

Mathe 3 Mitschriften

Paul Glaser

May 16, 2023

Contents

Chapter 1	Kurven, Bogenlänge und Parametrisierung von Kurven	Page 2
1.1	Kurven im \mathbb{R}^3	2
Chapter 2	Funktionen im \mathbb{R}^n	Page 4
2.1	Krümmung	4
2.2	Kurven in \mathbb{R}^3	5
2.3	Differentiation	7
Chapter 3	Taylorformel und Extremstellen	Page 9
3.1	Kettenregel	9
3.2	Richtungsableitungen	11
3.3	Taylorpolynome	11
3.4	Extrempunkte, Maxima, Minima	13
Chapter 4	Hyperflächen und Satz über implizite Funktionen	Page 14
4.1	Hyperflächen	14
4.2	Tangentialraum	15
4.3	Satz über implizite Funktionen	15
Chapter 5	Integration im \mathbb{R}^n	Page 17
5.1	Doppelintegral	17
5.2	Berechnung eines Doppelintegrals unter Verwendung kartesischer Koordinaten	19
5.3	Transformation der Variablen	21
5.4	Rechenregeln für Integrale	22
5.5	Dreifach-Integrale	22

Chapter 1

Kurven, Bogenlänge und Parametrisierung von Kurven

1.1 Kurven im \mathbb{R}^3

Definition 1.1.1: Kurven

Seien I ein Intervall, und $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heisst

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{aligned}$$

eine Kurve in \mathbb{R}^n . Die Kurve heisst differenzierbar, wenn alle Komponenten f_k differenzierbar sind.

Example 1.1.1

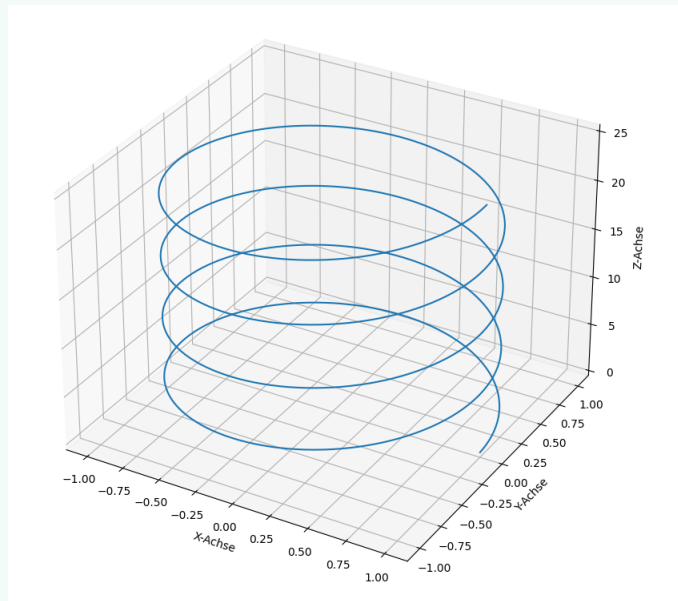


Figure 1.1: Die Grafik visualisiert die Kurve $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Definition 1.1.2: Geschwindigkeit

Seien I ein Intervall, und $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Dann heisst der Vektor

$$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t))$$

der Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t .

Seine Länge $\|f'(t)\|$ heisst Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t .

Ist $f'(t_0) \neq 0$ für ein t_0 , so heisst

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ g(t) &= f(t_0) + t f'(t_0) \end{aligned}$$

die Tangente an f in $f(t_0)$.

Definition 1.1.3: Winkel

Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Kurven mit $f(t_1) = g(t_2)$. Sind die Geschwindigkeitsvektoren $f'(t_1), g'(t_2) \neq 0$, dann ist der Winkel Θ zwischen den Kurven im Punkt $f(t_1) = g(t_2)$ definiert durch

$$\cos \Theta = \frac{\langle f'(t_1), g'(t_2) \rangle}{\|f'(t_1)\| \|g'(t_2)\|}$$

Chapter 2

Funktionen im \mathbb{R}^n

2.1 Krümmung

Definition 2.1.1

Sei $g : [0, L]$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve, parametrisiert nach Bogenlänge. Dann heißt

$$T(s) = g'(s)$$

Tangentialvektor der Kurve,

$$\kappa = \kappa(s) = \|T'(s)\|_2 = \left| \frac{d\psi}{ds} \right|$$

heißt Krümmung der Kurve im Punkt $g(s)$ und

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

heißt Normalenvektor (definiert, wenn $\kappa(s) \neq 0$), also

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

Note:-

Da g parametrisiert ist, ist $\|T\| = 1$.

$N(s)$ ist einfach nur die normierte Zweite Ableitung, folgt aus der Eigenschaft das $\|T\| = 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= \langle T(s), T(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} 1 &= \frac{d}{ds} \langle T(s), T(s) \rangle \\ 0 &= \frac{d}{ds} \sum t_i^2 \\ 0 &= 2 \sum t_i \cdot t_i' \\ 0 &= \langle T(s), T'(s) \rangle \end{aligned}$$

Definition 2.1.2: Krümmungskreis

Für ebene Kurven ist der Kreis mit Mittelpunkt $g(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)$ und Radius $r = \frac{1}{\kappa}$, der Kreis, der die Kurve $g(s)$ am besten approximiert. Wir nennen diesen Kreis den Krümmungskreis.

Note:-

Da $\|N(s)\| = 1$ gibt $r \cdot N(s)$ exakt die Radius Länge. Je größer die Kurve gekrümmt ist, desto kleiner wird der Kreis, während desto flacher die Kurve ist der Kreis auch flacher wird und sich perfekt annähert.

2.2 Kurven in \mathbb{R}^3

Definition 2.2.1

Sei $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist $N \perp T$. Wir wählen nun $B \in \mathbb{R}^3$ so, dass

$$(T, N, B)$$

eine orientierte Orthonormalmatrix bilden.

Der Vektor B heißt Binormalenvektor und das Tripel (T, N, B) heißt Fresnelsches Dreiein.

Theorem 2.2.1

Die Ableitung des Binormalenvektors $B(s)$ kann durch

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

beschrieben werden, wobei $\tau(s)$ eine bestimmte Funktion $R \rightarrow R$ ist. Wir nennen $\tau(s)$ die Torsion der Kurve im Punkt $g(s)$.

Note:-

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \times N(s) \\ \frac{dB(s)}{ds} &= \frac{d(T(s) \times N(s))}{ds} \\ &= \frac{dT(s)}{ds} \times N(s) + T(s) \times \frac{dN(s)}{ds} \\ &= \kappa N(s) \times N(s) + T(s) \times \frac{dN(s)}{ds} \\ &= T(s) \times \frac{dN(s)}{ds} \\ T(s) &\implies \text{orthogonal zu } T(s) \\ \text{da } r(s) \cdot r'(s) &= 0 \text{ für alle } r \text{ mit } \|r\| = 1, \text{ muss } \frac{dB(s)}{ds} \text{ orthogonal zu } B(s) \text{ sein} \\ &= \tau N(s) \end{aligned}$$

Funktionen auf \mathbb{R}^n

Definition 2.2.2

Mit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ordnen wir jedem Element von $D \subset \mathbb{R}^n$ einen reellen Wert zu. Die Menge $\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$ ist der Graph von f .

Definition 2.2.3: Niveaumenge

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Menge aller Punkte x für die $f(x) = c$,

$$N_c(f) = \{x \in D \mid f(x) = c\},$$

heißt Niveaumenge von f zum Niveau c .

Note:-

Man erhält den Contourplot durch mehrfaches plotten von verschiedenen Niveaumengen.

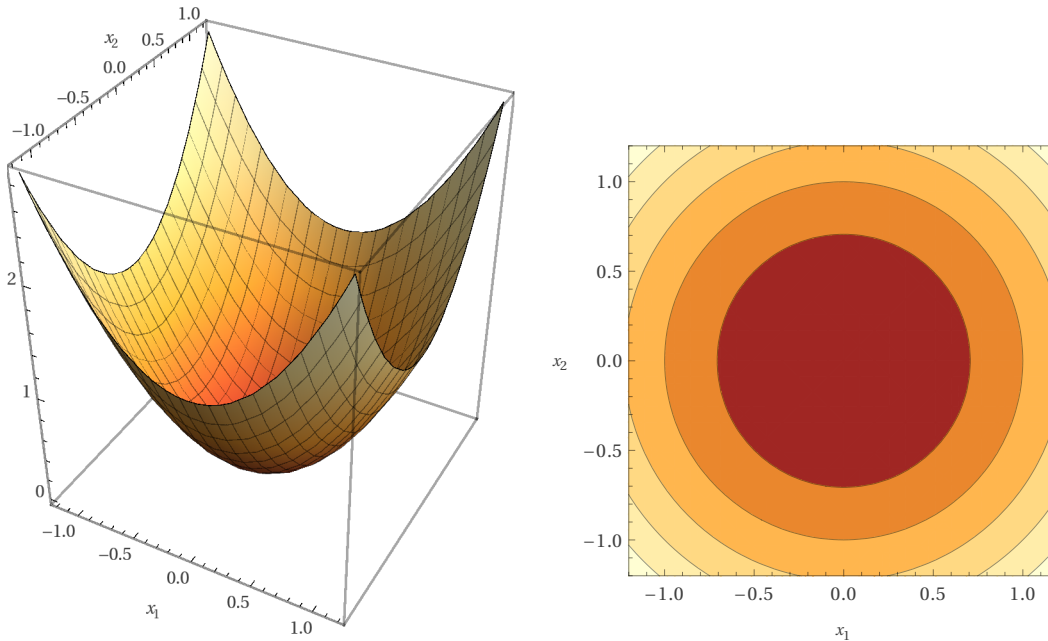


Figure 2.1: Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ und ihr Contourplot

Definition 2.2.4: Offener und abgeschlossener Ball

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann ist die Menge

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 < r\}$$

ein offener Ball mit Radius r und

$$\overline{B_r(a)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 \leq r\}$$

ein abgeschlossener Ball mit Radius r .

Definition 2.2.5: Offen und abgeschlossen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

U heißt offen, falls $\forall a \in U : \exists \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(a) \subset U$.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Note:-

$B_r(a)$ ist offen und $\overline{B_r(a)}$ ist abgeschlossen.

Definition 2.2.6: beschränkt und kompakt

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D \subset B_r(0)$. Eine abgeschlossene und beschränkte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt.

Definition 2.2.7

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

$$\overset{\circ}{D} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset D\}$$

ist die Menge der inneren Punkte von D . Mit

$$\bar{D} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid B_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0\}$$

bezeichnen wir den Abschluss von D . Der Rand von D ist

$$\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$$

Note:-

noch keine Ahnung was ich dazu sagen soll :)

Example 2.2.1

$B_r(a)$ ist der Abschluss von $B_r(a)$ und $\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 = r\}$ ist die Kugeloberfläche

2.3 Differentiation

Definition 2.3.1: stetig

Sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt stetig in $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

mit $\|x - a\|_2 < \delta$

Theorem 2.3.1

Summe, Produkte und Quotienten (falls definiert) stetiger Funktionen sind stetig.

Definition 2.3.2: Partiiell differenzierbar

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}, a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ Dann heißt f in a partiell nach x_i differenzierbar, wenn die Funktion in einer Variablen

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

nach x_i differenzierbar ist. Dann heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}$$

die partielle Ableitung von f nach x_i .

Note:-

Die komplexe Version der Ableitung vom Ein-dimensionalem falls

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definition 2.3.3: Gradient

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U offen, in jedem Punkt nach allen Variablen partiell differenzierbar, dann heißt U partiell differenzierbar auf U . Der Vektor

$$\nabla f(a) := (\text{grad } f)(a) := \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right]$$

heißt Gradient von f im Punkt $a \in U$.

Example 2.3.1

Sei $f(x, y) = (x^2 + y^2, x \cdot y^2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (\text{grad } f)(x, y) := \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &= (2x, 2xy) \end{aligned}$$

Definition 2.3.4: Hesse-Matrix

Die Matrix

$$\text{Hess}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

heißt Hesse-Matrix.

Theorem 2.3.2

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Das heißt unter diesen Voraussetzungen ist die Hesse-Matrix symmetrisch.

Example 2.3.2

Sei $f(x, y) = \sqrt{x^2(1-y)}$, dann ist

$$\text{Hess}(f) = \begin{bmatrix} 6x \cdot y^2 & 4x \cdot y^3 \cdot z^2 \cdot c^2 & 0 \\ 4x \cdot y^3 \cdot z^2 & & \end{bmatrix}$$

Chapter 3

Taylorformel und Extremstellen

3.1 Kettenregel

Definition 3.1.1

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f(u) \in V \subset \mathbb{R}^m$ und V offen, sowie $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ und $h = g \circ f$. Die Koordinaten in U bezeichnen wir mit x_i , die in V mit y_j . Dann gilt

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Note:-

Die Kettenregel lässt sich über herleiten durch nutzen der Taylor-Entwicklung Erster Ordnung:
Seien f, g, h definiert wie oben, dann ist

$$g(y) \approx g(f(x)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) (y_j - f_j(x)). \quad (3.1)$$

Für f in der Nähe von x erhält man:

$$f_i(x + \Delta x) \approx f_i(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) \Delta x_k$$

Da Eq:3.1 h beschreibt und man an der Entwicklungsstelle $h(x + \Delta x)$ interessiert sind, setzt man $y = f(x + \Delta x)$

in die Taylor-Entwicklung von g ein

$$\begin{aligned}
 h(x + \Delta x) &\approx g(f(x + \Delta x)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) (f_j(x + \Delta x) - f_j(x)) \\
 h(x) + \Delta h(x) &\approx g(f(x)) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \Delta x_k \right) \\
 \Delta h(x) &\approx \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \Delta x_k \right) \quad \text{da } h(x) = g(f(x)) \\
 \frac{\Delta h(x)}{\Delta x_i} &\approx \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \frac{\Delta x_k}{\Delta x_i} \right) \\
 \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta h(x)}{\Delta x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \text{da } \frac{\Delta x_k}{\Delta x_i} \text{ wird 0 f\"ur alle } k \neq i
 \end{aligned}$$

Example 3.1.1

Sei $f(r, \phi) = (r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi))$, dann ist

$$J_f = Df = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -r \cdot \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cdot \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Sei $g(x, y) = x^2 + y^2$, dann ist $Dg = (2x, 2y)$.

Sei $h = g \circ f$, dann ist gilt

$$h(r, \phi) = (r \cdot \cos(\phi))^2 + (r \cdot \sin(\phi))^2 = r^2$$

Von hier ist leicht zu sehen, dass

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 2r \quad \frac{\partial h}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{aligned}
 D h(r, \phi) &= D g(f(r, \phi)) \cdot D f \\
 &= (2r \cos \phi, 2r \sin \phi) \cdot D f(r, \phi) \\
 &= (2r, 0)
 \end{aligned}$$

Es kann auch über die Formel berechnet werden

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial r}(r, \phi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \phi) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \phi) \\
 &= 2 \cdot (r \cos(\phi)) \cos(\phi) + 2 \cdot (r \sin(\phi)) \sin(\phi) \\
 &= 2r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial \phi}(r, \phi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_1}{\partial \phi}(r, \phi) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(r, \phi)) \frac{\partial f_2}{\partial \phi}(r, \phi) \\
 &= 2 \cdot (r \cdot \cos(\phi)) \cdot (-r \sin(\phi)) + 2 \cdot (r \cdot \sin(\phi)) \cdot (r \cos(\phi)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Man erhält das gleiche Ergebnis

3.2 Richtungsableitungen

Definition 3.2.1

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Dann heißt

$$(D_v f)(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}$$

Richtungsableitung von f in Richtung v .

Theorem 3.2.1

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, total und differenzierbar in a . Dann gilt

$$(D_v f)(a) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle.$$

Insbesondere: Für $v \in \mathbb{S}^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ ist die Richtungsableitung maximal genau dann, wenn der Gradient $\text{grad } f(a)$ in die gleiche Richtung wie v zeigt.

3.3 Taylorpolynome

Definition 3.3.1: Multiindex

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ nennen wir einen Multiindex. $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ heißt Totalgrad von α . Wir setzen $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_n^{\alpha_n}$. Dann bezeichnet

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Die α -te partielle Ableitung.

Example 3.3.1

$$\alpha = (1, 2, 3) \quad |\alpha| = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^3}$$

Definition 3.3.2: Taylorpolynome

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig partiell differenzierbar. Dann heißt das Polynom

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{|\alpha|}}(a) \cdot \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}$$

das Taylorpolynom k -ter Ordnung von f in a .

Note:-

Eine hübsche andere Formel für den Fall $U \subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, ist über die Summe der binomischen Formeln:

$$f(x) = f + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-a) \right)^i$$

mit f evaluiert an der Stelle a . Der Zusammenhang folgt aus der Beziehung zum Binomialkoeffizienten, da man bei a k Elemente aus n auswählt.

Example 3.3.2

Sei $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ und der Entwicklungspunkt $a = (1, 1)$, dann sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}$$

Die ersten partiellen Ableitungen und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2-y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{-x^2-y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2 - 2)e^{-x^2-y^2}$$

Daraus folgt das Das Taylorpolynom erster Ordnung

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - a) = 1$$

Das Taylorpolynom 2-ter Ordnung ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - a) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - a)(y - a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - a)^2 \right) \\ &= 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

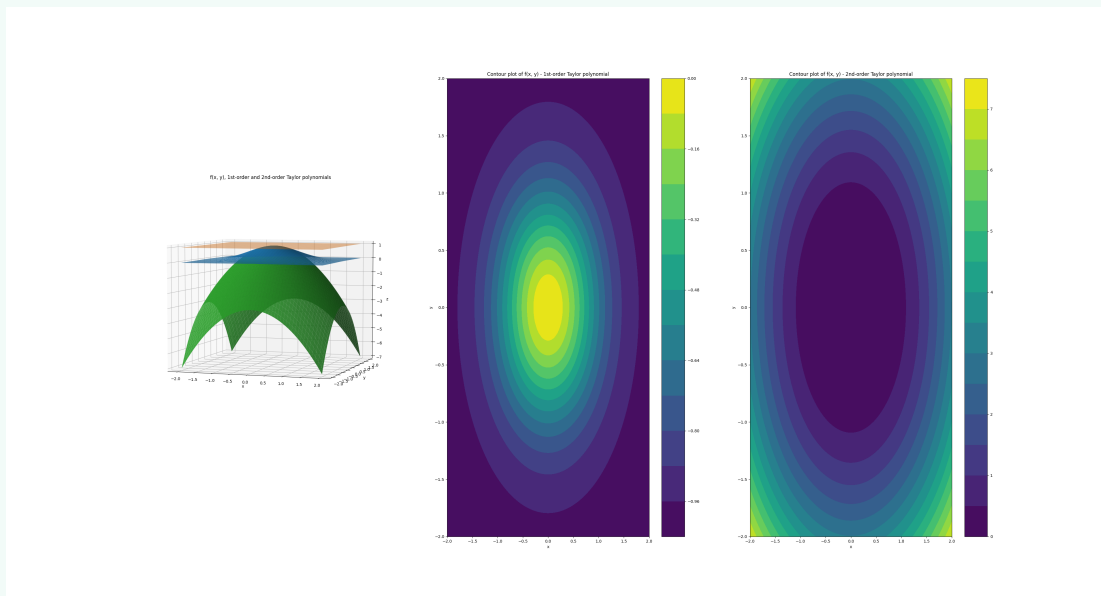


Figure 3.1: Die Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ und die Taylorpolynome erster und zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

3.4 Extrempunkte, Maxima, Minima

Definition 3.4.1

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$. f hat ein lokales (lokales Minimum), wenn ein Ball $B_r(a) \subset U$ existiert, so dass $f|_{B_r(a)}$ in a das Maximum (Minimum) hat.
 f hat ein lokales Extrema, wenn eine der beiden Bedingungen eintritt.

Lemma 3.4.1

Die Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit, falls

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$
$$\iff \text{alle Eigenwerte der Matrix } > 0 \text{ sind}$$

Theorem 3.4.1 Minima und Maxima

Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen: $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar

1 Notwendig dafür, dass f in $a \in U$ ein lokales Extrema hat, ist dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

Ist die notwendige Bedingung erfüllt, dann ist hinreichend für ein lokales Minimum, dass die Matrix

$$A = \text{Hess}(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{ij}$$

positiv definit ist. Ist A negativ definit dann liegt ein lokales Maximum vor.

Example 3.4.1

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

$\Rightarrow (0, 0)$ ist der einzige Kandidat für ein lokales Extrema

$$\text{Hess}(f)(a) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

Folglich hat die Funktion in $(0, 0)$ ein lokales Minimum.

Chapter 4

Hyperflächen und Satz über implizite Funktionen

4.1 Hyperflächen

Definition 4.1.1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann heißt ihre Nullstellenmenge

$$N(f) := N_0(f) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid f(a) = 0\}$$

die durch f definierte Hyperfläche.

Example 4.1.1

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ist eine Kugel, siehe abb. 4.1

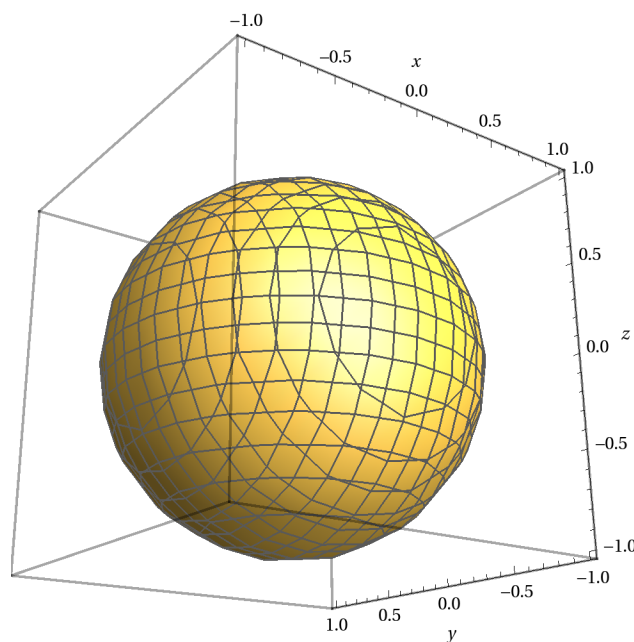


Figure 4.1: Eine 3-dimensionale Kugel mit dem Radius 1

4.2 Tangentialraum

Definition 4.2.1

Sei $X = N(f)$, f stetig differenzierbar, eine Hyperfläche und $a \in X$. Dann ist

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) (x_j - a_j) + o(\|x - a\|)$$

die erste Taylorformel (zum Landau Symbol $o(1)$)^a, so heißt

$$T_a X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) (x_j - a_j) = 0 \right\}$$

der Tangentialraum von X im Punkt a

^aIch denke das hier einfach der Rest Term eines Taylorpolynoms gemeint ist und das dieser langsamer wächst als $\|x - a\| \iff o(\|x - a\|)$

Corollary 4.2.1 Glatt oder Singulär

$T_a X$ ist der zu $\text{grad } f(a)$ orthogonale Untervektorraum:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } f(a), x \rangle = 0\}$$

Falls $\text{grad } f(a) \neq 0$, ist $T_a X$ eine Hyperebene und x ist glatt in a . Andernfalls ist $T_a X$ der gesamte Raum und x ist singulär in a .

In dieser überarbeiteten Formulierung beschreibt der Tangentialraum $T_a X$ den Untervektorraum, der orthogonal zum Gradienten von f an der Stelle a ist. Der Gradient von f , oft als $\text{grad } f(a)$ bezeichnet, gibt die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f an der Stelle a an.

Wenn der Gradient von f an der Stelle a ungleich Null ist, bildet der Tangentialraum eine Hyperebene, und die Funktion ist glatt (d. h. differenzierbar) an der Stelle a . Wenn der Gradient jedoch gleich Null ist, entspricht der Tangentialraum dem gesamten Raum, und die Funktion hat an der Stelle a einen singulären Punkt (d. h. sie ist möglicherweise nicht differenzierbar oder hat einen kritischen Punkt).

4.3 Satz über implizite Funktionen

Definition 4.3.1

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mal stetig differenzierbar und

$$a = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in N(f), \quad (4.1)$$

gilt $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$, dann existieren offene Umgebungen $V' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $(a_1, \dots, a_{n-1}) =: a'$ und $V'' \subset \mathbb{R}$ von $a_n =: a''$ mit $V' \times V'' \subset U$ und es existiert eine Funktion $g : V' \rightarrow V''$ und $g(a') = a''$ und

1. $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \quad \forall x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V'$ und
2. $\forall (x', x'') \in (V' \times V'') \cap N(f)$ gilt $x'' = g(x')$.

g ist lokal stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a') = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) / \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

Note:-

Grundlegend besagt der Satz, dass wenn eine Gleichung in der Form $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ eine Funktion implizit definiert und bestimmte Regularitätsbedingungen erfüllt sind, dann kann man die Ableitungen dieser impliziten Funktion berechnen, ohne sie explizit zu lösen.

Chapter 5

Integration im \mathbb{R}^n

5.1 Doppelintegral

Definition 5.1.1

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ \Delta A_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^h f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

wird (falls er existiert) als Doppelintegral bezeichnet und durch

$$\iint_A f(x, y) dA$$

gekennzeichnet.

Note:-

Angenommen, die Fläche A ist in M Reihen und N Spalten unterteilt, wobei die Breite der i -ten Spalte Δx_i und die Höhe der j -ten Reihe Δy_j ist.

Die Fläche der kleinen rechteckigen Teilfläche an der Position (i, j) ist dann $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.

$$S = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

Der Grenzwert dieser Flächen ist dann das Integral, in Abb: 5.1 ist eine solche Teilfläche zu sehen

$$\iint_A f(x, y) dA = \lim_{\substack{\Delta x_i, \Delta y_j \rightarrow 0 \\ M, N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

Ich finde diese Formel etwas intuitiver, da klar ist was k und δA_k sind.

In Bezug auf ihre Integrationsgrenzen ergibt sich

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

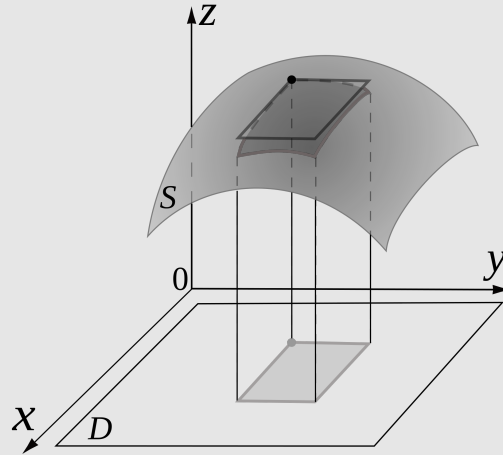


Figure 5.1: Eine Illustration eines einzelnen Oberflächenelements. Diese Elemente werden durch den Integrierungsprozess unendlich klein gemacht, um sich der Oberfläche anzunähern.

$$\iint_A f(x, y) dt = \int_{x=a}^b \underbrace{\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x, y) dy}_{\text{Inneres Integral}} dx$$

Das innere Integral wird für unendlich viele infinitesimal wenig aus einanderliegende x berechnet. Dann werden all diese Integrale, genau wie bei einem einfachen Integral Funktionswerte, integriert. In der Abb 5.2 ist bspw. das innere Integral für $x = 0$ zu sehen.

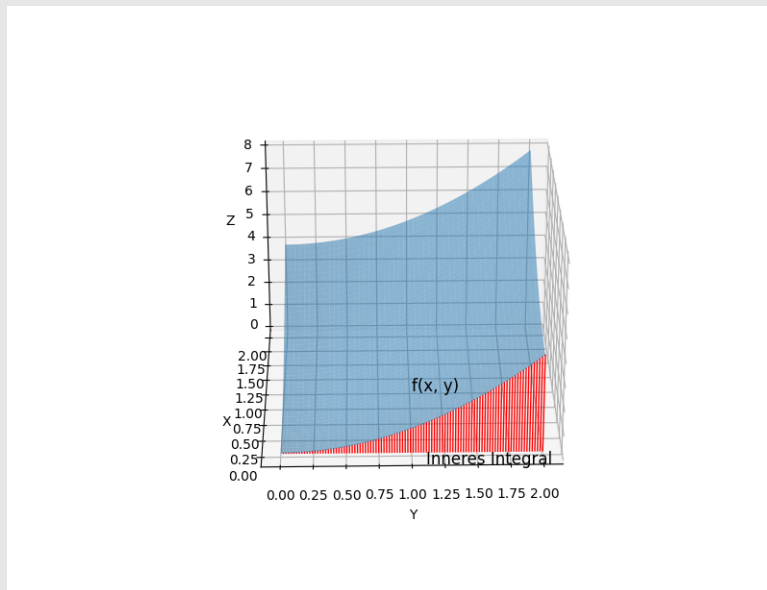


Figure 5.2: Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ und eine herausgeschnittene Scheibe $\int f(0, y) dy$

5.2 Berechnung eines Doppelintegrals unter Verwendung kartesischer Koordinaten

Note:-

- Ein Doppelintegral wird von innen nach außen integriert, d.h. zuerst bezüglich der Variablen y und dann bezüglich der Variablen x . Die Integrationsgrenzen des inneren Integrals sind dabei von x abhängige Funktionen, während die des äußeren Integrals konstant oder von einer anderen Variablen abhängig sein können.
- -Die Reihenfolge der Integration ist normalerweise durch die Reihenfolge der Differentiale im Doppelintegral festgelegt. Sie sind jedoch austauschbar, wenn alle Integrationsgrenzen konstant sind (rechteckiges Integrationsgebiet).

Example 5.2.1

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2; x \geq 0, y \geq 0, r \in \mathbb{R}\}$$

Es soll das Doppelintegral

$$\iint_B x \cdot y dB$$

berechnet werden.

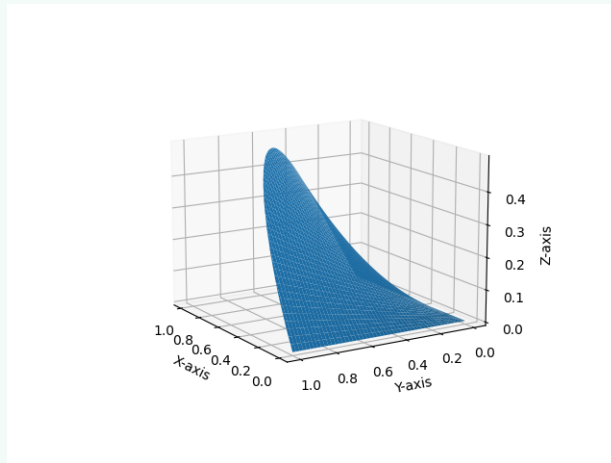


Figure 5.3: Die Funktion $f(x, y) = x \cdot y$ für die Menge B

In Abb. 5.3 ist die Funktion zu sehen, das Surface-Integral berechnet das Volumen unter dieser Funktion.

$$\begin{aligned}
 B : a = 0, b = R \\
 f_u(x) = 0, f_0(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \\
 \iint_B xy dB &= \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} xy dy \right] dx \\
 &= \int_0^R x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\
 &= \int_0^R x \left(\frac{R^2 - x^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^R \frac{R^2 x}{2} - \frac{x^3}{2} dx \\
 &= \left[\frac{R^2 x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_0^R = \frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{8} \\
 &= \frac{R^4}{8}
 \end{aligned}$$

Note:-

Beim Übergang von kartesischen Koordinaten (x, y) zu Polarkoordinaten (r, φ) gelten die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi \\
 y &= r \sin \varphi \\
 dA &= r dr d\varphi
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten:

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \tag{5.2}$$

1. Innere Integration nach r (Radialkoordinate)
2. Äußere Integration nach φ

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \iint_B xy dB &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R r \cos \varphi r \sin \varphi dr \right] d\varphi \\
 &= \int_0^R \left[\int_0^{\pi/2} r^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right] dr \\
 &= \int_0^R r^3 \frac{1}{2} [\sin^2 \varphi]_0^{\pi/2} dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{8}
 \end{aligned}$$

5.3 Transformation der Variablen

Definition 5.3.1

- Durch die Funktion

$$x = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

werde der Bereich \tilde{B} der $\tilde{x} - \tilde{y}$ -Ebene mit stückweise glattem Rand eineindeutig auf den Bereich B der $x - y$ -Ebene abgebildet.

- $x = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}), y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y})$ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung seien stetig in \tilde{B}
- Im Inneren von \tilde{B} gelte für die Funktional determinante

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \varphi_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \psi_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \psi_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{bmatrix} \neq 0$$

- Ist dann die Funktion in $f(x, y)$ in B stetig, so gilt

$$\iint_B f(x, y) dB = \iint_{\tilde{B}} f(\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}), \psi(\tilde{x}, \tilde{y})) \det \begin{bmatrix} \varphi_{\tilde{x}} & \varphi_{\tilde{y}} \\ \psi_{\tilde{x}} & \psi_{\tilde{y}} \end{bmatrix} d\tilde{B}$$

Example 5.3.1

Viertelkreis $\iint_B xy dB$

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Transformation

$$x = r \cos \varphi \quad 0 \leq r \leq R$$

$$y = r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Zuordnung ist eineindeutig.

$$x = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varphi(r, \varphi) = r \cos \varphi$$

$$y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \psi(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

φ, ψ sind stetig

$$\varphi_r = \cos \varphi \quad \varphi_\varphi = -r \sin \varphi$$

$$\psi_r = \sin \varphi \quad \psi_\varphi = r \cos \varphi$$

Funktional determinante

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \varphi_r & \varphi_\varphi \\ \psi_r & \psi_\varphi \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi \\ &= r \end{aligned}$$

ist $\neq 0$ im Inneren von \tilde{B}

\Rightarrow Transformationssatz ist anwendbar.

5.4 Rechenregeln für Integrale

Definition 5.4.1

Additivität:

sind f, g zwei integrierbare Funktionen, so gilt

$$\iint_B (f(x, y) + g(x, y)) dB = \int_B f(x, y) dB + \int_B g(x, y) dB$$

Additivität bzgl. der Bereiche:

Seien B_1, B_2 zwei Bereiche ohne gemeinsame innere Punkte, so gilt

$$\iint_{B_1 \cup B_2} f(x, y) dB = \int_{B_1} f(x, y) dB + \iint_{B_2} f(x, y) dB$$

Konstanter Faktor:

Ist k eine reelle Zahl, so gilt

$$\iint_B k f(x, y) dB = k \iint_B f(x, y) dB$$

Monotonie: Ist für jeden Punkt $(x, y) \in B$ $f(x, y) \leq g(x, y)$, so gilt

$$\iint_B f(x, y) dB \leq \iint_B g(x, y) dB$$

Abschätzung: Ist f über B integrierbar, so auch $|f|$ so gilt

$$\left| \iint_B f(x, y) dB \right| \leq \iint_B |f(x, y)| dB$$

Eingrenzung:

Ist m die untere, M die obere Grenze von f in B ($m \leq M$) und ist $|B|$ der Flächeninhalt von B , so gilt

$$m|B| = \iint_B f(x, y) dB \leq M|B|$$

Mittelwertsatz: Wenn f auf B stetig ist, so existiert auf B mindestens eine Stelle (ξ, η) mit

$$\iint_B f(x, y) dB = f(\xi, \eta)|B|$$

5.5 Dreifach-Integrale

Definition 5.5.1

Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta v_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k, y_k, z_k) \Delta v_k$$

wird (falls er existiert) als Dreifach-Integral bezeichnet und durch das Symbol

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

gekennzeichnet.

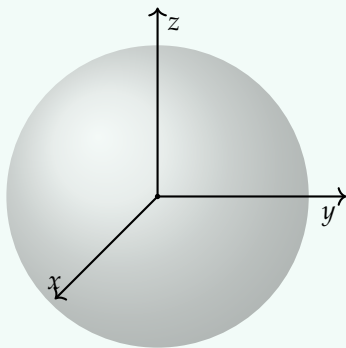
Example 5.5.1

Wenn $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist diese sehr schwer vorstellbar und vorallem nicht visualisierbar.

Da der Funktionswert $f(x, y, z)$ nicht mehr eine Koordinate im kartesischen Koordinatensystem darstellt sondern eine gewisse Eigenschaft des Punktes (x, y, z) .

In vielen Anwendungen wie in der Physik, könnte dies aber ausgenutzt werden. Sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$$



Dann ist der Körper die Kugel und $f(x, y, z)$ kann jetzt eine Eigenschaft über jeden der inneren Punkt beschreiben, bspw. die Dichte an dieser Stelle und dann wäre das Dreifachintegral gerade die Masse dieser Kugel.

An diesem Beispiel lässt sich auch sehr gut die Formel vorstellen, man Teilt die Kugel in unendlich viele infinitesimal $\Delta A = dx \cdot dy \cdot dz$ große Stücke und berechnet für diese die Dichte und summiert sie dann alle auf. In Abbildung 5.4 ist dies versuchsweise dargestellt.

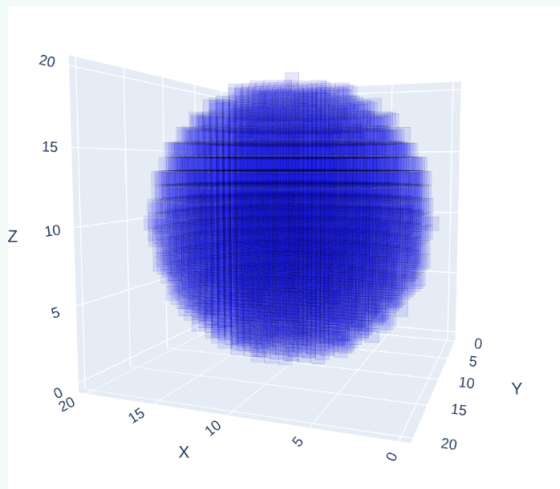


Figure 5.4: Eine Kugel dargestellt als eine Menge von kleinen Würfeln

Der Grenzwert dieser Flächen ist dann das Integral

$$\iiint_A f(x, y, z) dA = \lim_{\substack{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0 \\ M, N, L \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta A_{ijk}$$

Der Für uns aber häufig interessante Fall ist wenn $f(x, y, z) = 1$, weil dann

$$\iiint_A f(x, y, z) dA$$

gleich dem Volumen des Körpers ist.

Theorem 5.5.1 Transformation von Variablen

Die Voraussetzungen seien hier für Transformationsfunktionen $x = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, $y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, $z = \chi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ die selben wie im 2-dimensionalen. Ist dann im Inneren des Bereiches V die Funktional-determinante

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{z}} \end{bmatrix}}_M \neq 0$$

so gilt für jede Stetige Funktion $f(x, y, z)$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{\tilde{V}} f(\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \chi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})) \det M d\tilde{V}$$

Example 5.5.2 (Transformation zu kartesischen Koordinaten)

Sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Wir wollen das Volumen der Kugel bestimmen, sei also $f(x, y, z) = 1$. Wenn wir jetzt

$$\iiint_V 1 dV$$

bestimmen erhalten wir direkt das Volumen, ohne einen Wechsel ist dieses Integral aber händisch nicht zu lösen.

Es wird also ein Wechsel der Variablen hinzu den Polarkoordinaten vorgenommen.

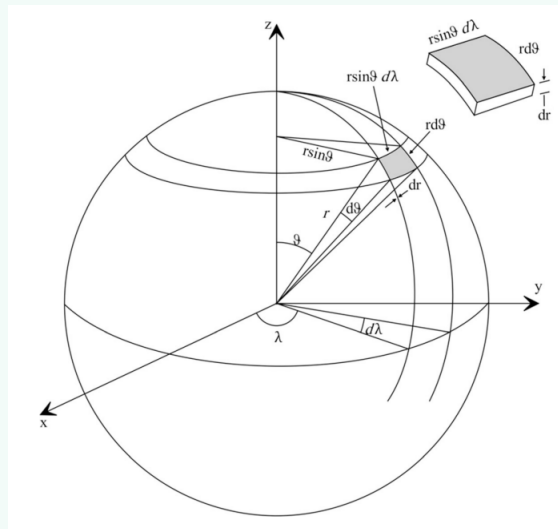


Figure 5.5: Eine Kugel dargestellt als eine Menge von kleinen Würfeln

In der Abbildung 5.5 wird das Prinzip gezeigt, wie kleine Stücke aus einer Kugel entnommen und anschließend aufsummiert werden, um das Integral zu berechnen.

Die zentrale Frage ist, warum die Größe eines solchen Stücks genau $r \sin \vartheta d\lambda \cdot r d\vartheta \cdot dr$ ist.

Die Höhe des Stücks ist dr , was recht intuitiv ist, da sie nicht von den beiden anderen Winkeln abhängt. Eine Seitenkante des Stücks hat die Länge $rd\vartheta$. Man kann sich vorstellen, dass bei einer festen Änderung des Winkels $d\vartheta$ die Länge der Seitenkante in direkter Proportionalität zu r steht - je größer r ist, desto

länger wird die Seitenkante, und je kleiner r ist, desto kürzer wird die Kante.

Die letzte Seitenkante ist etwas schwerer zu erkennen. Der Faktor r entsteht auf die gleiche Weise wie bei der vorherigen Seitenkante. Nun muss noch der Faktor $\sin \vartheta$ erklärt werden. Anhand der Abbildung kann man erkennen, dass die Kante von der z -Achse zur Seitenkante eine Länge von $r \sin \vartheta$ hat. Bei genauerem Hinsehen ist die Proportionalität dieser Länge zur Länge der Seitenkante erkennbar, woraus sich deren Länge ergibt.

Wenn diese Transformation erledigt ist, kann jetzt das Integral gelöst werden:

$$|V| = \iiint 1 dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin v dv d\varphi dr$$

Das innerste Integral berechnet einen Halbkreis

im zweiten Integral wird dieser Halbkreis dann einmal vollständig um die z Achse gedreht

im äußersten Integral wird dann für alle dr aufsummiert

$$\begin{aligned} &= \int_0^R r^2 \int_0^{2\pi} -[\cos v]_0^\pi d\varphi dr \\ &= \int_0^R r^2 \int_0^{2\pi} -((-1) - 1) d\varphi dr \\ &= 2 \int_0^R r^2 [\varphi]_0^{2\pi} dr = 4\pi \int_0^R r^2 dr \\ &= \frac{4}{3}\pi [r^3]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Theorem 5.5.2

Hat das Dreifachintegral feste Grenzen und lässt sich der Integralrand schreiben als

$$f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} f_2(y) dy \int_{z_0}^{z_1} f_3(z) dz \end{aligned}$$

Example 5.5.3

Bsp: erneut die Berechnung des Volumens der Kugel

$$\begin{aligned} |V| &= \iiint_V = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\pi \sin v dv \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot [-\cos v]_0^\pi \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot (-(-1 - 1)) = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$