Geofísica Aplicada a Sísmica de Exploração
Teoria Propagação de Ondas

Carlos H. S. Barbosa[1] & Luana N. Osório[2]

17 de Outubro de 2018

Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
COPPE UFRJ

[1] c.barbosa@nacad.ufrj.br
[2] luana.n.osorio@gmail.com

Sumário

» **DIA 1**

- Motivações
  - Levantamento Sísmico
  - Perspectivas da Indústria do Petróleo
- Fundamentos de Sísmica
  - Tipos de Ondas Sísmica
  - Interpretação Geométrica: Traçados de Raios
  - O Sismograma
  - Processamento Sísmico: Aspectos Gerais
- Aquisição Sísmica: *Onshore* e *Offshore*

Sumário

» DIA 2

- Introdução
- Equação da Onda Acústica
  - Domínio do Tempo - Equação Escalar da Onda
  - Domínio da Frequência - Equação de Helmholtz
- Método das Diferenças Finitas
  - Teoria
  - Discretização da Equação Escalar da Onda
  - Condições de Contorno e Camadas de Amortecimento
- Ambiente Seismic Unix (SU)

Sumário

» **DIA 3**

- Introdução
- Implementação Modelagem Sísmica
  - Linguagem de Programação C
  - Explicação da Estrutura do Código
- Aplicações Numéricas
  - Modelo de Velocidade Homogênea
  - Modelo de Velocidades Camadas Paralelas
  - Modelo de Velocidades Marmousi

Referências

» Curso baseado no livro "*An Introduction to Geophysical Exploration*" escrito por Philip Kearey, Michael Brooks e Ian Hill e ministrado sem fins lucrativos na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ).

- Imagens de autoria® dos escritores do livro (imagens do primeiro dia de curso).
- Exceto as imagens que contém referências na própria página.

» Referências complementares:

- Manual do Seismic Unix (SU).
- Chapman, C. H. 2004. Fundamentals of seismic wave propagation, Cambridge UP.
- Ajo-Franklin, J. B. 2005. Frequency domain modeling techniques for the escalar wave equation: An introduction. s.l.: MIT.

INTRODUÇÃO

OPERADORES DIFERENCIAIS

Campo Escalar: $\phi(x, y, z)$,
Campo Vetorial: $\bar{v} = (v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$.

» **Gradiente:**

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}.$$

» **Divergente:**

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

OPERADORES DIFERENCIAIS

Campo Escalar: $\phi(x, y, z)$,
Campo Vetorial: $\bar{v} = (v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$.

» **Laplaciano:**

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

» **Rotacional:**

$$\nabla \times \bar{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

OPERADORES DIFERENCIAIS

Campo Escalar: ϕ
Campo Vetorial: $\bar{v} = (v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$

Aplicação dos operadores aos campos escalar e vetorial.

	Campo de Entrada	**Resultado**
Gradiente ∇	ϕ	$\nabla\phi$ (Campo Vetorial)
Divergente $\nabla\cdot$	$\bar{v}$	$\nabla\cdot\bar{v}$ (Campo Escalar)
Rotacional $\nabla\times$	$\bar{v}$	$\nabla\times\bar{v}$ (Campo Vetorial)
Laplaciano ∇^2	ϕ	$\nabla^2\phi$ (Campo Escalar)

Derivada Direcional

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \nabla\phi\cdot\bar{s}$$

EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA

Domínio do Tempo

Princípios utilizados na dedução da equação acústica da onda

- Princípio da conservação de massa
  - Equações de continuidade
- Princípio da conservação de momento
  - Equações do movimento
- Relação constitutiva
  - Equações de estado

Equação da Onda: Domínio do Tempo

Princípio da conservação de massa:
A variação de massa por unidade de tempo dentro de um volume controlado V é igual ao fluxo na entrada menos o fluxo na saída mais a massa resultante das massas por unidade de tempo.

Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \bar{v}) + \frac{\partial I_\rho}{\partial t}$$

- $\bar{v}$ é a velocidade da partícula,
- ρ é a densidade volumétrica.

Equação da Onda: Domínio do Tempo

Princípio da conservação de momento:
A variação do momento com relação ao tempo é igual à resultante de todas as forças.

Equação do movimento

$$\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} = \bar{f} - \nabla p$$

- $\bar{v}$ é a velocidade da partícula,
- ρ é a densidade volumétrica.

Equação da Onda: Domínio do Tempo

Relação constitutiva:
É a relação entre duas quantidades físicas que é específica a um determinado material ou classe de materiais.

Equação de estado

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \gamma\frac{\Delta p}{p_0} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 + \cdots$$

- ρ é a densidade volumétrica,
- γ é a razão entre o calor total e calor específico para uma pressão p constante.

Equação da Onda: Domínio do Tempo

Equação da Onda Acústica

$$\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial I_\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\bar{f}}{\rho}$$

- p e $\bar{v}$ são o campo de pressão e a velocidade da partícula, respectivamente,
- p e $\bar{v}$ são campos escalar e vetorial em função de x, y, z e t,
- ρ e k a densidade volumétrica e o módulo de Bulk, respectivamente,
- $\bar{f}$ é a densidade de forças externas,
- I_ρ é distribuição de energia inserida no meio.

Equação da Onda: Domínio do Tempo

Equação da Onda Acústica

$$\frac{\rho}{k}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = \rho\frac{\partial^2 I_\rho}{\partial t^2} - \rho\nabla\cdot\left(\frac{\bar{f}}{\rho}\right)$$

- p é o campo de pressão,
- p é o campo escalar em função de x, y, z e t, ou seja, $p(x, y, z, t)$,
- ρ e k a densidade volumétrica e o módulo de Bulk, respectivamente,
- $\bar{f}$ é a densidade de forças externas,
- I_ρ é distribuição de energia inserida no meio,
- $\rho/k = 1/c^2$, onde c é velocidade de propagação da onda P.

Equação da Onda: Domínio do Tempo

Equação da Onda Acústica

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \rho \frac{\partial^2 I_\rho}{\partial t^2}$$

- p é o campo de pressão,
- p é o campo escalar em função de x, y, z e t, ou seja, $p(x, y, z, t)$,
- I_ρ é distribuição de energia inserida no meio,
- $c = \sqrt{k/\rho}$ é a velocidade de propagação da onda P no meio.

EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA

Domínio da Frequência

Equação da Onda: Domínio da Frequência

Transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Transformada Inversa de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} dt$$

- $i = \sqrt{-1}$,
- ω é a frequência em rad/s,

Equação da Onda: Domínio da Frequência

A equação da onda no domínio da frequência é obtida aplicando a Transformada de Fourier à equação no domínio do tempo.

Equação da Onda: Domínio da Frequência

$$\nabla^2 P(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} P(\vec{r},\omega) = S(\omega)$$

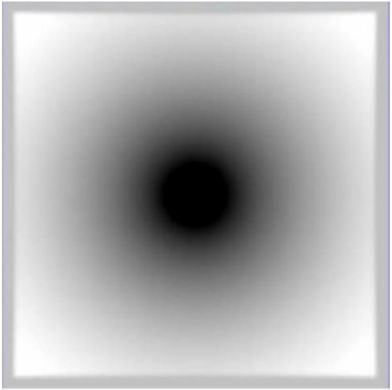
Equação da Onda: Domínio da Tempo

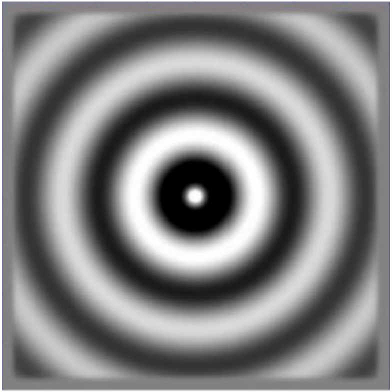
$$\nabla^2 p(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -s(t)$$

Equação da Onda: Domínio da Frequência

Parte real do campo de pressão no domínio da frequência:

Esquerda: 1 Hz e Direita: 5 Hz.

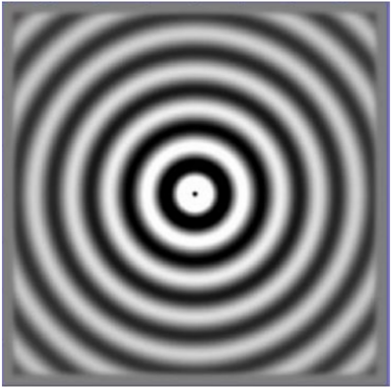


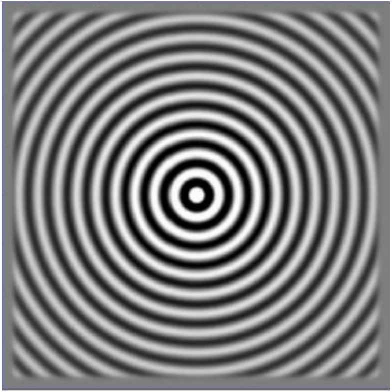


Equação da Onda: Domínio da Frequência

Parte real do campo de pressão no domínio da frequência:

Esquerda: 10 Hz e Direita: 20 Hz.

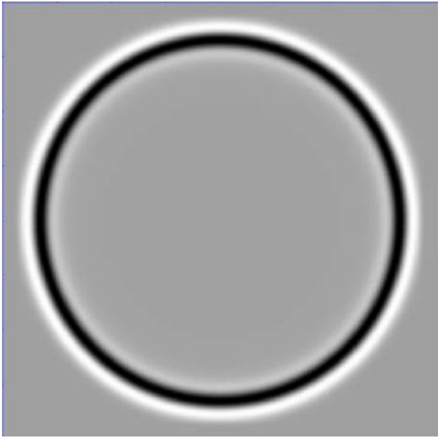




Equação da Onda: Domínio da Frequência

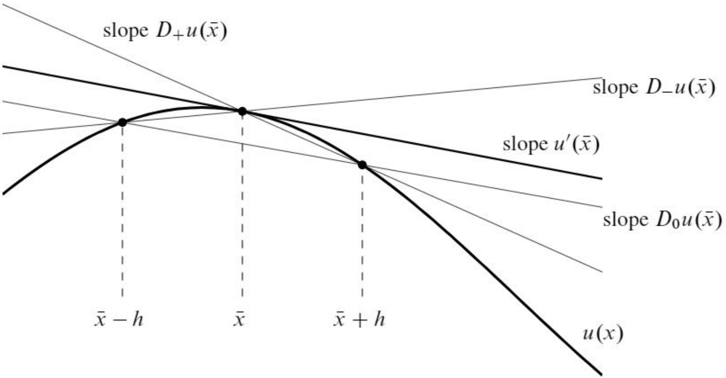
Campo de pressão no domínio do tempo:

Snapshot no tempo $t = 0,4s$ de propagação em um meio homogêneo.



MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Método das Diferenças Finitas



$$D_+u(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \qquad D_-u(x) = \frac{u(x)-u(x+h)}{h}$$

Randall J. LeVeque (2007)

Método das Diferenças Finitas

- As duas equações no slide anterior são conhecidas como método das diferenças finitas progressivas e regressivas,
- Existem outras maneiras mais sotisticadas de se obter tais aproximações,
- Método dos coeficientes indeterminados,
- Expansão de uma função em série de Taylor é uma delas:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a).$$

Método das Diferenças Finitas: Expansão de Taylor

- Expandindo uma função $f(x)$ nos pontos $x \pm \Delta x$ e $x \pm 2\Delta x$, chega-se à:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

$$f(x+2\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{2\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{(2\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\frac{(2\Delta x)^3}{3!} \dots$$

$$f(x-2\Delta x) = f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{2\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{(2\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

Método das Diferenças Finitas: Expansão de Taylor

- Somando adequadamente as equações anteriores e rearranjando chega-se a aproximação da derivada de segunda ordem por diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{a_0 f(x) + a_1 [f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x)] + a_2 [f(x+2\Delta x) + f(x-2\Delta x)]}{(\Delta x)^2}$$

$$+O(\Delta x^4)$$

Aproximação Geral

- Com a Expansão de Taylor é possível deduzir expressão geral da discretização da derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial i^2} \approx \frac{1}{\Delta i^2}\left[c_0 f_0 + \sum_{m=1}^{N/2} c_m(f_m + f_{-m})\right],$$

- c_m são os coeficientes da discretização,
- i diz respeito a variável de interesse,
- N é a ordem de discretização da derivada.

Coeficientes das Diferenças Finitas

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	-2	1							
4	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$						
6	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$					
8	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$				
10	$-\frac{5269}{1800}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{21}$	$\frac{5}{126}$	$-\frac{5}{1008}$	$\frac{1}{3150}$			
12	$-\frac{5369}{1800}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{15}{56}$	$\frac{10}{189}$	$-\frac{1}{112}$	$\frac{2}{1925}$	$-\frac{1}{16632}$		
14	$-\frac{266681}{88200}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{7}{108}$	$-\frac{7}{528}$	$\frac{7}{3300}$	$-\frac{7}{30888}$	$\frac{1}{84084}$	
16	$-\frac{1077749}{352800}$	$\frac{16}{9}$	$-\frac{14}{45}$	$\frac{112}{1485}$	$-\frac{7}{396}$	$\frac{112}{32175}$	$-\frac{2}{3861}$	$\frac{16}{315315}$	$-\frac{1}{411840}$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Discretização da Equação Escalar da Onda

Equação da Onda Acústica

- A propagação é descrita pela equação diferencial parcial de segunda ordem:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \nabla^2 p(\vec{r},t) = s(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_s)$$

  - p é a pressão - função do espaço $\vec{r} = (x, y, z)$ and tempo (t),
  - c é a velocidade de propagação da onda compressional no meio,
  - $\delta(\vec{r}-\vec{r}_s)$ é um operador que representa a localização da fonte sísmica $s(t)$,

Discretização das Derivadas Parciais

$$\frac{\partial^2 p(x,y,z,t)}{\partial t^2} \approx \frac{1}{\Delta t^2}\left[P^{n+1}_{i,j,k} - 2P^{n}_{i,j,k} + P^{n-1}_{i,j,k}\right]$$

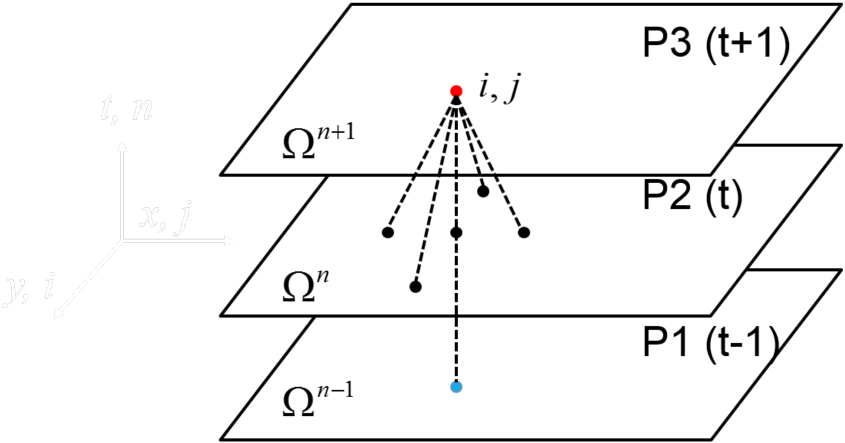
$$\frac{\partial^2 p(x,y,z,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[c_0 P^{n}_{i,j,k} + c_1(P^{n}_{i+1,j,k} + P^{n}_{i-1,j,k}) + c_2(P^{n}_{i+2,j,k} + P^{n}_{i-2,j,k}))\right]$$

$$\frac{\partial^2 p(x,y,z,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[c_0 P^{n}_{i,j,k} + c_1(P^{n}_{i,j+1,k} + P^{n}_{i,j-1,k}) + c_2(P^{n}_{i,j+2,k} + P^{n}_{i,j-2,k}))\right]$$

$$\frac{\partial^2 p(x,y,z,t)}{\partial z^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[c_0 P^{n}_{i,j,k} + c_1(P^{n}_{i,j,k+1} + P^{n}_{i,j,k-1}) + c_2(P^{n}_{i,j,k+2} + P^{n}_{i,j,k-2}))\right]$$

- $h = \Delta x = \Delta x = \Delta z$ é o espaçamento da malha,
- Δt é o intervalo de tempo.

Método das Diferenças Finitas



Critério de Não Dispersão

$$h \leq \frac{V_{min}}{G f_{corte}}$$

- V_{min} é a menor velocidade de propagação da onda P no meio;
- G determina a quantidade de pontos necessário para representar o menor comprimento de onda;
- f_{corte} é a frequência de corte.

Equação da Onda Acústica: Fonte Sísmica

$$f(t) = \left[1 - 2\pi(\pi f_c f_d)^2\right] e^{\left[-\pi(\pi f_c f_d)^2\right]}$$

- $t_d = k\Delta t - t_f$ representa a translação temporal da fonte no tempo;
- t_f é o meio período da função Gaussiana dado por:

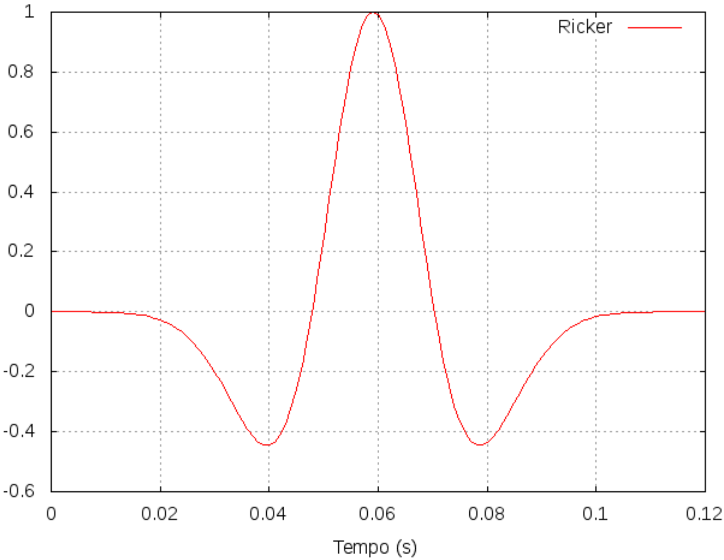
$$t_f = \frac{2\sqrt{\pi}}{f_c}$$

e

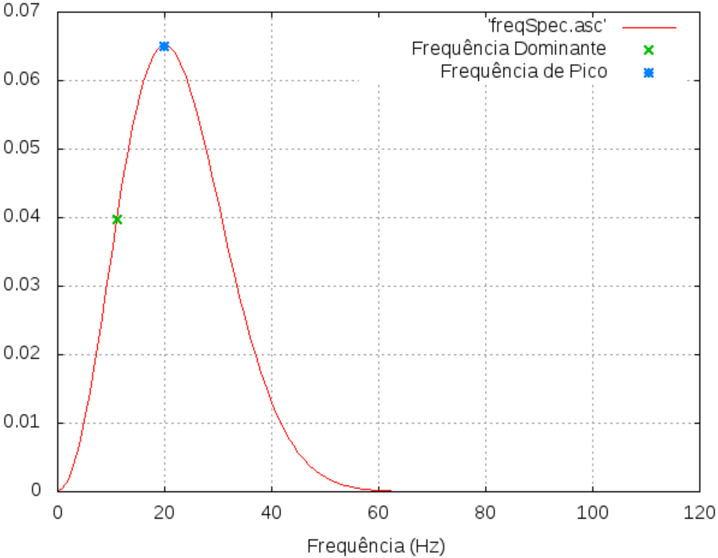
$$t_{corte} = 3\sqrt{\pi} f_c$$

- f_{corte} é a frequência de corte.

Fonte Sísmica



Fonte Sísmica: Espectro de Frequência



Critério de Estabilidade

$$\Delta t \leq \frac{h}{\beta V_{max}}$$

- V_{max} é a maior velocidade de propagação da onda P no meio;
- h é o espaçamento da malha;
- β determina quantos intervalos de tempo serão necessários para que a frente de onda percorra uma distância equivalente ao espaçamento entre os pontos da malha.

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Condições de Contorno e Camadas de Amortecimento

Condições de Contorno e Camadas de Amortecimento

- É necessário o conhecimento das condições iniciais e de contorno para solucionar as equações diferenciais:
  - Condições de contorno usuais, tais como, Dirichlet e Neumann,
  - Condições de contorno não reflexivas (Reynolds, 1978),
  - Camadas de Amortecimento: Cerjan, Perfectly Matched Layer (PML) e variações, tal como, a PML Convolutional.
- As condições de contorno não reflexivas e camadas de amortecimentos são utilizadas para superar o problema de truncamento do modelo de trabalho.

Condições de Contorno

Reynolds (1978)

- Baseada na solução da equação da onda 1D proposta por D'Alambert.

Equação da onda 1D sem fonte

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Solução de D'Alambert

$$p = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Condições de Contorno

Reynolds (1978)

- Baseada na solução da equação da onda 1D proposta por D'Alambert.

Manipulando a solução

$$\frac{\partial p}{\partial t} = cf_2'; \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = f_2'$$

Equação contorno esquerdo

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- Esta metodologia é extralolada para todos os contornos,
- Estas derivadas são discretizadas com o Método das Diferenças Finitas.

Camadas de Amortecimento

Cerjan et al (1985)

- Esta técnica minimiza o efeito do truncamento do domínio inserindo uma camada antes do contorno do problema para atenuar a amplitude da onda antes de alcanÃ§ar o contorno.

Perfil de Amortecimento

$$f_a = e^{-[f_{at}(N_p - i)]^2}$$

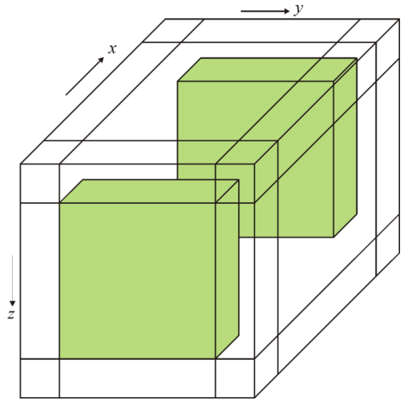
- f_a é chamado de perfil de amortecimento,
- f_{at} é um fator de atenuação a determinar,
- N_p é o número de pontos a adicionar no domínio truncado para atenuar o campo de ondas,
- i é o índice da malha do domínio discretizado.

Camadas de Amortecimento

Cerjan et al (1985)

Perfil de Amortecimento

$$f_a = e^{-[f_{at}(N_p - i)]^2}$$



Thank you for your time.

Thank you

for your ~~time~~ !

Overleaf Template.