Simulação de um programa que gere uma estimativa de π baseado na distribuição de N pontos em um quadrado no intervalo [-1,1], em que há um círculo de raio 1 por meio dos Métodos Monte Carlo e no final, baseado nesta estimativa, encontrar um valor para N tal que o erro relativo seja availado em 0.05%.

1 Solução

O progama utilizou 3 biblitoecas, são elas: Random, NumPy e MatPlotLib.

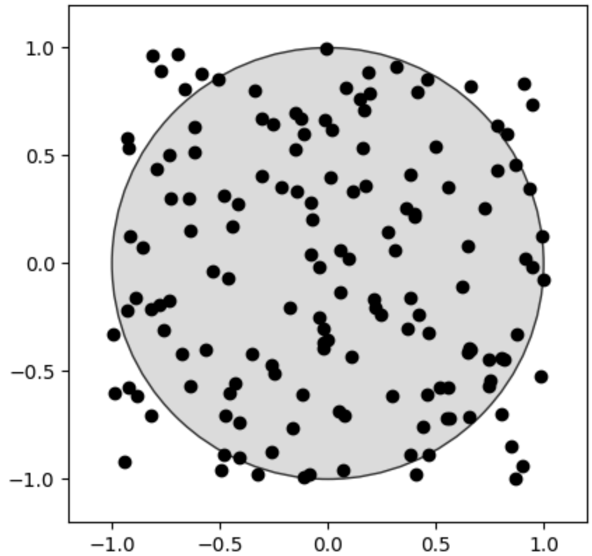

Figura 1: Estimativa de π com 150 pontos

Os conceitos utilizados no exercicío foram:

$$T(x) = \mathbb{I}(\|x\|_2 \leq 1) \tag{1}$$

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i), x_i \in [-1,1]^2 \tag{2}$$

$$n = (\frac{z\sigma}{\varepsilon})^2 \tag{3}$$

Funções do programa que utilizam os conceitos 1,2 e 3:

- O primeiro conceito (1) é utilizado na função $indicadora(valor)$, na qual utiliza o parâmetro $valor$ que é calculado pela função $np.linalg.norm(x)$, para inidicar se a norma é menor ou igual a 1.
- O segundo(2) e o terceito(3) conceito são utilizados na função $Estimativa\_n(erro, conf, n)$, na qual tem como parâmetros o valor $erro$ que é o erro relativo (0.05% proposto pelo exercício), $conf$ que é $z = 1.96$ para o erro relativo solicitado dentro do intervalo com confiança de 95% e n que será o número de pontos desejados.
- A função $plot\_grfc(n)$ irá apenas plotar um gráfico. A função $main()$ será responsável por chamar as demais funções e pedir um valor n para a amostragem.

É válido indicar que a aproximação de π pelo método de Monte Carlo se baseia na proporção entre áreas, então a porporção p (pontos que estão dentro do circulo em relação aos pontos totais) deve ser equivalente a proporção das áreas, ou seja, $p \approx \frac{A_{\text{círculo}}}{A_{\text{quadrado}}}$, e portanto $\pi \approx$ 4p.

Sendo assim, para uma amostragem de 150 pontos utilizando o programa estimamos $\pi_0 \approx 3.22$.

Para encontrar n, tal que o erro relativo da estimativa seja até 0.05%, vamos considerar a proporção p para calcular a variância dada pela forma $\sigma^2 = p(1-p)$ (variância de uma $Bernoulli(p)$) e através do conceito 3, temos:

$$\sigma_2 = (\frac{3.22}{4} \cdot (1 - \frac{3.22}{4})) = 0.156$$

Assim a margem de erro ε será:

$$\varepsilon = 0.0005 \frac{\pi_0}{4}$$

$$\varepsilon = 0.0004$$

Logo n pode ser calculado:

$$n = (\frac{z\sigma}{\varepsilon})^2 = (\frac{1.96}{0.0004})^2 \cdot 0.156 \approx 2396476$$

Podemos concluir que é necessário 2396476 pontos para estimar π com um erro relativo até 0.05% dado a amostragem.