

非合作博弈之静态博弈

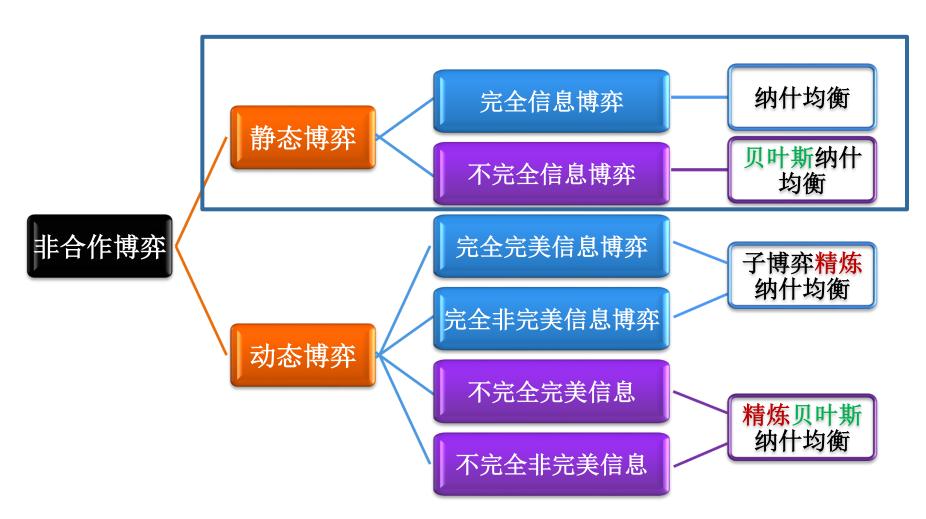
吴慧慈

北京邮电大学

E-mail: dailywu@bupt.edu.cn

引言





Lecture 吴慧慈 BUPT 2

引言



- ❖在完全信息静态博弈中,博弈各参与方同时行动, 且对博弈相关信息完全了解。
- ❖"划横线法"是求解完全信息静态博弈的常用方法。
- ❖通常说来,完全信息静态博弈都存在"纳什均衡" 或"混合策略纳什均衡"。

第一节:完全信息静态博弈:定义和求解方法率電大學

- ❖ 完全信息静态博弈的定义和实例
- ❖ 完全信息静态博弈指:博弈各方同时决策,任何博弈参与 者对博弈信息均完全了解。博弈信息包括:博弈过程、博 弈结果、博弈各方的策略集、收益等。
- ❖ 可以通过支付矩阵(Payoff Matrix)寻找完全信息静态 博弈的均衡。
- ❖ 以"囚徒困境"为例,介绍支付矩阵的构造方法和应用。

1. 定义和求解方法



- ❖ 在"囚徒困境"博弈中,有两个博弈参与者:嫌疑人甲和嫌疑人乙。
- ❖ 将嫌疑人甲标识在支付矩阵左侧,将嫌疑人乙标识在支付矩阵上方。
- ❖嫌疑人甲有两个策略可以选择: 坦白、不坦白。将嫌疑人 甲可能的策略纵向排列在博弈支付矩阵左侧。
- ❖嫌疑人乙也有两个策略可以选择: 坦白、不坦白。将嫌疑人乙可能的策略横向排列在博弈支付矩阵上方。

1. 定义和求解方法



❖ 矩阵左上方的(5,5)表示: 当嫌疑人甲选择"坦白"、嫌疑人乙选择"坦白"时,两名嫌疑人能够得到的收益。按照惯例,括号内逗号前面的数字"5"表示嫌疑人甲的收益。括号内逗号后面的数字"5"表示嫌疑人乙的收益。

嫌疑人乙

		坦白	不坦白
嫌疑人甲	坦白	(5, 5)	(1, 10)
	不坦白	(10, 1)	(2, 2)

"囚徒困境"博弈的支付矩阵

1.定义和求解方法



- ❖ 矩阵左下方的(10,1)表示: 当嫌疑人甲选择"不坦白"、 嫌疑人乙选择"坦白"时,两名嫌疑人能够得到的收益。
- ❖ 矩阵右上方的(1,10)表示: 当嫌疑人甲选择"坦白"、嫌疑人乙选择"不坦白"时,两名嫌疑人能够得到的收益。
- ❖ 矩阵右下方的(2,2)表示: 当嫌疑人甲选择"不坦白"、嫌疑人乙选择"不坦白"时,两名嫌疑人能够得到的收益。

1. 定义和求解方法



❖ 智猪博弈

话说在一个猪圈里,住着一只大猪和一只小猪。猪圈的一侧有个食槽,相反一侧是一个按钮,每次按下按钮(一段时间内只允许按一次),食槽里就会出现10份猪食。 任何一只猪做出按下按钮的举动,都会消耗掉2份体力(1份体力和1份猪食相抵 消)。

如果小猪跑去控制按钮,大猪在食槽边等待,那么大猪可以优先吃到9份猪食,只剩下1份猪食留给小猪:

如果大猪跑去控制按钮,小猪在食槽边等待,那么小猪可以优先吃到4份猪食,剩下6份猪食留给大猪:

如果大猪和小猪一起跑去控制按钮,那么大猪可以吃到7份猪食,小猪可以吃到3份猪食: 食:

假如这两只猪都具有足够的智慧,也都希望自己尽可能少消耗、多吃猪食,那么他们 会采取怎么样的行动呢?

		小猪	
		行动	等待
大猪	行动	5,1	4,4
	等待	9,-1	0,0

小猪有占优策略,大猪没有,等待是小猪的占优策略

占优战略均衡:占优策略就是指无论竞争对手如何反应都属于本企业最佳选择的竞争策略

2.划横线法



❖ 1. 通过"划横线法"求解"囚徒困境"博弈的均衡

嫌疑人乙

		坦白	不坦白
1 T SA #41	坦白	$(\underline{5}, \underline{5})$	(<u>1</u> , 10)
嫌疑人甲	不坦白	$(10, \ \underline{1})$	(2, 2)

- ❖ 如果嫌疑人乙选择坦白,那么嫌疑人甲应该如何选择?
- ❖ 理性的嫌疑人甲会选择坦白。
- ❖ 在嫌疑人甲选择坦白所对应的收益"5"的下方划一道短横线。
- ❖ 类似可分析其他情况

2.划横线法



❖ 2. 通过"划横线法"求解"智猪博弈"的均衡

		小猪		
		按开关	等待	
- 1 X -1 x	按开关	(5, -1)	(<u>4</u> , <u>2</u>)	
大猪	等待	(<u>10</u> , -2)	$(0, \underline{0})$	

- ❖ 如果大猪选择按开关,那么小猪应该如何选择?
- ❖ 理性的小猪会选择等待。
- ❖ 在小猪选择等待所对应的收益"2"的下方划一道短横线。
- ❖ 类似可分析其他情况

3.纳什均衡



❖ 一、纳什均衡的定义

给定其他参与者在博弈均衡时的策略,任何博弈参与者都没有动机改变自己在博弈均衡时的策略选择。这样的均衡被称为"纳什均衡"(Nash Equilibrium)。

3.纳什均衡



- ❖ "囚徒困境"博弈的纳什均衡为: (嫌疑人甲选择坦白、嫌疑人乙选择坦白)。
- ❖ 给定嫌疑人乙在纳什均衡的策略选择: 坦白;嫌疑人甲的最优策略就是坦白,嫌疑人甲没有动机改变自己在纳什均衡的策略。
- ❖ 给定嫌疑人甲在纳什均衡的策略选择: 坦白; 嫌疑人乙的 最优策略就是坦白,嫌疑人乙也没有动机改变自己在纳什 均衡的策略。

3.纳什均衡



- ❖ "智猪博弈"的纳什均衡为: (大猪选择按开关,小猪选择等待)。
- ❖ 给定大猪在纳什均衡的策略选择:按开关;小猪的最优策略就是等待,小猪没有动机改变策略。
- ❖ 给定小猪在纳什均衡的策略选择: 等待; 大猪的最优策略 就是按开关, 大猪没有动机改变策略。



❖ 一、严格占优策略的定义

博弈参与者进行策略选择时,有可能存在某个策略的收益 严格优于其他策略的情况,该策略被称为严格占优策略 (Strictly Dominant Strategy)。

Lecture 吴慧慈 BUPT 14



❖ "囚徒困境"博弈与严格占优策略

		燃料	郷 架 八 ム		
		坦白	不坦白		
無 区 1 田	坦白	(5, 5)	(1, 10)		
嫌疑人甲	不坦白	(10, 1)	(2, 2)		

機はイフ

- ❖ 不管嫌疑人乙选择何种策略(坦白还是不坦白),嫌疑人甲的最优策略都是坦白。在这种情况下,"坦白"是嫌疑人甲的严格占优策略。
- ❖ 不管嫌疑人甲选择何种策略(坦白还是不坦白),嫌疑人乙的最 优策略都是坦白。因此"坦白"也是嫌疑人乙的严格占优策略。



通过寻找严格占优策略求解博弈均衡

- ❖ 在寻找博弈均衡时,如果该博弈某参与者存在严格占优策略,那 么在博弈均衡中,该参与者会选择严格占优策略,而不会选择其 他策略。
- ❖ 因为不管其他参与者选择何种策略,该参与者选择严格占优策略 的收益均高于选择其他策略的收益。
- ❖ 因此在博弈均衡中,理性参与者一定会选择严格占优策略。

少京郵電大學 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

❖ 由于"坦白"是嫌疑人甲的严格占优策略,所以将嫌疑人甲选择 "坦白"策略导致的博弈结果从博弈支付矩阵中剥离出来。

嫌疑人乙

		坦白	不坦白
嫌疑人甲	坦白	(5, 5)	(1, 10)

❖ 将嫌疑人乙选择"坦白"策略导致的博弈结果从上表中剥离出来

嫌疑人乙 坦白 嫌疑人甲 坦白 (5,5)



❖ 定理:

如果每个博弈参与者都存在一个严格占优策略,那么在博弈中各参与者必然选择其严格占优策略。各博弈参与者的严格占优策略构成博弈均衡。



- ❖ 在某些博弈中,并不是所有博弈参与者都存在严格占优策略。
- ❖ 2. "智猪博弈"

		小 伯		
		按开关	等待	
- - X - z	按开关	(5, -1)	(4, 2)	
大猪	等待	(10, -2)	(0, 0)	

小水

- ❖ 小猪存在严格占优策略,大猪没有严格占优策略。
- ❖ 将小猪选择严格占优策略"等待"导致的博弈结果从上表中剥离 出来



❖ 得到:



- ❖ 给定小猪必然选择"等待",大猪如果选择"按开关",大猪得到的收益为 4,如果选择"等待",大猪得到的收益为 0。因此大猪会选择"按开关"。
- ❖ 所以"智猪博弈"的均衡解为(大猪选择按开关,小猪选择等
 待)。



- ❖ 在某些博弈中,所有博弈参与者均不存在严格占优策略。
- ❖ 3. 性别博弈

女方

		看足球	听昆曲
男方	看足球	(10, 2)	(-1, -1)
	听昆曲	(-1, -1)	(2, 10)

- ❖ 对男方而言,如果女方选择看足球,那么男方会选择看足球;如果女方 选择听昆曲,那么男方会选择听昆曲。男方不存在严格占优策略。
- ❖ 对女方而言,如果男方选择看足球,那么女方会选择看足球;如果男方 选择听昆曲,那么女方会选择听昆曲。女方也不存在严格占优策略。
- ❖ 无法通过寻找严格最优策略法求解"性别博弈"的均衡解。



严格被占优策略

- ❖ 有些博弈不存在严格占优策略,但存在严格被占优策略(Strictly Dominated Strategy)。
- ❖ 通过剔除严格被占优策略的方法也可以找出博弈的均衡。
- **❖ 1**. 严格被占优策略的定义
- 严格被占优的策略指:不管其他博弈参与者采用何种策略,某个博弈参与者采用某种策略的收益总是小于采用另外某种策略的收益。收益较小的策略称为该博弈参与者的严格被占优策略。



❖ 存在严格被占优策略的博弈

参.	与	者	2
	-	-	

		策略a	策略b	策略c
会 上 土 1	策略A	(3,1)	(5,5)	(1,3)
参与者1	策略B	(1,5)	(1,3)	(5,1)

- ❖ 博弈参与者 1 和博弈参与者 2 都没有严格占优策略。
- ❖ 无法通过寻找严格占优策略法求解此博弈的均衡。
- ❖ 策略c是博弈参与者 2 的严格被占优策略。
- ❖ 不管博弈参与者 1 采用何种策略,博弈参与者 2 选择策略 c 的 收益均小于选择策略 b 的收益。



剔除严格被占优策略与博弈均衡

❖ 将博弈参与者 2 的严格被占优策略从博弈支付矩阵中剔除,得到:

参与者2

		策略a	策略b
⇔ ⊢ ₩ ₄	策略A	(3,1)	(5,5)
参与者1	策略B	(1,5)	(1,3)

- ❖ 策略 A 成为博弈参与者 1 的严格占优策略。
- ❖ 将参与者 1 选择策略 A 导致的博弈结果从表中剥离出来,得到:



参与者2

策略a 策略b 参与者1 策略A (3,1)(5,5)

- ❖ 当博弈参与者 1 选择策略 A 时,博弈参与者 2 的最优策略选择是策略 b.
- ❖ 博弈均衡为: (参与者1选择策略A,参与者2选择策略b)



❖ 练习: 通过剔除严格被占优策略法找到下表的博弈均衡

		参与者2		
		策略a	策略b	策略c
	策略A	(1,0)	(6, 4)	(0,9)
参与者1	策略B	(4,6)	(2, 0)	(0,3)
	策略C	(7,3)	(3, 2)	(1,4)

❖ 博弈的均衡解为: 博弈参与者 1 选择策略 C, 博弈参与者 2 选择策略 C。

Lecture 吴慧慈 BUPT 26



弱占优策略与弱被占优策略

- ❖ 有些博弈不存在严格占优策略,但存在弱占优策略。有些博弈不存在严格被占 优策略,但存在弱被占优策略。
- ❖ 1. 弱占优策略与弱被占优策略的定义
- ❖ 弱占优策略(Dominant Strategy)指:不管其他博弈参与者采用何种策略, 某博弈参与者采用某种策略得到的收益总是大于或等于采用另外某种策略的收 益。收益较大的策略称为该博弈参与者的弱占优策略。
- ❖ 弱被占优策略(Dominated Strategy)指:不管其他博弈参与者采用何种策略,某博弈参与者采用某种策略的收益总是小于或等于采用另外某种策略的收益。收益较小的策略称为该博弈参与者的弱被占优策略。



- ❖ 严格占优策略指博弈参与者选择某个策略的收益
 严格大于
 另外某个策略的收益。
- ❖ 弱占优策略指博弈参与者选择某个策略的收益<u>大于等于</u>另外某个策略的收益。
- ❖ 严格被占优策略指博弈参与者选择某个策略的收益
 于另外某个策略的收益。
- ❖ 弱被占优策略指博弈参与者选择某个策略的收益<u>小于等于</u> 另外某个策略的收益。



弱占优策略与弱被占优策略的应用与局限

❖ 在下表中,策略 C 是博弈参与者 1 的弱被占优策略,策略 C 被策略 A 弱占优,也被策略 B 弱占优。

			多一句 4	
		策略a	策略b	策略c
	策略A	(3,8)	(2,5)	(2,8)
参与者1	策略B	(1,8)	(3,8)	(1,6)
	策略C	(1,8)	(2,5)	(1,9)

- ❖ 面对同样的博弈支付矩阵,通过剔除弱被占优策略的方法求解时,剔除策略的顺序不同,得到的均衡解也可能不同。
- ❖ 因此不建议采用剔除弱被占优策略的方法寻找博弈均衡。



❖ 1. 性别博弈

		看足球	听昆曲
⊞ →	看足球	$(\underline{10}, \underline{2})$	(-1, -1)
男方	听昆曲	(-1, -1)	(<u>2</u> , <u>10</u>)

女方

- ❖ 采用"划横线法"寻找"性别博弈"的纳什均衡
- ◆ (男方看足球、女方看足球)和(男方听昆曲、女方听昆曲)都是" 性别博弈"的纳什均衡。



- ❖ 2. "斗鸡博弈"
- ❖ 甲、乙两人相对而行,试图通过一座独木桥。
- ❖ 独木桥仅能容纳一人通行。
- ❖ 如果两人坚持继续前行,那么互不相让的二人势必都掉下狭仄 的独木桥,两人都会掉到河里,均得到收益 -10。
- ❖ 如果甲选择退让,让乙先行,那么得意的乙将得到收益 20, 面子受损的甲 得到收益 -2。
- ❖ 如果乙选择退让,让甲先行,那么得意的甲将得到收益 20, 面子受损的乙得到收益 -2。
- ❖ 如果甲和乙均选择退让,那么双方均得到收益 10。



❖ 采用"划横线法"寻找"斗鸡博弈"的纳什均衡

		Z	
		前行	退让
甲	前行	(-10, -10)	(<u>20</u> , <u>-2</u>)
T	退让	(<u>-2</u> , <u>20</u>)	(0, 0)

❖ (甲前行、乙退让)和(甲退让、乙前行)都是"斗鸡博弈"的纳什 均衡。



- ❖ 3. "市场争夺战"博弈
- ❖ 假设在市场中有两个竞争对手。一个是已经在市场中的"在位者", 另一个是企图进入市场的"潜在进入者"。
- ❖ 潜在进入者有两个可以选择的策略:进入、不进入。在位者也有两个可以选择的策略:斗争、默许。
- ❖ 如果潜在进入者选择进入,在位者选择斗争,那么激烈的市场竞争会 使得双方均亏损,双方收益均为 -10。
- ❖ 如果潜在进入者选择进入,在位者选择默许,那么双方在市场中均可 获得收益 5。
- ❖ 如果潜在进入者选择不进入,在位者选择斗争,那么潜在进入者的收益为 0,在位者的收益为 20。
- ❖ 如果潜在进入者选择不进入,在位者选择默许,那么潜在进入者的收 Lecture 吴益为. ② ,在位者的收益为 15 33



在份老

❖ 采用"划横线法"寻找"市场争夺战"博弈的纳什均衡

		11.11.11		
		斗争	默许	
选大计) 本	进入	(-10, -10)	$(\underline{5}, \underline{5})$	
潜在进入者	不进入	(<u>0</u> , <u>20</u>)	(0, 15)	

❖ (潜在进入者进入、在位者默许)和(潜在进入者不进入、在位者斗争)都是"市场争夺战"博弈的纳什均衡。

6.无法通过"划横线法"找到纳什均衡的博弈和宽大学

❖1. "锤头、剪刀、布"博弈

			参与者2	
		锤头	剪刀	布
	锤头	(0, 0)	(<u>1</u> , -1)	(-1, <u>1</u>)
参与者1	剪刀	(-1, <u>1</u>)	(0, 0)	(<u>1</u> , -1)
	布	(<u>1</u> , -1)	(-1, <u>1</u>)	(0, 0)

❖ 通过"划横线法"无法找到"锤头、剪刀、布"博弈的纳什均衡。

古诺寡头博弈



- ❖ 市场中有两个厂商进行产量竞争。
- ❖ 市场上该商品的总产量为: $Q = q_1 + q_2$ 。
- ❖ 其中: Q 为总产量, q₁ 为厂商 1 的产量, q₂ 为厂商 2 的产量。
- ❖ 市场价格P = A Q , A 为外生常数。
- ❖ 厂商 1 的生产成本函数为: C(q₁) = cq₁。其中 c 为厂商 1 的边际成本,且假设厂商 1 的生产没有固定成本。
- ❖ 厂商 2 的生产成本函数为: $C(q_2) = cq_2$ 。
- ❖ 厂商 1 和厂商 2 通过选择各自的最优产量达到各自利润最大化的目标。Ui=qi[A-(q1+q2)-c]

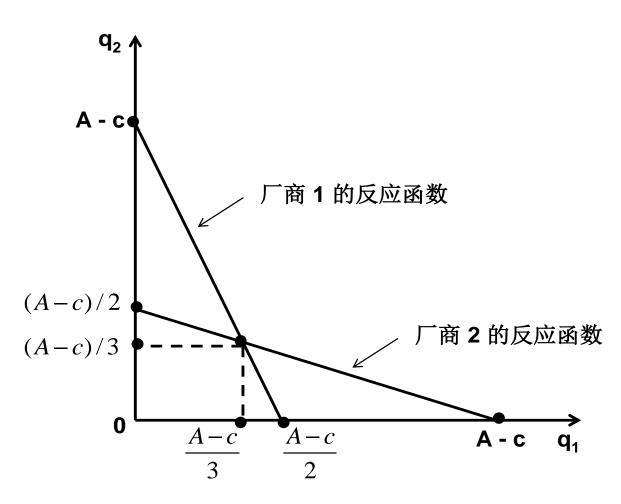


- ❖ 在古诺寡头博弈中,由于厂商可以选择的产量有无穷多种,因此无法通过"划横线法"求解古诺寡头博弈的均衡。
- ❖ 但可以通过求解两个厂商的"反应函数(Reaction function)"来 求解寡头博弈的均衡。
- ❖ 厂商 1 在决策时,假设厂商 2 的产量为给定
- ❖ 厂商 2 在决策时,假设厂商 1 的产量为给定

* 根据
$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = A - c \\ q_1 + 2q_2 = A - c \end{cases}$$
 得到
$$\begin{cases} q_1^* = \frac{A - c}{3} \\ q_2^* = \frac{A - c}{3} \end{cases}$$

❖ 得到反应函数 (Reaction Function)





古诺寡头博弈反应函数和均衡

Lecture 吴慧慈 BUPT 38

多厂商古诺寡头博弈



- ❖ 市场中有 n 个厂商进行产量竞争。
- ❖ 市场上该商品的总产量为: $Q = q_1 + q_2 + ... + q_n$ 。
- ❖ 其中: Q 为总产量, q_i 为厂商 i 的产量。
- ❖ 市场价格P = A Q , A 为外生常数。
- ❖ 厂商 i 的生产成本函数为: C(q_i) = cq_i。其中 c 为厂商 i 的边际成本,且假设厂商 i 的生产没有固定成本。
- ❖ 市场中 n 个厂商 通过选择各自的最优产量达到各自利润最大 化的目标。Ui=qi[A-(q1+q2+...+ q_n)-c]



❖ 市场中的 n 个厂商利润最大化,一阶条件得到:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - c \\ A - c \\ \dots \\ A - c \end{bmatrix}$$

❖ 均衡产量为:

$$q_1^* = q_2^* = \dots = q_n^* = \frac{A - c}{n + 1}$$

❖ 均衡价格为:

$$p^* = A - (q_1^* + q_2^* + \dots + q_n^*) = A - n * \frac{A - c}{n+1} = \frac{A - n * c}{n+1}$$



❖ 可以证明,当厂商个数趋于无穷个时,市场价格趋于厂商的边际成本 c,即:

$$\lim_{n \to +\infty} p^* = \lim_{n \to +\infty} \frac{A - n * c}{n + 1} = c$$

❖ 也就是说,对于寡头博弈的厂商而言,当市场中厂商的数量趋于无穷时,市场的均衡价格趋于完全竞争市场下的价格。

伯特兰德寡头博弈



- ❖ 市场中有两个厂商进行价格竞争。
- ❖ 厂商 1 的价格为 p1,厂商 2 的价格为 p2。
- ❖ 消费者对厂商i的需求为 qi(pi,pj)=a-pi+bpj
- ❖ 厂商 1 的生产成本函数为: C(q1) = cq1。其中 c 为厂商 1 的 边际成本,且假设厂商 1 的生产没有固定成本。
- ❖ 类似的, 厂商 2 的生产成本函数为: C(q2) = cq2。
- ◆ 厂商 1 和厂商 2 通过选择各自的最优价格达到各自利润最大化的目标。 qi(pi,pj)[pi-c]=(a-pi+bpj)(pi-c)

$$\max_{0 \le p_i < \infty} \pi_i(p_i, p_j^*) = \max_{0 \le p_i < \infty} [a - p_i + bp_j^*][p_i - c] \Rightarrow p_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c).$$



- *伯特兰德寡头博弈的均衡为: $p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-h}$ 纳什均衡
- riangle 当厂商 2 的价格满足 p_2^* 时,
- ightharpoonup 厂商ightharpoonup 的最优策略选择是使得自己的定价满足 p_1^*
- ❖ 如果厂商 1 的定价高于 a+c ,则厂商 1 会失去整个市场;
- ❖ 因此当厂商 2 的定价等于 $\frac{a+c}{2-b}$ 时,厂商 1 的最优定价策略是使得价格等于 $\frac{a+c}{2-b}$ 。
- ❖ 类似的,当厂商 **1** 的价格等于 $\frac{a+c}{2-b}$ 时,厂商 **2** 的最优定价策略也是使得价格等于 $\frac{a+c}{2-b}$



❖ 伯特兰德寡头博弈的均衡:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b}$$
 纳什均衡

- ❖ 当厂商 1 产品的价格大于厂商 2 产品的价格时,消费者 会购买厂商 2 的产品,对厂商 1 产品的消费量为零。
- ❖ 当厂商 1 产品的价格小于厂商 2 产品的价格时,消费者 会购买厂商 1 的产品,对厂商 2 产品的消费量为零。
- ❖ 当厂商 1 产品的价格等于厂商 2 产品的价格时,消费者 会同时消费厂商 1 和厂商 2 的产品。

7.现实中的囚徒困境



45

❖ 囚徒困境与苏美争霸

前苏联

不扩军备战 扩军备战 (10,10) (-100,100) (0,0)

美国

不扩军备战

扩军备战

苏美争霸博弈的支付矩阵

❖ 在苏美争霸博弈中,美国和前苏联都处于"囚徒困境"中。

7.现实中的囚徒困境



❖ 囚徒困境与交通秩序

驾驶员2

		不夹塞	夹塞
驾驶员1	不夹塞	(10, 10)	(-10, 20)
与 获贝I	夹塞	(20, -10)	(0,0)

交通秩序博弈的支付矩阵

- ❖ 博弈均衡是一个"囚徒困境"。
- ❖ 博弈参与者都选择无视交通规范和交通礼仪,胡乱夹塞,结果不但不能提高 交通参与者的出行效率,反而会使所有人的出行时间延长。

7.现实中的囚徒困境



- ❖ "囚徒困境"的内在根源是:人类的个人理性有时可能导致集体的非理性
- ❖ 在"囚徒困境"中,每个博弈参与者都是理性人。
- ❖ 博弈参与者的个体理性表现为:每个博弈参与者都只关心自己的利益,不关心博弈对方的利益及整体利益。
- ❖ 然而, 个体理性自由发挥的结果, 导致了集体不理性。