Substitua o gerador de números pseudoaleatórios utilizado por um gerador de números quase-aleatórios. Em seguida, verifique se as suas rotinas de integração via Monte Carlo apresentam melhor desempenho. Avalie empiricamente o ganho de eficiência, determinando o quão mais rápidas suas rotinas ficaram. Então iremos estimar a integral da função $f(x) = \exp(-0.528505531x) \cdot \cos(0.46718000809)$ no intervalo $[0, 1]$ utilizando os métodos de geração de pontos quasi-aleatórios e comparar com o método anterior.

1 Solução

Os números quasi-aleatórios, também conhecidos como números de baixa discrepância, são uma alternativa aos geradores de números pseudo-aleatórios tradicionais na simulação de Monte Carlo. Diferentemente dos números pseudo-aleatórios, que são produzidos para "parecerem aleatórios", os números quasi-aleatórios são gerados a partir de sequências determinísticas cuidadosamente construídas, que garantem uma distribuição muito mais uniforme dos pontos dentro do intervalo estipulado.

Um exemplo clássico de geração quasi-aleatória é a sequência de Halton, que é baseada em representações de números em bases primárias (números primos). Para gerar a sequência de Halton:

- Escolhe-se uma base diferente para cada dimensão (por exemplo, base 2 para a primeira dimensão, base 3 para a segunda, base 5 para a terceira, etc.).
- Cada número natural n é representado na respectiva base, de forma fracionária, invertendo a ordem dos dígitos.
- O resultado da inversão é interpretado como um número no intervalo $[0, 1]$.

Por exemplo, na base 2, o número 5 é representado como 101_2. Invertendo os dígitos e interpretando como fração, obtemos $0.101_2 = 0.625$ em decimal.

Os números quasi-aleatórios oferecem vantagens em diversas aplicações, especialmente em problemas de alta dimensionalidade, devido a grande quantidade de amostras necessárias para alcançar uma boa convergência. Outro ponto é que eles são eficazes na redução da variância dos estimadores em métodos de Monte Carlo. Por outro lado, em certos casos, pode resultar em um desempenho computacional inferior, particularmente em problemas de baixa dimensionalidade, onde os geradores pseudo-aleatórios tradicionais tendem a ser mais eficientes.Assim, a escolha entre os métodos depende das características específicas da função e do espaço de integração,e também o custo computacional.

Os gráficos abaixo mostram os resultados obtidos nas simulações:

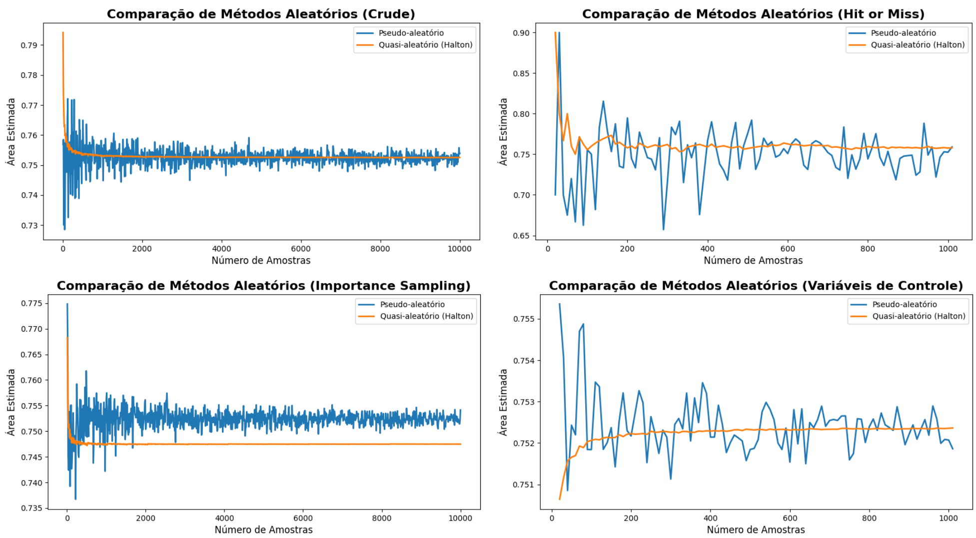

Figura 1: Comparação entre os métodos de Monte Calor utilizando amostragem pseudo-aleatórias e quasi-aleatórias (10000 pontos no Crude e Importance Sampling e 1000 no Hit or Miss e Control Variates).

Observa-se uma convergência para o valor integral estimada com o método de geração quasi-aleatória bem mais eficiente do que através dos pseudo-aleatórios. Analisando os resultados das tabelas abaixo, vemos também que para o método Control Variates houve uma piora considerável no tempo de processamento quando utilizamos o método quasi. No método Hit or Miss vemos um tempo de processamento relativamente melhor em relação ao método pseudo.

Método	Valor da Integral (Quasi)	Tempo médio (Quasi) (s)
Crude	0.752478	0.001193
Hit or Miss	0.752700	0.035133
Importance Sampling	0.747469	0.004012
Control Variates	0.752391	0.223313

Tabela 1: Tabela de resultados dos métodos de integração utilizando o método quasi-aleatórias.

Método	Valor da Integral (Pseudo)	Tempo médio (Pseudo) (s)
Crude	0.750905	0.000342
Hit or Miss	0.751300	0.030495
Importance Sampling	0.751870	0.004359
Control Variates	0.752203	0.087138

Tabela 2: Tabela de resultados dos métodos de integração utilizando o método pseudo-aleatórias.

Sendo assim, podemos concluir que a amostragem pseudo-aleatória é amplamente empregada devido à sua facilidade de implementação e boas propriedades estatísticas, a amostragem quasi-aleatória apresenta vantagens em algumas situações, como a obtenção de estimativas com convergência mais rápida e menor variância. A escolha do método mais adequado depende das características específicas do problema e além disso, o tempo computacional é um fator relevante a ser considerado na decisão sobre qual abordagem utilizar.