

## Propiedades de la Esperanza Matemática

### Linealidad de la esperanza matemática

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$  para todo número real  $k$ .
- $E(k) = k$  para todo número real  $k$ .
- $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$  para todo par de números reales  $a$  y  $b$ .
- **Esperanza del producto**
- $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$  únicamente en el caso de que  $X$  e  $Y$  sean variables aleatorias independientes.

### Propiedades del coseno

|            |           |                      |                      |               |            |             |             |
|------------|-----------|----------------------|----------------------|---------------|------------|-------------|-------------|
| $\alpha$ : | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$    | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ |
| <b>cos</b> | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0          | -1          | 0           |

### Relación entre el coseno y el seno

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

### Coseno del ángulo complementario

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\cos 60^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

### Coseno del ángulo suplementario

$$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Coseno de ángulos que se diferencian en $180^\circ$

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 210^\circ = \cos (180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Coseno del ángulo opuesto

$$\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos 330^\circ = \cos (360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Coseno del ángulo negativo

$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos (-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Coseno de un ángulo mayor de $360^\circ$

$$\cos (\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$$

$$\begin{array}{cc} 750^\circ & \underline{360^\circ} \\ 30^\circ & 2 \end{array}$$

$$\cos 750^\circ = \cos (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Coseno de ángulos que diferencian en $90^\circ$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\cos 120^\circ = \cos (90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

### Coseno de ángulos que suman en $270^\circ$

$$\cos \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\cos 240^\circ = \cos (270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

**Coseno de ángulos que se diferencian en 270°**

$$\cos \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\cos 300^\circ = \cos (270^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

**Coseno de la adición de ángulos**

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

**Coseno de una diferencia de ángulos**

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

**Coseno del ángulo doble**

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

**Coseno del ángulo mitad**

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\cos (22^\circ 30') = \cos \left( \frac{45^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

**Transformación de una suma de cosenos en producto**

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos 40^\circ + \cos 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ$$

**Transformación de una diferencia de cosenos en producto**

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos 40^\circ - \cos 20^\circ = -2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ$$

**Transformación de un producto de cosenos en sumas**

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos (A+B) + \cos (A-B)]$$

$$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x)$$