1 Rekursiv definierte Folgen in der Mathematik

Alle Kreter sind Lügner.
Epimenides, Kreter.

Übersicht

Was lernst du hier?

Dieses Kapitel führt euch in eine wichtige Technik der Mathematik und Informatik ein. Mit ihr können wir viele Probleme sehr einfach beschreiben und lösen. Wir werden diese Technik zuerst an einem Beispiel zeigen. Dabei wirst du – vielleicht erstaunt – feststellen, dass sie dir gar nicht neu ist: Aus der Mathematik kennen wir den Begriff der *rekursiv definierten Folgen***.**

Was tust du?

Lies die Abschnitte der Reihe nach durch und versuche die Aufgaben zu lösen. Lege dir am besten gleich jetzt einen Stapel Sudelpapier zurecht. Für manche Aufgaben wirst du einen Taschenrechner brauchen. Den Computer lassen wir fürs erste ruhen. Schau dir unten einmal die Lernziele an, dann weisst du, worum es geht.

Lernziele

Nachdem du dieses erste Kapitel durchgearbeitet hast,

- kannst du den Begriff „rekursiv definierte Folgen“ erklären
- weisst du, wie man rekursiv definierte Folgen iterativ berechnet
- weisst du, warum A4-Blätter 21.0 x 29.7 cm messen.

Alles klar? Schön, jetzt geht’s los …

1.1 Erinnern wir uns an die Folgen

Wahrscheinlich hast du in sogenannten Intelligenztests auch schon Fragen angetroffen wie:

„Finde die nächsten Zahlen in der Folge 2, 4, 8, …"

Um die Antwort zu finden, muss man die Gesetzmässigkeit dieser Folge erkennen. In diesem Fall ist jede Zahl das Doppelte der vorangegangenen Zahl. Im Mathematikunterricht hast du gelernt, wie man dieses Bildungsgesetz korrekt aufschreibt. Die einzelnen Glieder der Folge werden durchnumeriert. In der Informatik beginnt man traditionellerweise eine Numerierung mit 0. Mit a_n bezeichnen wir die n-te Zahl der Folge. Das Bildungsgesetz für die Folge 2, 4, 8, … lautet dann:

$$a_0 = 2$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Nicht alle Gesetzmässigkeiten erkennt man so schnell. Welches ist z.B. das nächste Glied der Folge 0.5, 2, 5, 11, 23, … ?

Die Antwort ist 47, denn das Bildungsgesetz lautet hier:

$$a_0 = 0.5$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Gleichungen $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ bzw. $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$ berechnen also ein neues Glied a_n mit Hilfe seines Vorgängers a_{n-1}.

Definition

- Bei einer rekursiv definierten Folge kann ein bestimmtes Glied a_n der Folge aufgrund der Kenntnis vorangegangener Folgeglieder berechnet werden.
- Gleichungen der Form $a_n = f(a_{n-1})$, $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2})$, ... heissen *Rekursionsvorschriften* . f kann dabei irgendeine Funktion sein.
- Die Gleichungen, die das erste Glied einer Folge festlegen, heissen *Anfangsbedingungen* oder *Rekursionsbasis.*
- Eine rekursiv definierte Folge wird also durch eine *Rekursionsvorschrift* und eine *Rekursionsbasis* beschrieben.

Achtung: Lass dich von den vielen Definitionen, Formeln und Indizes nicht abschrecken! Das Ganze ist eigentlich keine grosse Hexerei. Die Begriffe in der Definition solltest du dir aber gut merken, sie werden dir im Leitprogramm immer wieder begegnen.

In der folgenden Wissenssicherung 1 und in Aufgabe 2 kannst du überprüfen, wie gut du die Welt der rekursiv definierten Folgen verstanden hast …

Wissenssicherung 1

Berechne die ersten 6 Glieder der Folge:

$a_0 = 1$

$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Aufgabe 2

Berechne a_{100}. Wie stellst du es am geschicktesten an?

Es gibt mehrere Möglichkeiten a_{100} zu berechnen. Es lohnt sich auf alle Fälle zuerst genau zu überlegen. Erst dann solltest du den Taschenrechner oder Computer bemühen. Eine ausführliche Lösung findest du am Ende des Kapitels.

Aufgabe 3: „Mit dem Papier ist es so eine Sache“

Hast du dich auch schon gefragt, warum wir eigentlich meist auf A4-Blättern schreiben? Papier könnte ja irgend ein beliebiges Format haben. Es könnte quadratisch sein, es könnte 20 x 25 cm gross oder 10 x 30 cm gross sein. Aber nein, unser Papier (auch das, welches du gerade liest), ist eben meist DIN A4, also 21.0 x 29.7 cm gross.

Früher war das nicht so. Jede Person, die Papier herstellte, schnitt es irgendwie zu: gerade so, wie es ihr passte. Diese Tatsache bereitete vielen Leuten Mühe, etwa den Sekretärinnen, deren Briefpapiere nie in irgendwelchen Couverts Platz fanden.

Einige praktische Köpfe nahmen sich deshalb vor, ein für allemal aufzuräumen mit diesem Papierdurcheinander. Man erfand die DIN-Norm 472 (DIN = Deutsche Industrie Norm). Darin wurde festgelegt, in welchen Grössen die Papierbögen herzustellen und zu gebrauchen sind. Zuerst wurde das grösste Papierformat festgelegt. Man nannte es „Weltformat“ und definierte folgendes:

Seine Fläche beträgt 1 m^2, sein Seitenverhältnis beträgt $1 : \sqrt{2}$.

Finde heraus, wie gross so ein Bogen im Weltformat ist, also seine Länge und Breite.

Aufgabe 4: „Mit dem Papier ist es so eine Sache“ (Fortsetzung)

Das Weltformat heisst auch A0.. Die weiteren Formate wurden wie folgt festgelegt:

- Das Papierformat A1 erhält man, indem man ein A0 Blatt so faltet, dass seine Breitseiten aufeinander zu liegen kommen.
- Auf dieselbe Weise – durch wiederholtes Falten – erhält man die weiteren Papierformate der DIN-A-Reihe.

Schreibe die Grösse der Papierformate A0 bis A4 auf.

Bei genauerer Betrachtung fällt natürlich sofort die Ähnlichkeit zur Rekursion ins Auge. Auch hier wird eine Rekursionsbasis und eine Rekursionsvorschrift gegeben. Die Papierformate sind rekursiv definiert !

Wie lautet die Rekursionsvorschrift?
Welches ist die Rekursionsbasis?

Aufgabe 5

Du bist jetzt drei Stichworten begegnet: *iterativ*, *explizit* und *rekursiv.* Es ist wichtig, dass wir uns klar machen, was genau mit diesen Begriffen gemeint ist.

Suche in deinem Mathematikbuch oder in einem Lexikon eine Umschreibung der Begriffe *rekursiv definierte Folge*, *explizite Darstellung eines Folgegliedes* und *iterative Berechnung einer rekursiv definierten Folge*.

Gib diese Definitionen dann mit eigenen Worten wieder.

Eine verflixte Sache …

Bis jetzt sieht alles ganz einfach aus! Es gibt aber auch rekursiv definierte Folgen, die nicht mehr so einfach durchschaubar sind.

Das nächste Beispiel sieht auf den ersten Blick recht harmlos aus. Eine nähere Betrachtung wird deinen Denkapparat aber ganz schön auf Touren bringen. Das Beispiel in Aufgabe 6 ist aber nicht einfach eine mathematische Spielerei. Es taucht in der Praxis häufig bei Wachstumsmodellen auf:

Aufgabe 6:

Betrachte die Folge

$$a_0 = \text{Startwert zwischen 0 und 1}$$

$$a_n = k \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1}) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

wobei k eine Konstante ist.
Nimm als Startwert 0.2. Mit Hilfe deines Taschenrechners kannst du jetzt untersuchen, wie sich die Folge für die Werte k = 2, 3.2, 3.5, 3.56 und 4 entwickelt. Für k = 2 siehst du schon nach dem 5. Glied, was passiert. Für höhere k-Werte brauchst du vielleicht etwas mehr Glieder. Was stellst du fest? Erkennst du ein explizites Bildungsgesetz für die Folge, also eine Formel, mit der du problemlos a_{100} berechnen kannst?

Rekursiv definierte Folgen

In der Mathematik spielen *rekursiv definierte Folgen* eine wichtige Rolle. Typischerweise werden die Glieder einer rekursiv definierten Folge *iterativ berechnet.* Ausgangspunkt für die Iteration ist dabei die Rekursionsbasis. In manchen Fällen lässt sich auch eine explizite Darstellung für die Folgeglieder finden.

Nach diesen geistigen Höhenflügen wenden wir uns wieder einfacheren Dingen zu: In der Lernkontrolle lernst du eine der wohl bekanntesten rekursiv definierten Folgen kennen!

Lernkontrolle

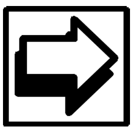
Aufgabe 7

Die Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... der *Fibonacci - Zahlen* ist rekursiv definiert durch

$$fib(0) = fib(1) = 1$$

$$fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2) \qquad \text{für } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Schreibe auf deinem Taschenrechner oder einem Computer ein kleines Programm, das die ersten 50 Fibonacci - Zahlen iterativ berechnet.



Wenn dir alle obigen Aufgaben klar sind, kannst du bei deiner Lehrerin oder deinem Lehrer den Kapiteltest holen.