

Hélio Pedrini

William Robson Schwartz



# Análise de Imagens Digitais

Princípios, Algoritmos  
e Aplicações



# 4

## REALCE DE IMAGENS

Técnicas de realce de imagens buscam acentuar ou melhorar a aparência de determinadas características da imagem, tornando-a mais adequada à aplicação em questão. O realce é necessário quando a imagem sofre um processo de degradação ou perda de qualidade em decorrência de introdução de ruído, perda de contraste, borramento, distorção causada pelo equipamento de aquisição ou condição inadequada de iluminação.

As principais abordagens referentes às técnicas de realce de imagens dividem-se em duas categorias: métodos no domínio espacial e métodos no domínio de freqüência. O *domínio espacial* refere-se ao próprio plano da imagem, sendo que as abordagens nessa categoria são baseadas na manipulação direta dos pixels das imagens. Técnicas de processamento no *domínio de freqüência* são baseadas na modificação da imagem com a aplicação da transformada de Fourier.

### 4.1 Brilho e Contraste

O *brilho* está associado à sensação visual da intensidade luminosa de uma fonte. A habilidade do sistema visual humano para discriminar níveis distintos de brilho é um aspecto importante na apresentação de resultados que envolvem imagens digitais.

Evidências experimentais (Cornsweet 1970, Levine 1985, Marr 1982b, Winston 1975) indicam que a sensibilidade do sistema visual humano ao brilho possui resposta logarítmica com relação à intensidade de luz incidente no olho.

O fato de que o brilho percebido pelo sistema visual humano não corresponde a uma função linear da intensidade pode ser demonstrado por alguns fenômenos. O primeiro é baseado no princípio de que o sistema visual tende a subestimar ou superestimar a intensidade próxima às transições entre regiões de intensidades diferentes. Esse fenômeno é ilustrado na figura 4.1. Embora a intensidade de cada faixa ou região da figura 4.1(a) seja constante, percebe-se um padrão de brilho alterado, particularmente quando próximo das bordas. Esse fenômeno é conhecido por *bandas de Mach*, em homenagem ao seu descobridor, o físico Ernst Mach (1838-1916). A figura 4.1(b) mostra como o olho humano percebe uma transição abrupta de intensidade. As linhas sólidas representam as intensidades reais, enquanto as linhas tracejadas representam o brilho percebido pelo olho humano.

Outro fenômeno, conhecido como *contraste simultâneo*, está relacionado ao fato de que o brilho aparente de uma região depende fortemente da intensidade do fundo. Na figura 4.2,

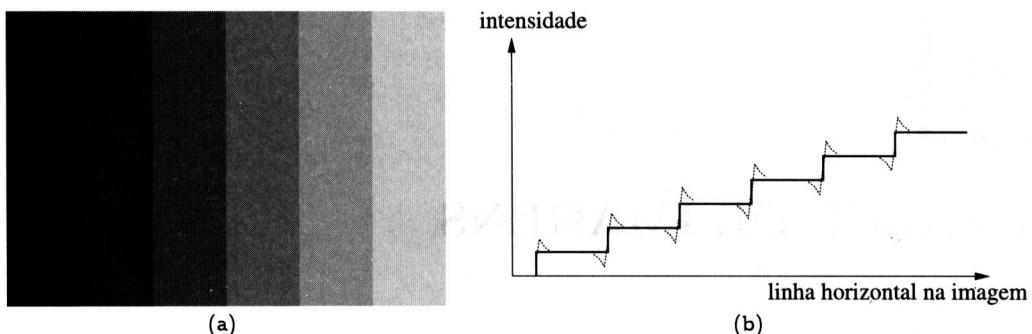


Figura 4.1: Bandas de Mach. (a) faixas com intensidades diferentes; (b) brilho percebido.

todos os quadrados centrais possuem exatamente a mesma intensidade, embora pareçam se tornar mais escuros à medida que as intensidades dos fundos se tornam mais claras.

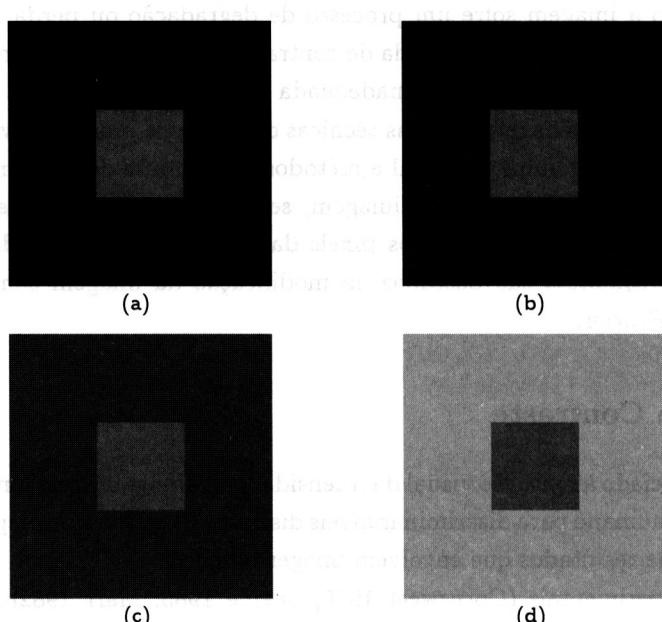


Figura 4.2: Exemplo de contraste simultâneo. Todos os quadrados centrais possuem exatamente a mesma intensidade, porém, parecem progressivamente mais escuros à medida que a intensidade do fundo torna-se mais clara.

Outro exemplo de contraste simultâneo é conhecido como *anel de Benussi-Koffka* (Koffka 1935), mostrado na figura 4.3, em que um anel com intensidade uniforme aparenta ter brilho diferente quando uma reta separa os fundos da imagem.

O *contraste* pode ser definido como uma medida da variação relativa da luminância, ou seja, da intensidade luminosa por unidade de área. Diversas formulações têm sido propostas para expressar o contraste. Segundo a lei de Weber, a resposta do sistema visual humano depende significativamente de variações locais de luminância, ao invés da luminância absoluta. Um experimento utilizado para determinar a habilidade do sistema visual para discriminar mudanças de luminância consiste em apresentar, a um observador, um objeto

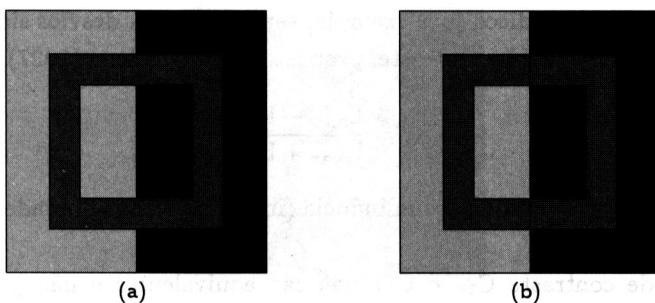


Figura 4.3: Anel de Benussi-Koffka. A inclusão de uma reta separando os fundos da imagem altera a percepção de brilho de um anel de intensidade constante.

com luminância  $L_F = L + \Delta L$  em um fundo  $L_B = L$ , como ilustrado na figura 4.4(a). Uma questão de interesse é identificar qual a diferença  $\Delta L = L_F - L_B$  suficiente para o observador notar a mudança entre o objeto e o fundo.

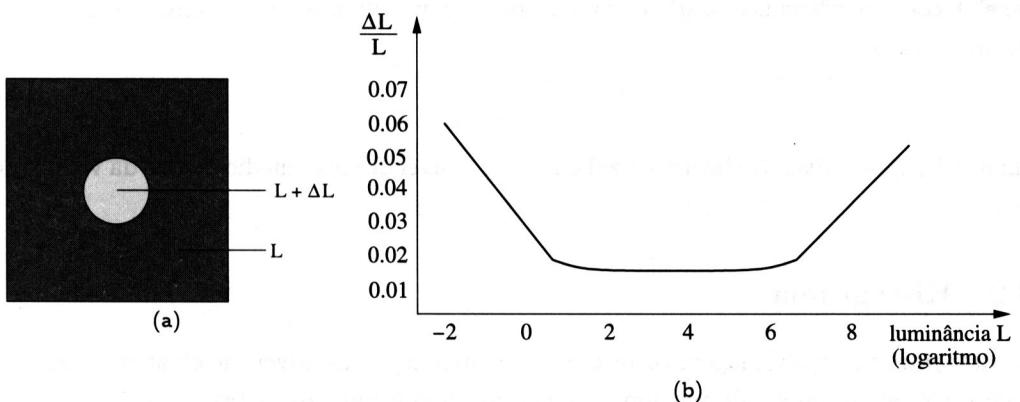


Figura 4.4: Ilustração da lei de Weber.

A lei de Weber estabelece que a intensidade adicional de estímulo (luminância) necessária para que o sistema visual humano possa observar uma alteração é proporcional à intensidade inicial, em uma relação constante. Essa relação, chamada de *contraste de Weber*, é definida como

$$C_W = \frac{\Delta L}{L} \quad (4.1)$$

Como pode ser observado na figura 4.4(b), o contraste mínimo para um observador detectar uma mudança em intensidade permanece aproximadamente constante sobre um grande intervalo de intensidades, devido às capacidades de adaptação do sistema visual humano. Para esse intervalo, a relação de Weber é aproximadamente igual a 0.02 (ou 2%). Fora desse intervalo, a habilidade em discriminar intensidades pelo sistema visual humano diminui. Essa relação também é conhecida como *lei de Weber-Fechner*, já que a equação foi originalmente proposta por Ernst Heinrich Weber (1795-1878) e, posteriormente, estendida por Gustav Theodor Fechner (1801-1887). Evidentemente, a lei de Weber-Fechner é apenas uma aproximação da percepção sensorial real, embora muitas medidas de contraste utilizadas em visão computacional sejam baseadas nesse conceito.

No caso de padrões periódicos (por exemplo, senoidais) com desvios simétricos variando de  $L_{\min}$  a  $L_{\max}$ , uma medida de contraste, proposta por Michelson (1927), é definida como

$$C_M = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} \quad (4.2)$$

em que  $L_{\min}$  e  $L_{\max}$  correspondem à luminância (intensidade por unidade de área) mínima e máxima do padrão.

As definições de contraste  $C_W$  e  $C_M$  não são equivalentes e não possuem o mesmo intervalo de valores. O contraste de Michelson pode variar de 0 a 1, enquanto o contraste de Weber pode variar de -1 a  $\infty$ . Embora essas medidas sejam bons preditores de contraste para padrões simples, elas falham quando os estímulos tornam-se mais complexos e cobrem um intervalo de freqüência maior. Além disso, essas definições globais não são apropriadas para medir o contraste em imagens naturais, já que poucos pontos muito brilhantes ou muito escuros determinariam o contraste de toda a imagem, enquanto a percepção humana varia com a média local de luminância.

Uma medida de contraste local foi definida por Beghdadi e Khellaf (1997). Dado um pixel  $f$  com coordenadas  $(x, y)$ , centrado em uma vizinhança  $w_f$ , o contraste no pixel é definido como

$$C_f = \frac{|I_{(x,y)} - \bar{I}_{(x,y)}|}{\bar{I}_{(x,y)}} \quad (4.3)$$

em que  $I_{(x,y)}$  é o nível de cinza do pixel e  $\bar{I}_{(x,y)}$  é o nível de cinza médio dentro da vizinhança  $w_f$ .

## 4.2 Histograma

O *histograma* de uma imagem corresponde à distribuição dos níveis de cinza da imagem, o qual pode ser representado por um gráfico indicando o número de pixels na imagem para cada nível de cinza. A figura 4.5 mostra uma imagem e seu histograma correspondente.

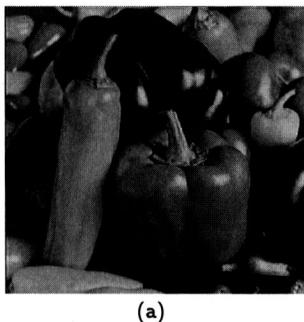
Seja  $f(x, y)$  uma imagem representada por uma matriz bidimensional, com dimensões  $M \times N$  pixels e contendo  $L$  níveis de cinza no intervalo  $[0, L_{\max}]$ . O cálculo do histograma é apresentado no algoritmo 4.1. O histograma é representado por um vetor  $H$  com  $L$  elementos.

Uma imagem possui um único histograma, entretanto, a recíproca não é em geral verdadeira, pois um histograma não contém informação espacial, apenas valores de intensidade. O histograma pode ser visto como uma distribuição discreta de probabilidade, pois o número de pixels para um determinado nível de cinza pode ser utilizado para calcular a probabilidade de se encontrar um pixel com aquele valor de cinza na imagem. Dessa forma, o histograma  $p_k(f)$  pode ser expresso como

$$p_k(f) = \frac{n_k}{n} = \frac{H(k)}{MN} \quad (4.4)$$

em que  $n_k = H(k)$  representa o número de ocorrências do nível de cinza  $k$  e  $n = MN$  corresponde ao número total de pixels na imagem  $f$ .

Várias medidas estatísticas podem ser obtidas a partir do histograma de uma imagem, tais como os valores mínimo e máximo, o valor médio, a variância e o desvio padrão dos níveis de cinza da imagem.



(a)

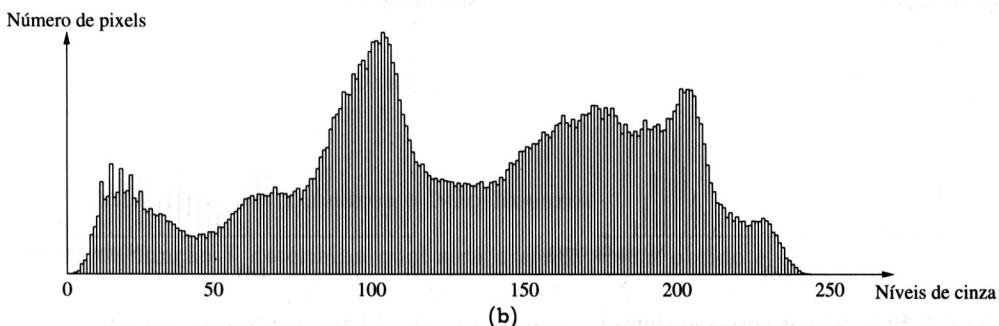


Figura 4.5: Distribuição de níveis de cinza. (a) imagem; (b) histograma.

### Cálculo do histograma de uma imagem

```

1 // atribuir valor zero a todos os elementos do vetor
2 para i = 0 até Lmax faça
3     H[i] ← 0
4
5 // calcular distribuição dos níveis de cinza para cada pixel
6 // da imagem
7 para x = 0 até M - 1 faça
8     para y = 0 até N - 1 faça
9         H[f(x, y)] ← H[f(x, y)] + 1

```

Algoritmo 4.1: Cálculo do histograma de uma imagem.

O contraste de uma imagem pode ser avaliado observando-se o seu histograma. Os histogramas mostrados nas figuras 4.6(a) a (c) apresentam escalas de níveis de cinza estreitas e, portanto, correspondem a imagens de baixo contraste. Por outro lado, a figura 4.6(d) mostra um histograma com valores de níveis de cinza melhor distribuídos ao longo da escala, correspondendo a uma imagem de alto contraste.

## 4.3 Transformação da Escala de Cinza

O objetivo das transformações de contraste é melhorar a qualidade das imagens sob critérios subjetivos ao sistema visual humano, tornando mais fácil a percepção de informações contidas nas imagens.

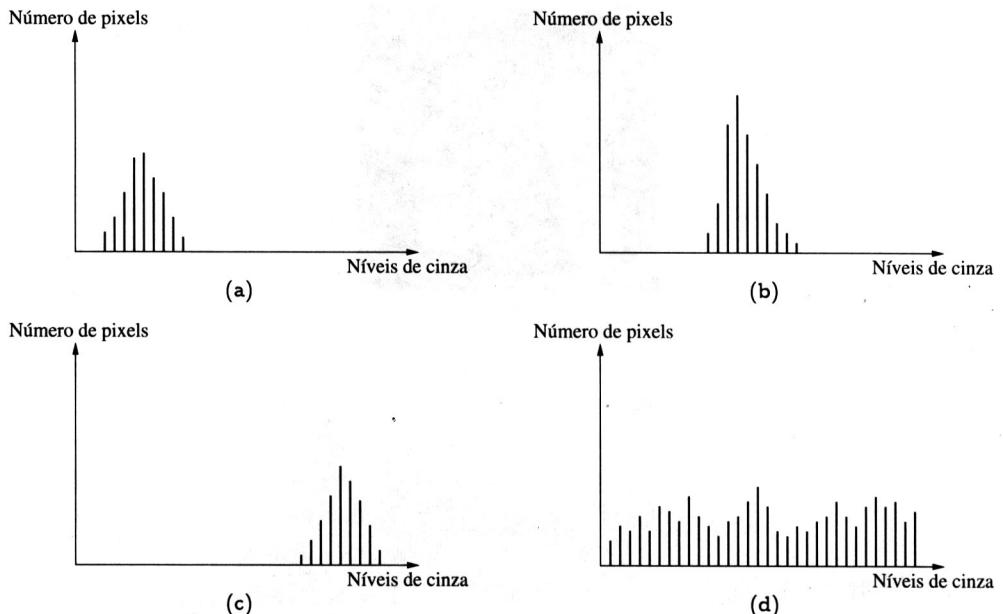


Figura 4.6: Histogramas correspondentes a imagens de (a)-(c) baixo contraste e (d) alto contraste.

O intervalo de contraste é a diferença entre os valores de intensidade máximo e mínimo que  $f(x, y)$  pode assumir. Quando uma imagem não ocupa todo o intervalo de cinza possível, pode-se ampliar o intervalo de contraste. Isso pode ser feito por meio de um mapeamento das variações de contraste dentro do intervalo de níveis de cinza  $[L_{\min}, L_{\max}]$  da imagem original para a variação máxima do dispositivo de visualização, geralmente, no intervalo  $[0, 255]$ . Essa transformação é realizada por uma função de mapeamento, tal que cada valor de cinza na imagem original é mapeado para um novo valor de cinza.

Uma função de transformação  $T$  de níveis de cinza pode ser descrita como

$$g = T(f) \quad (4.5)$$

em que  $f$  e  $g$  representam o nível de cinza dos pixels de uma imagem de entrada  $f$  e da imagem modificada  $g$ , respectivamente.

Dois exemplos de transformações são ilustrados na figura 4.7. Se  $T$  possui a forma mostrada na figura 4.7(a), o efeito dessa transformação produzirá uma imagem de maior contraste do que a original, por meio do escurecimento dos níveis abaixo de  $t$  e do clareamento daqueles acima de  $t$  na imagem original. Nessa técnica, conhecida como *alargamento de contraste*, os valores de  $f(x, y)$  abaixo de  $t$  são comprimidos pela função de transformação em uma estreita faixa de  $g(x, y)$  próxima do nível mais escuro; o efeito oposto ocorre para valores de  $f(x, y)$  maiores que  $t$ . A figura 4.7(b) produz uma imagem com dois níveis de cinza, ou seja, uma imagem binária.

A seguir é descrito um conjunto de transformações lineares e não-lineares para modificar a escala de níveis de cinza de uma imagem.

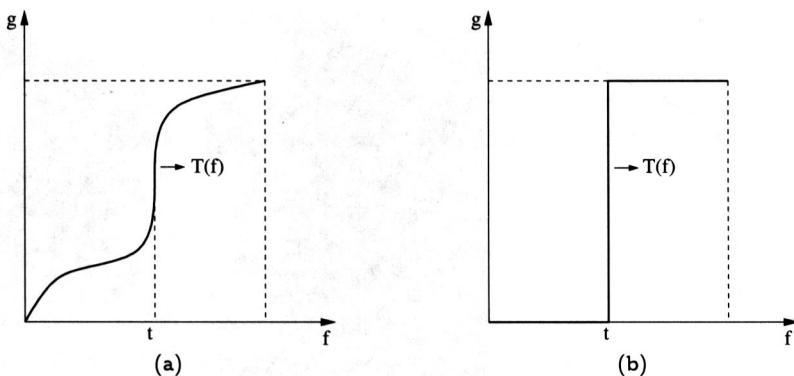


Figura 4.7: Duas transformações de níveis de cinza.

#### 4.3.1 Transformações Lineares e Não-lineares

A escolha da função  $T$  determina qual será o efeito visual obtido e deve ser escolhida de acordo com a imagem original e o efeito desejado. Uma transformação linear pode ser descrita como

$$g = af + b \quad (4.6)$$

tal que o parâmetro  $a$  controla a escala de níveis de cinza da imagem resultante e  $b$  ajusta seu brilho. Seja uma imagem de entrada com valores de níveis de cinza mínimo e máximo  $f_{\min}$  e  $f_{\max}$ , respectivamente. Para mapear o intervalo de intensidade  $[f_{\min}, f_{\max}]$  dessa imagem em uma nova imagem com intervalo  $[g_{\min}, g_{\max}]$ , pode-se utilizar a transformação

$$g = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}(f - f_{\min}) + g_{\min} \quad (4.7)$$

É interessante notar que o valor

$$a = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} \quad (4.8)$$

determina se o intervalo de níveis de cinza será expandido ou comprimido. Se o valor de  $a$  for 1, o intervalo permanece o mesmo, com os níveis de cinza apenas deslocados, dependendo de  $f_{\min}$  e  $g_{\min}$ . Se o valor de  $a$  for maior que 1, o intervalo é expandido; se for menor que 1, o intervalo é comprimido.

Uma função de alteração da escala de cinza muito útil é a transformação linear por partes, caracterizada pela existência de um conjunto de intervalos lineares. O realce na imagem é realizado de acordo com as intensidades dos pixels que se situam em intervalos específicos. Quando a imagem a ser transformada apresenta histograma muito irregular ou quando o objetivo é salientar um aspecto específico da imagem, essa técnica pode oferecer melhores resultados que uma única transformação linear.

A figura 4.8(a) mostra um exemplo de transformação linear por partes. A figura 4.8(c) apresenta o resultado da alteração da escala de cinza da imagem original, mostrada em (b), obtido pela transformação linear por partes.

Outra função linear comum é a transformação inversa, que produz o negativo de uma imagem. Nessa transformação, a intensidade da imagem de saída diminui à medida que

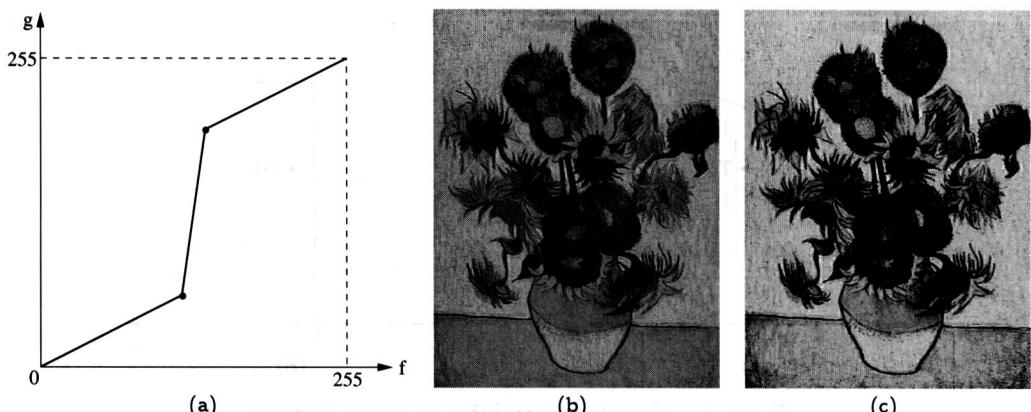


Figura 4.8: Transformação da escala de cinza. (a) transformação linear por partes; (b) imagem original; (c) resultado após aplicação da transformação.

Além de aumentar ou diminuir a intensidade da imagem de entrada, é possível alterar a forma da curva para que a intensidade da imagem de entrada aumenta. As figuras 4.9(a) e (b) ilustram o uso da transformação inversa.

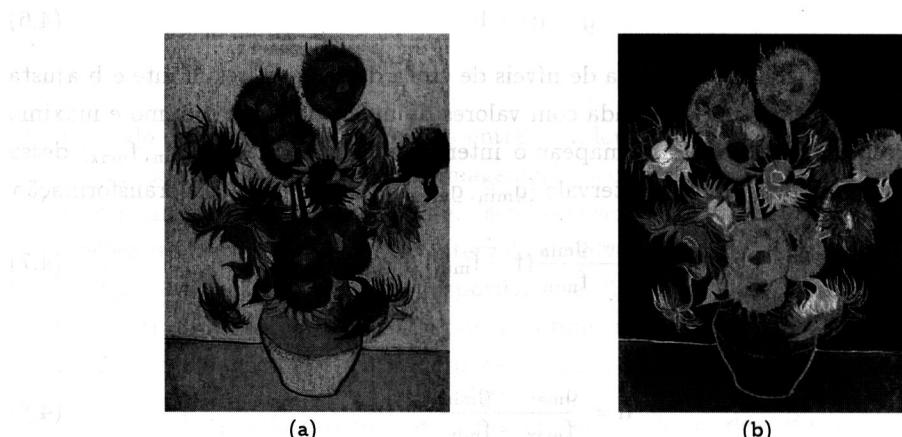


Figura 4.9: Transformação inversa. (a) imagem original; (b) negativo da imagem.

Algumas aplicações de transformação de escala de cinza envolvem a utilização de funções de mapeamento não-lineares. Essas funções permitem obter resultados mais interessantes e agradáveis.

Funções de mapeamento não-lineares também podem ser utilizadas para realçar detalhes específicos na imagem. Enquanto em uma transformação linear o parâmetro  $a$  da equação 4.8 é fixo, em uma transformação não-linear este parâmetro pode variar. As principais transformações de contraste não-lineares são baseadas na função logaritmo, raiz quadrada, exponencial e quadrado, descritas a seguir.

A transformação pelo *logaritmo* substitui cada valor de pixel da imagem pelo seu logaritmo. Essa transformação propicia um realce maior nos pixels de baixa intensidade, ou seja, regiões escuras da imagem. Muitas implementações utilizam o logaritmo base 10 ou natural, embora a base não influencie o comportamento da curva, apenas a escala dos valores resultantes. Uma vez que a função logaritmo não é definida para o valor 0, o qual pode estar presente na imagem, a transformação é descrita pela função  $g = T(f) = a \log(f + 1)$ , em que  $a$  é um fator de ajuste para manter os valores de intensidade resultantes dentro

do intervalo válido, tipicamente  $[0, 255]$ . Caso  $f_{\max}$  seja a maior intensidade presente na imagem, o parâmetro  $a$  poderia ser dado por  $a = 255 / \log(1 + f_{\max})$ .

A transformação pela *raiz quadrada* é descrita pela função  $g = T(f) = a\sqrt{f}$ . Semelhante à função logaritmo, essa transformação aumenta o contraste das regiões da imagem com baixa e média intensidades.

A transformação *exponencial* substitui cada valor de pixel da imagem pelo seu exponencial. Essa transformação propicia um realce maior nos pixels de alta intensidade, ou seja, regiões claras da imagem. Uma vez que os pixels da imagem de entrada podem assumir o valor 0, a transformação é descrita pela função  $g = T(f) = a(e^f - 1)$ , para evitar que o valor resultante seja deslocado pelo parâmetro  $a$ .

A transformação *quadrado* é descrita pela função  $g = T(f) = af^2$ . Semelhante à função exponencial, essa transformação aumenta o contraste das regiões da imagem com média e alta intensidades.

Ilustrações das principais transformações lineares e não-lineares da escala de cinza são apresentadas na figura 4.10. A partir do gráfico referente a cada transformação, pode-se observar a alteração causada no intervalo de níveis de cinza da imagem original  $f$  para gerar a imagem  $g$ .

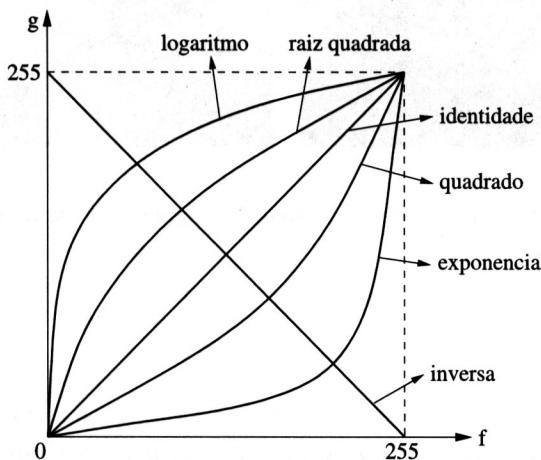


Figura 4.10: Exemplos de transformações lineares e não-lineares.

A figura 4.11 apresenta os resultados da aplicação de um conjunto de transformações não-lineares a uma imagem de entrada. Detalhes específicos da imagem podem ser realçados a partir do uso adequado da transformação da escala de níveis de cinza.

#### 4.3.2 Equalização de Histograma

A escolha adequada de uma transformação da escala de cinza é, em geral, essencialmente empírica, entretanto, existe uma classe de métodos em que a transformação tem por finalidade produzir uma imagem cujo histograma tenha um formato desejado. Um desses métodos é a *equalização de histograma*. Esse método modifica o histograma da imagem original  $f$  de tal forma que a imagem transformada  $g$  possua uma distribuição mais uniforme dos seus níveis de cinza, ou seja, os níveis devem aparecer na imagem aproximadamente com a mesma freqüência.

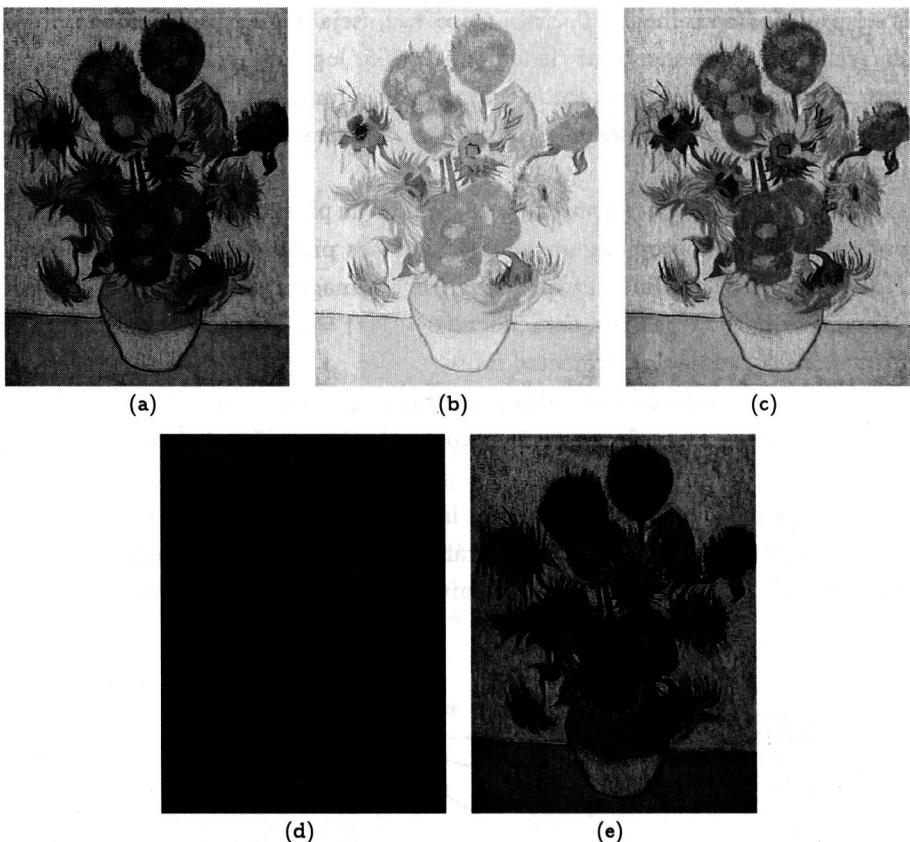


Figura 4.11: Transformações não-lineares. (a) imagem original; (b) logaritmo; (c) raiz quadrada; (d) exponencial; (e) quadrado.

Inicialmente, o caso contínuo será considerado na discussão e, posteriormente, os conceitos desenvolvidos serão expressos na forma discreta para que possam ser aplicados ao processamento de imagens digitais.

Os níveis de cinza de uma imagem podem ser considerados como variáveis aleatórias no intervalo  $[0, 1]$ . Se os níveis de cinza forem variáveis contínuas, os valores originais e transformados podem ser caracterizados por suas funções densidade de probabilidade  $p_f(f)$  e  $p_g(g)$ , respectivamente. Os valores de  $f$  e  $g$  representam os níveis de cinza das imagens original e transformada, ambos normalizados no intervalo  $[0, 1]$ , em que 0 representa o preto e 1 o branco.

A função densidade de probabilidade dos níveis de cinza transformados pode ser obtida a partir da função  $p_f(f)$  e da transformação  $T(f)$ , monotonicamente crescente no intervalo  $0 \leq f \leq 1$ , como

$$p_g(g) = \left[ p_f(f) \frac{df}{dg} \right]_{f=T^{-1}(g)} \quad (4.9)$$

*Transformada inversa  
Função?*

em que  $f = T^{-1}(g)$  é a transformação inversa dos níveis de cinza  $g$  para  $f$ .

Uma função de transformação  $T$  que pode ser utilizada é a *função de distribuição acumulada* de  $f$ , definida como

$$g = T(f) = \int_0^f p_f(w) dw \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (4.10)$$

em que  $w$  é uma variável da integração.

Da equação 4.10, a derivada de  $g$  com relação a  $f$  é

$$\frac{dg}{df} = p_f(f) \quad (4.11)$$

Substituindo-se  $df/dg$  na equação 4.9, resulta

$$p_g(g) = \left[ p_f(f) \frac{1}{p_f(f)} \right]_{f=T^{-1}(g)} = 1 \Big|_{f=T^{-1}(g)} = 1 \quad 0 \leq g \leq 1 \quad (4.12)$$

que é uma função de densidade uniforme no intervalo definido para  $g$ , ou seja,  $[0, 1]$ .

A partir desse desenvolvimento, pode-se concluir que o uso da função de distribuição acumulada como a função de transformação,  $g = T(f)$ , produz uma imagem cujos níveis de cinza possuem *densidade uniforme*. Em termos de realce de imagens, esse resultado pode implicar um aumento significativo da escala de níveis de cinza dos pixels da imagem.

Antes de reformular os conceitos anteriores para o caso discreto, um exemplo é apresentado para ilustrar o uso das equações 4.9 e 4.10.

**Exemplo 4.1** Seja a função de densidade de probabilidade dada por

$$p_f(f) = \begin{cases} -\frac{f}{2} + 1, & 0 \leq f \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Essa função de densidade de probabilidade é mostrada na figura 4.12(a). Substituindo a função  $p_f(f)$  na equação 4.10, tem-se que

$$g = T(f) = \int_0^f \left( -\frac{w}{2} + 1 \right) dw = \left( -\frac{w^2}{4} + w \right) \Big|_0^f = -\frac{f^2}{4} + f$$

Portanto,  $f^2 - 4f + 4g = 0$ . Resolvendo para  $f$  em termos de  $g$ , tem-se

$$f = T^{-1}(g) = 2 \pm 2\sqrt{1-g}$$

Desde que  $f$  está no intervalo  $[0, 1]$ , apenas a solução  $f = T^{-1}(g) = 2 - 2\sqrt{1-g}$  é válida. A função densidade de probabilidade de  $g$  é obtida por meio da equação 4.9, ou seja

$$\begin{aligned} p_g(g) &= \left[ p_f(f) \frac{df}{dg} \right]_{f=T^{-1}(g)} = \left[ \left( -\frac{f}{2} + 1 \right) \frac{df}{dg} \right]_{f=2-2\sqrt{1-g}} = \\ &= -\frac{1}{2}(2 - 2\sqrt{1-g}) + 1 \frac{d}{dg}(2 - 2\sqrt{1-g}) = \sqrt{1-g} \frac{1}{\sqrt{1-g}} = 1 \quad 0 \leq g \leq 1 \end{aligned}$$

que é uma densidade uniforme no intervalo desejado. A figura 4.12(b) mostra a função de transformação  $T(f)$  e a figura 4.12(c) mostra a função densidade  $p_g(g)$ .

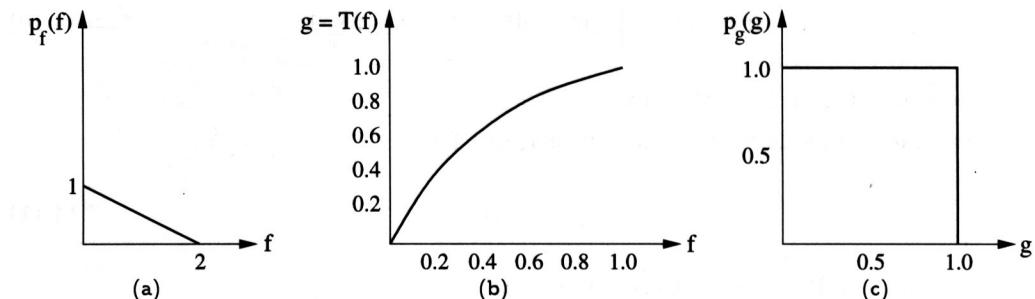


Figura 4.12: Método de transformação por densidade uniforme. (a) função de densidade de probabilidade original; (b) função de transformação; (c) densidade uniforme.

Os conceitos previamente discutidos devem ser expressos na forma discreta para serem úteis em processamento de imagens. Dada uma imagem contendo  $n = M \times N$  pixels, assumindo valores discretos para os níveis de cinza  $k = 0, 1, \dots, L - 1$ , uma forma de se equalizar um histograma é utilizar a função de distribuição acumulada de probabilidade, a qual pode ser expressa por

$$g_k = T(f_k) = \sum_{i=0}^k p_f(f_i) = \sum_{i=0}^k \frac{n_i}{n} \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (4.13)$$

em que  $n_i$  é o número de ocorrências do nível de cinza  $i$ , e  $p_f(f_i)$  é a probabilidade do  $i$ -ésimo nível de cinza. A equação 4.13 é a forma discreta da função de transformação dada pela equação 4.10.

Para que a função de distribuição acumulada de probabilidade, mostrada na equação 4.13, possa ser utilizada para equalizar o histograma de uma imagem, deve-se normalizar os níveis de cinza da imagem no intervalo  $0 \leq f_k \leq 1$ .

O algoritmo 4.2 apresenta a técnica de equalização de histograma por meio da função de distribuição acumulada de probabilidade.

Um exemplo de aplicação da equalização de histograma é mostrado na figura 4.13. A equalização de histograma possui a vantagem de ser completamente automática com relação às técnicas manuais de alteração de contraste. Entretanto, há situações nas quais a equalização de histograma pode degradar uma imagem. Um exemplo é quando a imagem a ser transformada possui um histograma com grande concentração de pixels em poucos níveis de cinza.

**Exemplo 4.2 Ilustração da equalização de histograma de uma imagem com oito níveis de cinza, conforme distribuição mostrada na tabela 4.1.**

### Equalização de histograma

Os níveis de cinza para a imagem original  $f$  e para a imagem equalizada  $g$  são representados por  $f_k$  e  $g_k$ , respectivamente, com  $0 \leq k \leq L - 1$

```

1 calcular o histograma da imagem a ser transformada
2 normalizar o histograma, tal que  $0 \leq f_k \leq 1$ 
3 para  $k = 0$  até  $L - 1$  faça
4     // calcular função distribuição acumulada de probabilidade
5      $g_k \leftarrow \sum_{i=0}^k p_f(f_i)$ 
6     // arredondar valor para nível de cinza mais próximo
7      $g_k \leftarrow \text{round}(g_k \times L_{\max})$ 
8 agrupar valores  $f_k$  para formar  $g_k$ 

```

Algoritmo 4.2: Equalização de histograma.

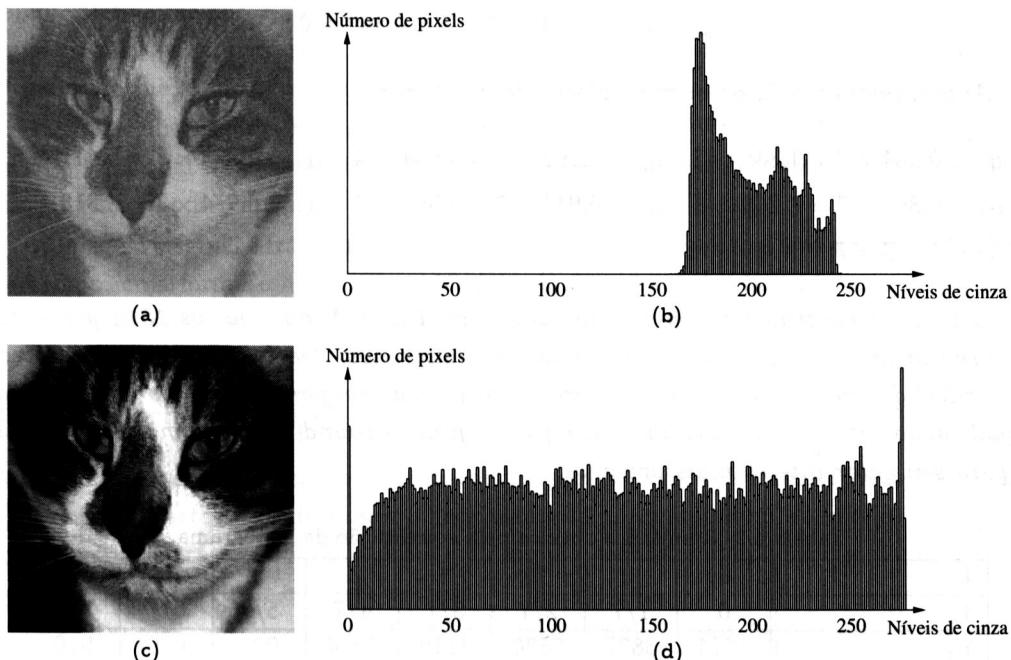


Figura 4.13: Equalização de histograma.

Inicialmente, deve-se encontrar a probabilidade  $p_f$  com que cada nível de cinza  $k$  aparece na imagem  $f$ , ou seja

$$\begin{aligned}
 p_f(f_0) &= 1314/19521 \approx 0.067 & p_f(f_1) &= 3837/19521 \approx 0.197 & p_f(f_2) &= 5820/19521 \approx 0.298 \\
 p_f(f_3) &= 4110/19521 \approx 0.211 & p_f(f_4) &= 2374/19521 \approx 0.122 & p_f(f_5) &= 921/19521 \approx 0.047 \\
 p_f(f_6) &= 629/19521 \approx 0.032 & p_f(f_7) &= 516/19521 \approx 0.026
 \end{aligned}$$

Tabela 4.1: Histograma a ser equalizado.

Níveis de cinza ( $k$ )	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de pixels ( $n_k$ )	1314	3837	5820	4110	2374	921	629	516

Calculando a função distribuição acumulada de probabilidade, obtém-se

$$g_0 = T(f_0) = \sum_{i=0}^0 p_f(f_0) = 0.067 \quad g_1 = T(f_1) = \sum_{i=0}^1 p_f(f_1) = 0.264$$

De forma similar

$$\begin{array}{lll} g_2 = 0.562 & g_3 = 0.773 & g_4 = 0.895 \\ g_5 = 0.942 & g_6 = 0.974 & g_7 = 1 \end{array}$$

Como a imagem foi quantizada com oito níveis de cinza, cada valor  $g_k$  deverá ser substituído pelo nível de cinza mais próximo, ou seja

$$g_0 = g_0 \times 7 = 0.067 \times 7 = 0.469 \approx 0$$

Analogamente para os outros valores de  $g_k$ , tem-se

$$\begin{array}{lll} g_1 = 0.264 \times 7 = 1.848 \approx 2 & g_2 = 0.562 \times 7 = 3.934 \approx 4 & g_3 = 0.773 \times 7 = 5.411 \approx 5 \\ g_4 = 0.895 \times 7 = 6.265 \approx 6 & g_5 = 0.942 \times 7 = 6.594 \approx 7 & g_6 = 0.974 \times 7 = 6.818 \approx 7 \\ g_7 = 1 \times 7 = 7 & & \end{array}$$

O nível original  $f_0 = 0$  é mapeado para o nível  $g_0 = 0$ , ou seja, os 1314 pixels que apresentavam nível de cinza 0 permanecem inalterados. De forma similar, os pixels com nível de cinza 1 são mapeados para o nível 2 e assim por diante. Os resultados da equalização estão mostrados na tabela 4.2. A função  $\text{round}(x)$  aproxima o argumento  $x$  para seu valor inteiro mais próximo.

Tabela 4.2: Resultados obtidos pela equalização de histograma.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_k$	0	$1/7$	$2/7$	$3/7$	$4/7$	$5/7$	$6/7$	$7/7$
$n_{f_k}$	1314	3837	5820	4110	2374	921	629	516
$p_f(f_k) = n_{f_k}/n$	0.067	0.197	0.298	0.211	0.122	0.047	0.032	0.026
$g_k$	0.067	0.264	0.562	0.773	0.895	0.942	0.974	1
$\text{round}(g_k \times 7)$	0	2	4	5	6	7	7	7
$n_{g_k}$	1314	0	3837	0	5820	4110	2374	2066

$\text{nível de cinza}$   
 $\text{nível de cinza } f_k \in [0,1]$   
 $g = T(f)$  onde  $T$   
é a função  
é o nível de  
cinza  $\in [0,1]$  transformado

As figuras 4.14(a) e (b) mostram o histograma original e equalizado, respectivamente. Pode-se observar que os níveis de cinza da imagem resultante não ocorrem uniformemente com a mesma frequência, o que caracterizaria uma equalização de histograma ideal. Entretanto, o histograma original, tipicamente de uma imagem escura, foi transformado em uma imagem com níveis de cinza melhor distribuídos.

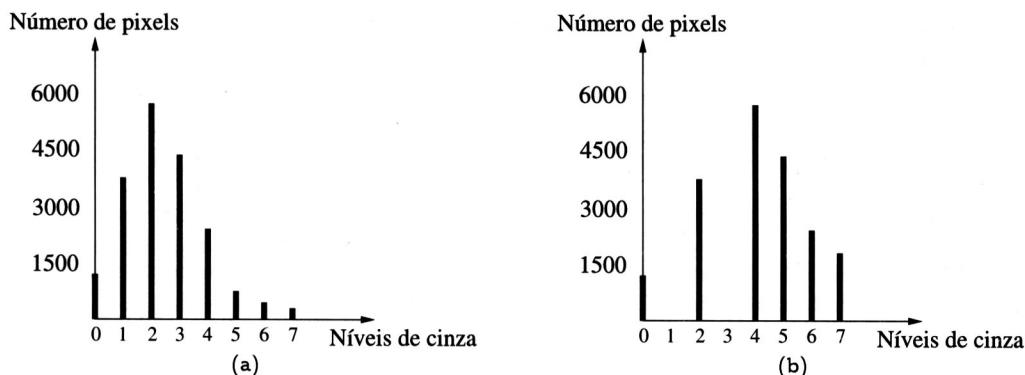


Figura 4.14: Equalização de histograma da imagem. (a) original; (b) após a equalização.

#### 4.3.3 Hiperbolização de Histograma

A técnica de *hiperbolização de histograma*, originalmente proposta por Frei (1977), tem como objetivo melhorar a qualidade visual da imagem transformada levando-se em conta aspectos relativos à percepção de brilho, ao invés da redistribuição dos níveis de cinza de forma uniforme, como ocorre na equalização de histograma.

A hiperbolização de histograma é baseada na lei de Weber-Fechner (discutida na seção 4.1), a qual estabelece que o sistema visual humano possui resposta logarítmica com relação ao brilho percebido.

A imagem original é transformada de modo a produzir um histograma uniforme do brilho percebido, cuja forma é hiperbólica. Modelos mais sofisticados baseados em conceitos de percepção de brilho e contraste foram propostos por Mokrane (1992).

#### 4.3.4 Especificação de Histograma

Apesar de sua grande utilização em realce de imagens, a técnica de equalização de histograma apresenta a característica de alterar o histograma da imagem, porém, sempre de acordo com uma função de transformação padrão, tipicamente definida como a função de distribuição acumulada dos níveis de cinza da imagem.

Há situações, entretanto, em que é desejável poder definir formas específicas para o histograma da imagem. A técnica conhecida como *especificação de histograma* transforma uma imagem de forma que seu histograma apresente uma distribuição particular.

Sejam  $p_f(f)$  e  $p_h(h)$  as funções densidade de probabilidade original e especificada, respectivamente. Conforme visto na seção 4.3.2, o histograma da imagem original  $f$  pode ser equalizado pela função de transformação

$$g_k = T_1(f_k) = \sum_{i=0}^k p_f(f_i) \quad k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (4.14)$$

em que  $f$  e  $g$  representam os níveis de cinza das imagens original e equalizada, respectivamente. Seja  $T_2(h)$  a função de transformação que realiza a equalização do histograma especificado, como ilustrado na figura 4.15(a). Assim, uma maneira de obter os níveis de

cinza z da imagem é calcular a função de transformação inversa,  $h = T_2^{-1}(g)$ , como mostrado na figura 4.15(b).

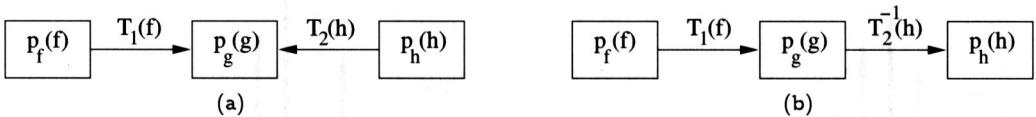


Figura 4.15: Especificação de histograma. (a) equalização do histograma especificado pela função  $T_2(h)$ ; (b) cálculo da função de transformação inversa  $T_2^{-1}(h)$ .

Portanto, a especificação de histograma envolve a aplicação de duas funções de transformação,  $T_1(f)$  seguida de  $T_2^{-1}(h)$ . Esse mapeamento pode ser combinado em uma única expressão para produzir os níveis especificados a partir dos pixels originais, ou seja

$$h = T_2^{-1}(T_1(f)) \quad (4.15)$$

A implicação da equação 4.15 é que a especificação de histograma pode ser realizada pela determinação de  $T_1(f)$  e sua combinação com a função de transformação inversa  $T_2^{-1}$ .

Para o caso em que os níveis de cinza da imagem são considerados como variáveis contínuas, a função inversa poderia ser obtida analiticamente. Na forma discreta, o número de níveis de cinza é, em geral, relativamente pequeno, tornando viável o cálculo do mapeamento de cada valor de pixel da imagem.

**Exemplo 4.3** Deseja-se modificar o histograma original apresentado no exemplo 4.2, tal que a distribuição de pixels resultante seja dada pela tabela 4.3.

Tabela 4.3: Histograma a ser modificado.

Níveis de cinza (k)	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de pixels ( $n_k$ )	0	0	0	1913	3923	7769	3946	1970
$p_h(h_k) = n_{h_k}/n$	0	0	0	0.098	0.201	0.398	0.202	0.101

O histograma após a equalização foi calculado no exemplo 4.2 e é mostrado na tabela 4.2. O próximo passo consiste em obter a função de distribuição acumulada de probabilidade desejada. Analogamente ao cálculo da distribuição acumulada para o histograma original, obtém-se

$$h_0 = T_2(h_0) = \sum_{i=0}^0 p_h(h_0) = 0$$

*De forma similar*

$$\begin{array}{llll} h_1 = 0 & h_2 = 0 & h_3 = 0.098 & h_4 = 0.299 \\ h_5 = 0.697 & h_6 = 0.899 & h_7 = 1 & \end{array}$$

O cálculo da função inversa consiste em encontrar, para cada valor de  $g_k$ , o valor de  $h_k$  mais próximo a  $g_k$ . Por exemplo, o valor  $h_k$  que mais se aproxima de  $g_2 = 0.562$  é  $T_1(h_5) = 0.697$ , ou seja,  $T_1^{-1}(0.697) = h_5$ . Portanto, os pixels que, após a equalização

do histograma original, foram realocados para o nível de cinza  $g_2$ , serão mapeados para o nível de cinza  $h_5$ . Isso significa que os 5820 pixels que apresentavam originalmente o nível de cinza 2 e que foram transferidos para  $g_4$  devido à equalização serão novamente transferidos para  $h_5$  para satisfazer a especificação de histograma. Os demais valores de  $g_k$  podem ser obtidos de forma análoga. Assumindo que o cálculo da inversa, para um determinado valor de  $g_k$  percorrerá os diversos valores de  $v_k$ , armazenando o índice do último valor que seja mais próximo de  $g_k$ , obtém-se

$$\begin{array}{llll} g_0 = 0.067 \rightarrow h_3 & g_1 = 0.264 \rightarrow h_4 & g_2 = 0.562 \rightarrow h_5 & g_3 = 0.773 \rightarrow h_5 \\ g_4 = 0.895 \rightarrow h_6 & g_5 = 0.942 \rightarrow h_6 & g_6 = 0.974 \rightarrow h_7 & g_7 = 1 \rightarrow h_7 \end{array}$$

É importante ressaltar que, se o cálculo da função inversa assumisse outra estratégia para mapear os níveis de cinza, por exemplo, armazenando-se o índice do primeiro valor que se aproximasse de  $g_k$ , o mapeamento produziria outros resultados. A tabela 4.4 apresenta os valores obtidos para o histograma resultante. Para facilitar a comparação entre o histograma especificado e o histograma obtido, a figura 4.16 apresenta cada um deles.

Tabela 4.4: Resultados obtidos pela especificação de histograma.

Níveis de cinza ( $h_k$ )	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de pixels ( $n_{h_k}$ )	0	0	0	1314	3837	9930	3295	1145

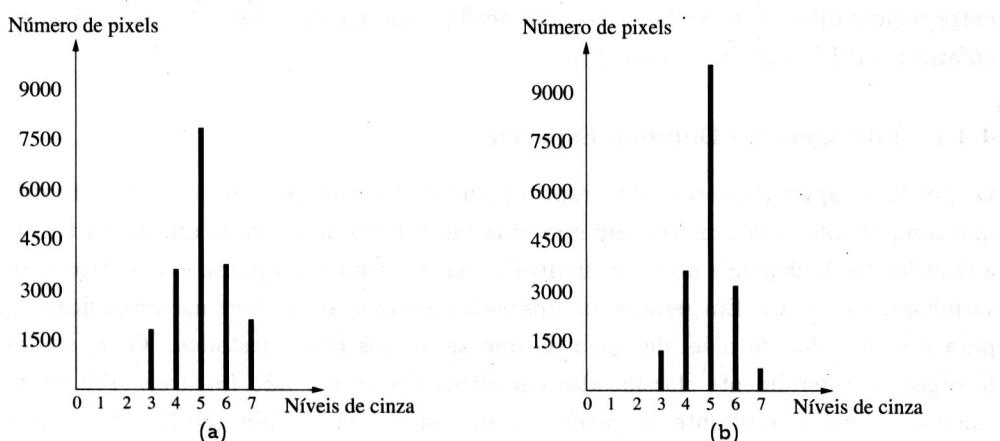


Figura 4.16: Especificação de histograma. (a) distribuição desejada; (b) histograma obtido.

Pode-se observar que, embora cada um dos níveis de cinza especificados possua uma determinada quantidade de pixels, o histograma resultante não possui exatamente a mesma forma do histograma especificado. Assim como no caso da equalização de histograma, essa diferença se deve ao fato de que a transformação produz resultados exatos apenas no caso contínuo. ■

## 4.4 Filtragem de Imagens

As operações de filtragem podem ser realizadas tanto no domínio do espaço quanto de freqüência. Os filtros são normalmente classificados em três categorias: passa-baixas, passa-altas e passa-faixa. A figura 4.17 ilustra esses tipos de filtros no domínio de freqüência. Um filtro passa-baixas atenua as altas freqüências que estão relacionadas com a informação de detalhes da imagem. Um filtro passa-altas realça as altas freqüências e são normalmente usados para realçar os detalhes na imagem. Um filtro passa-faixa seleciona um intervalo de freqüências do sinal para ser realçado.

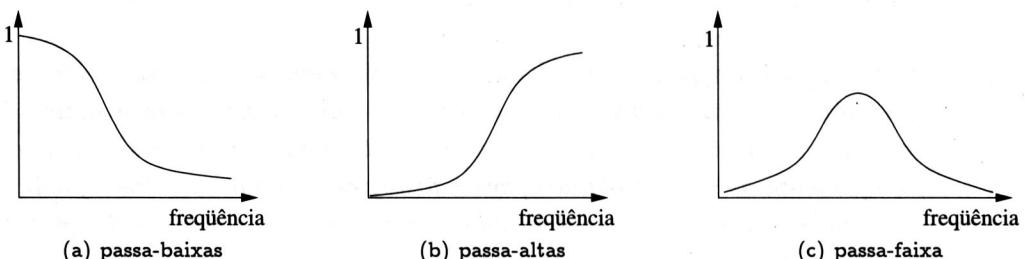


Figura 4.17: Modelos de filtros no domínio de freqüência para o caso unidimensional.

O efeito visual de um filtro passa-baixas é o de suavização da imagem, uma vez que as altas freqüências, que correspondem às transições abruptas, são atenuadas. A suavização tende também, pelas mesmas razões, a minimizar o efeito do ruído em imagens.

Para filtros passa-altas, o efeito obtido é, em geral, o de tornar mais nítidas as transições entre regiões diferentes, conhecidas como bordas. Um efeito indesejado desses filtros é o de enfatizar o ruído presente na imagem.

### 4.4.1 Filtragem no Domínio Espacial

O *domínio espacial* refere-se ao próprio plano da imagem, ou seja, ao conjunto de pixels que compõe uma imagem. No domínio espacial, o nível de cinza de um ponto  $f(x, y)$  após a transformação depende do valor do nível de cinza original do ponto e de outros pontos da vizinhança de  $f(x, y)$ . Em geral, os pontos mais próximos contribuem mais significativamente para o novo valor de nível de cinza do que os pontos mais afastados. Os operadores de filtragem são geralmente classificados em filtros *lineares* e *não-lineares*. Filtros lineares calculam o valor resultante do pixel  $f'(x, y)$  como uma combinação linear dos níveis de cinza em uma vizinhança local do pixel  $f(x, y)$  na imagem original.

No domínio espacial, o processo de filtragem normalmente é realizado por meio de matrizes denominadas *máscaras*, as quais são aplicadas sobre a imagem. A cada posição da máscara está associado um valor numérico, chamado de peso ou coeficiente. A aplicação da máscara com centro na coordenada  $(x, y)$ , sendo  $x$  a posição da coluna e  $y$  a posição de uma dada linha da imagem, consiste na substituição do valor do pixel na posição  $(x, y)$  por um novo valor, o qual depende dos valores dos pixels vizinhos e dos pesos da máscara. Os coeficientes do filtro são multiplicados pelos níveis de cinza dos pixels correspondentes e então somados, substituindo o nível de cinza do pixel central. A figura 4.18 mostra uma máscara genérica de  $3 \times 3$  pixels. Denotando os níveis de cinza da imagem sob a máscara

por  $z_i = f(x, y)$ ,  $1 \leq i \leq 9$ , a resposta da máscara é

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_9 z_9 = \sum_{i=1}^9 w_i z_i \quad (4.16)$$

em que  $w_i$  representa os coeficientes da máscara.

$w_1$	$w_2$	$w_3$
$w_4$	$w_5$	$w_6$
$w_7$	$w_8$	$w_9$

Figura 4.18: Máscara de  $3 \times 3$  pixels com coeficientes arbitrários.

Se o centro da máscara estiver em uma posição  $(x, y)$  na imagem, o nível de cinza do pixel posicionado em  $(x, y)$  será substituído por  $R$ , conforme equação 4.16. A máscara é então movida para a próxima posição de pixel na imagem e o processo se repete até que todas as posições de pixels tenham sido cobertas. A figura 4.19 ilustra essa operação, em que a imagem e a máscara possuem dimensões  $M \times N$  e  $m \times n$  pixels, respectivamente.

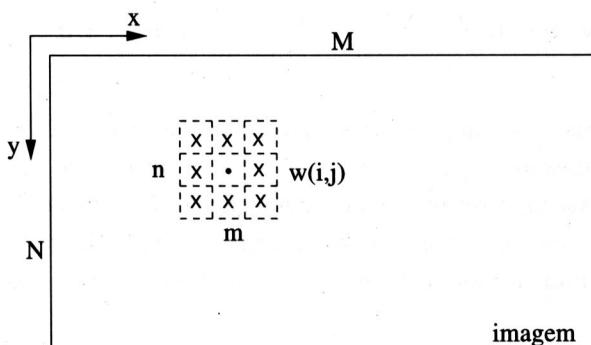


Figura 4.19: Filtragem no domínio espacial.

Dois conceitos estão relacionados à filtragem espacial, a *correlação* e a *convolução*. Para ilustrar o funcionamento de cada uma dessas duas operações, a filtragem será inicialmente aplicada a uma imagem unidimensional e, posteriormente, para o caso bidimensional.

Uma das operações mais simples que pode ser realizada por meio da correlação é a filtragem da média (analisada em mais detalhes na seção 4.4.1.1), que consiste em substituir cada pixel da imagem unidimensional pela média de seu nível de cinza e de seus dois vizinhos. Seja a imagem unidimensional  $f$  representada pelo vetor mostrado em 4.17.

$$\dots \boxed{5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 5 \ 4 \ 6} \dots \quad (4.17)$$

A operação de filtragem produz uma nova imagem a partir da imagem de entrada. Deve-se notar, entretanto, que cada pixel da imagem resultante depende apenas dos pixels da imagem original, ou seja, os resultados da média de um pixel não afetam os resultados dos outros pixels.

O cálculo da média para o pixel com valor 3, por exemplo, produzirá o valor 4, resultado da média aritmética entre 2, 3 e 7. Nesse caso, a janela considerada na filtragem é de apenas três pixels, entretanto, há situações em que vizinhanças maiores devem ser utilizadas. Conforme descrito no início desta seção, a filtragem da média pode ser realizada pelo deslocamento de uma máscara com pesos iguais a  $1/3$ , em que cada um dos valores dos pixels é multiplicado por esse peso e então somados. A máscara  $(1/3, 1/3, 1/3)$  forma uma estrutura chamada *filtro*. A aplicação do filtro a cada um dos pixels da imagem corresponde ao processo de correlação.

Uma definição mais formal da correlação é agora apresentada. Seja  $w$  o filtro de correlação. Em geral, seleciona-se um filtro com número ímpar de elementos, tal que, durante seu deslocamento sobre a imagem, o centro do filtro esteja localizado sobre o pixel sob consideração na imagem. Dessa forma, a correlação da imagem  $f$  com um filtro  $w$  pode ser expressa como

$$w \cdot f(x) = \sum_{i=-m/2}^{m/2} w(i) f(x+i) \quad (4.18)$$

A correlação para o caso bidimensional é similar. Considerando que a imagem e o filtro possuem agora duas dimensões, a correlação é definida como

$$w \cdot f(x, y) = \sum_{i=-m/2}^{m/2} \sum_{j=-n/2}^{n/2} w(i, j) f(x+i, y+j) \quad (4.19)$$

A convolução consiste em um processo similar à correlação, com a diferença de que o filtro  $w$  deve sofrer uma reflexão (ou, equivalentemente, uma rotação de 180 graus) antes de ser aplicado à imagem. Assim, o resultado da convolução de uma imagem unidimensional com o filtro  $(2, 7, 8)$  é exatamente o mesmo que a correlação com o filtro  $(8, 7, 2)$ . A convolução de uma imagem  $f$  unidimensional por um filtro  $w$  pode ser expressa como

$$w * f(x) = \sum_{i=-m/2}^{m/2} w(i) f(x-i) \quad (4.20)$$

Para o caso da convolução bidimensional, os pesos do filtro devem ser refletidos tanto na horizontal quanto na vertical, ou seja

$$w(x, y) * f(x, y) = \sum_{i=-m/2}^{m/2} \sum_{j=-n/2}^{n/2} w(i, j) f(x-i, y-j) \quad (4.21)$$

Deve-se notar que a correlação e a convolução são idênticas quando o filtro é simétrico. O algoritmo 4.3 apresenta o processo de convolução de uma imagem.

Na operação de filtragem, deve-se calcular os pontos pertencentes à borda de modo diferente dos demais, já que estes não dispõem de todos os vizinhos. Por questões de simetria, tipicamente são utilizadas janelas quadradas com  $n \times n$  pixels, em que  $n$  é um número ímpar. Por questões de eficiência computacional, normalmente são selecionados valores pequenos para  $n$ . Por exemplo, a aplicação de uma máscara de tamanho  $3 \times 3$  pixels a uma imagem de  $512 \times 512$  pixels requer nove multiplicações e oito adições para cada pixel,

### Processo de convolução

O processo de convolução utiliza uma imagem de entrada  $f$  com dimensões  $M \times N$  pixels e uma máscara  $w$  com dimensões  $m \times n$  pixels. A saída é uma imagem  $g$  com dimensões  $M \times N$  pixels. Por simplicidade, o tratamento das bordas das imagens não é considerado.

```

1  x1 ← ⌊m/2⌋
2  y1 ← ⌊n/2⌋
3
4  para x = 0 até M - 1 faça
5    para y = 0 até N - 1 faça
6      soma ← 0
7      para i = -x1 até x1 faça
8        para j = -y1 até y1 faça
9          soma ← soma + w(i,j) * f(x - i, y - j)
10     g(x,y) ← soma

```

Algoritmo 4.3: Processo de convolução.

resultando em um total de 2 359 296 multiplicações e 2 097 152 adições (desconsiderando efeitos de borda da imagem).

**Exemplo 4.4** Calcular o resultado da correlação e da convolução para a região da imagem mostrada na figura 4.20, cujos níveis de cinza estão destacados. A máscara de correlação é mostrada à direita.

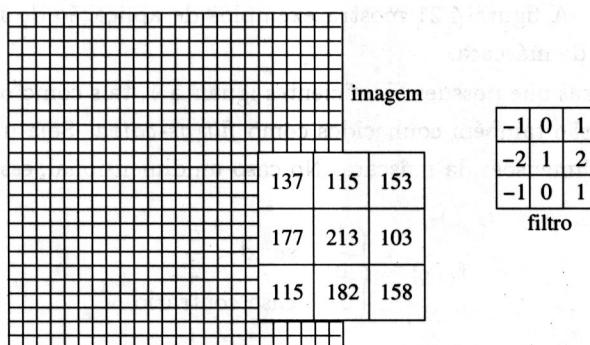


Figura 4.20: Exemplo de correlação e convolução.

O resultado da correlação para a região em destaque é igual a  $137 * (-1) + 115 * 0 + 153 * 1 + 177 * (-2) + 213 * 1 + 103 * 2 + 115 * (-1) + 182 * 0 + 158 * 1 = 124$ . O resultado da convolução, por sua vez, é igual a  $137 * 1 + 115 * 0 + 153 * (-1) + 177 * 2 + 213 * 1 + 103 * (-2) + 115 * 1 + 182 * 0 + 158 * (-1) = 302$ . ■

#### 4.4.1.1 Filtros Passa-Baixas

O efeito de um filtro passa-baixa é o de suavização da imagem, uma vez que as freqüências altas que correspondem às transições abruptas são atenuadas. A suavização tende também, pelas mesmas razões, a minimizar o efeito do ruído em imagens. Por outro lado, devido

ao borramento causado pela filtragem passa-baixa, detalhes finos podem ser removidos da imagem.

Alguns exemplos de filtros passa-baixas são mostrados em 4.22.

$$\begin{array}{l}
 h_1 = \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad h_2 = \frac{1}{25} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad h_3 = \frac{1}{49} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 h_4 = \frac{1}{10} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad h_5 = \frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{4.22}$$

As máscaras  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  possuem todos seus coeficientes iguais a 1, e o resultado da convolução é dividido por um fator de normalização. Tais filtros são denominados *filtros da média*, em que cada pixel é substituído pelo valor médio de seus vizinhos. O fator de normalização é, em geral, igual à soma dos coeficientes da máscara, de modo a preservar o valor médio. Dessa forma, a aplicação de filtros da média em uma região homogênea da imagem, ou seja, com níveis de cinza constantes, não sofrerá alteração de seus níveis de cinza. Os filtros  $h_4$  e  $h_5$  introduzem uma ponderação conforme a distância e a orientação dos pontos vizinhos. A figura 4.21 mostra exemplos de aplicação do filtro da média com diferentes tamanhos de máscara.

Filtros passa-baixas que possuem coeficientes iguais a 1, tais como os filtros  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  mostrados em 4.22, são também conhecidos como *filtros-caixa*. Seja  $a$  um número inteiro que corresponde às dimensões da máscara. No caso unidimensional, esses filtros podem ser expressos como

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{se } |x| < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.23}$$

Uma extensão para o caso bidimensional é dada por

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{se } |x| < \frac{a}{2} \text{ e } |y| < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.24}$$

Gráficos para os filtros apresentados nas equações 4.23 e 4.24 são mostrados na figura 4.22(a) e (b), respectivamente.

Como descrito no início desta seção, um dos grandes problemas relacionados à eliminação de ruído em imagens por meio de filtros passa-baixas é a supressão de detalhes finos e bordas da imagem. O processamento com filtros não-lineares procura evitar a suavização homogênea ao longo das regiões próximas a essas bordas.

Uma classe de filtros não-lineares bastante empregada em processamento de imagens é formada pelos *filtros estatísticos de ordem*. Dada uma vizinhança contendo  $m$  pi-

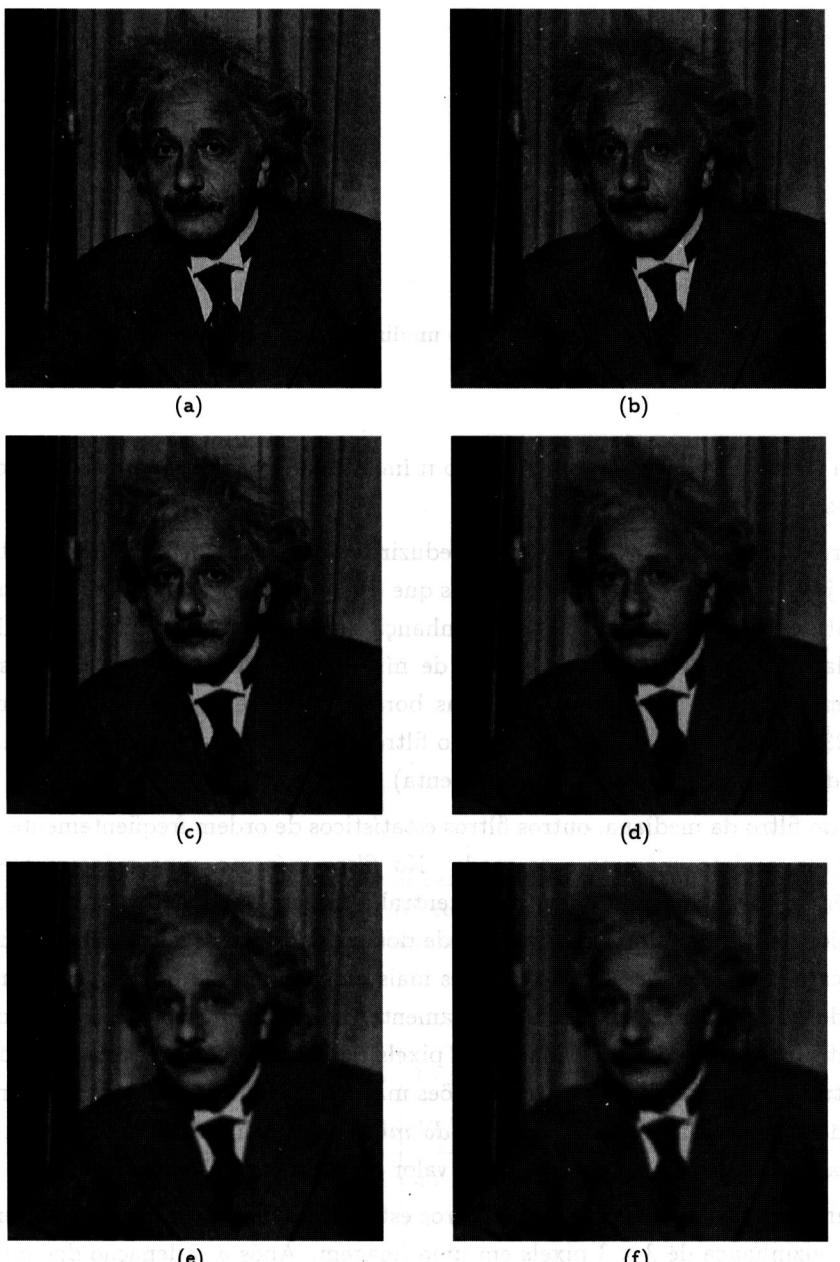


Figura 4.21: Exemplos de aplicação de filtro passa-baixa. (a) imagem original; (b)-(f) resultados obtidos pelo filtro da média com máscara de tamanho  $n \times n$  pixels,  $n = 3, 5, 7, 9$  e  $11$ , respectivamente.

xels, estes pixels são ordenados em um novo conjunto  $p_1, p_2 \dots p_m$ , em que  $p_i \leq p_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ . Em imagens monocromáticas, a ordenação poderia ser realizada pelas intensidades dos pixels. Por outro lado, em imagens multibandas, as cores dos pixels poderiam ser utilizadas na ordenação dos pixels.

Um dos filtros não-lineares mais importantes é o *filtro da mediana*, o qual consiste em substituir a intensidade de cada pixel pela mediana das intensidades na vizinhança do pixel.

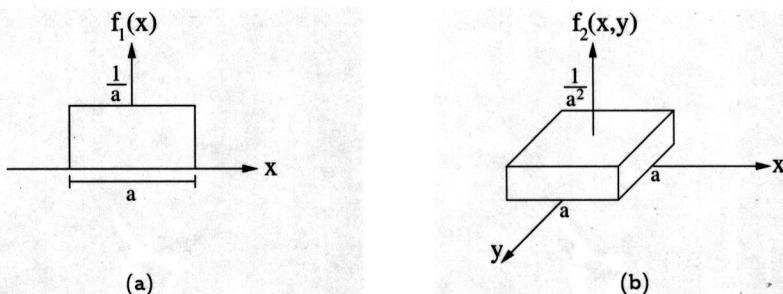


Figura 4.22: Filtros-caixa. (a) caso unidimensional; (b) caso bidimensional.

Para uma vizinhança de  $n \times n$  pixels, sendo  $n$  ímpar, a mediana das intensidades ordenadas encontra-se na posição  $(n^2 + 1)/2$ .

O filtro da mediana é adequado para reduzir o efeito de ruído impulsivo do tipo sal-e-pimenta, já que os níveis de cinza dos pixels que diferem significativamente de seus vizinhos (valores altos ou baixos), em uma dada vizinhança, serão descartados pelo filtro. Além disso, o filtro da mediana não introduz valores de níveis de cinza diferentes daqueles contidos na imagem original e, por afetar menos as bordas, pode ser aplicado iterativamente. A figura 4.23 ilustra exemplos da aplicação do filtro da média e da mediana em uma imagem corrompida por ruído impulsivo (sal-e-pimenta).

Além do filtro da mediana, outros filtros estatísticos de ordem freqüentemente utilizados são os filtros mínimo, máximo e da moda. No *filtro mínimo*, uma máscara é aplicada a cada pixel da imagem, sendo que o pixel central à máscara tem seu valor substituído pelo menor valor dentre os valores de intensidade dos pixels contidos na vizinhança delimitada pela máscara. Por meio desse filtro, regiões mais escuras de uma imagem são aumentadas, dominando as áreas mais claras. Analogamente, no *filtro máximo* é escolhido o maior valor dentre os valores de intensidade dos pixels da vizinhança para substituir o valor do pixel central à máscara. Nesses filtros, regiões mais claras de uma imagem são aumentadas, dominando as áreas mais escuras. O *filtro da moda* seleciona o valor que ocorre com maior freqüência na vizinhança para substituir o valor do pixel central à máscara.

A figura 4.24 ilustra a aplicação dos filtros estatísticos de ordem descritos anteriormente para uma vizinhança de  $3 \times 3$  pixels em uma imagem. Após a ordenação dos nove valores de intensidade dos pixels na vizinhança considerada da imagem original, os novos valores do pixel central são calculados para cada filtro e substituídos na imagem resultante.

Nos *filtros Gaussianos*, os coeficientes da máscara são derivados a partir de uma função Gaussiana bidimensional. A função Gaussiana discreta com média zero e desvio padrão  $\sigma$  é definida como

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right) \quad (4.25)$$

que é usada como um filtro de suavização. Um gráfico dessa função é mostrada na figura 4.25.

Filtros Gaussianos apresentam diversas características que os tornam particularmente úteis em processamento de imagens. Algumas delas são citadas a seguir:

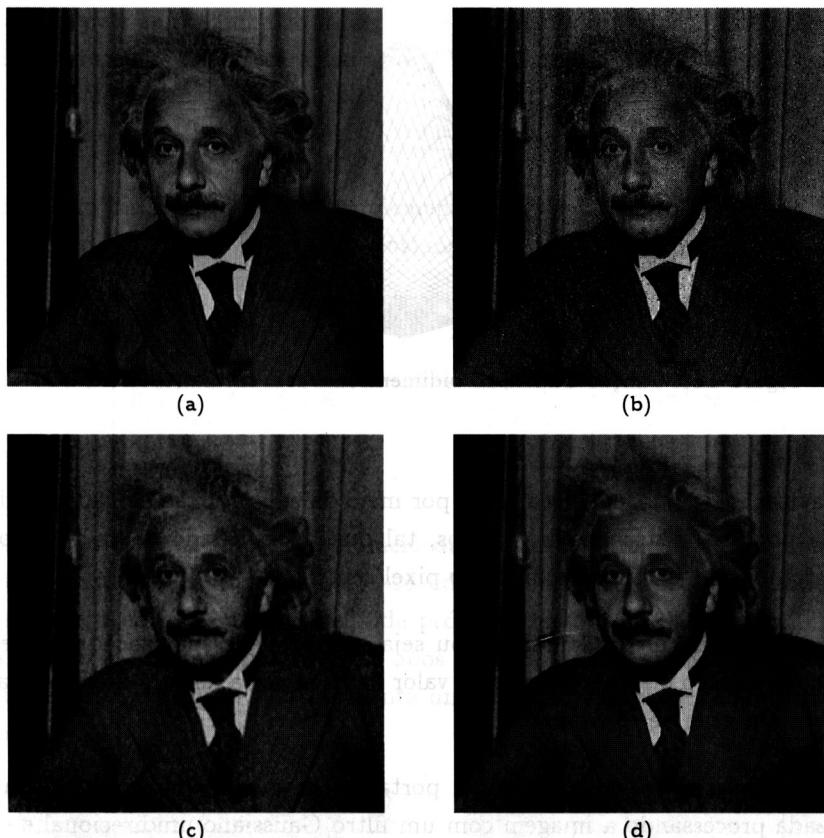


Figura 4.23: Exemplos de aplicação de filtro passa-baixa para remoção de ruído. (a) imagem original; (b) imagem corrompida com ruído impulsivo; (c) resultado obtido pelo filtro da média com  $5 \times 5$  pixels; (d) resultado obtido pelo filtro da mediana com  $5 \times 5$  pixels.

<table border="1"><tr><td>15</td><td>10</td><td>25</td></tr><tr><td>20</td><td>35</td><td>10</td></tr><tr><td>35</td><td>40</td><td>35</td></tr></table>	15	10	25	20	35	10	35	40	35	<table border="1"><tr><td>15</td><td>10</td><td>25</td></tr><tr><td>20</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>35</td><td>40</td><td>35</td></tr></table>	15	10	25	20	10	10	35	40	35	<table border="1"><tr><td>15</td><td>10</td><td>25</td></tr><tr><td>20</td><td>40</td><td>10</td></tr><tr><td>35</td><td>40</td><td>35</td></tr></table>	15	10	25	20	40	10	35	40	35	<table border="1"><tr><td>15</td><td>10</td><td>25</td></tr><tr><td>20</td><td>25</td><td>10</td></tr><tr><td>35</td><td>40</td><td>35</td></tr></table>	15	10	25	20	25	10	35	40	35	<table border="1"><tr><td>15</td><td>10</td><td>25</td></tr><tr><td>20</td><td>35</td><td>10</td></tr><tr><td>35</td><td>40</td><td>35</td></tr></table>	15	10	25	20	35	10	35	40	35
15	10	25																																															
20	35	10																																															
35	40	35																																															
15	10	25																																															
20	10	10																																															
35	40	35																																															
15	10	25																																															
20	40	10																																															
35	40	35																																															
15	10	25																																															
20	25	10																																															
35	40	35																																															
15	10	25																																															
20	35	10																																															
35	40	35																																															
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)																																													

Figura 4.24: Exemplos de filtros estatísticos de ordem em uma vizinhança de  $3 \times 3$  pixels. (a) valores originais de intensidade; (b) filtro mínimo; (c) filtro máximo; (d) filtro da mediana; (e) filtro da moda.

1. Em duas dimensões, funções Gaussianas são simétricas com relação à rotação. Isso significa que o grau de suavização realizado pelo filtro será o mesmo em todas as direções, ou seja, o filtro é isotrópico<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Um operador é considerado isotrópico se sua aplicação em uma imagem produz a mesma resposta em todas as direções. Um operador anisotrópico, por outro lado, é sensível a um determinado conjunto de direções.

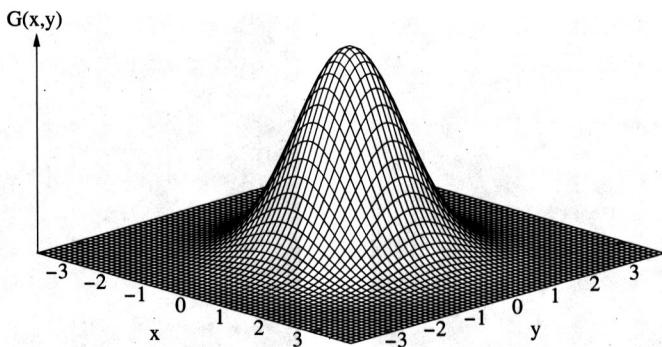


Figura 4.25: Função Gaussiana bidimensional com média  $(0,0)$  e  $\sigma = 1$ .

2. A suavização da imagem é realizada por meio da substituição de cada pixel por uma média ponderada dos pixels vizinhos, tal que o peso dado a um vizinho decresce monotonicamente com a distância do pixel central.
3. A largura de um filtro Gaussiano, ou seja, seu grau de suavização está relacionado com o parâmetro  $\sigma$ . Quanto maior o valor de  $\sigma$ , maior a largura do filtro Gaussiano e maior o seu grau de suavização.
4. Funções Gaussianas são separáveis<sup>2</sup>, portanto, uma convolução Gaussiana pode ser realizada processando a imagem com um filtro Gaussiano unidirecional e então processando o resultado com o mesmo filtro unidirecional orientado ortogonalmente ao filtro Gaussiano utilizado no primeiro estágio. Esse processo reduz consideravelmente o número de operações utilizadas na convolução Gaussiana.

Uma maneira comum de aproximar os coeficientes de um filtro Gaussiano é utilizar a expansão binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k \quad (4.26)$$

Os coeficientes da expansão binomial podem ser obtidos por meio do *triângulo de Pascal*, cujas sete primeiras linhas são mostradas em 4.27.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array} \quad (4.27)$$

Uma máscara unidimensional de tamanho  $n$  pode ser obtida tomando-se a  $n$ -ésima linha do triângulo de Pascal. Por exemplo, a máscara

$$\frac{1}{16} \boxed{1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1}$$

<sup>2</sup>A separabilidade dos filtros Gaussianos, ou seja,  $G(x,y) = G(x) G(y)$ , pode ser observada nas equações 2.11 e 4.25.

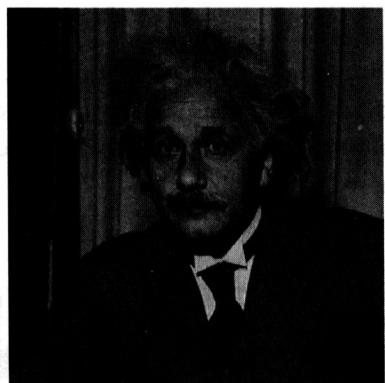
pode ser obtida pela quinta linha do triângulo de Pascal, dividida por um fator de escala igual à soma dos coeficientes da máscara, ou seja,  $2^{n-1}$ . O desvio padrão  $\sigma$  do filtro Gaussiano pode ser obtido como

$$\sigma = \frac{\sqrt{n-1}}{2} \quad (4.28)$$

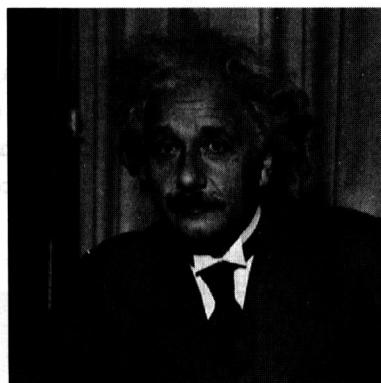
Uma máscara bidimensional para implementar o filtro Gaussiano com  $\sigma = 1.0$  pode ser obtida a partir de duas máscaras unidimensionais horizontal e vertical, conforme mostrado em 4.29.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \hline 1 \\ 6 \\ \hline 16 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 16 \\ \hline 16 \end{array} \quad \boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} = \frac{1}{256} \quad \begin{array}{c} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array} \quad (4.29)$$

A convolução de uma imagem por meio da máscara bidimensional, mostrada na expressão 4.29, requer 25 multiplicações e 24 adições por pixel (desconsiderando-se o fato de que essa operação pode não ser definida próxima das bordas da imagem). A aplicação das duas máscaras unidimensionais, uma após a outra, requer apenas 10 multiplicações e 8 adições por pixel. A figura 4.26 apresenta um exemplo de aplicação do filtro Gaussiano mostrado em 4.29.



(a)



(b)

Figura 4.26: Filtro Gaussiano. (a) imagem original; (b) imagem suavizada por filtro Gaussiano.

### Filtragem com Preservação de Bordas

As técnicas de filtragem passa-baixa para redução de ruído, como os filtros estatísticos da média ou mediana, podem suprimir detalhes importantes da imagem, por exemplo, linhas finas ou cantos de objetos. Isso ocorre porque tais filtros não levam em consideração se um determinado pixel está localizado sobre uma borda ou se os pixels vizinhos apresentam uma certa orientação. As figuras 4.27(a) e (b) ilustram regiões contendo uma linha vertical e o canto de um objeto em uma imagem, respectivamente, tal que a aplicação de um filtro da mediana causaria a supressão de detalhes.

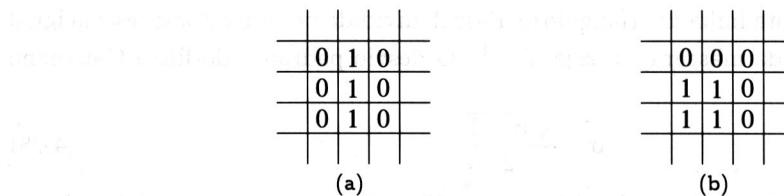


Figura 4.27: Supressão de detalhes em duas regiões após filtragem da mediana. (a) linha fina vertical; (b) canto de objeto.

Máscaras não retangulares podem ser utilizadas para reduzir o efeito da supressão de determinados detalhes da imagem. Por exemplo, a máscara ilustrada na figura 4.28, centrada em um pixel de interesse, poderia ser aplicada em casos nos quais linhas horizontais e verticais necessitam ser preservadas na filtragem da mediana.

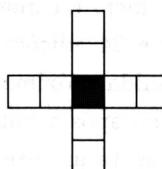


Figura 4.28: Vizinhança para preservar linhas horizontais e verticais na filtragem da mediana.

Uma das primeiras técnicas de filtragem com preservação de bordas foi proposta por Kuwahara et al. (1976). O filtro considera uma região quadrada de dimensões  $(2k - 1) \times (2k - 1)$  pixels ao redor de um pixel  $(x, y)$  da imagem. Essa região é subdividida em quatro janelas de  $k \times k$  pixels, conforme a figura 4.29.

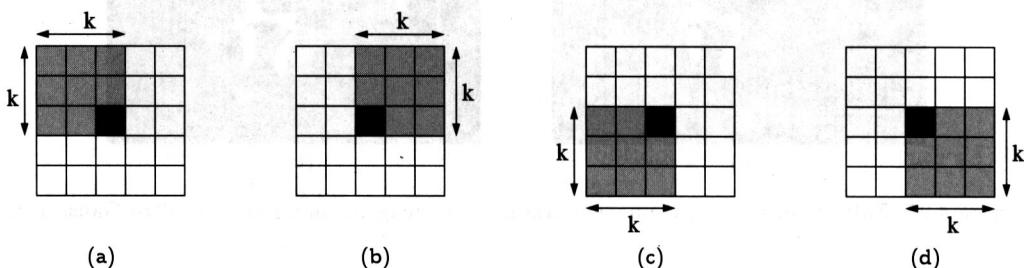


Figura 4.29: Máscaras de Kuwahara et al. (1976).

A variância dos níveis de cinza para cada janela é calculada. O valor de cada pixel  $(x, y)$  da imagem é substituído pela média dos níveis de cinza da janela, cuja variância é mínima. O método baseia-se no fato de que as regiões contendo bordas possuem uma variância mais alta do que regiões homogêneas, tal que a média é selecionada sobre as regiões suaves que não cruzam bordas. O algoritmo 4.4 ilustra a técnica de filtragem com preservação de bordas baseada no cálculo de variância de um conjunto de máscaras.

Métodos similares para preservação de bordas baseada no cálculo da variância de um conjunto de máscaras foram propostos por outros autores. Tomita e Tsuji (1977), Nagao e

### Filtragem com preservação de bordas

```

1 para cada pixel  $f(x,y)$  da imagem de entrada faça
2
3     calcular variância de cada máscara do conjunto sobre o pixel
         $f(x,y)$ .
4
5     escolher a máscara cuja variância é mínima.
6
7     atribuir ao pixel  $f(x,y)$  na imagem de saída a intensidade média
        na máscara escolhida.

```

Algoritmo 4.4: Filtragem com preservação de bordas.

Matsuyama (1979) e Somboonkaew et al. (1999) propõem um conjunto de cinco, nove e doze máscaras, respectivamente, de  $5 \times 5$  pixels para o processo de suavização. Nesses métodos, o valor de cada pixel da imagem é substituído pela média da máscara cuja variância é mínima. As figuras 4.30, 4.31 e 4.32 mostram, respectivamente, o conjunto de máscaras propostas por esses autores.

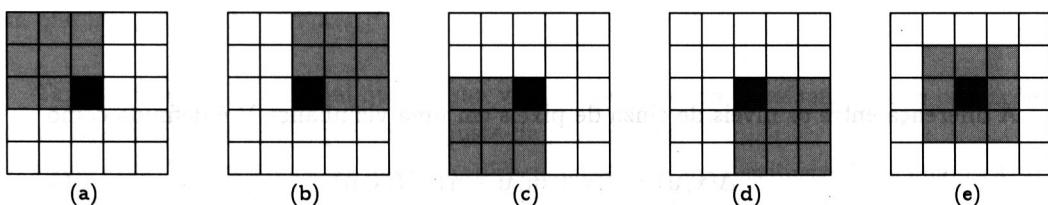


Figura 4.30: Máscaras de Tomita e Tsuji (1977).

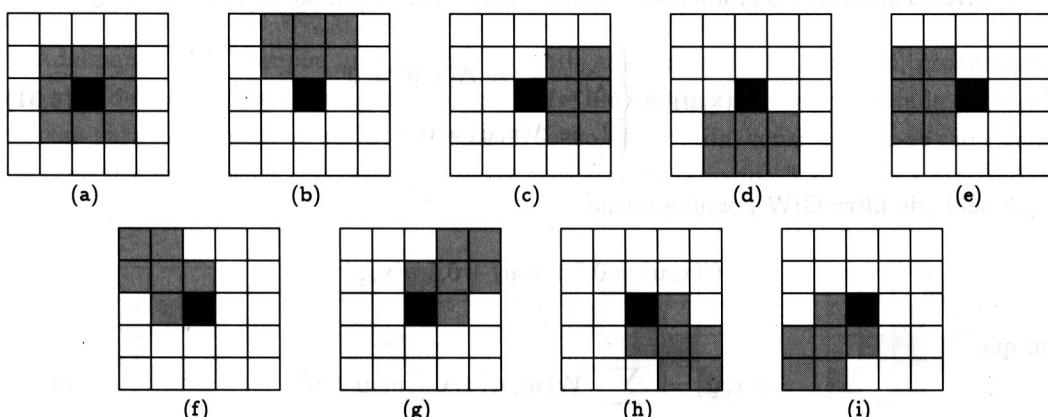


Figura 4.31: Máscaras de Nagao e Matsuyama (1979).

Outra técnica de filtragem com preservação de bordas foi proposta por Wang et al. (1981). O filtro, conhecido como *filtro ponderado pelo inverso do gradiente* (GIW, do inglês, *Gradient Inverse Weighted Filter*), é baseado no princípio de que as variações dos níveis de cinza no interior de uma região são menores do que as variações entre regiões.

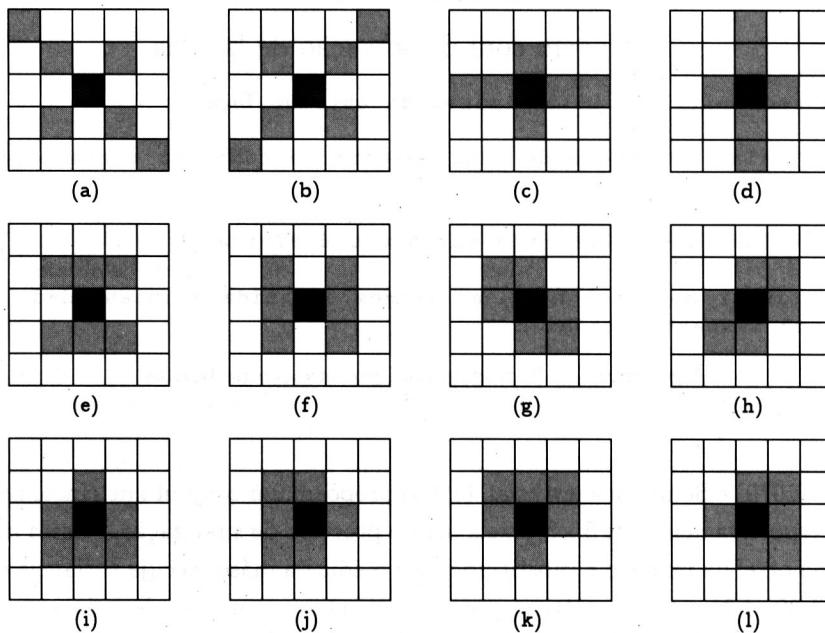


Figura 4.32: Máscaras de Somboonkaew et al. (1999).

A diferença entre os níveis de cinza de pixels em uma vizinhança  $V$  é definida como

$$\Delta(x, y) = |f(x + m, y + n) - f(x, y)| \quad (4.30)$$

em que  $f(x, y)$  é o nível de cinza do pixel  $(x, y)$ ,  $m$  e  $n$  podem assumir os valores -1, 0 ou 1, mas não podem ser ambos iguais a zero.

O inverso absoluto do gradiente no ponto  $(x, y)$  é definido a partir dessa diferença como

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta(x, y)}, & \text{se } \Delta(x, y) \neq 0 \\ 2, & \text{se } \Delta(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

A saída do filtro GIW possui a forma

$$f'(x, y) = 0.5 f(x, y) + 0.5 g(x, y) \quad (4.32)$$

em que

$$g(x, y) = \sum_{m, n \in V} W(m, n) f(x + m, y + n) \quad (4.33)$$

e

$$W(m, n) = \frac{\delta(x, y)}{\sum_{m, n \in V} \delta(x, y)} \quad (4.34)$$

Wang (1992) aperfeiçou o filtro GIW para a forma

$$f'(x, y) = K(x, y) f(x, y) + [1 - K(x, y)] g(x, y) \quad (4.35)$$

em que

$$K(x, y) = \frac{\sigma_g^2(x, y)}{\sigma_f^2(x, y) + \sigma_g^2(x, y)} \quad (4.36)$$

Assume-se que  $f(m, n)$ , para  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , são variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição Gaussiana com variância  $\sigma_f^2(x, y)$ . A variância de  $g(x, y)$  é dada por  $\sigma_g^2(x, y)$ .

Da equação 4.36, se  $\sigma_f^2(x, y)$  e  $\sigma_g^2(x, y)$  forem iguais, então  $K(x, y) = 0.5$ , obtendo-se o filtro original apresentado na equação 4.32. Entretanto, em muitas situações,  $\sigma_g^2(x, y)$  é muito menor que  $\sigma_f^2(x, y)$ . Como um valor exato para  $\sigma_g^2(x, y)$  não é disponível, Wang (1992) considera  $W(x, y)$  como uma constante no ponto  $(x, y)$  para se obter um valor aproximado dado por

$$\sigma_g^2(x, y) = \sigma_f^2(x, y) \left[ \sum_{m, n \in V} W(m, n)^2 \right] \quad (4.37)$$

Substituindo a equação 4.37 em 4.36, obtém-se

$$K(x, y) = \frac{D(x, y)}{1 + D(x, y)} \quad (4.38)$$

em que  $D(x, y) = \sum_{m, n \in V} W(m, n)^2$ .

Tanto o filtro GIW original quanto sua versão aperfeiçoada envolvem apenas operações aritméticas simples e não requerem o ajuste de parâmetros.

Hung (1997) propõe o uso de máscaras direcionais, como aquelas ilustradas na figura 4.30, para melhorar os filtros de Wang et al. (1981) e Wang (1992). Uma vizinhança homogênea ótima é selecionada para aplicar o filtro GIW. A variância  $\sigma_f^2$  é calculada para cada uma das cinco máscaras direcionais. A máscara que resultar no menor valor para  $\sigma_f^2$  corresponderá à vizinhança ótima  $V$ . O cálculo da saída do filtro no método de Hung segue os mesmos passos que o método de Wang, levando-se em conta a vizinhança ótima  $V$ .

Adelmann (1999) propõe uma técnica de filtragem para redução de ruído, procurando preservar detalhes finos da imagem. Inicialmente, um teste é realizado para cada pixel da imagem para determinar se ele está localizado sobre uma borda, considerando-se cada uma das possíveis orientações representadas pelas máscaras de tamanho  $5 \times 5$  pixels mostradas na figura 4.33.

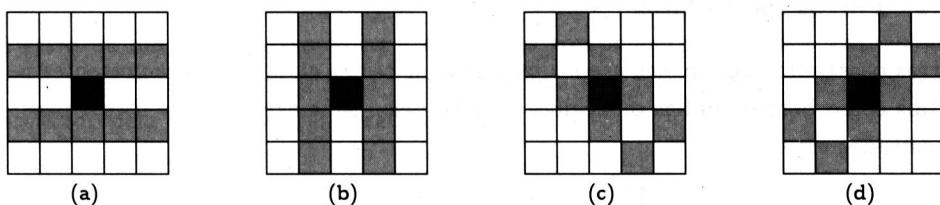


Figura 4.33: Máscaras de Adelmann (1999) para detecção de bordas em diferentes orientações. (a) horizontal; (b) vertical; (c)-(d) diagonais.

A média dos pixels dispostos de acordo com cada uma dessas orientações é calculada com respeito ao pixel central da vizinhança, seguida por um processo de diferenciação, o qual

consiste na multiplicação de uma matriz de  $1 \times 2$  pixels com um núcleo de diferenciação de  $1 \times 2$  pixels com valores -1 e 1, cujo objetivo é determinar a presença de borda. O processo de diferenciação para a orientação da figura 4.33(a) é ilustrado na figura 4.34, em que  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$  representam a média calculada para cada linha, no interior da vizinhança do pixel.

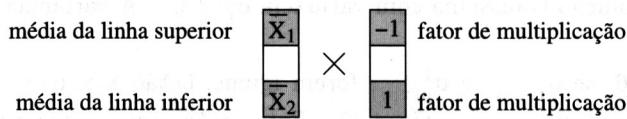


Figura 4.34: Processo de diferenciação para a orientação horizontal.

Quanto maior a diferença absoluta  $|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|$ , mais pronunciada é a borda. A diferença mais alta entre todas as orientações é selecionada. Flutuações mínimas nos níveis de cinza podem ocorrer mesmo em regiões praticamente homogêneas (planas) da imagem, tal que a diferença pode ser comparada com um limiar para determinar o que deve ou não ser preservado como borda.

Finalmente, o valor do pixel central da vizinhança é substituído por uma média calculada para os pixels dispostos de acordo com uma das máscaras da figura 4.35, dependendo da orientação que a borda foi estimada.

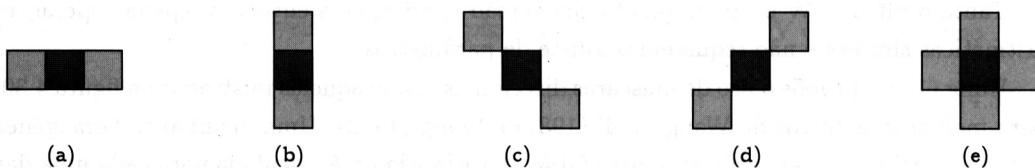


Figura 4.35: Máscaras para cálculo do pixel central.

Caso o pixel central não esteja sobre uma borda, ou seja, o pixel pertence a uma região plana da imagem, o valor do pixel central é substituído pela média dos pixels mostrados na figura 4.35(e). Dessa forma, pode-se obter uma suavização mais acentuada e mais efetiva em termos de redução de ruído nessas áreas da imagem.

#### 4.4.1.2 Filtros Passa-Altas

Os filtros passa-altas podem ser usados para realçar certas características presentes na imagem, tais como bordas, linhas ou regiões de interesse. Dois exemplos de filtros passa-altas são mostrados em 4.39.

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

A figura 4.36(b) mostra o resultado da aplicação do filtro passa-alta  $h_2$  sobre a imagem da figura 4.36(a).

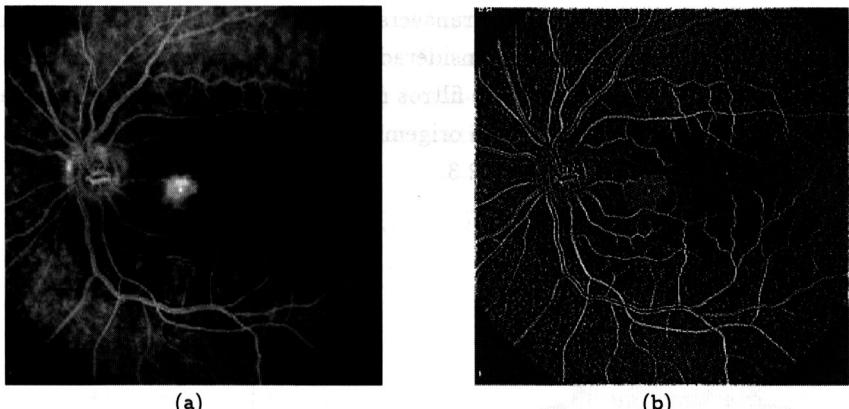


Figura 4.36: Filtro passa-alta. (a) imagem original; (b) resultado após aplicação de filtro passa-alta.

#### 4.4.2 Filtragem no Domínio de Freqüência

A base matemática das técnicas de filtragem no domínio de freqüência é o teorema da convolução. Seja  $g(x, y)$  a imagem formada pela convolução (denotada pelo símbolo  $*$ ) da imagem  $f(x, y)$  com um operador linear  $h(x, y)$ , ou seja

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \quad (4.40)$$

Então, pelo teorema da convolução, a seguinte relação no domínio de freqüência é satisfeita

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) \quad (4.41)$$

em que  $G$ ,  $F$  e  $H$  são os resultados obtidos pela aplicação da transformada de Fourier nas imagens  $g$ ,  $f$  e  $h$ , respectivamente. Na terminologia de sistemas lineares, a transformada  $H(u, v)$  é denominada função de *transferência do filtro*.

O problema consiste, então, em definir a função  $H(u, v)$  que conduza à imagem desejada  $G(u, v)$ . A transformada inversa,  $F^{-1}\{G(u, v)\}$ , define a imagem filtrada no domínio espacial  $g(x, y)$ .

##### 4.4.2.1 Filtros Passa-Baixas

O objetivo de um *filtro passa-baixa* é manter os componentes de baixa freqüência e reduzir os componentes das bandas de alta freqüência. Um filtro passa-baixa *ideal* pode ser representado pela função de transferência

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (4.42)$$

em que  $D_0$  é a *freqüência de corte* medida a partir da origem e  $D(u, v)$  é a distância do ponto  $(u, v)$  até a origem do plano da freqüência, ou seja

$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4.43)$$

Um gráfico em perspectiva e a seção transversal de um filtro passa-baixa são mostrados na figura 4.37. Os filtros passa-baixas considerados nesta seção são radialmente simétricos com respeito à origem. A especificação de filtros radialmente centrados em um quadrado de freqüência é baseada na hipótese de que a origem da transformada de Fourier está centrada no quadrado, como discutido na seção 3.2.3.

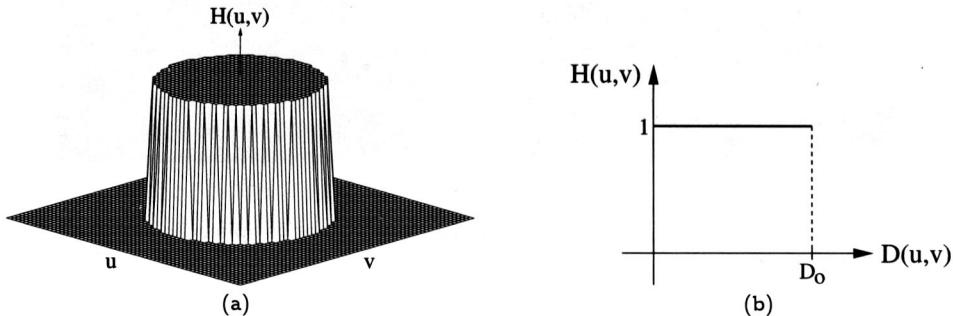


Figura 4.37: Filtro passa-baixa. (a) gráfico da função de transferência; (b) seção transversal do filtro.

Pode-se observar que, de acordo com a equação 4.42, todas as freqüências contidas dentro do círculo de raio  $D_0$  não sofrem atenuações, enquanto todas as freqüências fora deste círculo são completamente atenuadas, por isso, o termo filtro *ideal*.

Assim como no domínio espacial, os filtros passa-baixas no domínio de freqüência causam uma suavização da imagem, uma vez que as altas freqüências, correspondendo às transições abruptas, são atenuadas. Tais filtros tendem a minimizar o efeito de ruído, entretanto, diminuem a nitidez da imagem.

O *filtro passa-baixa de Butterworth* de ordem  $n$  é dado pela função de transferência

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}} \quad (4.44)$$

Essa função define um filtro passa-baixa que não apresenta a transição abrupta na freqüência de corte, como apresentada pelo filtro passa-baixa ideal. Um gráfico em perspectiva e a seção transversal de um filtro passa-baixa são mostrados na figura 4.38.

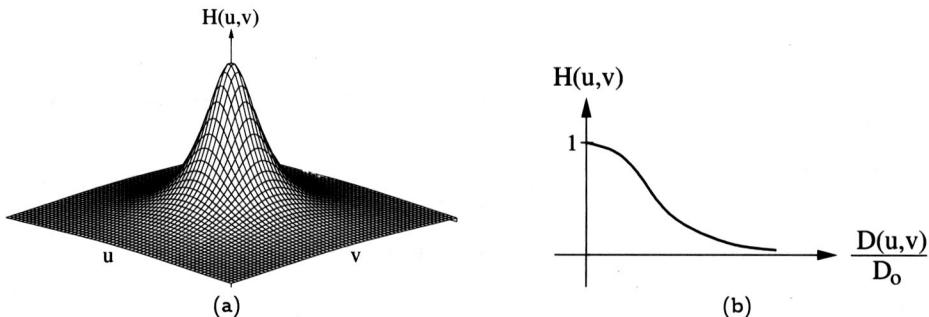


Figura 4.38: Filtro passa-baixa de Butterworth. (a) gráfico da função de transferência; (b) seção transversal do filtro para  $n = 1$ .

Normalmente, o valor de freqüência de corte  $D_0$  corresponde a uma fração do valor máximo de  $H(u, v)$ . Pode-se verificar facilmente que, quando  $D(u, v) = D_0$ , então  $H(u, v) = 0.5$ , ou seja, o valor de  $H(u, v)$  reduz-se para 50% de seu valor máximo. Outro valor tipicamente utilizado é  $1/\sqrt{2}$  do valor máximo de  $H(u, v)$ , resultando em

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D(u, v)/D_0]^{2n}} \approx \frac{1}{1 + 0.414[D(u, v)/D_0]^{2n}} \quad (4.45)$$

#### 4.4.2.2 Filtros Passa-Altas

Como mencionado anteriormente, as transições bruscas de um sinal estão associadas aos componentes de alta freqüência do espectro de Fourier. Assim, um realce da imagem, com ênfase nessas transições, pode ser obtido deixando-se passar as altas freqüências e atenuando-se as demais. As transições entre diferentes regiões da imagem tornam-se mais nítidas, entretanto, possuem o efeito indesejado de enfatizar o ruído que possa existir na imagem.

Um *filtro passa-alta ideal*, ilustrado na figura 4.39, é dado pela função de transferência

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (4.46)$$

em que  $D_0$  é a freqüência de corte medida a partir da origem, no plano da freqüência, e  $D(u, v)$  é definida como anteriormente na equação 4.43.

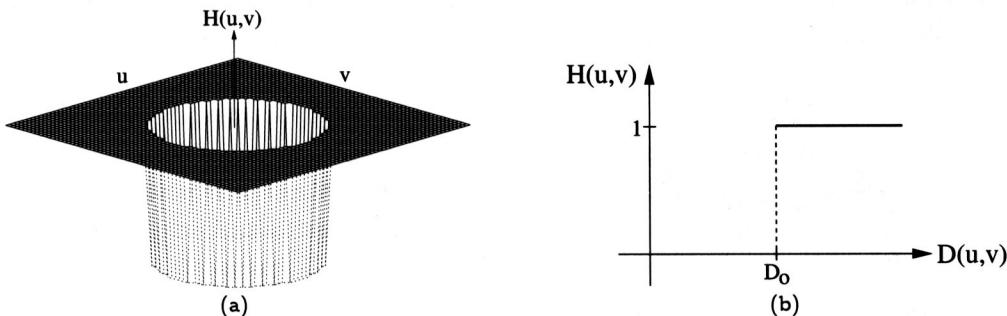


Figura 4.39: Filtro passa-alta. (a) gráfico da função de transferência; (b) seção transversal do filtro para  $n = 1$ .

O *filtro passa-alta de Butterworth* de ordem  $n$ , ilustrado na figura 4.40, é definido pela função

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}} \quad (4.47)$$

Assim como no caso do filtro passa-baixa de Butterworth, quando  $D(u, v) = D_0$ , o valor de  $H(u, v)$  reduz-se para 50% do seu valor máximo. Um valor tipicamente utilizado é  $1/\sqrt{2}$  do valor máximo de  $H(u, v)$ , resultando em

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D_0/D(u, v)]^{2n}} \approx \frac{1}{1 + 0.414[D_0/D(u, v)]^{2n}} \quad (4.48)$$

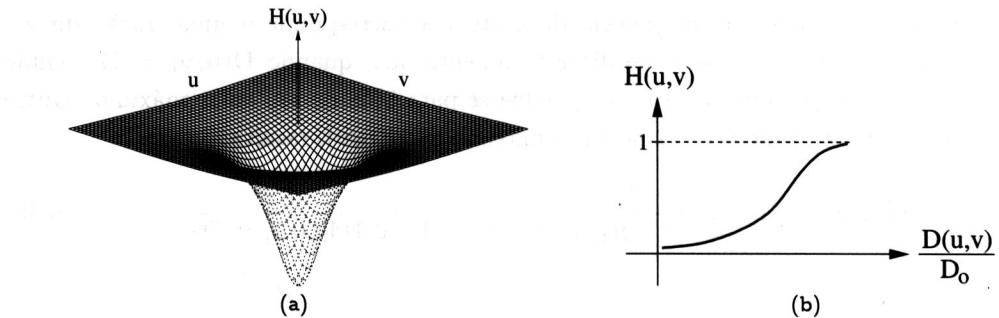


Figura 4.40: Filtro passa-alta de Butterworth. (a) gráfico da função de transferência; (b) seção transversal do filtro.

#### 4.4.2.3 Filtro Passa-Faixa

Um *filtro passa-faixa* permite a passagem das freqüências localizadas em uma faixa ou banda específica, enquanto atenua ou completamente suprime todas as outras freqüências. Um filtro passa-faixa ideal é dado pela função

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{se } D(u,v) < D_0 - \frac{W}{2} \text{ ou se } D(u,v) > D_0 + \frac{W}{2} \\ 1, & \text{se } D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u,v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \end{cases} \quad (4.49)$$

em que  $W$  é a largura da banda,  $D_0$  é o raio da região para passagem das freqüências de corte em torno da origem e  $D(u,v)$  é definida como anteriormente na equação 4.43. Um gráfico em perspectiva e a seção transversal de um filtro passa-faixa são mostrados na figura 4.41.

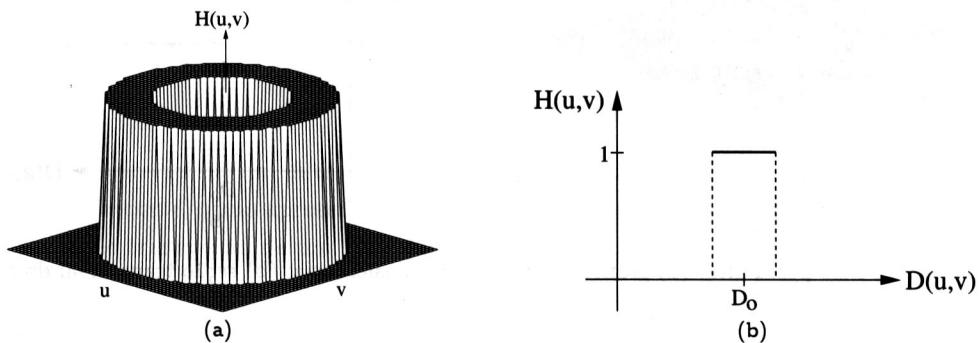


Figura 4.41: Filtro passa-faixa. (a) gráfico da função de transferência; (b) seção transversal do filtro.

O *filtro passa-faixa de Butterworth* de ordem  $n$ , ilustrado na figura 4.42, é definido pela função

$$H(u,v) = 1 - \frac{1}{1 + [W D(u,v)]/[D^2(u,v) - D_0^2]^{2n}} \quad (4.50)$$

em que  $W$ ,  $D_0$  e  $D(u,v)$  são definidos de maneira similar ao filtro passa-faixa ideal. Um gráfico em perspectiva e a seção transversal de um filtro passa-faixa de Butterworth são mostrados na figura 4.42.

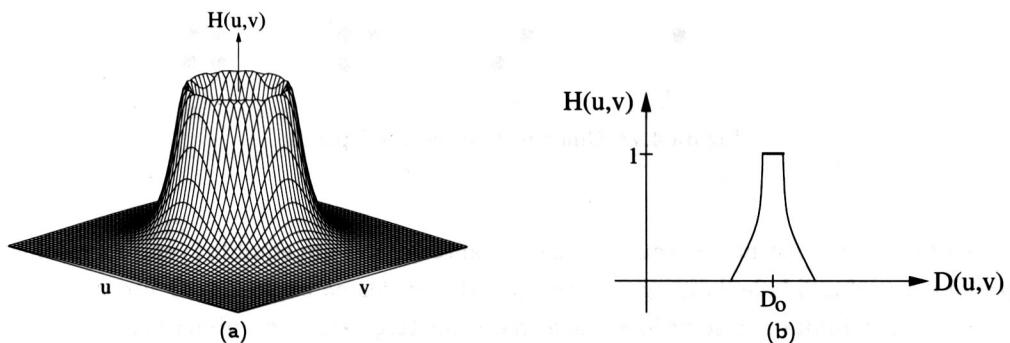


Figura 4.42: Filtro passa-faixa de Butterworth. (a) gráfico da função de transferência; (b) seção transversal do filtro.

Assim como no caso do filtro passa-baixa de Butterworth, quando  $D(u,v) = D_0$ , o valor de  $H(u,v)$  reduz-se para 50% do seu valor máximo. Um valor tipicamente utilizado é  $1/\sqrt{2}$  do valor máximo de  $H(u,v)$ , resultando em

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D_0/D(u,v)]^{2n}} \approx \frac{1}{1 + 0.414[D_0/D(u,v)]^{2n}} \quad (4.51)$$

## 4.5 Técnica de Meios-Tons

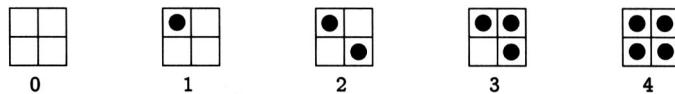
A *técnica de meios-tones* (do inglês, *halftoning*) é um processo que emprega padrões formados por pontos pretos e brancos para reduzir o número de níveis de cinza de uma imagem. Devido à tendência do sistema visual humano em atenuar a distinção entre pontos com tons diferentes, os padrões de pontos pretos e brancos produzem um efeito visual como se a imagem fosse composta de tons de cinza claros e escuros.

Essa técnica é bastante antiga e muito utilizada na impressão de imagens em jornais e revistas, em que apenas os níveis preto (tinta) e branco (papel) são necessários. Há diversos métodos para geração de imagens meios-tones, em particular, o *pontilhado ordenado* (do inglês, *ordered dithering*) e *pontilhado com difusão de erro* (do inglês, *dithering with error diffusion*).

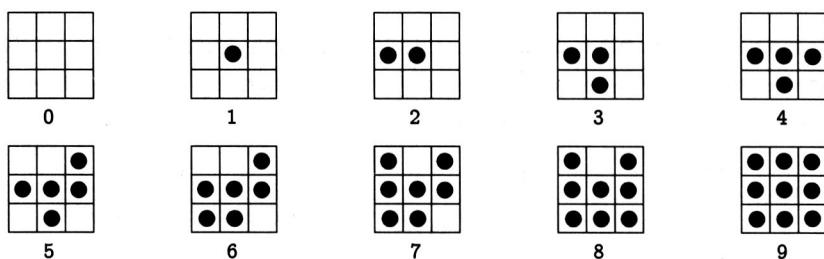
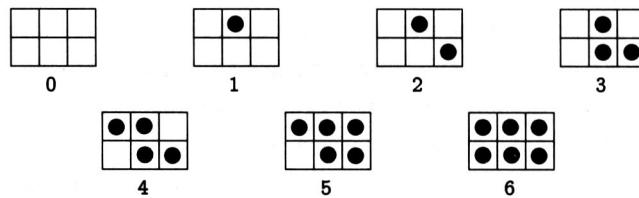
A técnica de meios-tones consiste, basicamente, em imprimir em cada unidade de resolução (por exemplo,  $0.25 \times 0.25 \text{ cm}^2$ ) um círculo de tinta preta cujo tamanho é inversamente proporcional à intensidade da imagem na unidade de resolução. Dessa forma, os pontos são menores nas regiões claras da imagem e maiores nas regiões escuras.

A figura 4.43 mostra um conjunto de regiões de  $2 \times 2$  pixels utilizado para formar cinco padrões. Alguns cuidados são necessários durante a geração dos padrões. Os pontos devem ser dispostos de maneira a minimizar efeitos indesejáveis na imagem resultante, por exemplo, a ocorrência de linhas horizontais ou verticais em uma parte da imagem. Outra consideração importante é que, se um pixel for preto no padrão  $i$ , ele também deve ser preto em todos os padrões  $j > i$ , reduzindo a ocorrência de falsos contornos na imagem.

Padrões maiores podem ser usados para criar um número maior de níveis de cinza. Padrões de tamanho  $3 \times 3$  pixels e  $3 \times 2$  pixels são mostrados nas figuras 4.44 e 4.45, respectivamente. Para padrões com dimensões  $n \times m$  pixels e dois níveis (branco e preto), o

Figura 4.43: Cinco padrões de  $2 \times 2$  pixels.

número de arranjos distintos é  $n^m + 1$ . É importante ocorrer um equilíbrio entre a resolução espacial e a profundidade da imagem, conceitos discutidos na seção 2.4. O uso de padrões de  $3 \times 3$  pixels limita a resolução espacial para um terço em cada dimensão da imagem, entretanto, fornece 10 níveis de cinza. Evidentemente, a escolha da relação entre a resolução espacial e a profundidade da imagem depende da acuidade visual humana e da distância da qual a imagem é vista.

Figura 4.44: Dez padrões de  $3 \times 3$  pixels.Figura 4.45: Sete padrões de  $3 \times 2$  pixels.

Os conjuntos de padrões, mostrados nas figuras 4.43 a 4.45, podem ser representados, respectivamente, por meio das matrizes ilustradas na figura 4.46, tal que um determinado padrão  $i$  é formado pela ativação dos elementos da matriz cujos valores são menores do que  $i$ .

<table border="1"> <tr><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	0	2	3	1	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>7</td></tr> </table>	6	8	4	1	0	3	5	2	7	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	3	0	4	5	2	1
0	2																				
3	1																				
6	8	4																			
1	0	3																			
5	2	7																			
3	0	4																			
5	2	1																			
(a)	(b)	(c)																			

Figura 4.46: Padrões representados por matrizes.

Devido a essa ordem na qual os padrões são formados, essa técnica de meios-tonos é conhecida como pontilhado ordenado. Os valores das células da matriz podem ser utilizados como limiares. Se o valor (normalizado) do pixel for menor que o número correspondente à

célula da matriz, o pixel será substituído pelo valor preto, caso contrário, será substituído pelo valor branco.

Padrões maiores (quadrados) podem ser gerados a partir de matrizes de ordem  $2^n \times 2^n$ , conforme a relação de recorrência:

$$D_n = \begin{bmatrix} 4D_{n/2} + 2U_{n/2} & 4D_{n/2} \\ 4D_{n/2} + U_{n/2} & D_{n/2} + U_{n/2} \end{bmatrix} \quad n \geq 4 \quad (4.52)$$

em que  $D_2$  é a matriz de ordem  $2 \times 2$ , ilustrada na figura 4.46(a), e  $U_n$  é uma matriz  $n \times n$ , cujos elementos são todos unitários.

Técnicas de pontilhado com difusão de erro procuram distribuir a diferença entre o valor exato de cada pixel e seu valor aproximado a um conjunto de pixels adjacentes. A figura 4.47 mostra algumas propostas para difusão de erro (Floyd e Steinberg 1976, Stevenson e Arce 1985, Burkes 1988, Sierra 1989, Stucki 1981, Jarvis et al. 1976). A técnica proposta por Floyd e Steinberg é apresentada em mais detalhes no algoritmo 4.5.

### Técnica de pontilhado com difusão de erro de Floyd e Steinberg

```

1 // imagem de entrada f(x,y) com 256 níveis de cinza
2 // imagem de saída g(x,y) com 2 níveis de cinza
3
4 // percorrer todos os pixels da imagem (limites da imagem
5 // devem ser adequadamente considerados)
6
7 para x = 0 até M - 1 faça
8   para y = 0 até N - 1 faça
9
10    // se valor do pixel f(x,y) for menor do que 128, atribuir
11    // valor 0 (branco) ao pixel; caso contrário, atribuir
12    // valor 1 (preto)
13    se f(x,y) < 128 então
14      g(x,y) ← 0
15    senão
16      g(x,y) ← 1
17
18    // armazenar o erro, ou seja, a diferença entre o valor
19    // exato do pixel e o valor aproximado
20    erro ← f(x,y) - g(x,y) * 255
21
22    // distribuir o erro aos pixels adjacentes,
23    // conforme figura 4.47(a)
24    f(x+1,y) ← f(x+1,y) + (7/16) × erro
25    f(x-1,y+1) ← f(x-1,y+1) + (3/16) × erro
26    f(x,y+1) ← f(x,y+1) + (5/16) × erro
27    f(x+1,y+1) ← f(x+1,y+1) + (1/16) × erro

```

Algoritmo 4.5: Técnica de pontilhado com difusão de erro de Floyd e Steinberg.

A ordem na qual a imagem é percorrida pode produzir resultados diferentes no processo de meio-tom. A varredura da esquerda para a direita (figura 4.48(a)) pode gerar padrões indesejados ou a impressão de uma certa direcionalidade na imagem resultante. Para evitar esses efeitos, uma opção é alternar a direção de varredura a cada linha (figura 4.48(b)).

	$f(x,y)$	7/16
3/16	5/16	1/16

(a) Floyd e Steinberg

		$f(x,y)$		32/200	
12/200		26/200		30/200	
	12/200		26/200		12/200
5/200		12/200		12/200	

(b) Stevenson e Arce

		$f(x,y)$	8/32	4/32
2/32	4/32	8/32	4/32	2/32

(c) Burkes

		$f(x,y)$	5/32	3/32
2/32	4/32	5/32	4/32	2/32

(d) Sierra

		$f(x,y)$	8/42	4/42
2/42	4/42	8/42	4/42	2/42

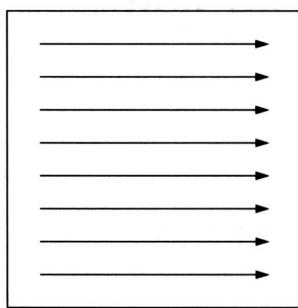
(e) Stucki

		$f(x,y)$	7/48	5/48
3/48	5/48	7/48	5/48	3/48

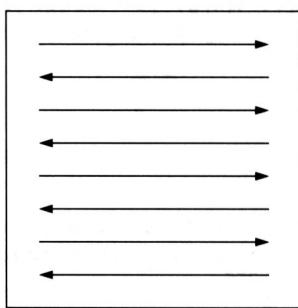
(f) Jarvis, Judice e Ninke

Figura 4.47: Formas de distribuição de erro em diferentes técnicas de pontilhado com difusão de erro.

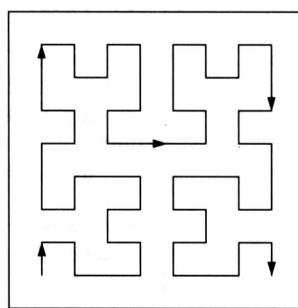
Uma outra abordagem utiliza curvas de preenchimento do espaço para distribuir o erro de quantização da imagem. A curva de Hilbert, proposta por David Hilbert em 1891 e baseada nas curvas de preenchimento descritas pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1890, possui características úteis para geração de imagens em meios-tonos, dentre elas o percurso que visita exatamente uma vez cada ponto disposto em uma grade quadrada (figura 4.48(c)).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.48: Formas de varredura da imagem. (a) unidirecional; (b) alternada; (c) curva de Hilbert.

As figuras 4.49(c) e (d) mostram as imagens obtidas pela aplicação das técnicas de pontilhado ordenado e pontilhado com difusão de erro, formadas com os padrões da figura 4.44. Apesar da significativa redução dos níveis de cinza, os resultados são aceitáveis para aplicações em que não há dispositivos de saída de alta qualidade. A figura 4.49(b) mostra o resultado da conversão da imagem original da figura 4.49(a) por meio da técnica de limiarização global<sup>3</sup>, em que pixels da imagem com valores iguais ou superiores a 150 são convertidos para a cor branca e valores inferiores a 150 são convertidos para a cor

<sup>3</sup>Técnicas de limiarização são descritas na seção 5.2 do capítulo 5.

preta. Pode-se observar que, quando comparada com a técnica de meio-tom, a técnica de limiarização resulta em grande perda de detalhes finos.

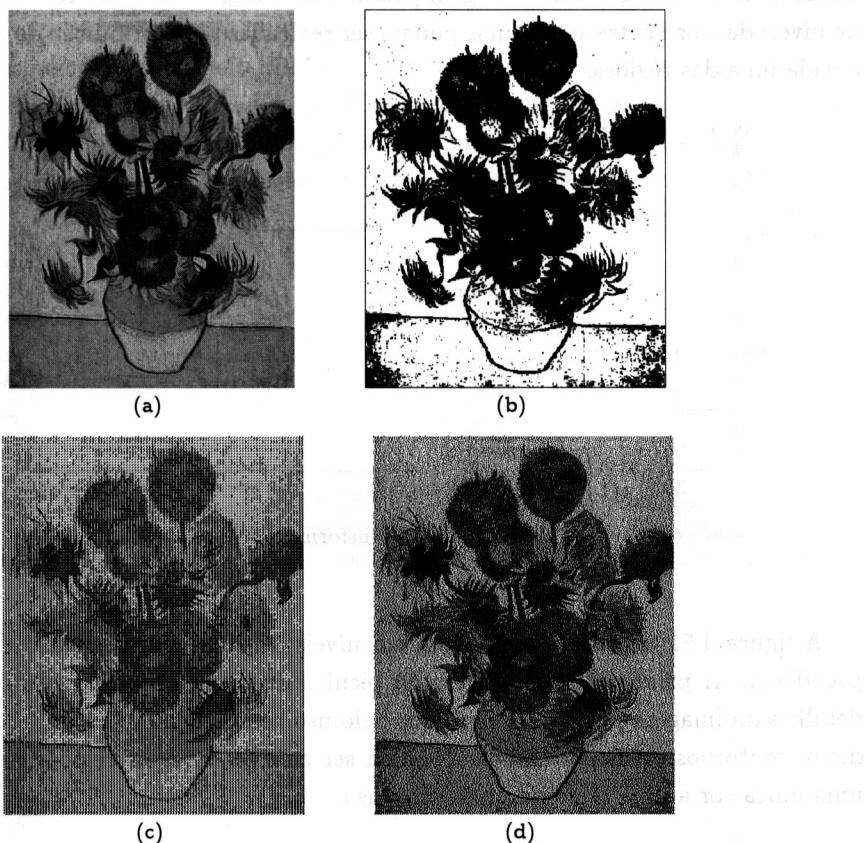


Figura 4.49: Aplicação da técnica de meios-tonos com os padrões da figura 4.44. (a) imagem original com 256 níveis de cinza; (b) imagem binária; (c) resultado obtido pelo pontilhado ordenado; (d) resultado obtido pelo pontilhado com difusão de erro.

## 4.6 Realce de Imagens Baseado em Cores

As cores presentes em uma imagem desempenham um papel significativo no processo de identificação de objetos realizado tanto pelos seres humanos quanto pelos computadores. O sistema visual humano (discutido na seção 2.8) é capaz de discernir milhares de tons e intensidades de cores, comparado com apenas algumas dezenas de níveis de cinza.

As seções seguintes descrevem algumas técnicas para realçar imagens por meio do uso de cores.

### 4.6.1 Transformação Pseudocor

A *transformação pseudocor* converte uma imagem de níveis de cinza em uma imagem colorida. Esse processo é realizado mapeando-se cada nível de cinza ou faixa de níveis em uma cor diferente.

A figura 4.50 mostra uma função de mapeamento, em que cada faixa de níveis de cinza é associada a uma única cor. Essa técnica, também conhecida como *fatiamento por densidade*, pode ser útil quando a imagem possui várias regiões de interesse com pouca variação de níveis de cinza entre si, as quais podem ser realçadas pela atribuição de uma cor diferente a cada uma das regiões.

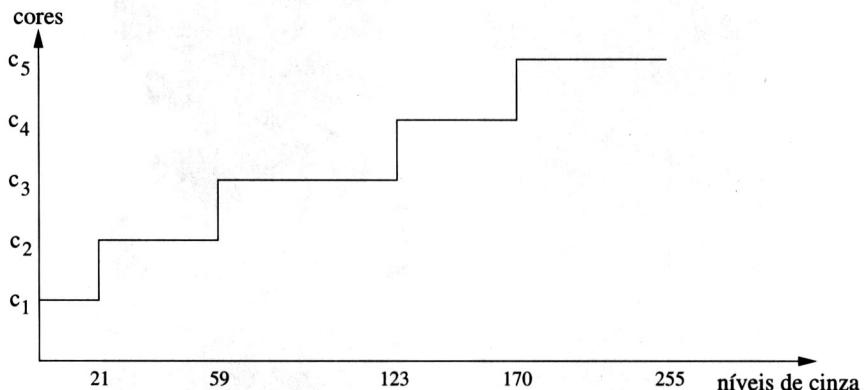


Figura 4.50: Transformação pseudocor.

A figura 4.51 mostra uma imagem em níveis de cinza e o resultado da transformação pseudocor. A principal desvantagem da técnica de transformação pseudocor é que certos detalhes da imagem podem ser perdidos pelo uso reduzido de um conjunto de cores. Além disso, contornos artificiais também podem ser criados entre as regiões pela associação de uma única cor a uma faixa de níveis de cinza.

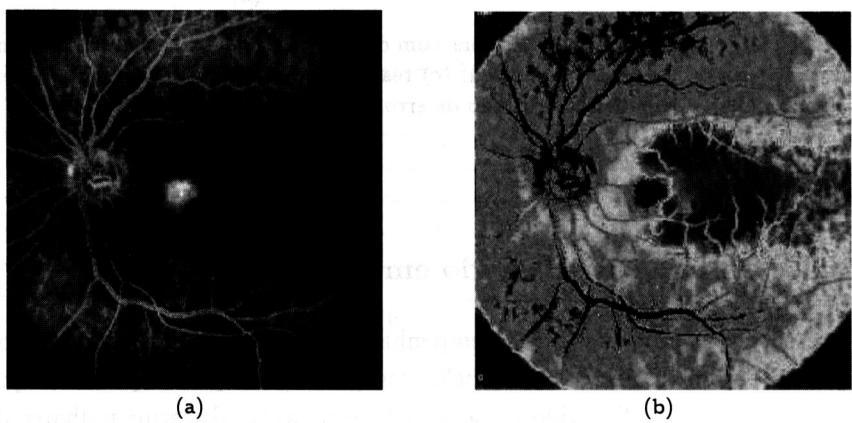


Figura 4.51: Transformação pseudocor. (a) imagem original; (b) imagem transformada.

#### 4.6.2 Realce com Transformação HSI

O apêndice D apresenta vários modelos de cores para representação de imagens coloridas. O modelo HSI é apropriado para realce de imagens coloridas, pois as informações de matiz (H), saturação (S) e intensidade (I) da imagem são representadas separadamente. Ao contrário

do modelo RGB, no qual esses componentes estão combinados, o modelo HSI permite que cada componente possa ser analisado e processado individualmente.

Um exemplo de realce de imagens coloridas é mostrado na figura 4.52. Na imagem colorida original, representada com o modelo RGB, alguns detalhes não estão nítidos. Após a conversão da imagem para o modelo HSI, seu componente de intensidade é equalizado por meio da abordagem discutida na seção 4.3.2. A imagem resultante é novamente convertida para o modelo RGB, cujos detalhes são visivelmente mais aparentes. A distribuição das intensidades antes e após a equalização são também apresentadas.

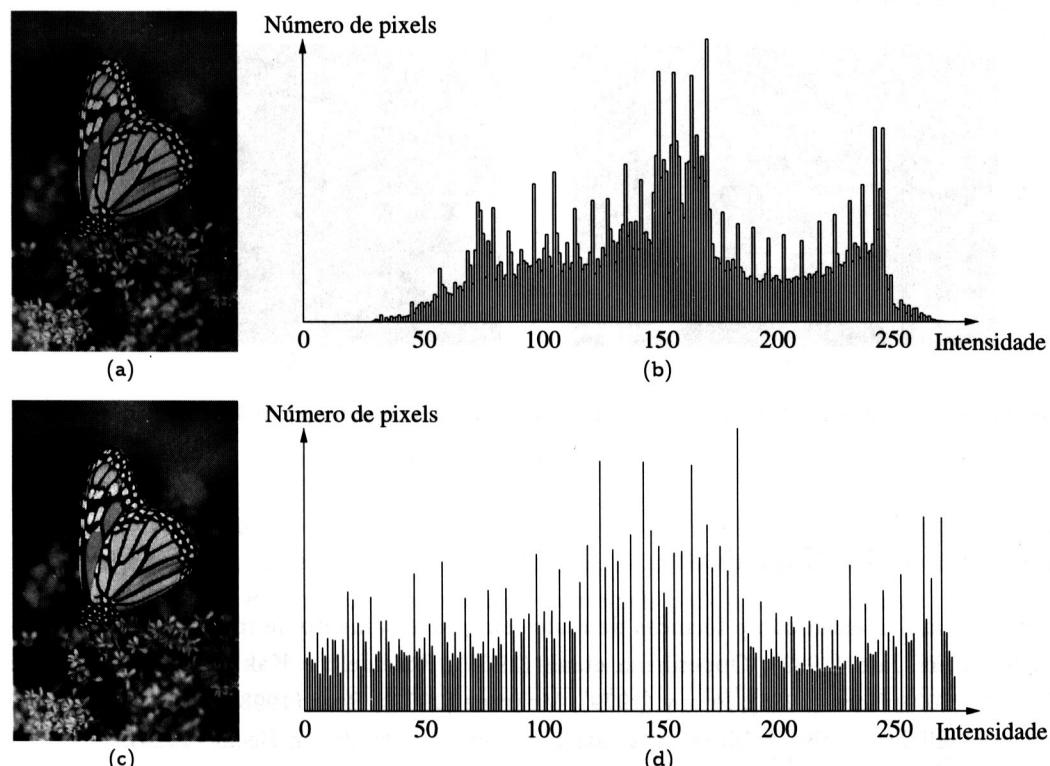


Figura 4.52: Realce com transformação HSI. (a) imagem original no modelo RGB; (b) histograma de intensidade da imagem original; (c) imagem resultante após equalização e conversão para o modelo RGB; (d) histograma de intensidade da imagem equalizada.

Uma aplicação da transformação HSI é a fusão de imagens multiespectrais com uma imagem pancromática (composta de apenas uma banda) de alta resolução espacial. No processo de fusão, a imagem composta por três bandas multiespectrais é transformada do modelo de cores RGB para o modelo HSI. A imagem associada à intensidade é então substituída pela banda pancromática. Posteriormente, a transformação inversa de HSI para RGB é aplicada, resultando em uma imagem multiespectral com melhor resolução espacial do que a imagem original.

#### 4.6.3 Realce por Falsa Cor

Conforme mencionado no início desta seção, o sistema visual humano pode distinguir milhares de tons de cores, comparado com apenas algumas dezenas de níveis de cinza. A técnica

de *realce por falsa cor* utiliza um conjunto de cores para destacar certas regiões de interesse ou informações espectrais, auxiliando a interpretação das imagens.

A transformação pode ser aplicada em imagens monocromáticas ou coloridas. Embora o resultado possa produzir imagens cujas cores não correspondam aos valores espectrais reais da cena, o realce por falsa cor pode melhorar significativamente a qualidade visual das imagens.

Um exemplo de aplicação da técnica de realce por falsa cor, ilustrada na figura 4.53, é a redistribuição de cores em uma imagem de satélite de baixo contraste para tornar certos detalhes mais perceptíveis.

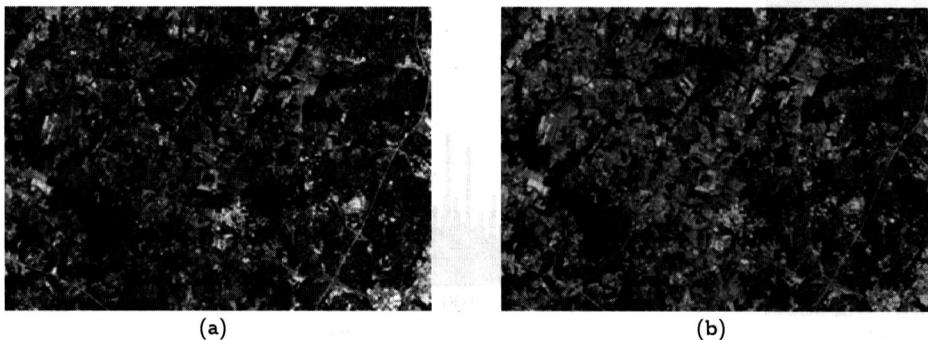


Figura 4.53: Realce por falsa cor. (a) imagem original; (b) imagem após redistribuição de cores.

## 4.7 Notas Bibliográficas

Leitura complementar sobre técnicas de realce em processamento de imagens pode ser encontrada em Jain (1989), Oppenheim et al. (1968), Rosenfeld e Kak (1982), Gonzalez e Woods (2000), Horn (1986), Frisby (1979), Mokrane (1992), Russ (1998) e Schalkoff (1989). Material adicional sobre brilho e contraste pode ser encontrado em Hecht (1924).

Fundamentos sobre modelos de cores são apresentados em Foley e Dam (1982) e Wyszecki e Stiles (2000). Referências adicionais sobre processamento de imagens coloridas podem ser encontradas em Plataniotis e Venetsanopoulos (2000) e Lukac e Plataniotis (2006).

Conceitos sobre filtragem espacial são discutidos em Schowengerdt (1983), Levine (1985) e Gonzalez e Woods (2002). Referências sobre filtragem no domínio de freqüência são encontradas em Oppenheim e Shafer (1975) e Pitas e Vanetsanopoulos (1983).

Referências adicionais sobre técnicas de meios-tonos e de pontilhado ordenado e com difusão de erro podem ser encontradas em Limb (1969) e Ulichney (1988). Técnicas de pontilhado utilizando curvas de preenchimento do espaço são descritas em Velho e Gomes (1991), Asano (1996) e Kamata (1996).

## 4.8 Problemas

1. Verificar se são falsas (F) ou verdadeiras (V) as seguintes proposições:

( ) apóis um histograma ter sido equalizado, uma nova aplicação da técnica de equalização de histograma sobre a imagem não produzirá nela nenhuma alteração.

- ( ) a técnica de hiperbolização de histograma tem, como principal vantagem sobre a equalização de histograma, o fato de que a primeira leva em consideração as características não lineares da curva de intensidade luminosa subjetiva com respeito à intensidade luminosa física da imagem do olho humano.
- ( ) ao recortar uma imagem em dois pontos quaisquer, o histograma da subcena resultante sempre será idêntico ao da imagem original, pois as barras verticais no gráfico indicam a concentração de pixels em termos percentuais e, portanto, não dependem do número total de pixels da imagem.
- ( ) na aplicação do filtro da mediana sobre uma imagem utilizando máscara  $3 \times 3$  pixels, não são gerados novos valores de níveis de cinza na imagem resultante, ao contrário do filtro da média que pode, eventualmente, gerá-los.

2. Construa um histograma para a imagem com 10 níveis de cinza mostrada na figura 4.54.

9	5	7	5	3	4
0	2	6	4	2	5
4	1	2	1	6	2
2	3	6	3	0	0
7	8	3	4	5	4
0	5	2	9	8	7

Figura 4.54: Imagem com 10 níveis de cinza.

3. Dado o histograma mostrado na tabela 4.5, equalize-o utilizando a função de distribuição acumulada e desenhe o histograma resultante. O valor  $k$  corresponde a cada nível de cinza na imagem e  $n_k$  o número de pixels para o nível de cinza  $k$ .

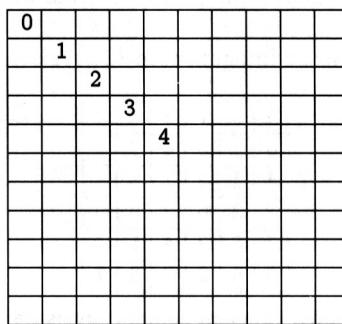
Tabela 4.5: Histograma.

Níveis de cinza ( $k$ )	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de pixels ( $n_k$ )	120	200	350	400	100	80	50	30

4. Considere o trecho de imagem mostrado na figura 4.55, representado por uma matriz de  $7 \times 7$ , em que cada elemento da matriz corresponde ao nível de cinza do pixel correspondente. Sabe-se que na quantização dessa imagem foram utilizados 8 bits. Seja o pixel central o pixel de referência. Forneça o valor resultante do pixel central caso a imagem seja processada:

- pelo algoritmo da filtragem pela mediana utilizando janela  $3 \times 3$  pixels.
  - pelo algoritmo da filtragem da média utilizando janela em forma de cruz, isto é, considerando no cálculo da média apenas os pixels de coordenadas  $(x, y)$  (pixel de referência),  $(x - 1, y)$ ,  $(x + 1, y)$ ,  $(x, y - 1)$  e  $(x, y + 1)$ .
5. Considere a imagem de tamanho  $10 \times 10$  pixels mostrada na figura 4.56. Os valores apresentados na imagem indicam o nível de cinza de cada *anel* da imagem. Por exemplo, o anel mais externo (bordas) possui nível de cinza 0, o anel seguinte possui nível de cinza 1 e assim por diante.

90	100	120	70	60	60	50
40	90	120	100	40	80	90
80	100	5	20	30	60	80
60	20	10	60	40	50	30
10	90	20	30	10	40	40
50	20	50	70	80	30	40
60	10	80	80	30	20	50

Figura 4.55: Região de imagem com  $7 \times 7$  pixels.Figura 4.56: Imagem com dimensões  $10 \times 10$  pixels.

Calcule os valores dos pixels após a aplicação de um filtro da mediana  $3 \times 3$ .

6. Desenhe o histograma de uma imagem obtido pela adição (pixel por pixel) da imagem original e a sua imagem invertida. Note que uma imagem invertida é aquela em que o valor de cinza  $l$  de cada pixel é substituído por  $\max(l) - l$ .
7. Como a *moda* dos níveis de cinza em uma imagem pode ser calculada a partir do histograma? Escreva um procedimento (pseudocódigo) para realizar esse cálculo.
8. Verifique se as afirmações abaixo são falsas (F) ou verdadeiras (V):
  - ( ) considerando uma borda (transição) em uma imagem, a derivada segunda é positiva na região clara da imagem.
  - ( ) filtros passa-alta são adequados para remoção de ruído.
  - ( ) duas imagens diferentes podem ter o mesmo histograma.
  - ( ) em um filtro Gaussiano, quanto maior o valor de  $\sigma$  (desvio padrão), menor o grau de suavização da imagem.
9. Calcule a transformação linear para alterar a escala de níveis de cinza do intervalo  $[0, 70]$  para  $[10, 180]$ .
10. Por que filtros Gaussianos são adequados para suavizar imagens?
11. Mostre que a equalização de uma imagem que já foi anteriormente equalizada não alterará a imagem.

12. Descreva uma situação na qual a equalização de histograma pode degradar uma imagem.
13. Desenhe três histogramas de imagens que apresentem baixo contraste.
14. Uma imagem com dimensões  $8 \times 8$  pixels possui níveis de cinza dados pela equação:

$$f(x, y) = |x - y| \quad x, y = 0, 1, \dots, 7$$

Encontre uma imagem de saída resultante da aplicação de um filtro da mediana de  $3 \times 3$  pixels na imagem  $f(x, y)$ , considerando que os pixels da borda permanecem inalterados.

15. Verifique se os filtros  $f_1$  e  $f_2$  a seguir são separáveis.

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1/16 & 2/16 & 1/16 \\ 2/16 & 4/16 & 2/16 \\ 1/16 & 2/16 & 1/16 \end{bmatrix}$$

## Referências Bibliográficas

- Adelmann, H. G. (1999). An Edge-sensitive Noise Reduction Algorithm for Image Processing, *Computers in Biology and Medicine* 29(2): 137–145.
- Asano, T. (1996). Digital Halftoning Algorithm Based on Random Space Filling Curve, *IEEE International Conference on Image Processing*, Vol. 1, Lausanne, Suíça, pp. 545–548.
- Beghdadi, A. e Khellaf, A. (1997). A Noise Filtering Method Using a Local Information Measure, *IEEE Transactions on Image Processing* 6(6): 879–882.
- Burkes, D. (1988). LIB15 - Publications of the CIS Graphics Support Forum.
- Cornsweet, T. N. (1970). *Visual Perception*, Academic Press, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Floyd, R. W. e Steinberg, L. (1976). An Adaptive Algorithm for Spatial Gray Scale, *Proceedings of the Society for Information Display*, Vol. 17, pp. 75–77.
- Foley, J. D. e Dam, A. V. (1982). *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, Estados Unidos.
- Frei, W. (1977). Image Enhancement by Histogram Hyperbolization, *Computer Graphics and Image Processing* 6(3): 286–294.
- Frisby, J. P. (1979). *Seeing - Illusion, Brain and Mind*, Oxford University Press, Oxford.
- Gonzalez, R. C. e Woods, R. E. (2000). *Processamento de Imagens Digitais*, Edgard Blücher, São Paulo, SP.
- Gonzalez, R. C. e Woods, R. E. (2002). *Digital Image Processing*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, Estados Unidos.
- Hecht, S. (1924). The Visual Discrimination of Intensity and the Weber-Fechner Law, *The Journal of General Physiology* 7: 235–267.
- Horn, B. K. P. (1986). *Robot Vision*, McGraw-Hill, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Hung, C.-C. (1997). On the Edge Preserving Smoothing Filter, *Proceedings of IEEE Southeastcon'97 - Engineering New Century*, Blacksburg, VA, Estados Unidos, pp. 146–147.
- Jain, A. K. (1989). *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, Estados Unidos.

- Jarvis, J. F., Judice, C. N. e Ninke, W. H. (1976). A Survey of Techniques for the Display of Continuous Tone Pictures on Bilevel Displays, *Computer Graphics and Image Processing* 5: 13–40.
- Kamata, S. (1996). An Address Generator of an N-dimensional Hilbert Scan, *IEEE International Conference on Image Processing*, Vol. 2, Lausanne, Suíça, pp. 1031–1034.
- Koffka, K. (1935). *Principles of Gestalt Psychology*, Harcourt, Brace, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Kuwahara, M., Hachimura, K., Eiho, S. e Kinoshita, M. (1976). Processing of RI-angiographic Images, in K. Preston e M. Onoe (eds.), *Digital Processing of Biomedical Images*, Plenum Press, Nova York, NY, Estados Unidos, pp. 187–203.
- Levine, M. D. (1985). *Vision in Man and Machine*, McGraw-Hill, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Limb, J. O. (1969). Design of Dither Waveforms for Quantized Visual Signals, *Bell System Technical Journal* 48: 2555–2582.
- Lukac, R. e Plataniotis, K. N. (2006). *Color Image Processing: Methods and Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, Estados Unidos.
- Marr, D. (1982). *Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*, W.H. Freeman, San Francisco, CA, Estados Unidos.
- Michelson, A. A. (1927). *Studies in Optics*, University of Chicago Press, Chicago, IL, Estados Unidos.
- Mokrane, A. (1992). A New Image Contrast Enhancement Technique Based on a Contrast Discrimination Model, *Graphical Models and Image Processing* 54(2): 171–180.
- Nagao, M. e Matsuyama, T. (1979). Edge Preserving Smoothing, *Computer Graphics and Image Processing* 9: 394–407.
- Oppenheim, A. V. e Shafer, R. W. (1975). *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, Estados Unidos.
- Oppenheim, A. V., Shafer, R. W. e Stockham, T. G. (1968). Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals, *Proceedings of IEEE*, Vol. 56, pp. 1264–1291.
- Pitas, I. e Venetsanopoulos, A. N. (1983). *Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, Estados Unidos.
- Plataniotis, K. N. e Venetsanopoulos, A. N. (2000). *Color Image Processing and Applications*, Springer-Verlag, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Rosenfeld, A. e Kak, A. C. (1982). *Digital Picture Processing*, Vol. 1–2, Academic Press, Orlando, FL, Estados Unidos.
- Russ, J. C. (1998). *The Image Processing Handbook*, CRC Press and IEEE Press, Boca Raton, FL, Estados Unidos.
- Schalkoff, R. J. (1989). *Digital Image Processing and Computer Vision*, John Wiley & Sons, Inc., Nova York, NY, Estados Unidos.
- Schowengerdt, R. A. (1983). *Techniques for Image Processing and Classification in Remote Sensing*, Academic Press, Orlando, FL, Estados Unidos.
- Sierra, F. (1989). LIB17 - Publications of the CIS Graphics Support Forum.
- Somboonkaew, A., Chitwong, S., Cheevasuvit, F., Dejhan, K. e Mitatha, S. (1999). Segmentation on the Edge Preserving Smoothing Image, *Proceedings of 20th Asian Conference on Remote Sensing*, Hong Kong, China.
- Stevenson, R. L. e Arce, G. R. (1985). Binary Display of Hexagonally Sampled Continuous-tone Images, *Journal of the Optical Society America* 2(7): 1009–1013.
- Stucki, P. (1981). MECCA - A Multiple Error Correcting Computation Algorithm for Bilevel Image Hardcopy Reproduction, *Research Report RZ1060*, IBM Research Laboratory, Zurique, Suíça.
- Tomita, F. e Tsuji, S. (1977). Extraction of Multiple Regions by Smoothing in Selected Neighborhoods, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-7*: 107–109.

- Ulichney, R. (1988). *Digital Halftoning*, MIT Press, Cambridge, MA, Estados Unidos.
- Velho, L. e Gomes, J. (1991). Digital Halftoning with Space Filling Curves, *Computer Graphics, SIGGRAPH'91 Proceedings* 25(4): 81–90.
- Wang, D. C. C., Vagnucci, A. H. e Li, C. C. (1981). Gradient Inverse Weighted Smoothing Scheme and the Evaluation of its Performance, *Computer Graphics and Image Processing* 15(2): 167–181.
- Wang, X. (1992). On the Gradient Inverse Weighted Filter, *IEEE Transactions on Signal Processing* 40(2): 482–484.
- Winston, P. H. (1975). *The Psychology of Computer Vision*, McGraw-Hill, Nova York, NY, Estados Unidos.
- Wyszecki, G. e Stiles, W. S. (2000). *Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, John Wiley & Sons, Inc., Nova York, NY, Estados Unidos.