

# Mathe 3 Mitschriften

Paul Glaser

May 8, 2023

# Contents

<b>Chapter 1</b>	<b>Funktionen im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>Page 2</b>
1.1	Krümmung	2
1.2	Kurven in $\mathbb{R}^3$	3
1.3	Differentiation	5
<b>Chapter 2</b>	<b>Taylorformel und Extremstellen</b>	<b>Page 7</b>
2.1	Kettenregel	7
2.2	Richtungsableitungen	9
2.3	Taylorpolynome	9
2.4	Extrempunkte, Maxima, Minima	11
<b>Chapter 3</b>	<b>Hyperflächen und Satz über implizite Funktionen</b>	<b>Page 12</b>

# Chapter 1

## Funktionen im $\mathbb{R}^n$

### 1.1 Krümmung

#### Definition 1.1.1

Sei  $g : [0, L]$  eine zweimal stetig differenzierbare Kurve, parametrisiert nach Bogenlänge. Dann heißt

$$T(s) = g'(s)$$

Tangentialvektor der Kurve,

$$\kappa = \kappa(s) = \|T'(s)\|_2 = \left| \frac{d\psi}{ds} \right|$$

heißt Krümmung der Kurve im Punkt  $g(s)$  und

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

heißt Normalenvektor (definiert, wenn  $\kappa(s) \neq 0$ ), also

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

#### Note:-

Da  $g$  parametrisiert ist, ist  $\|T\| = 1$ .

$N(s)$  ist einfach nur die normierte Zweite Ableitung, folgt aus der Eigenschaft das  $\|T\| = 1$ .

$$\begin{aligned} 1 &= \langle T(s), T(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} 1 &= \frac{d}{ds} \langle T(s), T(s) \rangle \\ 0 &= \frac{d}{ds} \sum t_i^2 \\ 0 &= 2 \sum t_i \cdot t_i' \\ 0 &= \langle T(s), T'(s) \rangle \end{aligned}$$

#### Definition 1.1.2: Krümmungskreis

Für ebene Kurven ist der Kreis mit Mittelpunkt  $g(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)$  und Radius  $r = \frac{1}{\kappa}$ , der Kreis, der die Kurve  $g(s)$  am besten approximiert. Wir nennen diesen Kreis den Krümmungskreis.

**Note:-**

Da  $\|N(s)\| = 1$  gibt  $r \cdot N(s)$  exakt die Radius Länge. Je größer die Kurve gekrümmt ist, desto kleiner wird der Kreis, während desto flacher die Kurve ist der Kreis auch flacher wird und sich perfekt annähert.

## 1.2 Kurven in $\mathbb{R}^3$

### Definition 1.2.1

Sei  $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist  $N \perp T$ . Wir wählen nun  $B \in \mathbb{R}^3$  so, dass

$$(T, N, B)$$

eine orientierte Orthonormalmatrix bilden.

Der Vektor  $B$  heißt Binormalenvektor und das Tripel  $(T, N, B)$  heißt Fresnelsches Dreiein.

### Theorem 1.2.1

Die Ableitung des Binormalenvektors  $B(s)$  kann durch

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

beschrieben werden, wobei  $\tau(s)$  eine bestimmte Funktion  $R \rightarrow R$  ist. Wir nennen  $\tau(s)$  die Torsion der Kurve im Punkt  $g(s)$ .

**Note:-**

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \times N(s) \\ \frac{dB(s)}{ds} &= \frac{d(T(s) \times N(s))}{ds} \\ &= \frac{dT(s)}{ds} \times N(s) + T(s) \times \frac{dN(s)}{ds} \\ &= \kappa N(s) \times N(s) + T(s) \times \frac{dN(s)}{ds} \\ &= T(s) \times \frac{dN(s)}{ds} \\ T(s) &\implies \text{orthogonal zu } T(s) \\ \text{da } r(s) \cdot r'(s) &= 0 \text{ für alle } r \text{ mit } \|r\| = 1, \text{ muss } \frac{dB(s)}{ds} \text{ orthogonal zu } B(s) \text{ sein} \\ &= \tau N(s) \end{aligned}$$

## Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

### Definition 1.2.2

Mit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ordnen wir jedem Element von  $D \subset \mathbb{R}^n$  einen reellen Wert zu. Die Menge  $\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$  ist der Graph von  $f$ .

**Definition 1.2.3: Niveaumenge**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Die Menge aller Punkte  $x$  für die  $f(x) = c$ ,

$$N_c(f) = \{x \in D \mid f(x) = c\},$$

heißt Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $c$ .

**Note:-**

Man erhält den Contourplot durch mehrfaches plotten von verschiedenen Niveaumengen.

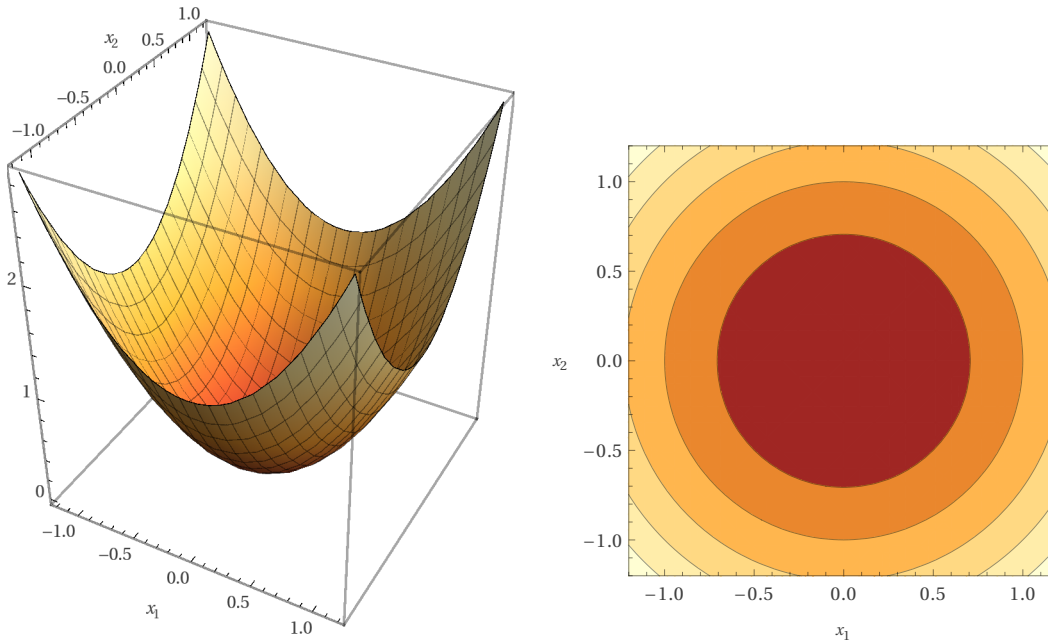


Figure 1.1: Die Funktion  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  und ihr Contourplot

**Definition 1.2.4: Offener und abgeschlossener Ball**

Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$ . Dann ist die Menge

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 < r\}$$

ein offener Ball mit Radius  $r$  und

$$\overline{B_r(a)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 \leq r\}$$

ein abgeschlossener Ball mit Radius  $r$ .

**Definition 1.2.5: Offen und abgeschlossen**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge.

$U$  heißt offen, falls  $\forall a \in U : \exists \varepsilon > 0$  so dass  $B_\varepsilon(a) \subset U$ .

Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt abgeschlossen, wenn  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen ist.

**Note:-**

$B_r(a)$  ist offen und  $\overline{B_r(a)}$  ist abgeschlossen.

### Definition 1.2.6: beschränkt und kompakt

Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt beschränkt, wenn es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $D \subset B_r(0)$ . Eine abgeschlossene und beschränkte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt kompakt.

### Definition 1.2.7

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge.

$$\overset{\circ}{D} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset D\}$$

ist die Menge der inneren Punkte von  $D$ . Mit

$$\bar{D} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0\}$$

bezeichnen wir den Abschluss von  $D$ . Der Rand von  $D$  ist

$$\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$$

### Note:-

noch keine Ahnung was ich dazu sagen soll :)

### Example 1.2.1

$B_r(a)$  ist der Abschluss von  $B_r(a)$  und  $\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 = r\}$  ist die Kugeloberfläche

## 1.3 Differentiation

### Definition 1.3.1: stetig

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Funktion  $f$  heißt stetig in  $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

mit  $\|x - a\|_2 < \delta$

### Theorem 1.3.1

Summe, Produkte und Quotienten (falls definiert) stetiger Funktionen sind stetig.

### Definition 1.3.2: Partiell differenzierbar

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ . Dann heißt  $f$  in  $a$  partiell nach  $x_i$  differenzierbar, wenn die Funktion in einer Variablen

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

nach  $x_i$  differenzierbar ist. Dann heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}$$

die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$ .

**Note:-**

Die komplexe Version der Ableitung vom Ein-dimensionalem falls

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Definition 1.3.3: Gradient**

Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  offen, in jedem Punkt nach allen Variablen partiell differenzierbar, dann heißt  $U$  partiell differenzierbar auf  $U$ . Der Vektor

$$\nabla f(a) := (\text{grad } f)(a) := \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right]$$

heißt Gradient von  $f$  im Punkt  $a \in U$ .

**Example 1.3.1**

Sei  $f(x, y) = (x^2 + y^2, x \cdot y^2)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (\text{grad } f)(x, y) := \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &= (2x, 2xy) \end{aligned}$$

**Definition 1.3.4: Hesse-Matrix**

Die Matrix

$$\text{Hess}(f) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

heißt Hesse-Matrix.

**Theorem 1.3.2**

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Das heißt unter diesen Voraussetzungen ist die Hesse-Matrix symmetrisch.

**Example 1.3.2**

Sei  $f(x, y) = \sqrt{x^2(1-y)}$ , dann ist

$$\text{Hess}(f) = \begin{bmatrix} 6x \cdot y^2 & 4x \cdot y^3 \cdot z^2 \cdot c^2 & 0 \\ 4x \cdot y^3 \cdot z^2 & & \end{bmatrix}$$

## Chapter 2

# Taylorformel und Extremstellen

### 2.1 Kettenregel

#### Definition 2.1.1

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $f(u) \in V \subset \mathbb{R}^m$  und  $V$  offen, sowie  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h = g \circ f$ . Die Koordinaten in  $U$  bezeichnen wir mit  $x_i$ , die in  $V$  mit  $y_j$ . Dann gilt

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

#### Note:-

Die Kettenregel lässt sich über herleiten durch nutzen der Taylor-Entwicklung Erster Ordnung:  
Seien  $f, g, h$  definiert wie oben, dann ist

$$g(y) \approx g(f(x)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) (y_j - f_j(x)). \quad (2.1)$$

Für  $f$  in der Nähe von  $x$  erhält man:

$$f_i(x + \Delta x) \approx f_i(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) \Delta x_k$$

Da Eq:2.1  $h$  beschreibt und man an der Entwicklungsstelle  $h(x + \Delta x)$  interessiert sind, setzt man  $y = f(x + \Delta x)$



in die Taylor-Entwicklung von  $g$  ein

$$\begin{aligned}
 h(x + \Delta x) &\approx g(f(x + \Delta x)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) (f_j(x + \Delta x) - f_j(x)) \\
 h(x) + \Delta h(x) &\approx g(f(x)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \Delta x_k \right) \\
 \Delta h(x) &\approx \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \Delta x_k \right) \quad \text{da } h(x) = g(f(x)) \\
 \frac{\Delta h(x)}{\Delta x_i} &\approx \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \frac{\Delta x_k}{\Delta x_i} \right) \\
 \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta h(x)}{\Delta x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \text{da } \frac{\Delta x_k}{\Delta x_i} \text{ wird 0 f\"ur alle } k \neq i
 \end{aligned}$$

### Example 2.1.1

Sei  $f(r, \phi) = (r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi))$ , dann ist

$$J_f = Df = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -r \cdot \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cdot \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Sei  $g(x, y) = x^2 + y^2$ , dann ist  $Dg = (2x, 2y)$ .

Sei  $h = g \circ f$ , dann ist gilt

$$h(r, \phi) = (r \cdot \cos(\phi))^2 + (r \cdot \sin(\phi))^2 = r^2$$

Von hier ist leicht zu sehen, dass

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 2r \quad \frac{\partial h}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{aligned}
 D h(r, \phi) &= D g(f(r, \phi)) \cdot D f \\
 &= (2r \cos \phi, 2r \sin \phi) \cdot D f(r, \phi) \\
 &= (2r, 0)
 \end{aligned}$$

Es kann auch über die Formel berechnet werden

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial r}(r, \phi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \phi) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \phi) \\
 &= 2 \cdot (r \cos(\phi)) \cos(\phi) + 2 \cdot (r \sin(\phi)) \sin(\phi) \\
 &= 2r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial \phi}(r, \phi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_1}{\partial \phi}(r, \phi) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_2}{\partial \phi}(r, \phi) \\
 &= 2 \cdot (r \cdot \cos(\phi)) \cdot (-r \sin(\phi)) + 2 \cdot (r \cdot \sin(\phi)) \cdot (r \cos(\phi)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Man erhält das gleiche Ergebnis

## 2.2 Richtungsableitungen

### Definition 2.2.1

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$ . Dann heißt

$$(D_v f)(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}$$

Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$ .

### Theorem 2.2.1

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, total und differenzierbar in  $a$ . Dann gilt

$$(D_v f)(a) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle.$$

Insbesondere: Für  $v \in \mathbb{S}^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$  ist die Richtungsableitung maximal genau dann, wenn  $\text{grad } f(a)$  in die gleiche Richtung wie  $v$  zeigt.

## 2.3 Taylorpolynome

### Definition 2.3.1: Multiindex

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  nennen wir einen Multiindex.  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  heißt Totalgrad von  $\alpha$ . Wir setzen  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Dann bezeichnet

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Die  $\alpha$ -te partielle Ableitung.

### Example 2.3.1

$$\alpha = (1, 2, 3) \quad |\alpha| = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^3}$$

### Definition 2.3.2: Taylorpolynome

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar. Dann heißt das Polynom

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{|\alpha|}}(a) \cdot \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}$$

das Taylorpolynom  $k$ -ter Ordnung von  $f$  in  $a$ .

### Note:-

Eine hübsche andere Formel für den Fall  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , ist über die Summe der binomischen Formeln:

$$f(x) = f + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-a) \right)^i$$

mit  $f$  evaluiert an der Stelle  $a$ . Der Zusammenhang folgt aus der Beziehung zum Binomialkoeffizienten, da man bei  $a$   $k$  Elemente aus  $n$  auswählt.

### Example 2.3.2

Sei  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  und der Entwicklungspunkt  $a = (1, 1)$ , dann sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}$$

Die ersten partiellen Ableitungen und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2-y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{-x^2-y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2 - 2)e^{-x^2-y^2}$$

Daraus folgt das Das Taylorpolynom erster Ordnung

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - a) = 1$$

Das Taylorpolynom 2-ter Ordnung ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - a) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - a)(y - a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - a)^2 \right) \\ &= 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

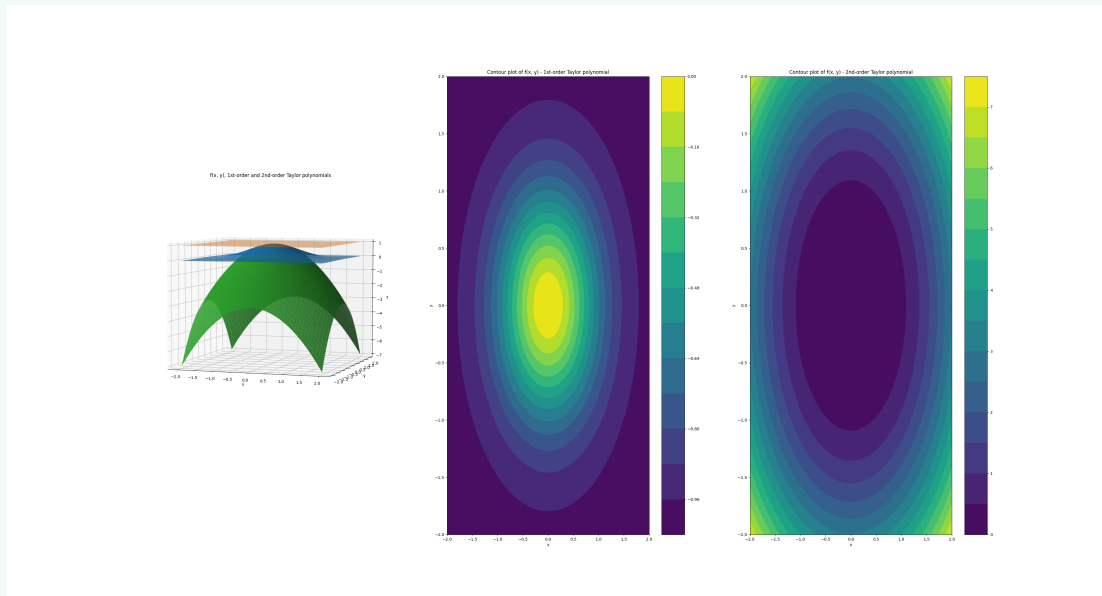


Figure 2.1: Die Funktion  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  und die Taylorpolynome erster und zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt  $(0, 0)$ .

## 2.4 Extrempunkte, Maxima, Minima

### Definition 2.4.1

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  hat ein lokales (lokales Minimum), wenn ein Ball  $B_r(a) \subset U$  existiert, so dass  $f|_{B_r(a)}$  in  $a$  das Maximum (Minimum) hat.  
 $f$  hat ein lokales Extrema, wenn eine der beiden Bedingungen eintritt.

### Lemma 2.4.1

Die Matrix  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist positiv definit, falls

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$
$$\iff \text{alle Eigenwerte der Matrix } > 0 \text{ sind}$$

### Theorem 2.4.1 Minima und Maxima

Sei  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen:  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar

1 Notwendig dafür, dass  $f$  in  $a \in U$  ein lokales Extrema hat, ist dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

Ist die notwendige Bedingung erfüllt, dann ist hinreichend für ein lokales Minimum, dass die Matrix

$$A = \text{Hess}(f)(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{ij}$$

positiv definit ist. Ist  $A$  negativ definit dann liegt ein lokales Maximum vor.

### Example 2.4.1

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

$\Rightarrow (0, 0)$  ist der einzige Kandidat für ein lokales Extrema

$$\text{Hess}(f)(a) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

Folglich hat die Funktion in  $(0, 0)$  ein lokales Minimum.

## Chapter 3

# Hyperflächen und Satz über implizite Funktionen

### Definition 3.0.1: Hyperflächen

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Dann heißt ihre Nullstellenmenge

$$N(f) := N_0(f) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid f(a) = 0\}$$

die durch  $f$  definierte Hyperfläche.

### Example 3.0.1

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  ist eine Kugel, siehe abb. 3.1

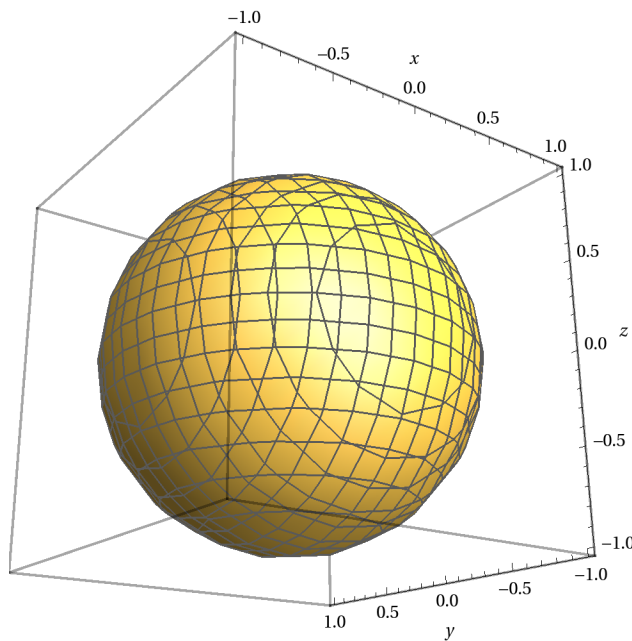


Figure 3.1: Eine 3-dimensionale Kugel mit dem Radius 1

**Definition 3.0.2: Tangentialraum**

Sei  $X = N(f)$ ,  $f$  stetig differenzierbar, eine Hyperfläche und  $a \in X$ . Ist

$$f(x) = f(a) + \sum_{|\alpha| \leq 1} \frac{df}{dx}$$