

Hélio Pedrini

William Robson Schwartz



Análise de Imagens Digitais

Princípios, Algoritmos
e Aplicações



9

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

A *morfologia matemática* consiste em uma metodologia para análise de imagens que permite a construção de operadores úteis para a descrição de objetos em imagens. A teoria de morfologia matemática foi formulada na década de 1960, por Georges Matheron, Jean Serra e seus colaboradores da Escola Nacional Superior de Minas de Paris, França (Matheron 1967, Serra 1967a, Serra 1967b, Haas et al. 1967).

Originalmente desenvolvida para manipular imagens binárias, a morfologia matemática foi posteriormente estendida para tratar imagens em níveis de cinza. Os operadores morfológicos podem ser utilizados em um grande número de aplicações em processamento e análise de imagens, tais como a extração de componentes conexos, busca de padrões específicos na imagem, delimitação do fecho convexo, extração de bordas dos objetos, afinamento de bordas e muitas outras.

A análise de imagens por meio de operadores morfológicos tem beneficiado diversos domínios de conhecimento, podendo-se destacar a medicina e a biologia (Liang et al. 1989), a metalurgia (Serra 1982), a síntese e análise de textura (Serra 1988), a microscopia (Klein e Serra 1972) e a automação industrial (Sternberg 1984).

As seções seguintes apresentam os principais conceitos da morfologia matemática. Inicialmente, os operadores são definidos para imagens binárias. Posteriormente, extensões dos conceitos para imagens em níveis de cinza são apresentadas.

9.1 Fundamentos Matemáticos

A morfologia matemática utiliza a *teoria de conjuntos* para representar a forma dos objetos em uma imagem. Por convenção, objetos em uma imagem binária serão representados por pixels pretos (valor 1), enquanto o fundo será formado por pixels brancos (valor 0). Dessa forma, uma imagem binária pode ser considerada uma coleção de coordenadas discretas que correspondem aos pontos pertencentes aos objetos na imagem, expressa pelo conjunto $\{(x, y) | f(x, y) = 1\}$.

Esse conjunto de pixels é definido no espaço bidimensional dos números inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, normalmente denotado \mathbb{Z}^2 , em que cada elemento do conjunto é um vetor bidimensional com coordenadas (x, y) dos pontos dos objetos com respeito a uma origem, adotada como o canto superior esquerdo da imagem. Por exemplo, dada a imagem binária de 6×5 pixels ilustrada

na figura 9.1, os pixels pertencentes aos objetos da imagem podem ser representados pelo conjunto $A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)\}$.

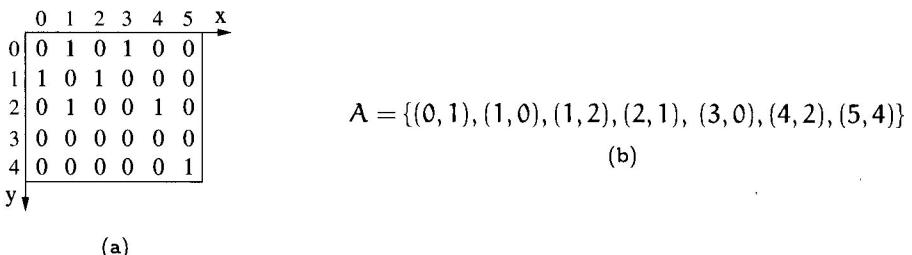


Figura 9.1: Representação de imagem por um conjunto de pixels pertencentes aos objetos. (a) imagem binária; (b) conjunto de pixels.

Sejam A e B duas imagens binárias representadas pelos conjuntos no espaço \mathbb{Z}^2 com componentes $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$, respectivamente, ou seja, pares ordenados formados pelas coordenadas dos pixels dos objetos em A e B . Um conjunto A de coordenadas de pixels que satisfazem uma determinada condição é expresso como $A = \{a \mid \text{condição}\}$.

A *união* de A e B , denotada $A \cup B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A , B ou ambos, expressa como

$$A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ ou } c \in B\} \quad (9.1)$$

A *intersecção* de dois conjuntos A e B , denotada $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos, denotada por

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ e } c \in B\} \quad (9.2)$$

A *translação* de A pelo elemento p , denotada $A + p$, é definida como

$$A + p = \{a + p \mid a \in A\} \quad (9.3)$$

A *reflexão* de A , denotada \hat{A} , é definida como

$$\hat{A} = \{-a \mid a \in A\} \quad (9.4)$$

O *complemento* de A , denotado A^c , é o conjunto de todos os pixels que não pertencem a A , dado por

$$A^c = \{p \mid p \notin A\} \quad (9.5)$$

A *diferença* entre A e B , denotada $A - B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A , mas não pertencem a B , expressa por

$$A - B = \{p \mid p \in (A \cap B^c)\} \quad (9.6)$$

Um operador morfológico é um mapeamento entre o conjunto A que define a imagem e um conjunto B , chamado *elemento estruturante*, também definido em \mathbb{Z}^2 . O elemento estruturante é expresso com respeito a uma origem local. Alguns exemplos típicos de elementos estruturantes são mostrados na figura 9.2, em que a origem é marcada com uma

cruz (+). Os pontos pertencentes ao objeto são marcados com um círculo escuro. Conforme pode ser observado na figura 9.2(d), a origem não é necessariamente um elemento de B .



Figura 9.2: Exemplos de elementos estruturantes.

A definição formal de operações morfológicas pode ser realizada por meio da álgebra de Minkowski, em homenagem ao matemático russo Hermann Minkowski (1864-1909). Tal álgebra é baseada nos conceitos da teoria de conjuntos, especialmente a união, a intersecção e a complementação.

As definições de soma e subtração de Minkowski apresentadas a seguir firmam-se na terminologia de Minkowski (1911) e Hadwiger (1957). Essas definições diferem das apresentadas por Serra (1982) e Sternberg (1983), no sentido de que, para alguns operadores construídos a partir da soma e subtração de Minkowski, o elemento estruturante B deve ser substituído por sua reflexão \hat{B} .

Caso o elemento estruturante B seja simétrico com respeito a sua origem, a reflexão não altera o conjunto de elementos, tal que $B = \hat{B}$. A figura 9.3 ilustra os resultados da reflexão de um elemento estruturante simétrico B_1 e não simétrico B_2 .

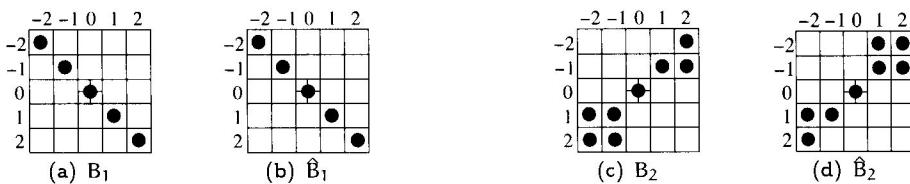


Figura 9.3: Reflexão de elemento estruturante com respeito à origem. (a)-(b) simétricos; (c)-(d) não simétricos.

A adição de Minkowski entre A e B , denotada $A \oplus B$, é definida como

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A + b) \quad (9.7)$$

Portanto, a adição $A \oplus B$ é obtida pela translação de A com relação a cada elemento de B , tomando-se a união de todas as translações resultantes.

Algumas propriedades imediatas da adição de Minkowski são:

- a) $A \oplus \{\bar{O}\} = A$, em que \bar{O} denota a origem $(0, 0)$
- b) $A \oplus \{p\} = A + p$, para qualquer elemento $p \in \mathbb{Z}^2$

A partir da equação 9.7, pode-se mostrar que

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A + b) = \bigcup_{b \in B} \left(\left[\bigcup_{a \in A} \{a\} \right] + b \right) = \bigcup_{b \in B} \left(\bigcup_{a \in A} \{a + b\} \right) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (a + b) \quad (9.8)$$

ou seja, a adição de Minkowski pode ser realizada pela adição de todos os elementos de A e B, tomando-se a união de todos os termos resultantes. Corolários imediatos estabelecem que a adição de Minkowski é comutativa e associativa:

a) $A \oplus B = B \oplus A$ (comutatividade)

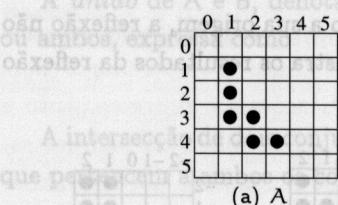
b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (associatividade)

Exemplo 9.1 Dados os elementos $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}$ e $B = \{(0,0), (1,0)\}$, mostrados nas figuras 9.4(a) e (b), respectivamente, calcular a adição de Minkowski entre A e B.

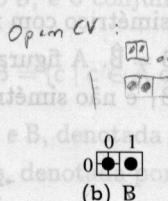
A adição de Minkowski é dada pela união de todas as translações de A com respeito a cada elemento de B, a qual pode ser expressa como

$$A \oplus B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

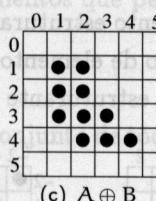
Esse resultado pode ser observado na figura 9.4(c). A posição da origem no elemento estruturante é extremamente importante. Se o pixel à direita fosse a origem do elemento estruturante, o conjunto B seria definido como $B = \{(-1,0), (0,0)\}$.



(a) A



(b) B



(c) $A \oplus B$

Figura 9.4: Adição de Minkowski. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) resultado da adição.

A subtração de Minkowski entre A e B, denotada $A \ominus B$, é definida como

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A - b) = \bigcap_{b \in \hat{B}} (A + b) \quad (9.9)$$

(T.9)

tal que $A \ominus B$ é a intersecção de todas as translações de A pelo elemento $-b \in B$ ou, equivalentemente, por $b \in \hat{B}$, em que \hat{B} é a reflexão de B.

Exemplo 9.2 Dados os elementos $A = \{(1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4)\}$ e $B = \{(0,0), (1,0)\}$, mostrados nas figuras 9.5(a) e (b), respectivamente, a subtração de Minkowski é dada pela intersecção das translações resultantes entre A e cada elemento de \hat{B} .

Assim, $A \ominus B = \{(1,4), (2,2), (2,4)\}$. Esse resultado pode ser observado na figura 9.5(d).

Um operador morfológico é um mapeamento que associa a um conjunto A e a um conjunto B, chamado elemento estruturante, também definido em \mathbb{Z}^2 . O elemento Em contraste com a operação de adição de Minkowski, a subtração não é associativa. Relações correspondentes à associatividade para a operação de subtração são:

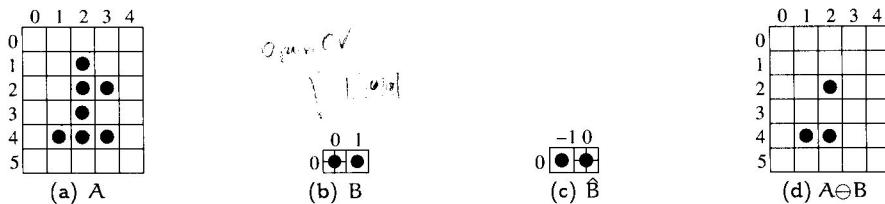


Figura 9.5: Subtração de Minkowski. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) reflexão do elemento estruturante; (d) resultado da subtração.

$$a) (A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$$

$$b) (A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B$$

Uma propriedade interessante é a dualidade existente entre a adição e a subtração de Minkowski, cujo resultado é análogo ao teorema de De Morgan¹, tal que:

$$a) (A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B} \quad (\text{dualidade})$$

$$b) (A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B} \quad (\text{dualidade})$$

Os próximos resultados estabelecem que, assim como a adição, a subtração de Minkowski é invariante com respeito à translação:

$$a) A \ominus (B + p) = (A \ominus B) + p$$

$$b) (A + p) \ominus B = (A \ominus B) + p$$

Outras propriedades importantes da adição e subtração de Minkowski, relacionadas à distributividade dessas operações, são:

$$a) A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

$$b) (A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$$

$$c) A \oplus (B \cap C) \subseteq (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$

$$d) (A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$$

$$e) A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$$

$$f) (A \cup B) \ominus C \supseteq (A \ominus C) \cup (B \ominus C)$$

$$g) (A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$$

$$h) A \ominus (B \cap C) \supseteq (A \ominus B) \cup (A \ominus C)$$

9.2 Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Alguns operadores morfológicos elementares da morfologia matemática são descritos a seguir, os quais são úteis para a construção de operadores mais sofisticados para uso em processamento e análise de imagens.

¹Na álgebra Booleana, o teorema de De Morgan estabelece que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ou $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

9.2.1 Dilatação e Erosão

A operação de *dilatação* entre o conjunto A e o elemento estruturante B é definida como a adição de Minkowski, ou seja

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A + b) \quad (9.10)$$

Definições alternativas para a dilatação são

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid p = a + b, \exists a \in A \text{ e } \exists b \in B\} \quad (9.11)$$

Esta definição não é equivalente às outras, mas é a usada pelo OpenCV. A equação 9.12: $\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid ((B + p) \cap A) \neq \emptyset\}$

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid ((B + p) \cap A) \neq \emptyset\} \quad (9.12)$$

De acordo com a equação 9.12, o processo de dilatação entre A e B corresponde ao conjunto de todas as translações de B com os pontos da imagem em que há pelo menos um elemento não nulo (pixel com valor 1) em comum com o conjunto A .

A translação do elemento estruturante na dilatação é similar ao mecanismo de convolução espacial discutido na seção 4.4.1, pois também envolve sucessivos deslocamentos dos elementos sobre a imagem A .

A operação de *erosão* entre o conjunto A e o elemento estruturante B é definida como a subtração de Minkowski, ou seja

$$\mathcal{E}(A, B) = A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A - b) = \bigcap_{b \in B} (A + b) \quad (9.13)$$

Definições alternativas para a erosão são

$$\mathcal{E}(A, B) = A \ominus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid p = a - b, \forall b \in B, \exists a \in A\} \quad (9.14)$$

$$\mathcal{E}(A, B) = A \ominus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid B + p \subseteq A\} \quad (9.15)$$

De acordo com a equação 9.15, a erosão de A por B é o conjunto de todos os elementos de B transladados por p que estão contidos em A . Entretanto, deve-se observar que o resultado da erosão de uma imagem pode não ser um subconjunto da imagem original, caso o elemento estruturante não contenha a origem. Esse fato é ilustrado no exemplo 9.5.

As propriedades da adição e subtração de Minkowski descritas anteriormente podem ser reescritas para a dilatação e erosão. As operações de dilatação e erosão são duais com relação à complementação e à reflexão:

a) $[\mathcal{D}(A, B)]^c = \mathcal{E}(A^c, \hat{B})$ (dualidade)

b) $[\mathcal{E}(A, B)]^c = \mathcal{D}(A^c, \hat{B})$ (dualidade)

Outras propriedades úteis que relacionam as operações de dilatação e erosão são:

a) $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{D}(B, A)$

b) $\mathcal{D}(A, B) = [\mathcal{E}(A^c, \hat{B})]^c$

c) $\mathcal{E}(A, B) = [\mathcal{D}(A^c, \hat{B})]^c$

d) $\mathcal{D}(A, B + p) = \mathcal{D}(A, B) + p$

Os efeitos das operações de dilatação e erosão podem ser observados na figura 9.6. O elemento estruturante B utilizado para alterar a imagem é um disco circular, cuja origem localiza-se no centro do círculo. Portanto, o elemento estruturante e sua reflexão são iguais, pois B é simétrico com respeito à origem. As linhas tracejadas nas figuras 9.6(c) e (d) delimitam o contorno original do objeto na imagem e as linhas sólidas mostram o resultado após a dilatação e a erosão.

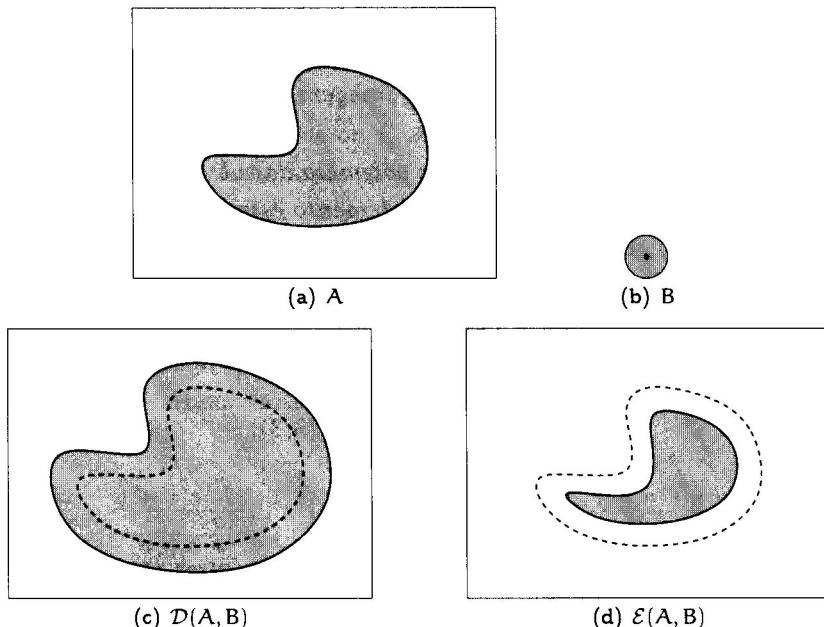


Figura 9.6: Interpretação geométrica das operações de dilatação e erosão.

Exemplo 9.3 Dados os conjuntos A e B mostrados nas figuras 9.7(a) e (b), respectivamente, calcular os resultados da dilatação e da erosão de A por B.

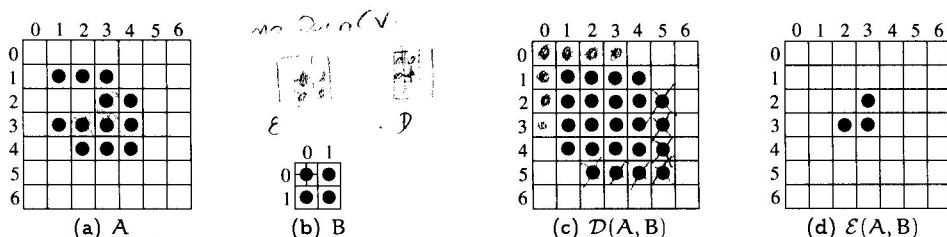


Figura 9.7: Operações de dilatação e erosão. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) resultado da dilatação; (d) resultado da erosão.

Os conjuntos A e B podem ser representados pelas coordenadas dos pixels dadas por

$$\begin{aligned} A &= \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\} \\ B &= \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \end{aligned}$$

A operação de dilatação é realizada por meio da adição de Minkowski, ou seja, a união dos elementos de A translados pelos elementos de B. O resultado de $D(A, B)$, ilustrado na figura 9.7(c), é dado por

$$\begin{aligned} D(A, B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\} \end{aligned}$$

Uma forma mais simples de visualizar o resultado da dilatação consiste em mover a origem do elemento estruturante B sobre cada pixel dos objetos na imagem binária A e atribuir o valor 1 a cada posição da imagem que é sobreposta pelo elemento estruturante.

A operação de erosão pode ser realizada por meio da subtração de Minkowski, dada pelo conjunto de todos os pontos nos quais o elemento estruturante B transladado sobre cada ponto da imagem A está contido em A. Esse processo consiste em mover a origem do elemento estruturante B sobre a imagem A, tal que, caso o elemento estruturante esteja totalmente contido em A, o pixel da imagem sob a origem de B pertencerá à erosão entre A e B. O resultado de $E(A, B)$ é mostrado na figura 9.7(d).

$$E(A, B) = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Exemplo 9.4 Calcular o resultado da dilatação para os conjuntos A e B mostrados nas figuras 9.8(a) e (b), respectivamente, em que a origem do elemento estruturante não pertence ao conjunto B.

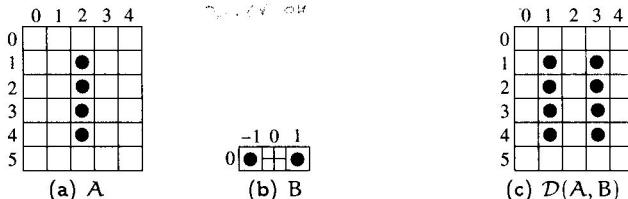


Figura 9.8: Dilatação. (a) imagem original; (b) elemento estruturante que não contém a origem; (c) resultado da dilatação.

Os conjuntos A e B podem ser representados como

$$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B = \{(-1, 0), (1, 0)\}$$

A translação de A por $(-1, 0)$ resulta em

$$A_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

enquanto a translação de A por $(1, 0)$ resulta em

$$A_2 = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

A dilatação de A por B é a união de A_1 com A_2 , cujo resultado, mostrado na figura 9.8(c), é dado por

$$\mathcal{D}(A, B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

Pode-se observar que os pixels dos objetos na imagem original não necessariamente pertencem à imagem resultante. Novamente, a operação de dilatação pode ser vista como o deslocamento do elemento estruturante sobre a imagem. Quando a origem do elemento estruturante é posicionada sobre um pixel do objeto na imagem, todos os pixels da imagem que correspondem aos pontos com valor 1 no elemento estruturante são marcados, recebendo o valor 1. Após a varredura da imagem pelo elemento estruturante, a operação de dilatação está completa.

Em geral, o resultado de cada passo da dilatação não é atribuído à própria imagem A, ou seja, o resultado é armazenado em uma estrutura auxiliar que representa a imagem, inicialmente com todos os pontos atribuídos com o valor 0. ■

Exemplo 9.5 Calcular o resultado da erosão para os conjuntos A e B mostrados nas figuras 9.9(a) e (b), respectivamente, em que a origem do elemento estruturante não pertence ao conjunto B.

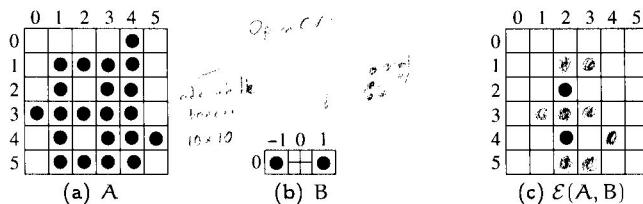


Figura 9.9: Erosão. (a) imagem original; (b) elemento estruturante que não contém a origem; (c) resultado da erosão.

Os conjuntos A e B podem ser representados como

$$\begin{aligned} A &= \{(0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), \\ &\quad (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4)\} \\ B &= \{(-1, 0), (1, 0)\} \end{aligned}$$

Assim como no exemplo 9.3, o resultado da erosão pode ser calculado como o conjunto de pixels, tal que o elemento estruturante B, transladado com respeito a cada um dos pixels dos objetos na imagem A, corresponde ao conjunto de pixels dos objetos em A. Assim, os pixels que não correspondem ao padrão definido pelo elemento estruturante não pertencerão ao resultado. Entretanto, a origem do elemento estruturante não necessita corresponder a um pixel de valor igual a 1 na imagem. Pode-se observar que o resultado da erosão, mostrado na figura 9.9(c), dado por

$$\mathcal{E}(A, B) = \{(2, 2), (2, 4)\}$$

não é um subconjunto da imagem original A. ■

As propriedades de associatividade e distributividade descritas anteriormente, válidas para determinadas operações morfológicas, são úteis para reduzir o custo computacional envolvido na implementação das operações. A complexidade computacional está relacionada ao número de pontos no elemento estruturante B . Dessa forma, a decomposição de B em subconjuntos mais simples pode causar uma grande redução no custo computacional.

O elemento estruturante B formado por 3×3 pontos, por exemplo, pode ser decomposto em dois subconjuntos, B_1 e B_2 , cada um com 3×1 pontos, conforme ilustrado na figura 9.10. Em razão da simetria dos elementos estruturantes, os resultados obtidos pela aplicação das operações de dilatação ou erosão com o uso do elemento estruturante B são idênticos à aplicação sucessiva de B_1 e B_2 . Entretanto, a decomposição do elemento estruturante reduz significativamente o custo computacional, pois os conjuntos B_1 e B_2 combinados possuem menos pontos do que B .



Figura 9.10: Decomposição do elemento estruturante B em dois subconjuntos B_1 e B_2 .

9.2.2 Abertura e Fechamento

Duas outras operações morfológicas importantes em análise de imagens são a abertura e o fechamento. A *abertura* de A por B , denotada $A \circ B$, é definida como

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (9.16)$$

Uma outra formulação matemática para a abertura morfológica é

$$A \circ B = \bigcup \{(B + p) \mid B + p \subseteq A\} \quad (9.17)$$

ou seja, a abertura é definida como a união de todas as translações de B que estão contidas na imagem A .

O *fechamento* de A por B , denotado $A \bullet B$, é definido como

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (9.18)$$

o qual pode ser interpretado geometricamente como a união de todas as translações de B que não estão contidas em A .

A partir das equações 9.16 e 9.18, pode-se observar que a abertura de A por B é simplesmente a erosão de A por B , seguida de uma dilatação do resultado por B , enquanto o fechamento de A por B é a dilatação de A por B , seguida de uma erosão do resultado por B . Portanto,

$$A \circ B = \mathcal{D}(\mathcal{E}(A, B), B) \quad (9.19)$$

$$A \bullet B = \mathcal{E}(\mathcal{D}(A, B), B) \quad (9.20)$$

A abertura e o fechamento são operações duais:

a) $(A \circ B)^c = A^c \bullet \hat{B}$ (dualidade)

b) $(A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$ (dualidade)

A abertura satisfaz as seguintes propriedades:

a) $(A \circ B) \subset A$

b) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow (A_1 \circ B) \subset (A_2 \circ B)$

c) $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

O fechamento satisfaz as seguintes propriedades:

a) $(A \bullet B) \supset A$

b) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow (A_1 \bullet B) \subset (A_2 \bullet B)$

c) $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$

A partir das propriedades descritas no item (c) para a abertura e o fechamento, ou seja, $(A \circ B) \circ B = A \circ B$ e $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$, pode-se concluir que a aplicação múltipla da operação de abertura ou fechamento em uma imagem A com o uso de um mesmo elemento estruturante B produz o mesmo efeito que aplicar a operação uma única vez (propriedade de idempotência). Entretanto, esse fato não é verdadeiro quando operações de dilatação ou erosão são sucessivamente aplicadas em uma imagem.

A abertura geralmente é utilizada para suavizar o contorno de objetos, eliminar conexões estreitas entre objetos e remover saliências ou protusões finas. O fechamento é utilizado para fundir separações estreitas entre objetos, eliminar pequenos buracos e preencher lacunas no contorno.

Exemplo 9.6 A figura 9.11 ilustra a aplicação dos operadores de abertura e fechamento em uma imagem. Na abertura, as regiões da imagem que são menores ou mais estreitas que o elemento estruturante são removidas da imagem. No fechamento, separações mais estreitas que o elemento estruturante são unidas e pequenos buracos são fechados.

9.2.3 Transformada Acerto-ou-Erro

A transformada *acerto-ou-erro* (do inglês, *hit-or-miss*) é uma operação que permite a identificação de configurações específicas de pixels em uma imagem, tais como cantos ou junções em contornos de objetos, pixels isolados na imagem ou pequenos segmentos de retas. Dada uma imagem A e dois elementos estruturantes disjuntos B_1 e B_2 , a transformada acerto-ou-erro é definida como

$$A \circledast (B_1, B_2) = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2) = \mathcal{E}(A, B_1) \cap \mathcal{E}(A^c, B_2) \quad (9.21)$$

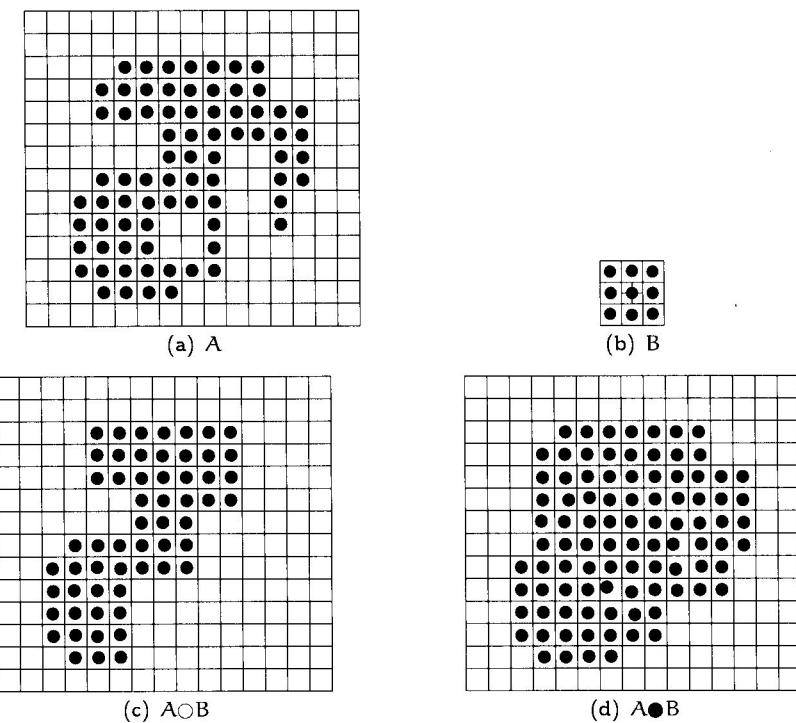


Figura 9.11: Operações de abertura e fechamento. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) resultado da abertura; (d) resultado do fechamento.

Portanto, o conjunto $A \circledast B$ contém todos os pontos nos quais, simultaneamente, B_1 coincide com um subconjunto de pixels em A , e B_2 em A^c . A notação pode ser generalizada fazendo-se $B = (B_1, B_2)$, em que B_1 é o conjunto formado por elementos de B associados a um objeto e B_2 é o conjunto de elementos associados ao complemento do objeto (fundo da imagem).

O resultado da transformada acerto-ou-erro consiste na localização de todos os pixels que coincidem com o conjunto B_1 (*acerto*) e que não coincidem com o conjunto B_2 (*erro*). Embora o termo *acerto-ou-erro* seja mais freqüentemente utilizado, um nome mais apropriado para essa transformada seria *acerto-e-erro*, o que é evidenciado pela intersecção (\cap) existente na equação 9.21.

Os elementos estruturantes mostrados na figura 9.12 podem ser utilizados para identificar cantos superiores esquerdos em objetos. O elemento estruturante B_1 permite a localização de pixels do objeto que possuam vizinhos ao sul e a leste da origem (*acertos*), enquanto B_2 permite a localização de pixels do objeto que não possuam vizinhos nas posições norte, nordeste, noroeste, oeste e sudoeste da origem (*erros*). O ponto localizado a sudeste da origem é marcado com \times em ambos os elementos estruturantes, indicando que o ponto pode assumir tanto o valor 0 quanto o valor 1.

Exemplo 9.7 A figura 9.13 mostra um exemplo de aplicação da transformada acerto-ou-erro para detectar cantos em objetos da imagem.

Os elementos estruturantes B_1 a B_4 representam os padrões de acerto da transformada. Quatro outros elementos estruturantes disjuntos devem ser utilizados na

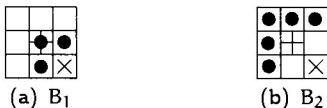


Figura 9.12: Elementos estruturantes para detecção de cantos superiores esquerdos em objetos.

aplicação da transformada. A transformada é executada quatro vezes sobre a imagem binária utilizando cada um dos elementos estruturantes que representam os cantos dos objetos.

Nos elementos estruturantes B_1 a B_4 , as posições marcadas com círculos escuros representam os pixels dos objetos (valor 1), as posições vazias representam o fundo da imagem (valor 0) e as posições marcadas com \times representam pontos que podem assumir valor 0 ou 1. A origem de B_1 a B_4 localiza-se no centro de cada elemento estruturante.

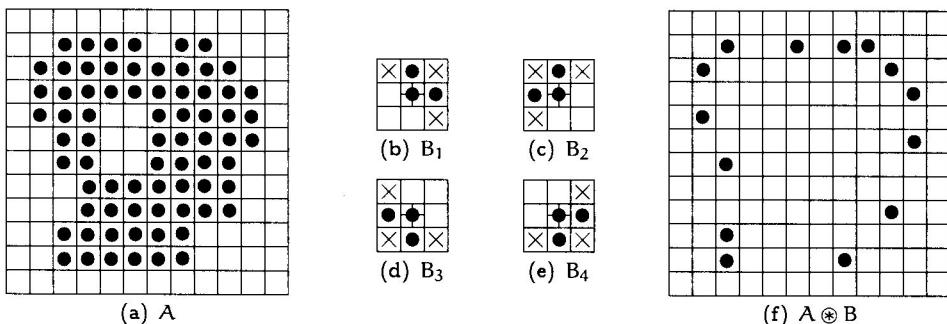


Figura 9.13: Transformada acerto-ou-erro. (a) imagem original; (b)-(e) elementos estruturantes; (f) resultado da detecção de cantos na imagem.

9.3 Aplicações da Morfologia Matemática em Imagens Binárias

A partir dos conceitos apresentados nas seções anteriores, várias aplicações práticas da morfologia matemática podem ser consideradas para a análise de imagens. Alguns exemplos incluem a extração de componentes conexos em imagens binárias, delimitação do fecho convexo, extração de bordas dos objetos, preenchimento de regiões, extração do esqueleto de um objeto, afinamento e espessamento de contornos, além de vários outros usos na descrição de formas de objetos.

As próximas seções apresentam aplicações práticas de operadores morfológicos em imagens binárias. Ilustrações de cada operador aplicado sobre imagens simples são apresentadas para facilitar a compreensão dos passos envolvidos no processo. A escolha adequada dos elementos estruturantes é de fundamental importância para a construção dos operadores.

9.3.1 Extração de Bordas

Várias técnicas para detecção de bordas foram apresentadas na seção 5.1.3. A borda de um conjunto A , denotada $E(A)$, pode ser obtida pela erosão de A por B , seguida da diferença de conjuntos entre A e sua erosão, ou seja

$$E(A) = A - (A \ominus B) \quad (9.22)$$

em que B é um elemento estruturante adequado. Dois elementos estruturantes tipicamente utilizados para a extração de bordas são apresentados na figura 9.2(a) e (b). O primeiro elemento está relacionado com a vizinhança-8 entre os pixels do objeto, enquanto o segundo está relacionado com a vizinhança-4.

A equação 9.22 é chamada de *gradiente interno*. Outra forma de extrair a borda de um objeto é baseada no operador de dilatação

$$E(A) = (A \oplus B) - A \quad (9.23)$$

A equação 9.23 é chamada de *gradiente externo*, cujo resultado é complementar ao gradiente interno. A soma entre o gradiente externo e interno é chamada de *gradiente morfológico*, dado por

$$E(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B) \quad (9.24)$$

Exemplo 9.8 Dada a imagem A mostrada na figura 9.14(a), aplicar o operador gradiente interno para extração de bordas utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 pixels mostrado em (b).

O operador apresentado na equação 9.22 é definido pela diferença entre a imagem original e sua erosão. O resultado da erosão é mostrado na figura 9.14(c), enquanto o resultado final da extração da borda do objeto é mostrado na figura 9.14(d).

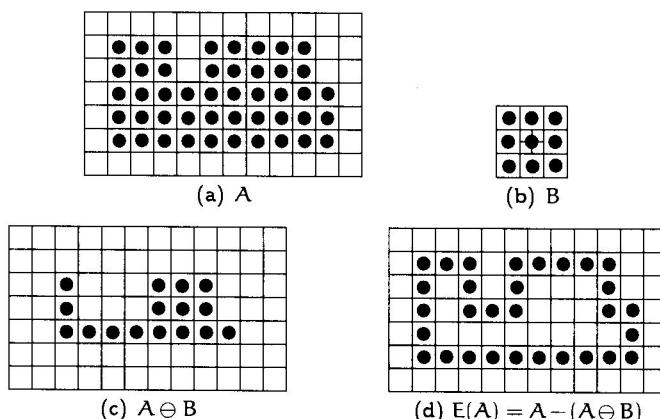


Figura 9.14: Extração de bordas. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) resultado da erosão; (d) borda extraída pela diferença entre a imagem e sua erosão.

A figura 9.15 ilustra o operador de extração de bordas em uma imagem binária com o uso de um elemento estruturante de 3×3 pixels, em que todos os valores são iguais a 1 e a

origem está localizada no centro do quadrado. Os três tipos de gradiente, ou seja, interno, externo e morfológico, são ilustrados nas figuras (b) a (d).

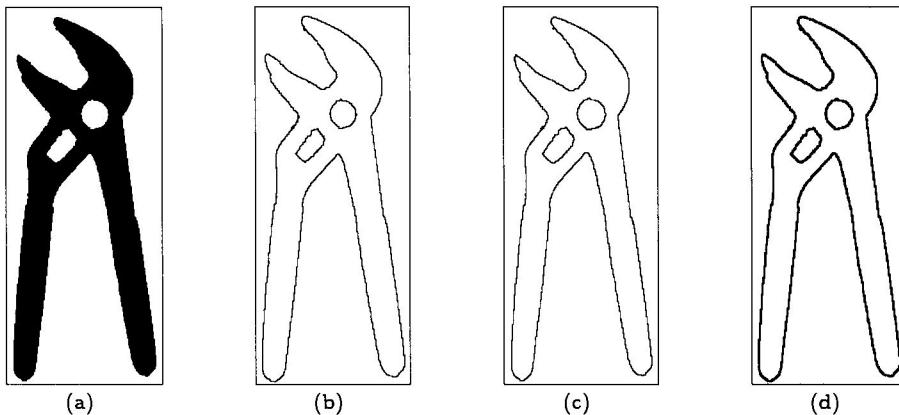


Figura 9.15: Extração de bordas em imagem binária por meio de operador morfológico. (a) imagem binária; (b) gradiente interno; (c) gradiente externo; (d) gradiente morfológico.

9.3.2 Preenchimento de Regiões

O preenchimento de regiões pode ser realizado por meio do operador de dilatação e das operações de complementação e intersecções de conjuntos.

Assumindo que exista uma borda conectada por vizinhança-8, inicia-se o processo com um pixel interno à borda, denotado por p , chamado de *ponto semente*. A região é então dilatada, seguida da intersecção desse resultado com o complemento da borda, dada por

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.25)$$

em que $X_0 = p$.

A intersecção previne que os pontos ultrapassem a borda. O processo é repetido até que não haja mudança entre duas iterações consecutivas, ou seja, $X_k = X_{k-1}$. A união dos conjuntos X_k e A contém a região de preenchimento e a borda da região.

Exemplo 9.9 Dada a imagem A mostrada na figura 9.16(a), aplicar o operador de preenchimento de regiões utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 pixels mostrado em 9.16(b).

A partir de um ponto semente interno à região a ser preenchida, o operador dado pela equação 9.25 é iterativamente aplicado aos pixels da imagem. A figura 9.16(c) mostra o ponto inicial utilizado para realizar as iterações. Resultados intermediários do preenchimento da região são apresentados nas figuras 9.16(d) a (g), enquanto o resultado final do preenchimento é mostrado em (h).

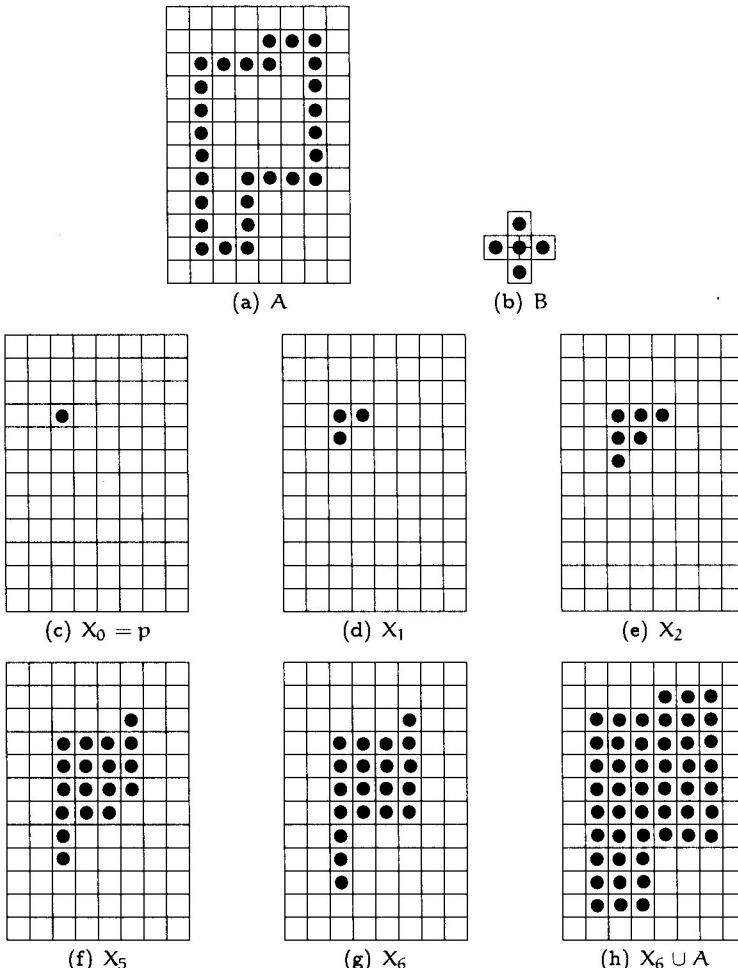


Figura 9.16: Preenchimento de regiões. (a) imagem A contendo a borda de um objeto; (b) elemento estruturante B; (c) ponto semente no interior da borda; (d)-(g) várias iterações utilizando a equação 9.25; (h) resultado final do preenchimento do objeto obtido pela união entre (a) e (g).

9.3.3 Extração de Componentes Conexos

O conceito de componentes conexos foi introduzido na seção 2.11.5. A adjacência entre os pixels depende do critério de vizinhança adotado. Assume-se que exista um ponto semente p conhecido pertencente ao componente conexo na imagem A. A extração do componente conexo pode ser realizada por meio de um processo iterativo dado por

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.26)$$

em que $X_0 = p$ e B é um elemento estruturante adequado. Se $X_k = X_{k-1}$, então o algoritmo convergiu e o resultado é o conjunto dos pontos conectados.

A equação 9.26 é similar à equação 9.25, a única diferença é a utilização do conjunto A em vez de seu complemento, uma vez que todos os elementos procurados estão rotulados com o valor 1. A intersecção do resultado em cada passo iterativo com o conjunto A elimina as dilatações centradas em elementos rotulados com o valor 0.

Exemplo 9.10 Dada a imagem A mostrada na figura 9.17(a), aplicar o operador de extração de componentes conexos utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 pixels mostrado em (b).

A partir de um ponto semente pertencente ao componente conexo, a equação 9.26 é iterativamente aplicada aos pixels do objeto. A forma do elemento estruturante B assume que os pixels dos componentes estão conectados por vizinhança-8. A figura 9.17(c) mostra o ponto inicial utilizado para realizar as iterações. Resultados intermediários são apresentados nas figuras 9.16(d) e (e), enquanto o resultado final da extração do componente conexo é mostrado em (f).

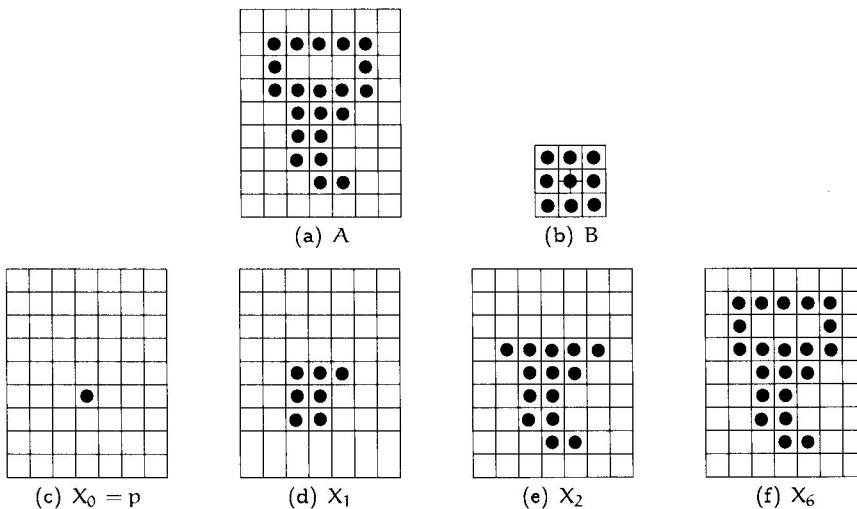


Figura 9.17: Extração de componentes conexos. (a) imagem A contendo um componente conexo; (b) elemento estruturante B; (c) ponto semente pertencente ao componente conexo; (d) resultado da primeira iteração; (e) resultado da segunda iteração; (f) resultado final.

9.3.4 Fecho Convexo

Conforme apresentado na seção 7.7, o fecho convexo de um objeto R corresponde ao menor polígono convexo que contém R. Sejam B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, quatro elementos estruturantes. O processo consiste em implementar a equação

$$X_k^i = (X_{k-1}^i \circledast B_i) \cup A \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.27)$$

tal que $X_0^i = A$. Seja $D_i = X_c^i$, em que X_c^i indica a convergência no sentido de que $X_k^i = X_{k-1}^i$. Então, o fecho convexo de A é dado por

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^4 D_i \quad (9.28)$$

Em outras palavras, a operação consiste na aplicação iterativa da transformada acerto-ou-erro de A com B_1 . Quando não houver mudança entre duas iterações consecutivas,

realiza-se a união com A e o resultado é chamado D_1 . A operação é repetida com B_2 até que não ocorram mais mudanças e assim por diante. A união dos quatro D^i resultantes forma o fecho convexo de A .

Exemplo 9.11 Dada a imagem A mostrada na figura 9.18(a), aplicar o operador de fecho convexo utilizando os elementos estruturantes B_1 a B_4 , mostrados nas figuras 9.18(b) a (e).

Iniciando com $X_0^1 = A$, o resultado após quatro iterações da equação 9.27 é mostrado na figura 9.18(f). Em seguida, iniciando com $X_0^2 = A$, novamente a equação 9.27 é aplicada, resultando no conjunto mostrado na figura 9.18(g). Apenas duas iterações são necessárias para a convergência do operador. Os próximos resultados são obtidos de maneira similar, utilizando os outros elementos estruturantes. A união dos conjuntos formados em (f) a (i) resulta no fecho convexo, mostrado em (j).

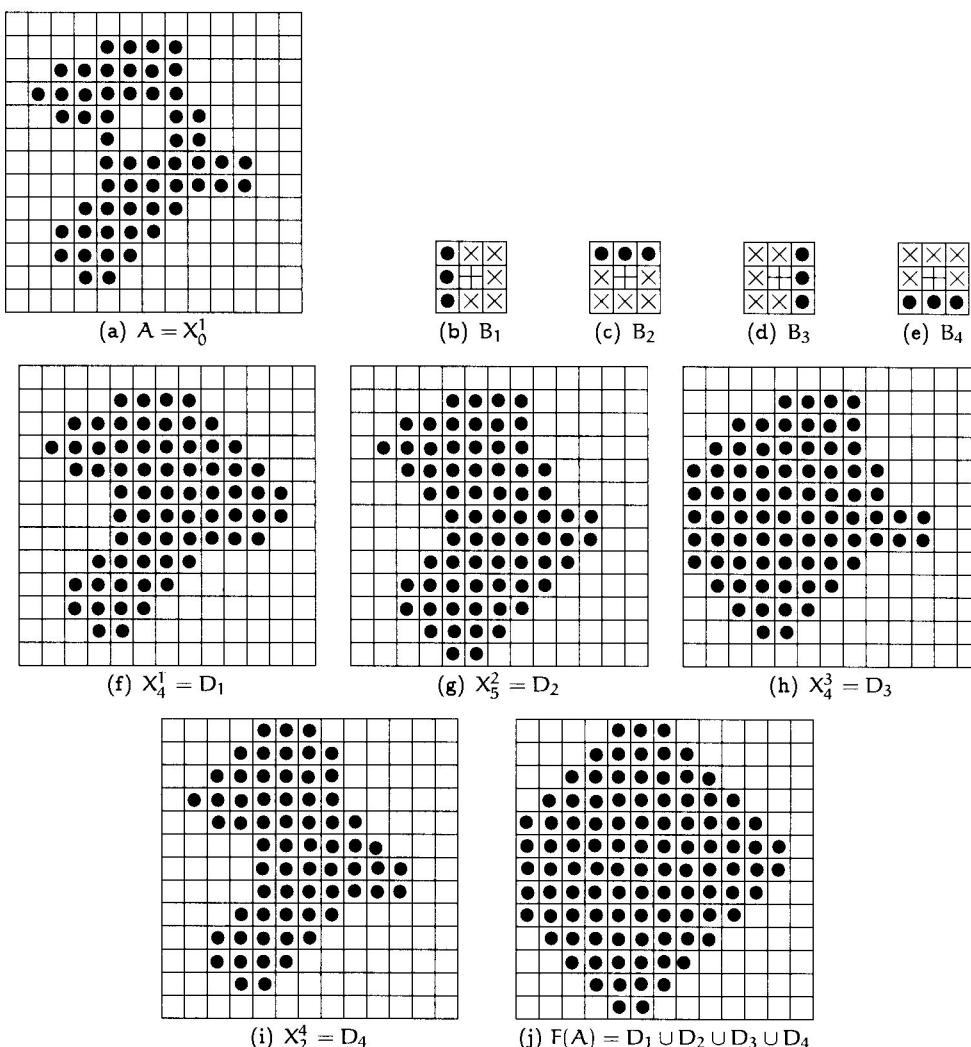


Figura 9.18: Fecho convexo. (a) imagem A ; (b)-(e) elementos estruturantes; (f)-(i) resultados após convergência com os quatro elementos estruturantes; (j) fecho convexo.

9.3.5 Afinamento e Espessamento

A transformada acerto-ou-erro pode ser utilizada para construir dois outros operadores importantes, o afinamento e o espessamento de bordas.

O afinamento de um conjunto A por um elemento estruturante B , denotado $A \otimes B$, é definido como

$$A \otimes B = A - (A * B) = A \cap (A * B)^c \quad (9.29)$$

em que B é um par de conjuntos disjuntos definido como $B = (B_1, B_2)$.

O espessamento de um conjunto A por um elemento estruturante B , denotado $A \odot B$, é definido como

$$A \odot B = A \cup (A * B) \quad (9.30)$$

em que B é definido da mesma forma como no operador afinamento.

Os operadores de afinamento e espessamento são duais, ou seja, a aplicação do espessamento (afinamento) sobre os pixels do objeto é equivalente à aplicação do afinamento (espessamento) sobre os pixels do fundo da imagem. A dualidade pode ser expressa como

a) $(A \odot B)^c = A^c \otimes B$ (dualidade)

b) $(A \otimes B)^c = A^c \odot B$ (dualidade)

Os operadores de afinamento e espessamento normalmente são utilizados seqüencialmente. Seja B uma seqüência de elementos estruturantes expressa como

$$\{B\} = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\} \quad (9.31)$$

O afinamento seqüencial pode ser definido como

$$A \otimes B = ((\dots((A \otimes B_1) \otimes B_2) \dots) \otimes B_n) \quad (9.32)$$

Analogamente, o espessamento seqüencial pode ser definido como

$$A \odot \{B\} = ((\dots((A \odot B_1) \odot B_2) \dots) \odot B_n) \quad (9.33)$$

Há várias seqüências de elementos estruturantes $\{B\}$ que são úteis na prática. Algumas delas são definidas pela rotação de um dos elementos estruturantes para formar os demais.

Exemplo 9.12 Dada a imagem A mostrada na figura 9.19(a), aplicar o operador de afinamento de bordas utilizando os elementos estruturantes B_1 a B_8 , com tamanhos 3×3 pixels, mostrados em 9.19(b) a (i).

A figura 9.19(j) mostra o resultado do afinamento após um passo de iteração do operador mostrado na equação 9.29 sobre a imagem A com o elemento estruturante B_1 . De forma similar, as figuras 9.19(k) a (q) mostram os resultados das iterações realizadas com os demais elementos estruturantes. A figura (r) mostra o resultado após nova iteração com o primeiro elemento estruturante. O resultado final do afinamento é mostrado em (s).

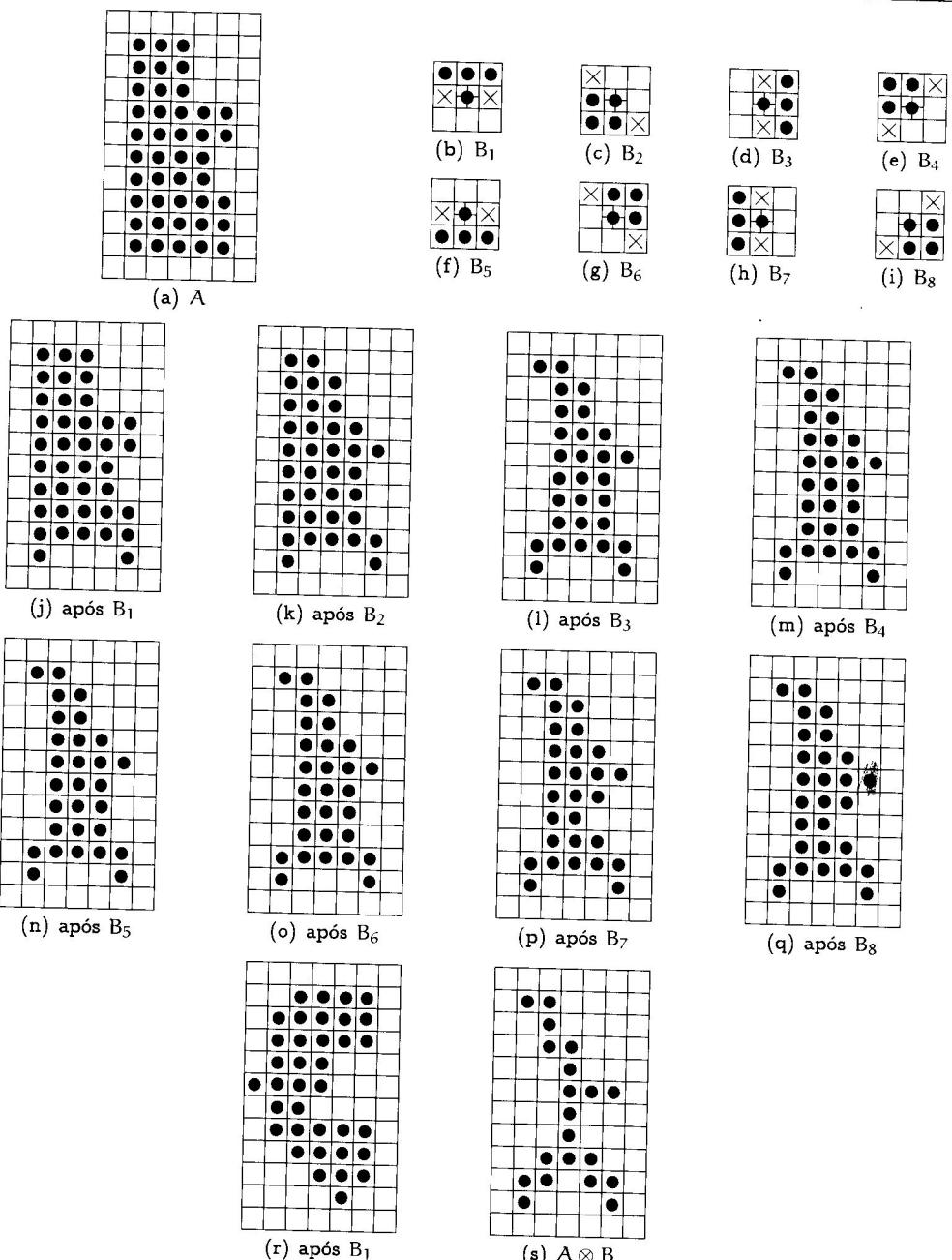


Figura 9.19: Afinamento de bordas. (a) imagem A; (b)-(i) elementos estruturantes; (j)-(q) resultados do afinamento com os oito elementos estruturantes; (r) resultado após nova iteração do operador de afinamento com o primeiro elemento estruturante; (s) resultado final do afinamento após convergência.

Exemplo 9.13 Dada a imagem A mostrada na figura 9.20(a), aplicar o operador de espessamento de bordas utilizando os elementos estruturantes B_1 a B_8 , com tamanhos 3×3 pixels, mostrados em 9.20(b) a (i).

A figura 9.20(j) mostra o resultado do espessamento após um passo de iteração do operador mostrado na equação 9.30 sobre a imagem A com o elemento estruturante

B1. De forma similar, as figuras 9.20(k) a (q) mostram os resultados das iterações realizadas com os demais elementos estruturantes. O resultado final do espessamento é mostrado em (q).

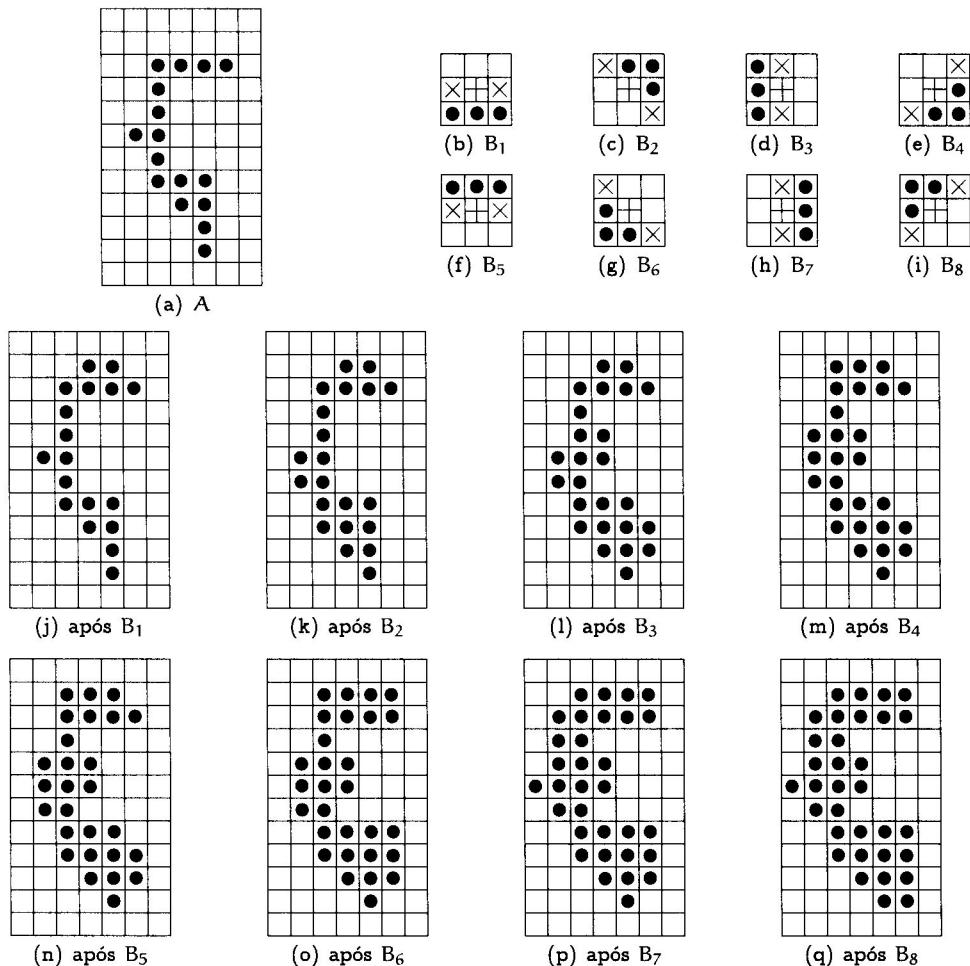


Figura 9.20: Espessamento de bordas. (a) imagem A; (b)-(i) elementos estruturantes; (j)-(p) resultados do espessamento após iteração com os elementos estruturantes B₁ a B₇; (q) resultado final do espessamento após iteração com o elemento estruturante B₈.

9.3.6 Extração do Esqueleto de Objetos

Conforme descrito na seção 7.1.5, uma representação importante para o reconhecimento e a análise de formas é o *esqueleto* de objetos. Abordagens morfológicas para a extração do esqueleto de um objeto são descritas em Lantuéjoul (1980), Serra (1982) e Maragos e Schafer (1986), em que o esqueleto de uma região A pode ser expresso em termos de erosão e abertura. Denotando o esqueleto de A por S(A), pode-se mostrar que

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^n S_k(A) \quad (9.34)$$

em que

$$S_k(A) = \bigcup_{k=0}^n \{(A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \odot B]\} \quad (9.35)$$

sendo que B é um elemento estruturante, enquanto $(A \ominus kB)$ indica k sucessivas erosões de A , ou seja

$$A \ominus kB = ((\dots(A \ominus B) \ominus B)\dots) \ominus B \quad (9.36)$$

O valor de n corresponde ao último passo iterativo antes que a erosão de A se transforme no conjunto vazio, ou seja

$$n = \max\{k \mid (A \ominus kB) \neq \emptyset\} \quad (9.37)$$

De acordo com as equações 9.34 e 9.35, o esqueleto de A , $S(A)$ pode ser obtido pela união dos subconjuntos de esqueletos $S_k(A)$. Pode-se mostrar também que o conjunto A pode ser reconstruído a partir desses subconjuntos como

$$A = \bigcup_{k=0}^n (S_k(A) \oplus kB) \quad (9.38)$$

sendo que $S_k(A) \oplus kB$ denota k dilatações sucessivas de $S_k(A)$, ou seja

$$S_k(A) \oplus kB = ((\dots(S_k(A) \oplus B) \oplus B)\dots) \oplus B \quad (9.39)$$

Exemplo 9.14 Dada a imagem A mostrada na figura 9.21(a), encontrar o esqueleto do objeto utilizando os elementos estruturantes B , com tamanho 3×3 pixels, mostrado em 9.21(b).

As figuras 9.21(c) e (d) mostram os resultados da aplicação do operador definido nas equações 9.34 a 9.37, inicialmente com $k = 0$. Como quatro erosões de A resultariam no conjunto vazio, então, nesse caso, $n = 3$. As figuras 9.21(e) a (g), (h) a (j) e (k) a (m) ilustram os resultados do operador para as próximas iterações. Os resultados parciais do esqueleto, mostrados nas figuras (d), (g), (j) e (m), dados pelos conjuntos S_0 a S_3 , respectivamente, são unidos para formar o esqueleto final do objeto, mostrado na figura (n). ■

9.3.7 Poda

Os processos de afinamento e extração de esqueletos discutidos anteriormente em geral tendem a deixar segmentos espúrios que necessitam ser eliminados por uma técnica de pós-processamento. O objetivo da operação de poda é remover esses componentes indesejáveis dos objetos, mantendo sua forma mais uniforme.

A operação a ser descrita assume que um segmento espúrio seja constituído de três ou menos pixels. Esse processo pode, obviamente, remover ou reduzir outras ramificações presentes no objeto, entretanto, espera-se que a informação estrutural essencial seja preservada.

O afinamento de um conjunto A por uma seqüência de elementos estruturantes projetados para detectar apenas pontos de extremidade de segmentos atinge o resultado desejado, dado por

$$X_1 = A \otimes \{B\} \quad (9.40)$$

tal que $\{B\}$ é uma seqüência de elementos estruturantes.

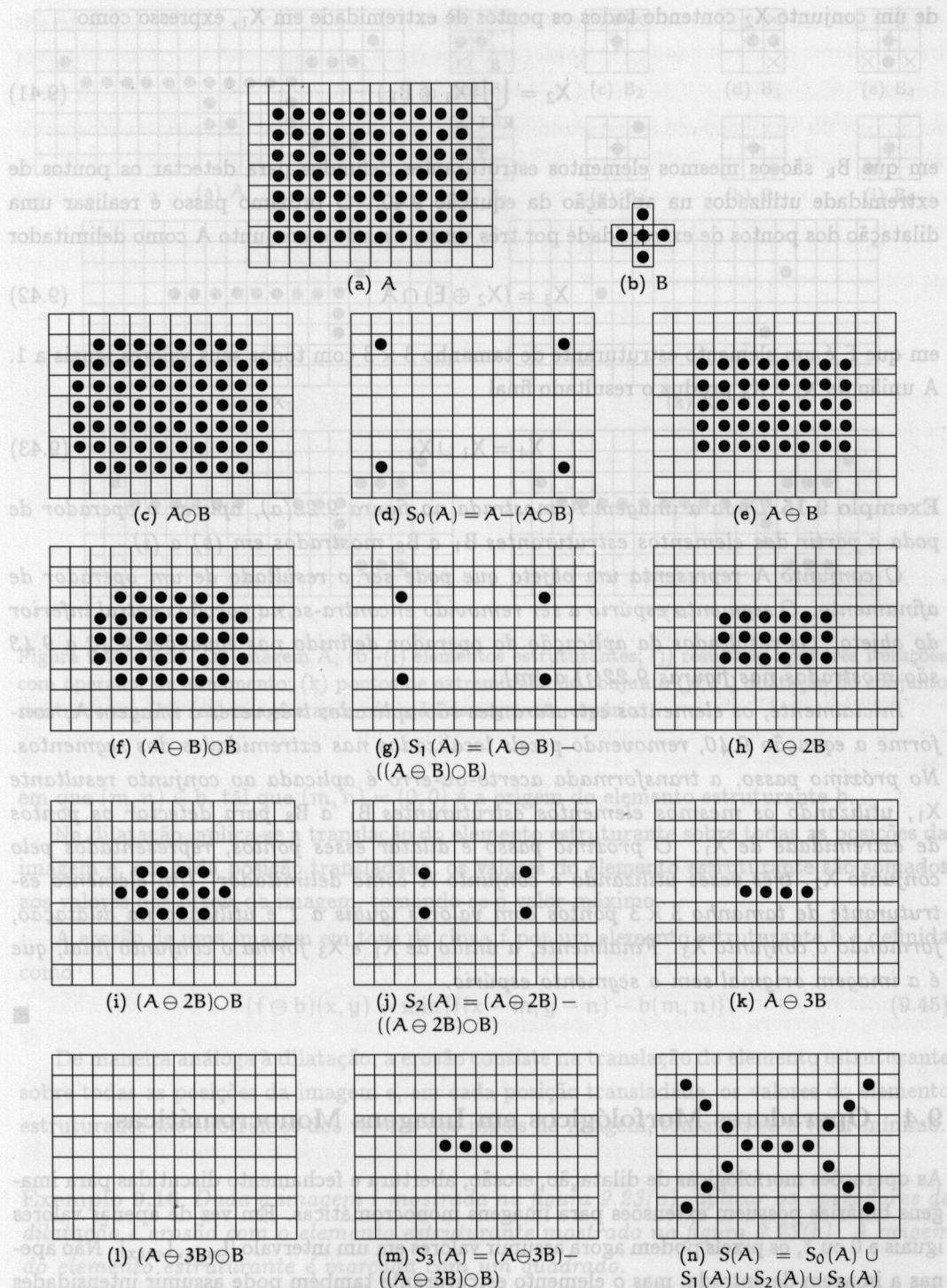


Figura 9.21: Esqueleto de um objeto. (a) imagem A; (b) elemento estruturante B; (c)-(m) resultados intermediários da aplicação do operador definido nas equações 9.34 a 9.37; (n) esqueleto de A.

A aplicação da equação 9.40 resulta no conjunto X_1 . O próximo passo é restaurar a forma original do objeto, porém, removendo os elementos espúrios. Isso requer a construção

de um conjunto X_2 contendo todos os pontos de extremidade em X_1 , expresso como

$$X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \circledast B_k) \quad (9.41)$$

em que B_k são os mesmos elementos estruturantes definidos para detectar os pontos de extremidade utilizados na aplicação da equação 9.40. O próximo passo é realizar uma dilatação dos pontos de extremidade por três vezes, usando o conjunto A como delimitador

$$X_3 = (X_2 \oplus E) \cap A \quad (9.42)$$

em que E é um elemento estruturante de tamanho 3×3 com todos seus valores iguais a 1. A união de X_1 e X_3 produz o resultado final

$$X_4 = X_1 \cup X_3 \quad (9.43)$$

Exemplo 9.15 Dada a imagem A mostrada na figura 9.22(a), aplicar o operador de poda a partir dos elementos estruturantes B_1 a B_8 mostrados em (b) a (i).

O conjunto A representa um objeto que pode ser o resultado de um operador de afinamento. O segmento espúrio a ser removido encontra-se na porção central inferior do objeto. Os resultados da aplicação do operador definido nas equações 9.40 a 9.43 são mostrados nas figuras 9.22(j) a (m).

Inicialmente, os elementos estruturantes são aplicados três vezes à imagem A , conforme a equação 9.40, removendo pixels localizados nas extremidades dos segmentos. No próximo passo, a transformada acerto-ou-erro é aplicada ao conjunto resultante X_1 , utilizando os mesmos elementos estruturantes B_1 a B_8 para detectar os pontos de extremidade de X_1 . O próximo passo é dilatar esses pontos, representados pelo conjunto X_2 , três vezes utilizando o conjunto A como delimitador. Um elemento estruturante de tamanho 3×3 pontos com valores iguais a 1 é utilizado na dilatação, formando o conjunto X_3 . Finalmente, a união de X_1 e X_3 forma o conjunto final, que é a imagem original sem o segmento espúrio.

■

9.4 Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

As operações morfológicas de dilatação, erosão, abertura e fechamento discutidas para imagens binárias possuem extensões para imagens monocromáticas. Em vez de apenas valores iguais a 0 ou 1, os pixels podem agora assumir valores em um intervalo $[L_{\min}, L_{\max}]$. Não apenas a imagem de entrada, mas o elemento estruturante também pode assumir intensidades de níveis de cinza.

9.4.1 Dilatação e Erosão

A dilatação de uma imagem monocromática f por um elemento estruturante b é definida como

$$(f \oplus b)(x, y) = \max \{f(x - m, y - n) + b(m, n)\} \quad (9.44)$$

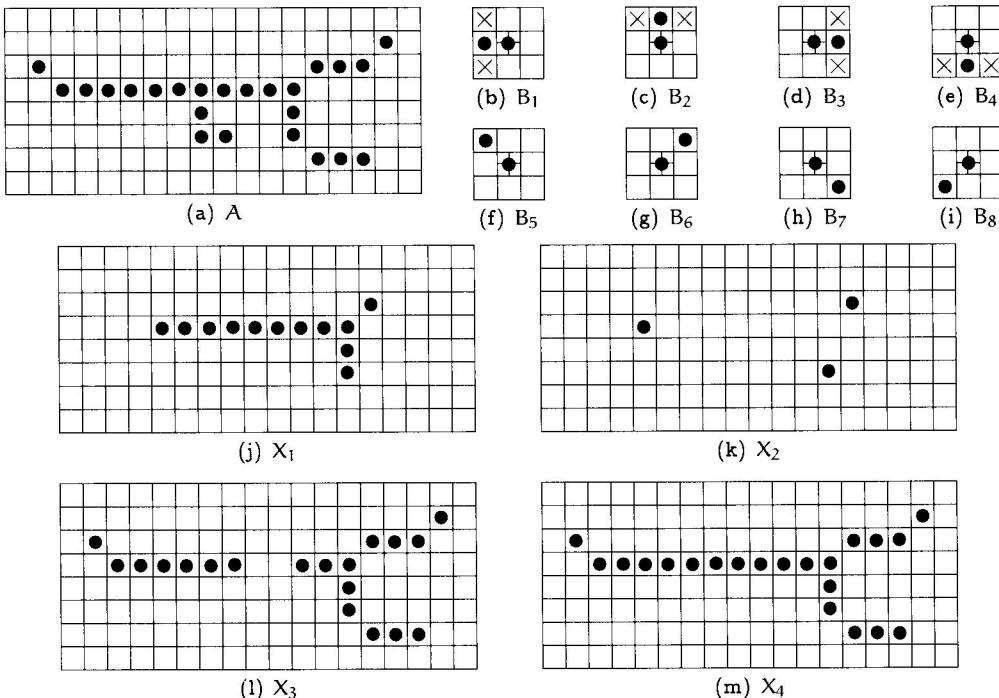


Figura 9.22: Poda. (a) imagem A; (b)-(i) elementos estruturantes; (j) resultado após três iterações com operador de afinamento; (k) pontos de extremidade do conjunto (j); (l) dilatação do conjunto mostrado em (k); (m) imagem após remoção de segmento espúrio.

em que $(m, n) \in b$, tal que $(m, n) = (0, 0)$ é a origem do elemento estruturante b .

Na dilatação, aplica-se a translação do elemento estruturante sobre todas as posições da imagem e, em cada posição transladada, os valores do elemento estruturante são somados aos valores dos pixels da imagem, tomando-se o valor máximo.

A erosão de uma imagem em tons de cinza f por um elemento estruturante b é definida como

$$(f \ominus b)(x, y) = \min\{f(x - m, y - n) - b(m, n)\} \quad (9.45)$$

De maneira análoga à dilatação, a erosão consiste na translação do elemento estruturante sobre todas as posições da imagem e, em cada posição transladada, os valores do elemento estruturante são subtraídos dos valores dos pixels da imagem, tomando-se o valor mínimo.

Exemplo 9.16 Dada a imagem f mostrada na figura 9.23(a), aplicar os operadores de dilatação e erosão com o elemento estruturante mostrado na figura 9.23(b). A origem do elemento estruturante é marcada com um quadrado.

A aplicação do operador de dilatação em uma imagem em tons de cinza é realizada pelo deslocamento do elemento estruturante sobre a imagem e tomando-se o máximo entre os valores do elemento estruturante adicionados com as correspondentes intensidades na imagem. Quando a origem do elemento estruturante está posicionada sobre o pixel com intensidade igual a 16, por exemplo, o valor resultante da dilatação é o máximo entre $\{27 + 1, 33 + 2, 37 + 1, 18 + 2, 16 + 3, 21 + 2, 25 + 1, 23 + 2, 24 + 1\}$, ou seja, 38. O resultado da dilatação é mostrado na figura 9.23(c).

A erosão é realizada de forma similar à dilatação, agora tomando-se o mínimo entre os valores de intensidade subtraídos dos valores do elemento estruturante. Quando a origem do elemento estruturante está posicionada sobre o pixel com intensidade igual a 16, o valor resultante da erosão é o mínimo entre {27–1, 33–2, 37–1, 18–2, 16–3, 21–2, 25–1, 23–2, 24–1}, ou seja, 13. O resultado da erosão é mostrado na figura 9.23(d).

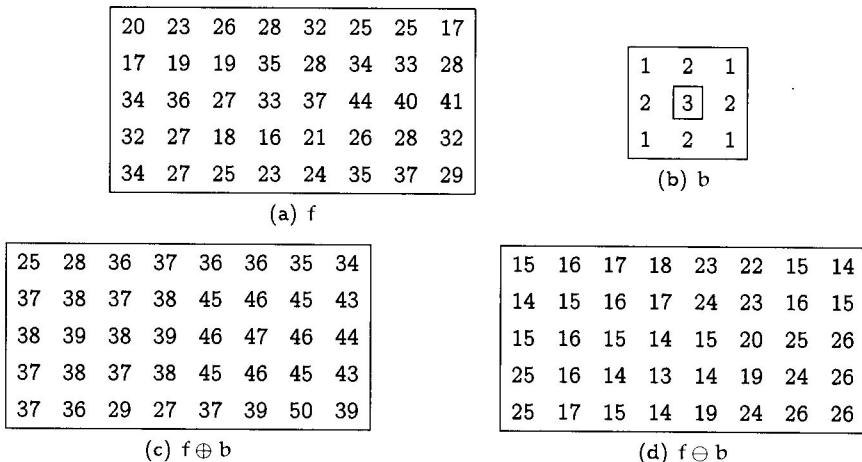


Figura 9.23: Dilatação e erosão de uma imagem em tons de cinza. (a) imagem original f ; (b) elemento estruturante; (c) resultado da dilatação; (d) resultado da erosão.

9.4.2 Abertura e Fechamento

As operações de abertura e fechamento em imagens em tons de cinza possuem as mesmas expressões daquelas definidas para imagens binárias, exceto que as operações de dilatação e erosão envolvidas são definidas para imagens em tons de cinza. Dessa forma, como anteriormente, a abertura da imagem f pelo elemento estruturante b é dada por

$$f \odot b = (f \ominus b) \oplus b \quad (9.46)$$

O fechamento da imagem f pelo elemento estruturante b é definido como a dilatação de f por b , seguida pela dilatação do resultado por b

$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b \quad (9.47)$$

O efeito dos operadores de abertura e fechamento pode ser observado pelo uso de um modelo geométrico. Dada uma imagem em tons de cinza f , as posições (x, y) representam as coordenadas dos pixels, enquanto os valores $z = f(x, y)$ representam as intensidades de cinza dos pixels.

Seja b um elemento estruturante representado por um círculo com origem em seu centro. A abertura de f por b pode ser interpretada geometricamente como o deslocamento do elemento b sobre todo o domínio da imagem f . Quando o centro do círculo está posicionado

abaixo de um pixel da imagem, o valor resultante da operação de abertura é dado pelo ponto mais alto (máximo) alcançado por qualquer ponto do círculo.

O fechamento, por sua vez, pode ser modelado pelo deslocamento do elemento estruturante sobre o topo da superfície e tomando-se o ponto mais baixo (mínimo) do círculo. A figura 9.24 ilustra o processo de abertura e fechamento em uma seção transversal (unidimensional) de uma imagem em tons de cinza. A abertura pode ser vista como um processo de *suavização*, eliminando pequenos detalhes da imagem, enquanto o fechamento remove detalhes que são menores que o elemento estruturante.

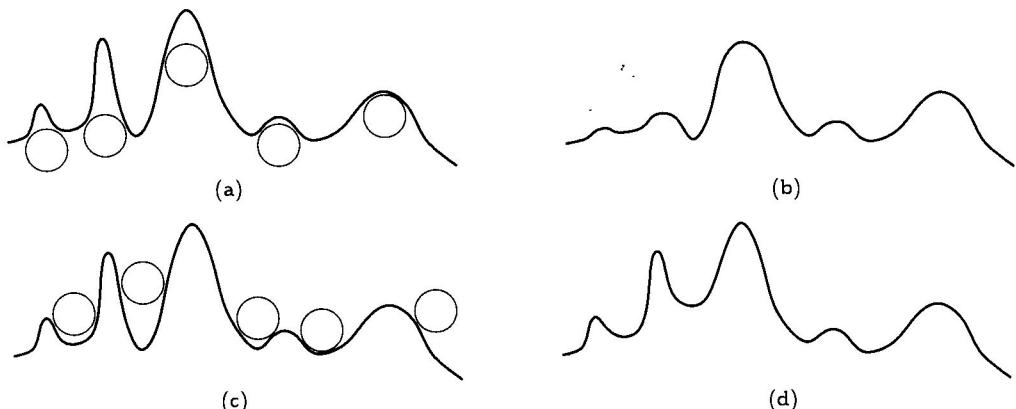


Figura 9.24: Interpretação geométrica das operações de abertura e fechamento em imagens tons de cinza. (a) localização de elemento estruturante circular em perfil de uma imagem durante o processo de abertura; (b) resultado da abertura; (c) localização de elemento estruturante circular no processo de fechamento; (d) resultado do fechamento.

9.4.3 Realce de Contraste

A diferença entre uma imagem e o resultado de sua abertura é chamada de transformada *top-hat*, dada por

$$\text{TH}(f) = f - (f \odot b) \quad (9.48)$$

Uma função similar, conhecida como transformada *bottom-hat*, é definida como a diferença entre o resultado do fechamento e a imagem original, dada por

$$\text{BH}(f) = (f \bullet b) - f \quad (9.49)$$

As transformadas *top-hat* e *bottom-hat* podem ser combinadas para realçar o contraste por meio da adição do resultado da transformada *top-hat* à imagem original, seguida da subtração do resultado da transformada *bottom-hat*, ou seja

$$g = f + \text{TH}(f) - \text{BH}(f) \quad (9.50)$$

Uma outra forma de aumentar o contraste de uma imagem utiliza as operações de dilatação e erosão. O efeito de borramento de uma imagem pode ser reduzido por meio da

operação de realce do contraste definida como

$$g = \begin{cases} \mathcal{E}(f, b), & \text{se } f - \mathcal{E}(f, b) < \mathcal{D}(f, b) - f \\ \mathcal{D}(f, b), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9.51)$$

Portanto, o valor de cada ponto da imagem f será substituído pelo valor da dilatação ou da erosão de f , aquele que estiver mais próximo do valor original de f . Uma ilustração da aplicação do operador de realce de contraste definido na equação 9.50 é apresentada na figura 9.25.

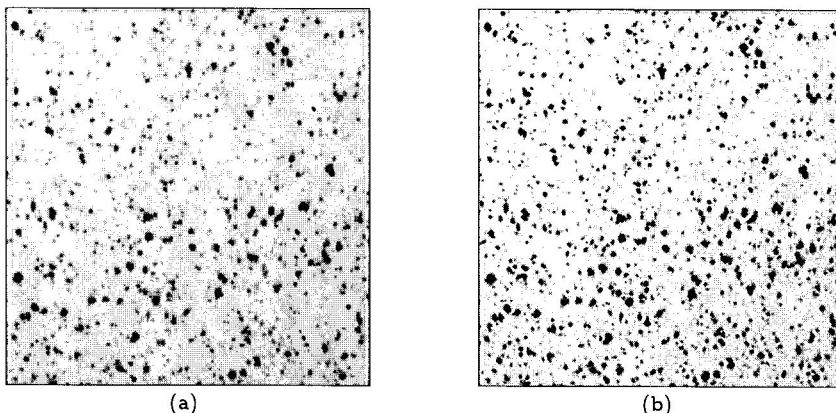


Figura 9.25: Realce de contraste. (a) imagem original; (b) imagem após aplicação do operador de realce de contraste.

9.4.4 Granulometria

Uma outra aplicação de interesse prático da morfologia matemática é a estimativa da distribuição dos tamanhos de objetos (por exemplo, partículas) em uma imagem, cujo estudo é conhecido como *granulometria*.

Para objetos com formas regulares, operações sucessivas de abertura morfológica com elementos estruturantes de tamanhos gradualmente maiores podem ser utilizadas para indiretamente medir o tamanho dos objetos. A diferença entre a imagem e sua abertura é calculada, o tamanho do elemento estruturante é aumentado e o processo é repetido até que a operação de abertura remova todos os objetos.

Exemplo 9.17 A figura 9.26(a) apresenta uma imagem sintética composta por objetos de diferentes tamanhos. Um elemento estruturante circular é utilizado para medir a área dos objetos.

As figuras 9.26(b) a (f) mostram os resultados da aplicação de sucessivas aberturas por elementos estruturantes com raios entre 5 a 35 pixels. A abertura da imagem por um elemento estruturante de raio 20 remove apenas os objetos menores, enquanto a abertura por elemento de raio 35 elimina todos os objetos da imagem. A figura 9.26(g) ilustra a distribuição dos tamanhos dos objetos da imagem.

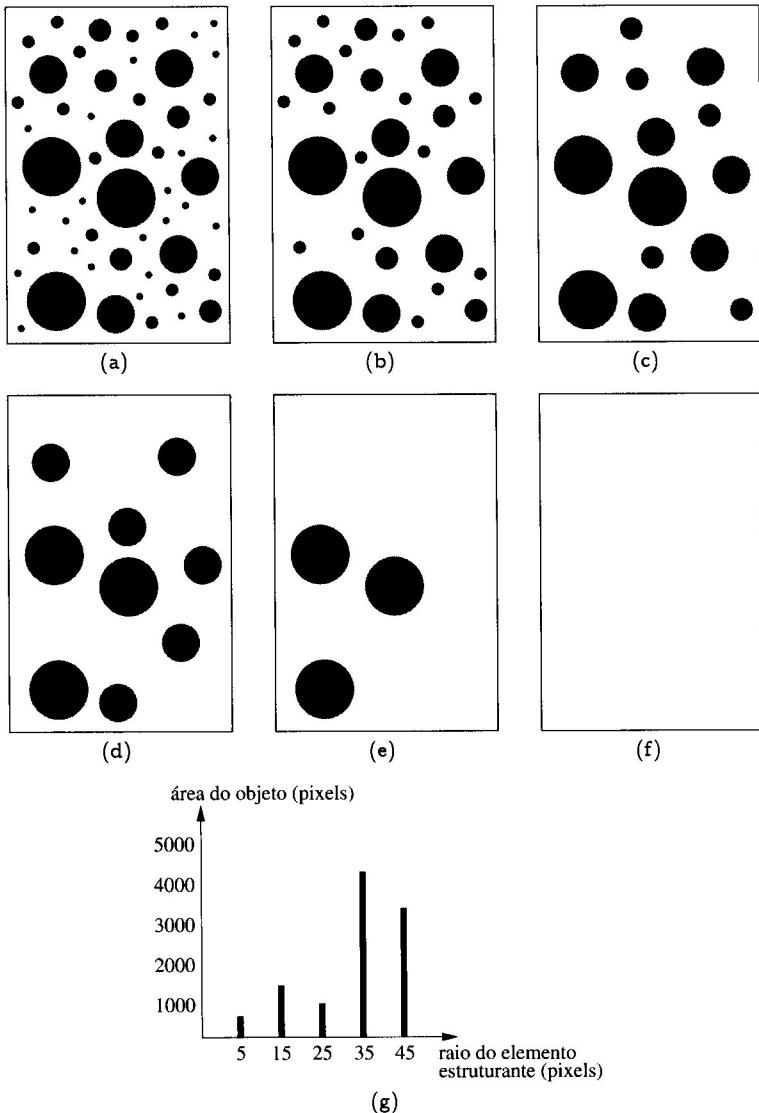


Figura 9.26: Granulometria. (a) imagem sintética formada por objetos de diferentes tamanhos; (b) imagem após abertura por elemento estruturante com raio 5; (c)-(e) resultados após abertura com elementos estruturantes maiores; (f) resultado após abertura por elemento de raio 35; (g) distribuição do tamanho dos objetos.

9.4.5 Atenuação de Ruído

Filtros para atenuação de ruído no domínio espacial foram descritos na seção 4.4.1. A combinação das operações morfológicas de abertura e fechamento pode reduzir o efeito de ruído sal-e-pimenta em uma imagem. Essas operações podem remover pontos isolados claros e escuros presentes nas imagens, os quais podem ser resultantes de um processo de geração de ruído. Entretanto, pontos importantes de objetos na imagem podem também ser suprimidos por essas operações, causando uma degradação ou suavização da imagem.

Exemplo 9.18 Aplicar as operações morfológicas de abertura e fechamento na imagem A, mostrada na figura 9.27(a), corrompida por ruído sal-e-pimenta.

A abertura da imagem A por um elemento B de 3×3 pontos, cuja origem está localizada no centro de B, é utilizada para atenuar os pontos isolados brancos da imagem, embora a imagem possa sofrer alguma degradação. De forma similar, a operação de fechamento, também com o uso de um elemento estruturante B de 3×3 pontos, pode ser utilizada para remover pontos pretos isolados.

Os resultados das operações de abertura e fechamento, separadamente, na imagem A são mostrados nas figuras 9.27(b) e (c), respectivamente. O resultado da combinação das operações de abertura e fechamento na imagem é mostrado na figura (d).

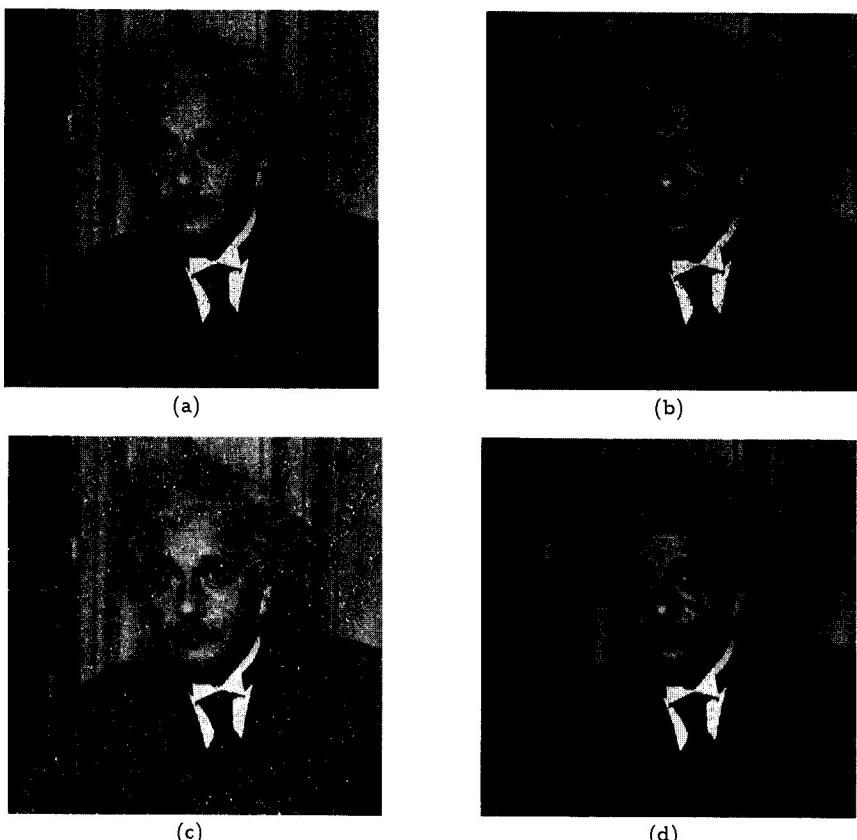


Figura 9.27: Atenuação de ruído. (a) imagem corrompida por ruído sal-e-pimenta; (b) abertura; (c) fechamento; (d) operações de abertura e fechamento combinadas.

9.5 Notas Bibliográficas

Referências sobre operadores morfológicos podem ser encontradas em Dougherty (1992), Matheron (1975), Serra (1982, 1986, 1989), Serra e Soille (1994), Maragos (1996), Heijmans (1994), Haralick et al. (1987), Shinha e Dougherty (1992), Goutsias et al. (2000), Cheng e Venetsanopoulos (1992) e van Horebeek e Rodriguez (2001). Conceitos de morfologia matemática aplicados a imagens em níveis de cinza são descritos em Serra (1982), Haralick

e Shapiro (1992), Heijmans (1991), Sternberg (1986), Giardina e Dougherty (1988), Gader (1991), Lucke e Chakrabarti (1995) e Shih e Mitchell (1991).

9.6 Problemas

- Suponha que uma imagem esteja corrompida por ruído sal-e-pimenta, ou seja, apresente pontos isolados brancos e pretos aleatoriamente distribuídos na imagem. Mostre como o ruído pode ser eliminado por meio do uso de operações morfológicas.
- Verifique se são corretas as afirmações:
 - $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C)$
 - $(A \ominus B) \ominus B = A \ominus B$
 - $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{D}(B, A)$, em que \mathcal{D} representa a operação de dilatação.
- Considerando uma imagem binária A e um elemento estruturante adequado B , descreva a função das duas operações morfológicas a seguir. Utilize uma imagem binária para exemplificar o uso dessas operações morfológicas.
 - $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$ $k = 1, 2, \dots$
 - $M = A - (A \ominus B)$
- Dada uma imagem binária, verifique que, em geral, as operações de dilatação e erosão não são funções *inversas*, ou seja

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}(A, B), B) \neq \mathcal{E}(\mathcal{D}(A, B), B) \quad (9.52)$$

- Com base na figura 9.28, aplique a operação de dilatação na imagem A com o elemento estruturante B , cuja origem não está incluída no conjunto B .

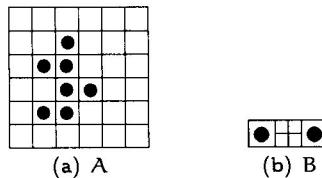


Figura 9.28: Dilatação. (a) imagem original; (b) elemento estruturante que não contém a origem.

- Prove que a abertura e o fechamento são duais com respeito à complementação e reflexão de conjuntos, ou seja

$$(A \bullet B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

- Mostre o resultado da dilatação de um círculo de raio $2r$ por um elemento estruturante circular de raio $r/2$ com origem no centro do círculo.
- Mostre o resultado da erosão de um quadrado com lado r por um elemento estruturante circular de raio $r/4$ com origem no centro do círculo.

9. Encontre o resultado da aplicação das operações de dilatação e erosão para a imagem mostrada na figura 9.29 a partir do elemento estruturante B.

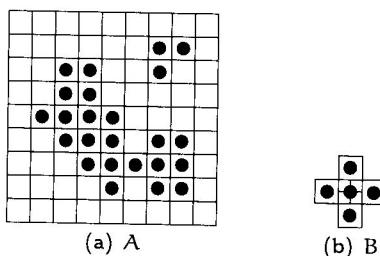


Figura 9.29: Dilatação e erosão. (a) imagem original; (b) elemento estruturante.

10. Encontre o resultado da aplicação das operações de abertura e fechamento para a imagem A mostrada na figura 9.30 a partir do elemento estruturante B.

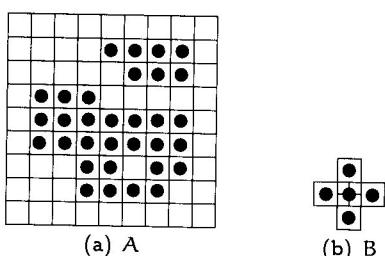


Figura 9.30: Abertura e fechamento. (a) imagem original; (b) elemento estruturante.

11. Descreva as operações de dilatação e erosão para imagens tons de cinza.
 12. Mostre os resultados após a erosão da imagem A pelos elementos estruturantes B_1 a B_4 , conforme a figura 9.31. Os círculos nos elementos estruturantes representam a posição da origem.

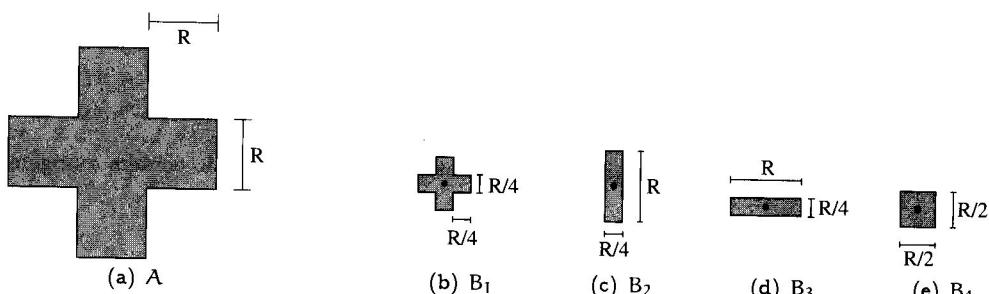


Figura 9.31: Erosão. (a) imagem original; (b)-(e) elementos estruturantes.

13. Mostre que as equações a seguir são válidas:

$$(a) (A \ominus B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \ominus B$$

$$(b) (A \cup B) \ominus C = (A \ominus C) \cup (B \ominus C)$$

14. Certos elementos estruturantes podem ser decompostos em subconjuntos equivalentes. Qual a principal vantagem em realizar essa decomposição?
15. Descreva três utilizações práticas da transformada acerto-ou-erro.

Referências Bibliográficas

- Cheng, F. e Venetsanopoulos, A. N. (1992). An Adaptive Morphological Filter for Image Processing, *IEEE Transactions on Image Processing* 1(4): 533–539.
- Dougherty, E. R. (1992). *An Introduction to Morphological Image Processing*, SPIE Press, Bellingham, WA, Estados Unidos.
- Gader, P. D. (1991). Separable Decompositions and Approximations of Greyscale Morphological Templates, *Computer Vision Graphics and Image Processing: Image Understanding* 53(3): 288–296.
- Giardina, C. R. e Dougherty, E. R. (1988). *Morphological Methods in Image and Signal Processing*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, Estados Unidos.
- Goutsias, J., Vincent, L. e Bloomberg, D. S. (2000). *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers.
- Haas, A., G. G. M. e Serra, J. (1967). Morphologie Mathématique et Granulométries en Place, *Annales des Mines* 11: 736–753.
- Hadwiger, H. (1957). *Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha.
- Haralick, R. M. e Shapiro, L. G. (1992). *Computer and Robot Vision*, Vol. 1, Addison-Wesley, Reading, MA, Estados Unidos.
- Haralick, R. M., Sternberg, S. R. e Zhuang, X. (1987). Image Analysis Using Mathematical Morphology, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 9(4): 532–550.
- Heijmans, H. J. A. M. (1991). Theoretical Aspects of Gray-Level Morphology, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13(6): 568–582.
- Heijmans, H. J. A. M. (1994). *Morphological Image Operators*, Academic Press, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Klein, J. C. e Serra, J. (1972). The Texture Analyzer, *Journal of Microscopy* 95(2): 349–356.
- Lantuéjoul, C. (1980). Skeletonization in Quantitative Metallography, in R. M. Haralick e J. C. Simon (eds.), *Issues of Digital Image Processing*, Sijhoff and Noordhoff, Groningen, Holanda.
- Liang, J., Piper, J. e Tang, J.-Y. (1989). Erosion and Dilation of Binary Images by Arbitrary Structuring Elements Using Interval Coding, *Pattern Recognition Letters* 9(3): 201–209.
- Lucke, L. e Chakrabarti, C. (1995). A Digit-Serial Architecture For Gray-Scale Morphological Filtering, *IEEE Transactions on Image Processing* 4(3): 387–391.
- Maragos, P. (1996). Differential Morphology and Image-Processing, *IEEE Transactions on Image Processing* 5(6): 922–937.
- Maragos, P. A. e Schafer, R. W. (1986). Morphological Skeleton Representation and Coding of Binary Images, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* 34(5): 1228–1244.
- Matheron, G. (1967). *Eléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris, França.
- Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Minkowski, H. (1911). *Gesammelte Abhandlungen*, Teubner Verlag, Leipzig-Berlim, Alemanha.
- Serra, J. (1967a). *Echantillonage et Estimation des Phénomènes de Transition Minier*, PhD thesis, University of Nancy.

- Serra, J. (1967b). Remarques sur une lame mince de minerai lorrain, *Bulletin du Bureau de Recherches Géologiques et Minières* pp. 1–36.
- Serra, J. (1982). *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Serra, J. (1986). Introduction to Mathematical Morphology, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 35(3): 283–305.
- Serra, J. (1988). *Image Analysis and Mathematical Morphology, volume 2: Theoretical Advances*, Academic Press, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Serra, J. (1989). *Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances*, Academic Press, Londres, Reino Unido.
- Serra, J. e Soille, P. (1994). *Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, Estados Unidos.
- Shih, F. Y. e Mitchell, O. R. (1991). Decomposition Of Grey-Scale Morphological Structuring Elements, *Pattern Recognition* 24(3): 195–203.
- Shinha, D. e Dougherty, E. R. (1992). Fuzzy Mathematical Morphology, *Journal of Visual Communication and Image Representation* 3(3): 286–302.
- Sternberg, S. R. (1983). Biomedical Image Processing, *Computer* 16(1): 22–34.
- Sternberg, S. R. (1984). Industrial Morphology, *Proceedings of the SPIE Conference: Applications of Digital Image Processing VII*, Vol. 504, San Diego, CA, Estados Unidos, pp. 202–213.
- Sternberg, S. R. (1986). Grayscale Morphology, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 35(3): 333–355.
- van Horebeek, J. e Rodriguez, E. T. (2001). The Approximation of a Morphological Opening and Closing in the Presence of Noise, *Signal Processing* 81(9): 1991–1995.