ЛЕКЦІЯ 4
4.1. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

В практичній діяльності, як правило, зустрічаються події, що відбуваються не самі по собі в чистому вигляді, найчастіше вони відбуваються спільно з іншими подіями. Розглянемо приклад.

Приклад. Три заводи виробляють одну й ту ж продукцію. При цьому 1-й завод виробляє 25%, 2-й завод — 35% і 3-й завод — 40% всієї виробленої продукції. Брак складає 5% від продукції 1-го заводу, 3% від продукції 2-го і 4% від продукції 3-го заводу.

Вся продукція змішується і надходить до продажу. Знайти

а) ймовірність придбати бракований виріб; б) умовну ймовірність того, що придбаний крам виготовлений 1-м заводом, якщо цей виріб бракований.

Розв'язок. Перша ймовірність дорівнює долі бракованих виробів в обсязі всієї продукції, тобто $0.05 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.35 + 0.04 \cdot 0.4$.

Друга ймовірність дорівнює долі браку 1-го заводу серед всього браку, тобто

$$\frac{0.05 \cdot 0.25}{0.05 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.35 + 0.04 \cdot 0.4}.$$

Розглянуту у цьому прикладі схему міркувань доцільно розглянути з іншої точки зору. Введемо поняття гіпотези.

Означення 18.

Набір попарно несумісних подій $H_1, H_2, \dots$ таких, що $\mathsf{P}(H_i) > 0$ для всіх i і $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$, називають *повною групою подій або розбиттям простору* Ω.

Події $H_1, H_2, \dots$, що утворюють повну групу подій, часто називають *гіпотезами*. При зручному виборі гіпотез для довільної події A можуть порівняно просто обчислюватися ймовірності $\mathsf{P}(A|H_i)$ (умовна ймовірність події A відбутися при виконанні «гіпотези» H_i) і $\mathsf{P}(H_i)$ (ймовірність виконання «гіпотези» H_i). Як, використовуючи ці дані, обчислити ймовірність відбування події A?

Теорема 8 (формула повної ймовірності).

Нехай $H_1, H_2, \dots$ — повна група подій. Тоді ймовірність будь якої події A може бути обчислена за формулою:

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A|H_i).$$

Цю формулу і називають ***формулою повної ймовірності***.

4.2. Формула Байєса

Знову розглянемо подію A, яка може відбутись лише сумісно з однією із гіпотез $H_1, H_2, ..., H_k$, які утворюють повну групу несумісних подій. Імовірності гіпотез $P(H_i)$ $(i = 1, 2, ..., k)$ або відомі заздалегідь, або можуть бути обчислені із умов випробування. Оскільки кожна з подій H_i і подія A – попарно залежні, то, якщо подія A відбудеться в результаті випробування, ймовірності гіпотез $P(H_i)$ мають змінитися.

Формули, одержані англійським математиком Т.Бейєсом і опубліковані в 1764 р., дозволяють обчислити нові ймовірності гіпотез $P(H_i | A)$, тобто переоцінити ймовірності гіпотез в зв'язку з тим, що подія A відбулась. Імовірності $P(H_i)$ є апріорними, а $P(H_i | A)$ – апостеріорними.

Підставляючи в формулу (1.18) для залежних подій замість A_2 послідовно гіпотези H_i, а замість A_1 – подію A, одержимо k формул:

$$P(A)\cdot P(H_i|A)=P(H_i)\cdot P(A|H_i),$$

звідки

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(A)} \quad (i=1,2,\dots,k) \ . \tag{1.27}$$

Це формули Бейєса або формули ймовірностей гіпотез. В них ймовірність $P(A)$ обчислюється за формулою повної ймовірності (1.26).

Приклад (продовження) .

Повернемось до прикладу 18. Виріб вибирається наудачу з усієї виробленої продукції. Розглянемо три гипотези: $H_i=\{\text{изделие изготовлено } i\text{-м заводом}\}$, $i=1,2,3$. Ймовірності цих гіпотез дано $\mathsf{P}(H_1)=0.25$, $\mathsf{P}(H_2)=0.35$, $\mathsf{P}(H_3)=0.4$. Нехай $A=\{\text{изделие оказалось бракованным}\}$. Дано також умовні ймовірності $P(A|H_1)=0.05$, $P(A|H_2)=0.03$, $P(A|H_3)=0.04$.

За формулою повної ймовірності, отримуємо, що ймовірність події A дорівнює

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0.25\times0.05+0.35\times0.03+0.4\times0.04$$

За формулою Байеса маємо:

$$P(H_k/A)=\frac{0.25\times0.05}{0.25\times0.05+0.35\times0.03+0.4\times0.04}$$

Ми отримали, що обчислені нами раніше ймовірності співпадають із ймовірностями, об*численими за формулою повної ймовірності і формулою Байеса.*

Приклад 1.24. Два стрільці підкидають монетку і вибирають, хто з них стріляє по мішені (однією кулею). Перший стрілець влучає в мішень з ймовірністю 1, другий стрілець — з ймовірністю 0.00001.

а)Яка ймовірність кулі влучити в мішень?

б) Якщо куля влучила, то які ймовірності того що стріляв 1-й або 2-й стрілець?

Розв'язок. Сформулюємо дві гіпотези про експеримент: $H_1=\{\text{стреляет 1-й стрелок}\}$ і $H_2=\{\text{стреляет 2-й стрелок}\}$. Априорні (a'priori — «до досліду») ймовірності цих гіпотез однакові: $\mathsf{P}(H_1)=\mathsf{P}(H_2)=1/2$.

Розглянемо подію $A=\{\text{пуля попала в мишень}\}$. Відомо, що

$$\mathsf{P}(A|H_1)=1, \quad \mathsf{P}(A|H_2)=0.00001.$$

Тому ймовірність кулі влучити в мішень $\mathsf{P}(A)=1/2\cdot1+1/2\cdot0.00001$.

Припустимо, що подія A відбулася. Яка тепер апостеріорна (a'posteriori — «після досліду») ймовірність кожної з гіпотез H_i?

Зрозуміло, що перша з цих гіпотез набагато ймовірніша за другу (а саме, в 100000 раз). Дійсно,

$$\mathsf{P}(H_1|A)=\frac{1/2\cdot1}{1/2\cdot1+1/2\cdot0.00001}=\frac{1}{1+0.00001}; \quad \mathsf{P}(H_2|A)=\frac{1/2\cdot0.00001}{1/2\cdot1+1/2\cdot0.00001}=\frac{0.00001}{1+0.00001}.$$

Формула (1.26) називається *формулою повної ймовірності*.

Приклад 1.25. Для пошуку приземлюваного космічного апарату призначено 10 гелікоптерів, кожен з яких веде пошук в одному з двох районів, де апарат може знаходитися з імовірностями 0,8 і 0,2. Як слід розподілити гелікоптери по районах пошуків, щоб імовірність виявлення апарату була найбільшою, якщо кожен гелікоптер незалежно від інших знаходить апарат в районі пошуку з імовірністю 0,3? Знайти ймовірність виявлення апарату при оптимальному розподілі гелікоптерів.

Розв'язання. Позначимо подію

A = {виявлення апарату}

і гіпотези

H_1 = {апарат знаходиться в першому районі};

H_2 = {апарат знаходиться в другому районі}.

За умовою задачі $P(H_1) = 0.8,\ P(H_2) = 0.2.$

Нехай в перший район направлено m гелікоптерів, а в другий $10-m$. Подія A за умови виконання гіпотези H_1 полягає в виявленні апарату принаймні одним з m гелікоптерів, тому для обчислення умовної ймовірності $P(A\,|\,H_1)$ застосуємо формулу (1.24):

$$P(A|H_1) = 1 - 0{,}7^m,$$

оскільки ймовірності знаходження апарату кожним з m гелікоптерів однакові і рівні $p = 0{,}3$, отже, $q = 0{,}7$.

Аналогічно $P(A|H_2) = 1 - 0{,}7^{10-m}$, і за формулою повної ймовірності (1.26)

$$P(A) = 0{,}8(1 - 0{,}7^m) + 0{,}2(1 - 0{,}7^{10-m}) =$$
$$= 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7^m - 0{,}2 \cdot 0{,}7^{10-m}.$$

Далі потрібно знайти таке значення m, при якому ймовірність $P(A)$ буде максимальною. Прирівняємо похідну від $P(A)$ по m нулю:

$$\frac{dP(A)}{dm} = -0{,}8 \cdot 0{,}7^m \ln 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}7^{10-m} \ln 0{,}7 = 0,$$

звідки

$$0{,}7^{2m-10} = 0{,}25$$

або після логарифмування

$$2m - 10 = \frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}7} = \frac{-1{,}3863}{-0{,}3567} \approx 4,$$

звідки $m = 7$.

Отже, оптимальний розподіл гелікоптерів по районах пошуку: 7 – в перший район і 3 – в другий. При цьому найбільша ймовірність виявлення апарату

$$P(A) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7^7 - 0{,}2 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}866.$$

Приклад 1.26. Проводиться випробування надійності приладу, який складається з двох вузлів. Вузли працюють або виходять з ладу незалежно один від одного. Надійності (ймовірності безвідмовної роботи за час *t*) першого і другого вузлів відомі і дорівнюють відповідно 0,9 і 0,95. Впродовж часу *t* прилад відмовив. Знайти ймовірність того, що до цього призвів :

а) вихід з ладу 1-го вузла;

б) вихід з ладу 2-го вузла;

в) вихід з ладу обох вузлів.

Розв'язання. Позначимо подію A = {за час t прилад відмовив}, а гіпотези H_1, H_2, H_3 – події, зазначені в умовах а)-в) задачі. Взагалі повна група гіпотез включає також гіпотезу H_4 = {обидва вузли не вийшли з ладу}, хоча сумісна поява подій A і H_4 є подією неможливою.

Імовірності гіпотез обчислюються за формулою (1.21) :

$$P(H_1)=0{,}1\cdot 0{,}95=0{,}095; \qquad P(H_2)=0{,}9\cdot 0{,}05=0{,}045;$$
$$P(H_3)=0{,}1\cdot 0{,}05=0{,}005; \qquad P(H_4)=0{,}9\cdot 0{,}95=0{,}855.$$

Оскільки подія A відбулась, то мала місце одна з гіпотез H_1, H_2, H_3, причому $A=H_1+H_2+H_3$ (прилад відмовляє в разі появи будь-якої з цих гіпотез), тому

$$P(A)=P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0{,}145.$$

Далі за формулами Бейєса (1.27) знаходимо апостеріорні ймовірності гіпотез $P(H_i\,|\,A)$, враховуючи, що всі умовні ймовірності $P(A\,|\,H_i)=1$, оскільки відмова приладу при появі будь-якої з гіпотез H_1, H_2, H_3 є подія достовірна:

$$P(H_1|A)=\frac{0{,}095}{0{,}145}=0{,}655; \; P(H_2|A)=\frac{0{,}045}{0{,}145}=0{,}31;$$
$$P(H_3|A)=\frac{0{,}005}{0{,}145}=0{,}035.$$

Імовірності гіпотез після того, як відбулася подія A, істотно зросли і ці апостеріорні ймовірності вже утворюють повну групу подій.

Приклад 1.27. В продукції підприємства по виробництву електричних ламп число бракованих ламп серед будь-яких ста рівноможливе від 0 до 2. Знайти ймовірність того, що серед ста ламп не буде жодної бракованої, якщо з вибраних навмання десяти всі виявились придатними.

Розв'язання. Позначимо через A подію:

A = {серед 10-ти ламп всі придатні},

а через H_0, H_1, H_2 – гіпотези: серед ста ламп є відповідно 0, 1, 2 браковані.

За умовою задачі гіпотези рівноможливі: $P(H_0)=P(H_1)=P(H_2)=\dfrac{1}{3}$.

Обчислимо умовні ймовірності події A для кожної з гіпотез:

$$P(A|H_0)=\frac{C_{100}^{10}}{C_{100}^{10}}=1; \quad P(A|H_1)=\frac{C_{99}^{10}}{C_{100}^{10}}=0{,}9; \quad P(A|H_2)=0{,}81.$$

За формулою повної ймовірності (1.26)

$$P(A)=\frac{1}{3}(1+0{,}9+0{,}81)=0{,}9,$$

а апостеріорна ймовірність гіпотези H_0 за формулою Бейєса

$$P(H_0|A)=\frac{1}{3\cdot 0{,}9}=0{,}37.$$