UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CARIRI

Operações aritméticas com diversas bases

Professora Dra. Luana Batista da Cruz
luana.batista@ufca.edu.br

Roteiro

Objetivo

- Capacitar a realizar cálculos aritméticos com números não decimais

01

Motivação

Motivação

- Dados dois números em base não decimal, poderíamos simplesmente convertê-los para a base 10 para realizar alguma aritmética
  - Realizamos a operação em base 10
  - Convertemos o resultado de novo para a base original

- Por que, então, estudar aritmética em outras bases?

- Dois motivos básicos
  - Converter os números apenas para realizar uma operação é geralmente ineficiente
  - Gestão de memória, instruções de microprocessadores/controladores

02

Operação de soma

Binário, hexadecimal e octal

Operação de soma

- **Soma na base 10**
  - Das 4 operações aritméticas básicas, a soma é a mais simples
  - Basicamente, alinhamos as parcelas a serem somas e executamos a adição algarismo a algarismo
    - Da direita para a esquerda
  - O detalhe está no "vai-um"
    - Se a soma de dois algarismos alinhados dá um valor igual ou maior que 10_{10}, pegamos apenas o algarismo menos significativo
    - O mais significativo é "carregado" para a esquerda e somado com os próximos algarismos

UFCA

Operação de soma

- **Soma na base 10**
  - Exemplo

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array}$$

Operação de soma

- **Soma em outras bases (2, 8 e 16)**
  - Este algoritmo de soma pode ser generalizado para outras bases
  - Para uma **base k** qualquer
    - Alinham-se as parcelas
    - Somam-se os algarismos, um a um, da direita para a esquerda
    - Se a soma de dois algarismos alinhados resulta em valor com um único algarismo (na base k), este é colocado no resultado
      - Alinhado aos algarismos somados
    - Caso contrário, coloca-se o algarismo **menos significativo** no resultado e **vai um**
    - Caso a soma de dois algarismos resulte em vai um, este deverá ser somado aos próximos algarismos

UFCA

Operação de soma

- **Soma na base 2**
  - Para a soma de números binários, devemos obedecer à regra a seguir
    - 0 + 0 = 0
    - 0 + 1 = 1
    - 1 + 0 = 1
    - 1 + 1 = 0 e “vai 1”

Operação de soma

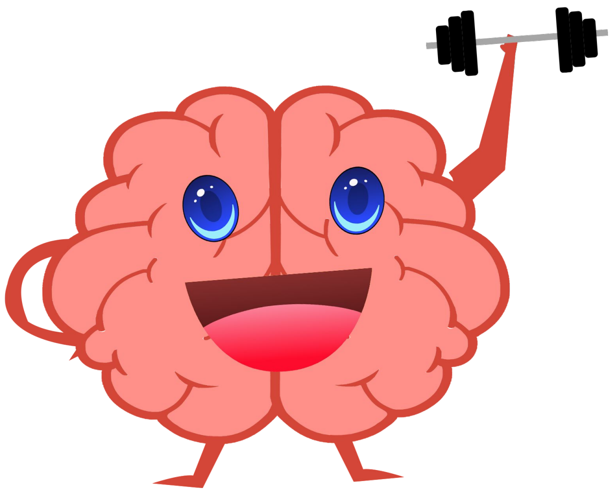
- **Soma na base 2 (exemplo)**
  - 101101_2 (45) + 101111_2 (47)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_2
\end{array}
$$

Operação de soma

- **Soma na base 2**
  - 101100101_2 (357) + 100111011_2 (315)
  - 1100011_2 (99) + 1011011_2 (91)

Vamos praticar!



Operação de soma

- **Soma na base 2**
  - 101100101_2 (357) + 100111011_2 (315)

	1		1	1	1	1	1	1	1	
		1	0	1	1	0	0	1	0	1
+		1	0	0	1	1	1	0	1	1
	1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Operação de soma

- **Soma na base 2**
  - 1100011_2 (99) + 1011011_2 (91)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & & & 1 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Operação de soma

- **Soma na base 16**
  - Para a soma na base hexadecimal, devemos respeitar, da mesma maneira que na base decimal, o limite do algarismo, o qual não poderá ultrapassar o valor máximo que é F (ou seja, 15 na base decimal), aumentando em uma unidade o algarismo antecessor
    - Realize a soma por colunas, e pense nos valores decimais dos dígitos
    - Se a soma dos dígitos for menor que 16 (em decimal), registre o valor (em hexadecimal)
    - Se a soma dos dígitos for maior que 15, subtraia 16 do resultado, registre o número hexadecimal e um **vai um** na próxima coluna

UFCA

Operação de soma

- **Soma na base 16 (exemplo)**
  - $3A943B_{16}$ (3839035) + $23B7D5_{16}$ (2340821)

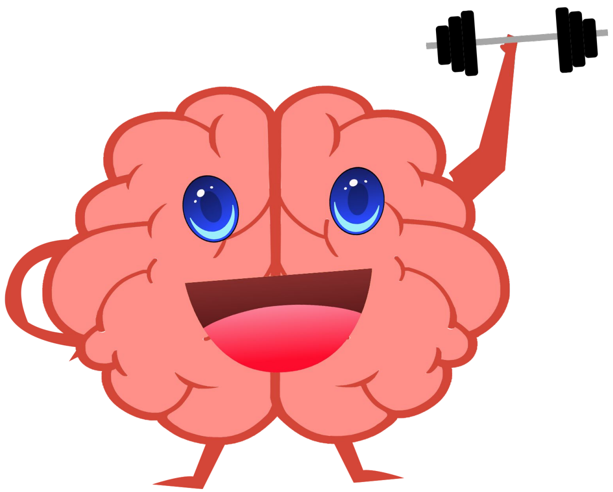
		1		1	1	
	3	A	9	4	3	B
+	2	3	B	7	D	5
	5	**E**	**4**	**C**	**1**	**0**

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

Operação de soma

- **Soma na base 16**
  - $4C7BE8_{16}$ (5012456) + $1E927A_{16}$ (2003578)
  - $EEA1_{16}$ (61089) + $12C_{16}$ (300)

Vamos praticar!



UFCA

Operação de soma

- **Soma na base 16**
  - $4C7BE8_{16}$ (5012456) + $1E927A_{16}$ (2003578)

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & & \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & \\
 & 4 & C & 7 & B & E & 8 \\
+ & 1 & E & 9 & 2 & 7 & A \\
\hline
 & \color{blue}{\mathbf{6}} & \color{blue}{\mathbf{B}} & \color{blue}{\mathbf{0}} & \color{blue}{\mathbf{E}} & \color{blue}{\mathbf{6}} & \color{blue}{\mathbf{2}}
\end{array}
$$

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

Operação de soma

- **Soma na base 16**
  - $EEA1_{16}$ (61089) + $12C_{16}$ (300)

$$
\begin{array}{r c c c c}
 & E & E & A & 1 \\
+ & & 1 & 2 & C \\
\hline
 & \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{C} & \mathbf{D}
\end{array}
$$

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

Operação de soma

- **Soma na base 8**
  - Para a soma na base octal devemos respeitar, da mesma maneira que na base decimal, o limite do algarismo, o qual não poderá ultrapassar o valor máximo que é 7, aumentando em uma unidade o algarismo antecessor
    - Realize a soma por colunas, e pense nos valores decimais dos dígitos
    - Se a soma dos dígitos for menor que 8 (em decimal), registre o valor (em octal)
    - Se a soma dos dígitos for maior que 7, subtraia 8 do resultado, registre o número octal e um **vai um** na próxima coluna

Operação de soma

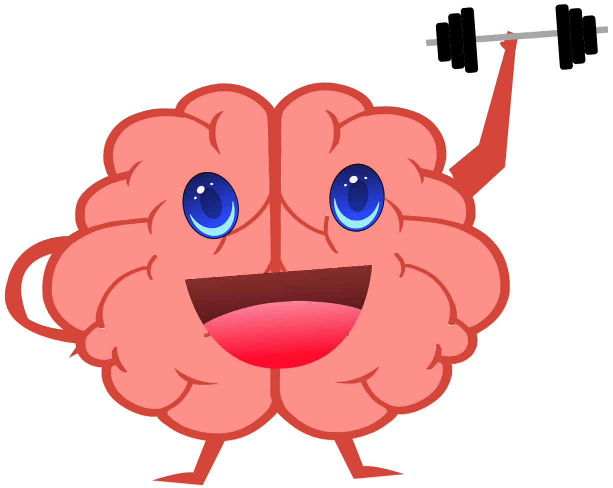
- **Soma na base 8 (exemplo)**
  - 3657_8 (1967) + 1741_8 (993)

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 3 & 6 & 5 & 7 \\
+ & 1 & 7 & 4 & 1 \\
\hline
 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Operação de soma

- **Soma na base 8**
  - 1127_8 (599) + 357_8 (239)
  - 443_8 (291) + 652_8 (426)

Vamos praticar!



Operação de soma

- **Soma na base 8**
  - 1127_8 (599) + 357_8 (239)

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 1 & \\
 & 1 & 1 & 2 & 7 \\
+ & & 3 & 5 & 7 \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{6}
\end{array}
$$

Operação de soma

- **Soma na base 8**
  - 443_8 (291) + 652_8 (426)

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 1 & & \\
 & & 4 & 4 & 3 \\
+ & & 6 & 5 & 2 \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5}
\end{array}
$$

03

Operação de subtração

Binário, hexadecimal e octal

Operação de subtração

- **Subtração na base 10**
  - A ideia básica é análoga à da soma
    - Alinhar minuendo e subtraendo
    - Percorrer algarismos da direita para a esquerda
    - Para cada casa, efetuamos a subtração dos algarismos
  - Quando todos os algarismos do minuendo são maiores ou iguais aos respectivos algarismos do subtraendo, a operação é simples

$$\begin{array}{ccccc l} & 9 & 4 & 3 & 6 & \longleftarrow \text{Minuendo} \\ - & 5 & 4 & 1 & 2 & \longleftarrow \text{Subtraendo} \\ \hline & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \end{array}$$

Operação de subtração

- **Subtração na base 10**
    - Mas quando, para alguma casa, o subtraendo é maior que o minuendo, o algoritmo se complica
        - É preciso fazer um “empréstimo” do primeiro algarismo não nulo à esquerda
        - O algarismo que empresta é decrementado de uma unidade
        - Demais algarismos nulos “no caminho” viram 9

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 6 & 11 \\
 & 7 & \cancel{3} & \cancel{7} & 1 \\
- & 3 & 2 & 8 & 5 \\
\hline
 & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{6}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & 9 & 9 & 13 \\
 & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{0} & 3 \\
- & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
 & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{6}
\end{array}
$$

Operação de subtração

- **Subtração em outras bases (2, 8 e 16)**
  - Assim como no caso da soma, o algoritmo de subtração se aplica a qualquer base
  - Novamente, a diferença está nos detalhes
    - O valor da subtração dos pares de algarismos

Operação de subtração

- **Subtração na base 2**
    - Para a subtração de números binários, devemos prosseguir da seguinte maneira
        - 0 - 0 = 0
        - 1 - 1 = 0
        - 1 - 0 = 1
        - 0 - 1 = 1, empresta 1, ou seja, fica 10_2 igual a 2_{10}

UFCA

Operação de subtração

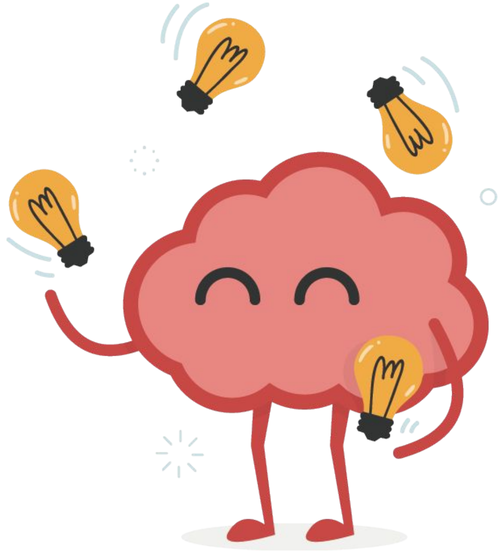
- **Subtração na base 2 (exemplo)**
  - $101101_2 - 100111_2$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 2 & & \\
 & & & 0 & 0 & 2 & \\
 & 1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & 1 \\
- & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Operação de subtração

- **Subtração na base 2**
  - $100110001_2 - 10101101_2$
  - $100101_2 - 11010_2$

Vamos praticar!



Operação de subtração

- **Subtração na base 2**
  - $100110001_2 - 10101101_2$

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & \\
 & 0 & 2 & & & 0 & \cancel{2} & 2 & & \\
 & \cancel{1} & 0 & 0 & 1 & \cancel{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
- & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

UFCA

Operação de subtração

- **Subtração na base 2**
  - $100101_2 - 11010_2$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 0 & \cancel{2} & 2 & 0 & 2 & \\
 & \cancel{1} & 0 & 0 & \cancel{1} & 0 & 1 \\
- & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}
\end{array}
$$

Operação de subtração

- **Subtração na base 16**
  - Para a subtração de hexadecimais, devemos observar a regra de emprestar “1” do próximo algarismo, o que na realidade significa o empréstimo de 16, ou seja, o máximo do algarismo na base 16

Operação de subtração

- **Subtração na base 16 (exemplo)**

$$
\begin{array}{rccc}
 & 3 & D & A \\
- & & 3 & 7 \\
\hline
 & \mathbf{3} & \mathbf{A} & \mathbf{3}
\end{array}
$$

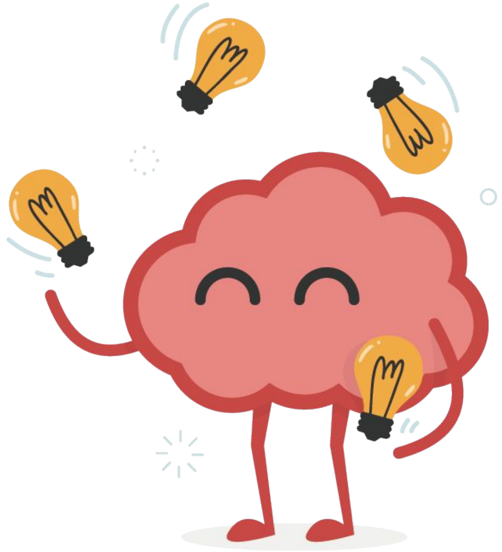
$$
\begin{array}{rccc}
 & 4 & 3 & 24 \\
 & \cancel{5} & \cancel{4} & 8 \\
- & 2 & 4 & A \\
\hline
 & \mathbf{2} & \mathbf{F} & \mathbf{E}
\end{array}
$$

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

Operação de subtração

- **Subtração na base 16**
  - $4C7BE8_{16} - 1E927A_{16}$
  - $64B2E_{16} - 24EBA_{16}$

Vamos praticar!



Operação de subtração

- **Subtração na base 16**
  - $4C7BE8_{16} - 1E927A_{16}$

		27				
	3	B	23		D	24
	~~4~~	~~C~~	7	B	~~E~~	8
-	1	E	9	2	7	A
	2	**D**	**E**	**9**	**6**	**E**

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

UFCA

Operação de subtração

- **Subtração na base 16**
  - $64B2E_{16} - 24EBA_{16}$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 19 & 26 & & \\
 & 5 & 3 & A & 18 & \\
 & \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{B} & 2 & E \\
- & 2 & 4 & E & B & A \\
\hline
 & \mathbf{3} & \mathbf{F} & \mathbf{C} & \mathbf{7} & \mathbf{4}
\end{array}$$

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

Operação de subtração

- **Subtração na base 8**
  - Para a subtração de octais, devemos observar a regra de emprestar “1” do próximo algarismo, o que na realidade significa o empréstimo de 8, ou seja, o máximo do algarismo na base 8

UFCA

Operação de subtração

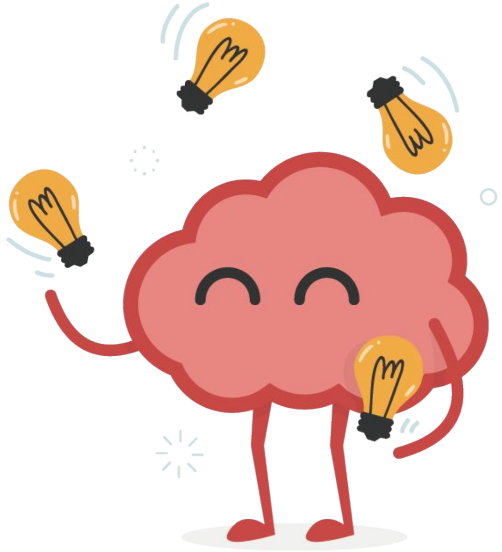
- **Subtração na base 8 (exemplo)**
  - $7312_8 - 3465_8$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 10 & 8 & \\
 & 6 & 2 & 0 & 10 \\
 & \cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{1} & 2 \\
- & 3 & 4 & 6 & 5 \\
\hline
 & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{5}
\end{array}
$$

Operação de subtração

- **Subtração na base 8 (exemplo)**
  - $2351_8 - 1763_8$
  - $7006_8 - 247_8$

Vamos praticar!



Operação de subtração

- **Subtração na base 8 (exemplo)**
  - $2351_8 - 1763_8$

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 10 & 12 & \\
 & 1 & 2 & 4 & 9 \\
 & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} & 1 \\
- & 1 & 7 & 6 & 3 \\
\hline
 & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{6}
\end{array}
$$

Operação de subtração

- **Subtração na base 8 (exemplo)**
  - $7006_8 - 247_8$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 7 & 7 & \\
 & 6 & \cancel{8} & \cancel{8} & 14 \\
 & \cancel{7} & 0 & 0 & 6 \\
- & & 2 & 4 & 7 \\
\hline
 & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{7}
\end{array}
$$

03

Operação de multiplicação e divisão

Binário

Operação de multiplicação e divisão

- Analogamente à adição e a subtração, os mesmos algoritmos utilizados na base 10 para multiplicação e divisão podem ser usados em qualquer outra base
- No entanto, como estas duas operações são mais trabalhosas, iremos nos focar na base 2
  - Na base 2, estas operações ficam até mais simples que na base 10

Operação de multiplicação

- **Multiplicação na base 10**
  - O algoritmo tradicional de multiplicação na base 10 é a multiplicação longa
    - Começa-se como na soma, posicionando os operandos um sobre o outro com seus algarismos alinhados
    - Em seguida, percorrem-se os algarismos do segundo operando, da direita para a esquerda
    - Para cada algarismo, multiplica-se este pelo primeiro operando
      - O resultado é anotado alinhando-se o algarismo menos significativo com o algarismo atual do segundo operando
    - Ao final, as multiplicações de algarismos individuais são somadas

UFCA

Operação de multiplicação

- **Multiplicação na base 10 (exemplo)**

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 2 & \\
 & & & 2 & \\
 & & & 6 & 4 \\
\times & & & 5 & 7 \\
\hline
 & & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\
+ & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \\
\hline
 & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{8}
\end{array}
$$

Operação de multiplicação

- **Multiplicação na base 2**
  - Na base 2, também podemos usar o algoritmo de multiplicação longa
  - Os passos são idênticos, mas o processo é simplificado
    - Como só há dois algarismos, 0 e 1, multiplicar um algarismo por um número resulta ou em 0 ou no próprio número

Operação de multiplicação

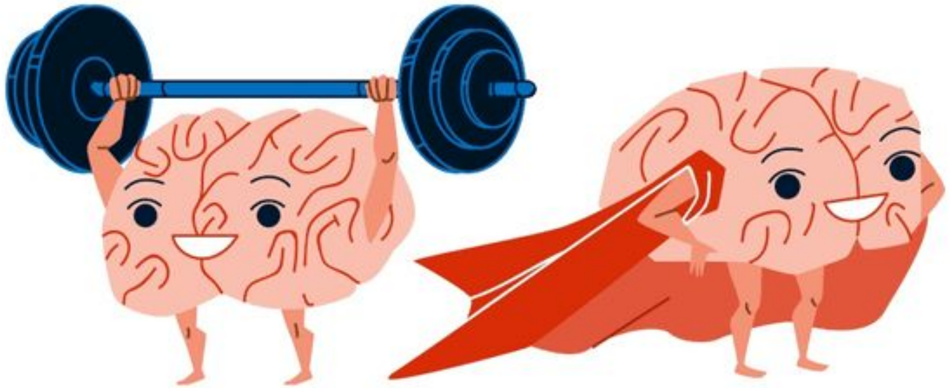
- **Multiplicação na base 2 (exemplo)**

$$
\begin{array}{crrrrrrr}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\times & & & & & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Operação de multiplicação

- **Multiplicação na base 2**
  - $10010_2 \times 101_2$
  - $110_2 \times 101_2$

Vamos praticar!



Operação de multiplicação

- **Multiplicação na base 2**
  - $10010_2 \times 101_2$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\times & & & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Operação de multiplicação

- **Multiplicação na base 2**
  - $110_2 \times 101_2$

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & & 1 & 1 & 0 \\
\times & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \\
+ & 1 & 1 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Operação de divisão

- **Divisão na base 10**
  - Inicia-se o processo trabalhando sobre os n algarismos mais significativos do dividendo
  - Calcula-se, então, a divisão inteira do número formado por estes n algarismos pelo divisor
  - O resultado é o algarismo mais significativo do quociente
  - O resto é escrito abaixo do dividendo, alinhado com este
  - Pega-se o n +1-ésimo algarismo do dividendo, e concatena-se à direita do resto
  - Realiza-se uma nova divisão inteira pelo divisor e repete-se o processo
    - Até que todos os algarismos do dividendo tenham sido usados

UFCA

Operação de divisão

- **Divisão na base 10 (exemplo)**

```
    2   4   6 | 2
              |-----
-   2         | 123
  ---
    0   4
  -     4
      ---
        0   6
      -     6
          ---
            0
```

```
    5   0   0 | 24
              |----
-   4   8     | 20
  -------
    0   2   0
  -     0   0
      -------
        2   0
```

Operação de divisão

- **Divisão na base 2**
  - O mesmo algoritmo de divisão pode ser usado na base 2
  - Assim como na multiplicação, o fato da base 2 só possuir dois algarismos simplifica alguns passos
    - A cada tentativa de divisão, basta verificarmos se o valor a ser dividido é maior que o divisor
    - Se for, adiciona-se um ‘1’ ao quociente e subtrai-se o divisor do valor para obter o resto
    - Caso contrário, adiciona-se ‘0’ ao quociente e concatena-se o próximo algarismo do dividendo ao valor

UFCA

Operação de divisão

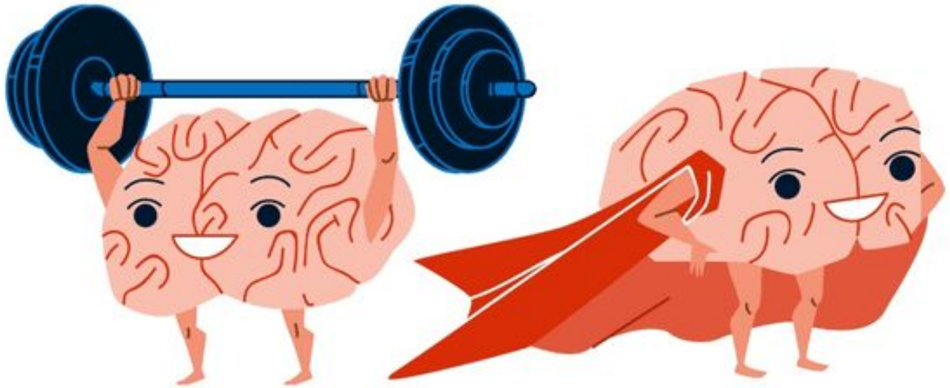
- **Divisão na base 2 (exemplo)**
  - $1011_2 / 11_2$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ \cline{6-6}
- & & 1 & 1 & & 11 \\ \cline{2-4}
 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 & - & & 1 & 1 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Operação de divisão

- **Divisão na base 2**
  - 101010_2 / 110_2
  - 1000101_2 / 100_2

Vamos praticar!



UFCA

Operação de divisão

- **Divisão na base 2**
  - 101010_2 / 110_2

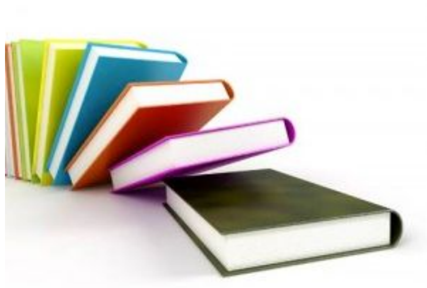
	1	0	1	0	1	0	110
-		1	1	0			111
	0	1	0	0	1		
	-		1	1	0		
		0	0	1	1	0	
			-	1	1	0	
						0	

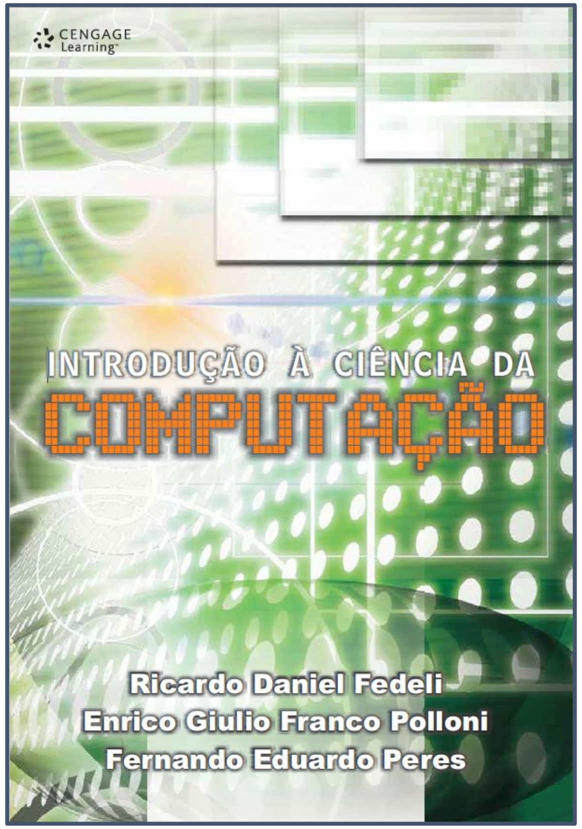
Operação de divisão

- **Divisão na base 2**
  - $1000101_2 / 100_2$

	1	0	0	0	1	0	1	100
-	1	0	0					10001
			0	0				
		-	0	0				
				0	1			
			-	0	0			
					1	0		
				-	0	0		
					1	0	1	
				-	1	0	0	
					0	0	1	

Referências





FEDELI, R. D; POLLONI, E. G. F; PERES, F. E. **Introdução à ciência da computação**. Cengage Learning Editores, 2° Edição, 2010.

FERNANDEZ, Marcial P.; CORTÉS, Mariela I. **Introdução à Computação**. Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE. 3° Edição, 2015