจออนไลน์อันดับหนึ่งของประเทศไทย วันหนึ่งเขาต้องเดินทางไปร่วมงานแต่งงานของลูกค้าของเจ้าสาวคนหนึ่งในประเทศ ดังนั้นเขาต้องเลือกที่จะแต่งตัวให้ดูหรูหรามากที่สุดที่เป็นไปได้

บอสคันมาปรึกษาคุณ ผู้เป็นพรินเตอร์ของแบรนด์ว่าทำอย่างไรจึงสามารถแต่งองค์ทรงเครื่องได้หรูหรามากที่สุด มีอยู่ข้อหนึ่งว่าบอสคันไม่ชอบความรุงรังที่เกินเหตุ ดังนั้นเขาจึงให้คุณช่วยเลือกว่าจะแต่งตัวอย่างไรไม่ให้รุงรังเกินไป

สมมติว่าบอสคันมีเครื่องประดับอยู่ 4 อัน ดังนี้

รายการเครื่องประดับ	ความรุงรัง	ระดับความหรู
นาฬิกาหรู Patek Philippe Golden Elipse	2	13
สร้อยข้อมือเพชรสยาม	5	8
มงกุฎเพชร	3	9
ต่างหูเพชรสีน้ำเงิน	4	7

สมมติว่าบอสคันต้องการความรุงรังที่ไม่เกิน 7 นักศึกษาต้องจัดหาเครื่องประดับที่เมื่อใส่รวมกันแล้วความรุงรังต้องไม่เกิน 7 และให้ความหรูหราสูงสุดที่เป็นไปได้

ในกรณีนี้นักศึกษาจึงเห็นว่า นาฬิกาหรู Patek Philippe Golden Elipse และมงกุฎเพชร เมื่อรวมกันแล้ว ให้ระดับความหรูหราสูงสุดที่ 22 เมื่อผลรวมความรุงรังไม่เกิน 7

งานของนักศึกษา

เมื่อบอสคันให้ของของประดับจำนวน n ชิ้น และกำหนดความรุงรังไม่เกิน p ให้นักศึกษาหาว่าจะสามารถจัดเครื่องประดับให้บอสคันใส่ได้อย่างไรที่ผลรวมของความรุงรังไม่เกิน p และให้ระดับความหรูหรมากที่สุดที่เป็นไปได้

ข้อมูลนำเข้า (Input)

บรรทัดที่ 1	จำนวนเต็มบวก n แทนจำนวนเครื่องประดับที่บอสคันให้คุณช่วยเลือก โดยที่ $1 \leq n \leq 1,000,000$
บรรทัดที่ 2 ถึง $n+1$	จำนวนเต็มบวกสองจำนวนได้แก่ w_i และ x_i แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง แทนระดับความหรูหรา และความรุงรัง ตามลำดับ
บรรทัดที่ $n+2$	จำนวนเต็มบวก p แทนความรุงรังที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ โดยที่ $3 \leq p \leq 1,000,000$

ข้อมูลส่งออก (Output)

บรรทัดที่ 1	ระดับความหรูหรมากที่สุดที่เป็นไปได้ เมื่อตามเงื่อนไขข้างต้น
-------------	---

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า ส่งออก (Examples of Input & Output)

Input	Output
4 2 13 5 8 3 9 4 7 7	22
5 4 20 5 9 9 21 10 18 7 26 65	94

ห่านปิ้ง (Grilled Goose)

หลังจากภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์จัดงาน CPE Games 2025 เรียบร้อย หมูปิ้ง อ.วิชายดีเป็นเทน้ำเทท่า ขนาดมีแค่กล่อง 4 ขนาดให้เลือกยังขายดีขนาดนี้

อ.วิ จึงวางแผนเปิดร้านต่อในกิจกรรม Festival Fair ในวันจันทร์หน้า (11 พ.ย. 2567) โดยขายห่านปิ้งที่มีวัตถุดิบจากหน้ามหาวิทยาลัย และหน้าตึก FIBO แต่รอบนี้ไม่เหมือนเดิม อ.วิ ไม่ได้ขายแค่ 4 กล่องแล้ว อ.วิ มีจำนวนกล่องทั้งหมด n กล่อง โดยที่แต่ละกล่องมีจำนวนห่านปิ้งทั้งหมด $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

เช่น หากมี 4 กล่อง กล่องละ 8, 12, 15, 20 ไ้ ตามลำดับ หากว่าสั่งไม่เกิน 100 ไ้ จะมีบางจำนวนไ้ที่ไม่สามารถสั่งได้ เช่น 49 ไ้ เป็นจำนวนไ้ที่มากที่สุดที่ไม่สามารถสั่งได้

หรือหากมี 3 กล่อง กล่องละ 6, 9, 20 ไ้ตามลำดับ หากว่าสั่งไม่เกิน 500 ไ้ จะมีบางจำนวนไ้ที่ไม่สามารถสั่งได้ เช่น 43 ไ้ เป็นจำนวนไ้ที่มากที่สุดที่ไม่สามารถสั่งได้

งานของนักศึกษา

จงหาว่าถ้าอาจารย์วิทำห่านปิ้งขายแบบกล่องโดยมีทั้งหมด n กล่อง แต่ละกล่องมีหมูปิ้ง $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ไ้ หากเราสั่งได้มากที่สุด x ไ้ จำนวนไ้ที่มากที่สุดที่**ไม่สามารถสั่งได้**เป็นเท่าใด

ข้อมูลนำเข้า (Input)

บรรทัดที่ 1	จำนวนเต็มบวก x จำนวนไ้ที่มากที่สุดที่สามารถสั่งได้ต่อหนึ่งคำสั่งซื้อ
บรรทัดที่ 2	จำนวนเต็มบวก n จำนวนกล่องห่านปิ้งที่ อ.วิขาย โดยที่ $1 \leq n \leq 100$
บรรทัดที่ 3	จำนวนเต็มบวก n ตัว ดังนี้ p_1, p_2, \dots, p_n แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง แทนจำนวนไ้ห่านปิ้งในแต่ละกล่อง

ข้อมูลส่งออก (Output)

บรรทัดที่ 1	จำนวนไ้ที่มากที่สุดที่ไม่เกิน x ที่ไม่สามารถสั่งซื้อได้
-------------	---

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า ส่งออก (Examples of Input & Output)

Input	Output
100 4 8 12 15 20	49
123 3 25 30 12	119