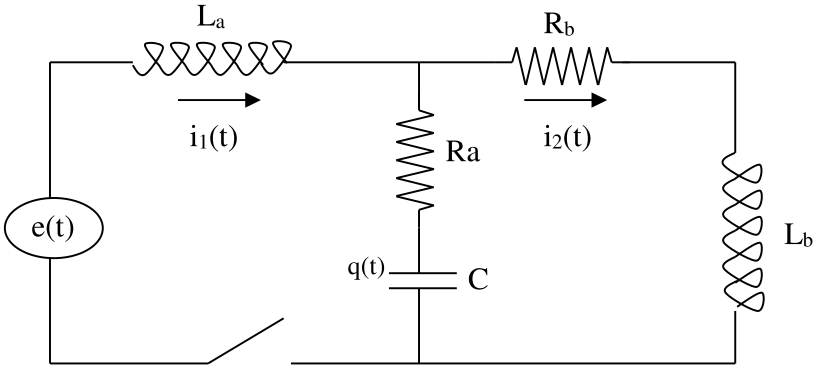
1º Exercício Programa de PMR 3401
Data de entrega: 02/06/2022 (até às 23h59min)

Parte 1
Método de Runge Kutta

A figura 1 representa um modelo de circuito elétrico que aciona o forno sendo representado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} L_a \dfrac{di_1}{dt} + R_a(i_1 - i_2) + \dfrac{q(t)}{C} = e(t) \\ -\dfrac{q(t)}{C} - R_a(i_1 - i_2) + R_b i_2 + L_b \dfrac{di_2}{dt} = 0 \\ q(t) = \int_0^t (i_1(t') - i_2(t'))dt' + q(0) \end{cases} \qquad i_1(0) = i_2(0) = q(0) = 0$$



$L_b = 0{,}5$
$R_b = 20$
$C = 0.002$
$L_a = 0{,}01$
$R_a = 200$

Figura 1 – Circuito elétrico.

onde $i_1(t)$ e $i_2(t)$ são correntes elétricas e $q(t)$ é a carga elétrica do capacitor C. A função $e(t)$ é dada por: $e(t) = \cos(t * 600)/L_a$

Considerando as constantes dadas,

a) Resolva as equações para $0 \le t \le 0{,}03s$ utilizando o Método de **Runge-Kutta de 4ª ordem** que deve ser implementado pelo aluno. Verifique a influência do passo "Δt" sobre a solução – escolha **três** passos (pequeno médio e grande) (em que aspectos você vai verificar essa influência? Por quê?). Para **cada** valor de passo escolhido plote todos os itens $i_1(t), \dot{i}_1(t), i_2(t), \dot{i}_2(t), q(t)$ **num mesmo gráfico**, em função de t. Para isso utilize escalas diferentes na plotagem de $i_1(t), \dot{i}_1(t), i_2(t), \dot{i}_2(t), q(t)$, ou seja, p.ex. $i_1(t).10^p, \dot{i}_1(t).10^q, i_2(t).10^r, \dot{i}_2(t).10^s, q(t).10^z$. Encontre valores apropriados de *p, q, r*, s e *z* de forma que todos os gráficos apareçam na plotagem;

b) Resolva as equações novamente com passo apropriado considerando:
   1) Mesmas constantes da figura, mas L_a=0,1;
   2) Mesmas constantes da figura, mas R_a=2000;

   Para cada questão, plote todos os itens $i_1(t), \dot{i}_1(t), i_2(t), \dot{i}_2(t), q(t)$ **num mesmo gráfico**, em função de t, como sugerido acima.

Parte 2

Método de Diferenças Finitas (MDF)

O circuito elétrico anterior aciona um forno industrial de resistência elétrica utilizado para fundir metal. A figura 2 mostra a estrutura principal do forno elétrico. Essencialmente esta estrutura consiste numa grande resistência elétrica que ao ser sujeita à uma diferença de potencial elétrico gera calor. O bloco é constituído de um material condutor de condutividade elétrica $\sigma_A = 5.10^{-6}$ *S/m*, apresentando um plano de simetria radial. A condutividade do metal fundido é $\sigma_B = 1.10^{-5}$ *S/m*. As dimensões na figura são indicadas em *m*, sendo utilizadas coordenadas cilíndricas. A profundidade da peça é igual à *1 m*. O bloco é submetido a uma diferença de potencial elétrico que faz com que circule uma corrente elétrica por ele. Pelo fato do bloco possuir uma resistência elétrica haverá dissipação de calor por efeito Joule. Esse calor gerado causará uma distribuição de temperaturas no bloco (incluindo o metal fundido). Esse fenômeno é conhecido como termoelétrico sendo crítico nos equipamentos elétricos sujeitos a altas tensões e correntes elétricas.

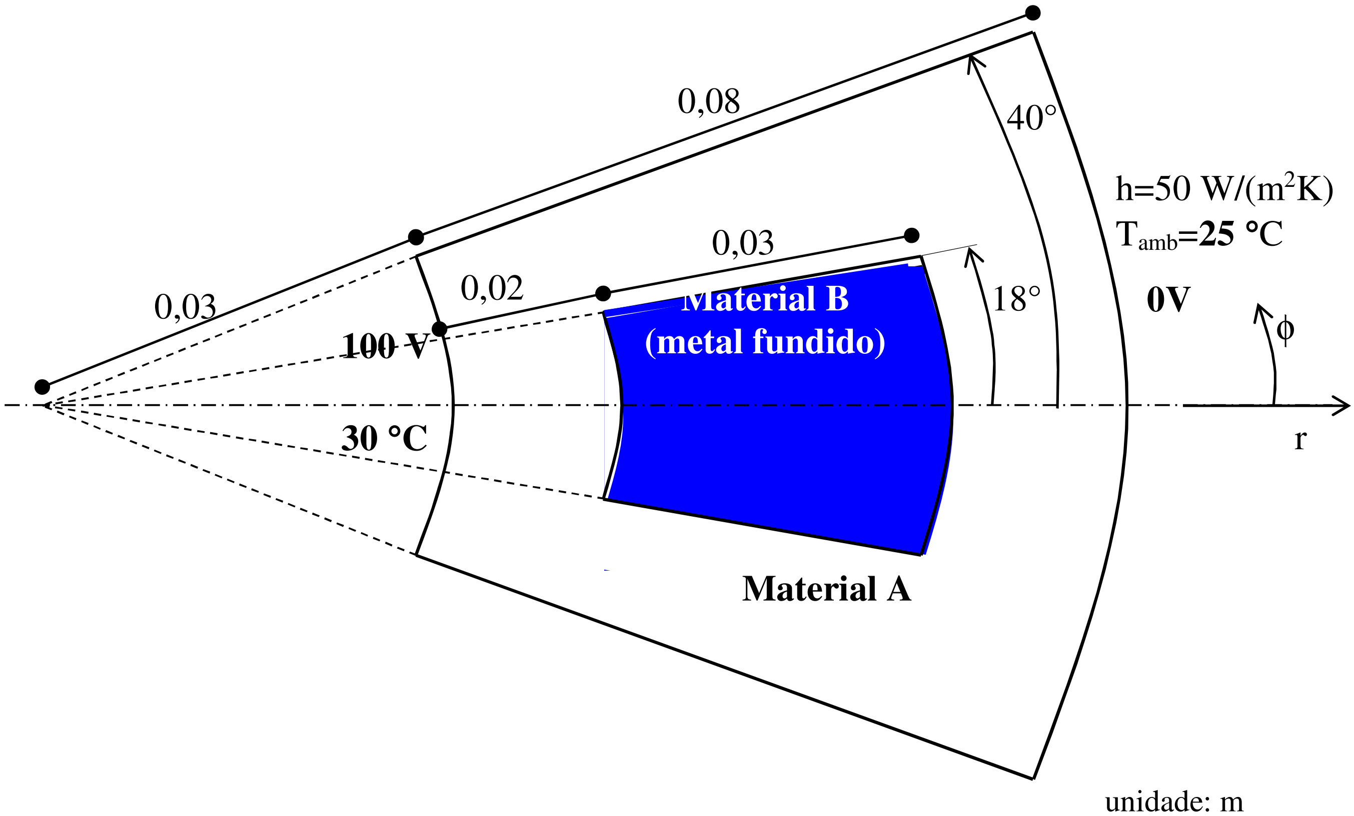


Figura 2 – Peça a ser modelada

Em regime estacionário, o fenômeno de condução elétrica em duas dimensões e em meios contínuos (Eletrocinética) é regido pela equação de Laplace considerando coordenadas cilíndricas:

$$\sigma \nabla^2 V = \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (1)$$

sendo $V(r,\phi)$ o potencial elétrico que é dado em *volt* e σ, a condutividade elétrica do material (*S/m*). A coordenada ϕ é usada em radianos. A densidade de corrente elétrica $\mathbf{J}(r,\phi)$ (em A/m^2) que flui no meio é calculada por:

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla V = -\sigma grad(V) = -\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) = \left(Q_r, Q_\phi\right) \qquad (2)$$

A potência elétrica dissipada por efeito Joule no meio representa uma fonte de calor distribuída $\dot{q}$ (W/m^3), sendo dada por:

$$\dot{q} = -\frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} = -\sigma|\nabla V|^2 = -\sigma\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2\right] \qquad (3)$$

Já a equação de transferência de calor no bloco é dada por

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \dot{q} = 0 \qquad (4)$$

sendo $T(r,\phi)$ a temperatura que é dada em °C, $k_A=110\ W(K\ m)$ e $k_B=500\ W(K\ m)$, as condutividades térmicas dos materiais A e B, respectivamente. Essa equação é, portanto, análoga à equação elétrica (1). Note que ambas as equações são similares e podem ser resolvidas usando a mesma rotina com pequenas modificações, (ou seja, inclusão de $\dot{q}$ já obtido pela equação 3).

O fluxo de calor $\mathbf{Q}(r,\phi)$ (em W/m^2) que flui no meio é calculado por:

$$\mathbf{Q} = -k\nabla T = -kgrad(T) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \qquad (5)$$

O bloco condutor acima é submetido a uma diferença de potencial igual à *100 V*. Note que a peça é simétrica. O problema acima está sujeito às seguintes condições de contorno elétricas:

a) nos pontos em $r=0{,}03$, o potencial elétrico V vale $V_a = 100\ V$;
b) nos pontos em $r=r_{max}=0{,}11$, o potencial elétrico V vale $V_b = 0\ V$;;
c) nos demais pontos do contorno interno e externo tem-se a condição de Neumann ($\partial V/\partial n=0$), ou seja, esses pontos estão eletricamente isolados do meio externo (nenhuma corrente flui para fora do bloco nessas porções do contorno (isto é, **J** é tangente a essas fronteiras);

e às seguintes condições de contorno térmicas:

a) nos pontos em $r=0{,}03$, a temperatura T vale $T_a = 30\ °C$;
b) nos pontos em $r_{max} = 0{,}11$, a peça está em contato com o meio ambiente e troca calor por convecção;
c) nos demais pontos do contorno externo, tem-se a condição de Neumann ($\partial T/\partial n=0$), ou seja, esses pontos estão termicamente isolados do meio externo (não há fluxo de calor para fora da peça nessas porções do contorno, isto é, **Q** é tangente a essas fronteiras);

Considere as constantes dadas, e resolva a equação (1) no domínio da figura e depois a equação (4), utilizando o método de diferenças finitas (MDF) (procure usar malha aproximadamente quadrada):

a) Implemente o método de "sobre-relaxação" para a solução do sistema linear de equações resultante da aplicação do MDF (utilize $\lambda=1{,}75$ e tolerância de 0,0001 para a convergência).

Verifique a influência da discretização (Δr, $\Delta\phi$) sobre a solução. – Considere **três** valores de discretização (pequeno, médio e grande) e explique como chegou na discretização utilizada;

b) Plote as distribuições de $V(r,\phi)$ e $\dot{q}\,(r,\phi)$ no bloco;

c) Plote o **vetor** densidade de corrente elétrica $\mathbf{J}(r,\phi)$ (use o **comando apropriado** no SCILAB ou MATLAB);

d) Calcular a resistência elétrica R do bloco acima, sabendo que: $R = \dfrac{\Delta V}{I_m}$ onde I_m é a corrente elétrica média dada por $I_m = \int \mathbf{J}.\mathbf{n}dS$ e $\mathbf{J}.\mathbf{n}$ é a componente de $\mathbf{J}$ na direção do vetor normal a superfície, e S é a área da superfície. Pode ser escolhida tanto a superfície $r=0,03$ quanto $r=0,11$ uma vez que pela equação da continuidade a corrente elétrica obtida deve ser igual;

e) Plote a distribuição de $T(r,\phi)$;

f) Plote o **vetor** fluxo de calor $\mathbf{Q}(r,\phi)$ no bloco;

g) Calcule a quantidade de calor (unidade W) que flui pela parede de convecção, ou seja:

$$q_{conv} = \int_A \mathbf{Q}.\mathbf{n}dA = 2r_{\max}\int_0^{\phi_{\max}} Q_r\big|_{r=r_{\max}} d\phi \qquad (6)$$

***Observação*:** o cálculo de $\dot{q}$ através da equação (3) utilizando-se valores de derivadas com erro da ordem de $(\Delta r)^2$ (ou $(\Delta\phi)^2$) não fornece um valor de $\dot{q}$ preciso o suficiente para resolver a equação (4). Assim, recomenda-se calcular $\dot{q}$ pela equação (3) usando uma malha mais refinada do que a usada para resolver a equação (4).

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os trabalhos podem ser feitos em grupos de dois alunos. Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

a) Inicialmente apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a serem implementados no Python, SCILAB ou MATLAB;

b) NÃO será aceita a utilização de comandos prontos do SCILAB (ou MATLAB) para a solução da equação de derivadas parciais acima;

c) Todos os resultados do tipo *f(x,y)* devem ser plotados utilizando-se funções do SCILAB (ou MATLAB) como *mesh*, *contour*, *surf* (escolha uma) (coloque título e legenda nos gráficos). Os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura. NÃO será aceita a simples apresentação de tabelas ou a listagem dos valores da função nos nós da malha;

d) NÃO utilize os comandos de **manipulação simbólica** do SCILAB (ou MATLAB);

e) Entregue as listagens dos arquivos *.py, *.sci ou *.m) os quais devem estar decentemente comentados;

f) O relatório (pdf) contendo a listagem do algoritmo (pdf) deve ser entregue na forma digital no moodle. O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e apresentados na sequência descrita neste EP, e no final do relatório deve incluir uma conclusão;

g) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levou às conclusões;

h) Para cada dia de atraso serão descontados 2,0 pontos na nota do EP.