Matemática Aplicada **UFRJ**
Otimização Convexa **2022/2**

Pré-projeto de Otimização

1 Introdução

Neste projeto pretendo otimizar a escolha de localização para uma antena (por ex., de 5G) em uma cidade. Para isso levarei em consideração que a intensidade do sinal da antena em cada ponto p da cidade e, consequentemente, o grau de satisfação dos usuários em p são funções decrescentes da distância entre a localização da antena e p. Além disso, tipicamente, a população da cidade estará distribuída no espaço de forma heterogênea. Assumindo que a antena possui capacidade ilimitada, o problema consistirá em encontrar a localização da antena que maximize a quantidade total de sinal recebida pelos usuários (ou a satisfação total dos mesmos). Também irei discutir uma variante do problema com duas (ou mais) antenas.

2 Modelo

2.1 Modelo básico

Os atributos geográficos da cidade serão modelados de tal forma que cada ponto da cidade seja representado por um par ordenado $p = (p_1, p_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$. A variável de decisão do problema básico com uma antena será a localização da antena, representada por um par ordenado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Temos então a restrição lógica

$$0 \preceq x \preceq 1. \tag{1}$$

A distribuição espacial da população da cidade será modelada por uma função de densidade populacional $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}_+$. Dada uma função $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de intensidade do sinal (ou de satisfação dos usuários) a uma distância d de x e escrevendo a distância de x a p como $d(x, p)$ temos a função objetivo

$$f(x) = \int_0^1 \int_0^1 s(d(x, p))\, \gamma(p)\, \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}p_2, \tag{2}$$

O problema de otimização pode então ser escrito como

$$\begin{array}{rl} \max_x & f(x) \\ \text{s.a} & 0 \preceq x \preceq 1. \end{array} \tag{3}$$

A decisão mais difícil no que se refere à modelagem deste problema é a escolha da função de intensidade do sinal (ou satisfação dos usuários). Uma escolha intuitiva e razoavelmente realista para uma função de intensidade do sinal é uma função do tipo

$$s(d) = c_0 \exp(-c_1 d), \tag{4}$$

com $c_0, c_1 > 0$. Para uma tal s, porém, a função objetivo dada por (2) não será côncava (muito menos convexa), e portanto o problema de otimização (3) não poderá ser abordado de maneira imediata pelos métodos de otimização convexa estudados. Uma escolha alternativa é uma função do tipo

$$s(d) = c_0 - c_1 d, \tag{5}$$

com $c_1 > 0$. Uma tal s irá possuir a propriedade de assumir valores negativos, não podendo portanto ser interpretada como um modelo para a intensidade do sinal a uma distância d de x, a qual somente assumiria valores positivos. Apesar disso, poderíamos interpretar s de outras maneiras convincentes como, por exemplo, uma medida de satisfação dos usuários (onde satisfação negativa equivale a insatisfação) ou até mesmo o log da intensidade do sinal (uma vez que $\log(\mathbb{R}_{++}) = \mathbb{R}$). Mais importante, porém, é que para uma tal s a função objetivo dada por (2) será côncava, e portanto o problema de otimização (3) será, para todos os efeitos, um problema de otimização convexo. Ao longo do projeto explorarei ambas as famílias de funções ora descritas, havendo ainda a possibilidade de se levantar modelos mais comprometidos com os fatos físicos do problema estudado.

2.2 Modelo com K antenas

No interesse da completude porém com respeito à concisão me limitarei neste pré-projeto apenas a mencionar o problema com mais de uma antena:

$$\begin{array}{rl} \max_{x_1,\ldots,x_k} & \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 s(\min_k d(x_k, p))\, \gamma(p)\, \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}p_2 \\ \text{s.a} & 0 \preceq x_k \preceq 1, \;\; k = 1, \ldots, K. \end{array} \tag{6}$$

3 Implementação

3.1 Casos considerados

Considerarei as versões convexa e não-convexa do problema com uma antena e a versão (não-convexa) do problema com duas antenas. Em relação à densidade populacional γ da cidade, irei trabalhar tanto com modelos de brinquedo quanto com dados oficiais fornecidos pelo órgão competente da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro.

3.2 Algoritmos

Para solucionar a versão convexa do problema pretendo utilizar os recursos do CVXPY. Para solucionar as versões não-convexas do problema pretendo programar um algoritmo de gradiente descendente.