ЛЕКЦІЯ 7

2.1.4. Щільність розподілу неперервної випадкової величини і її властивості

Щільність розподілу або *щільність імовірності* $f(x)$ є однією з форм закону розподілу випадкової величини, який застосовується лише для неперервних величин. Термін "щільність імовірності" походить із задач механіки: якщо в відношенні

$$\frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} \tag{2.13}$$

імовірності $P\{x < X < x + \Delta x\}$ того, що в результаті випробування випадкова величина X потрапить в інтервал $(x;\ x + \Delta x)$, до довжини інтервалу Δx імовірність $P\{x < X < x + \Delta x\}$ інтерпретувати як масу речовини, то відношення (2.13) буде не що інше, як середня лінійна щільність (густина) речовини.

Покладаючи в формулі

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \le x < x_2\}.$$

$x_1 = x,\ \ x_2 = x + \Delta x,$ представимо відношення (2.13) у вигляді:

$$\frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

або, переходячи до границі при $\Delta x \to 0,$ одержимо в правій частині похідну $F'(x)$ функції розподілу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \tag{2.14}$$

В лівій частині формули (2.14) знаходиться щільність імовірності в точці x, яка позначається $f(x)$, тому

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = F'(x). \tag{2.15}$$

<u>Означення 2.5.</u> *Щільністю розподілу* або *щільністю ймовірності* $f(x)$ неперервної випадкової величини X називається перша похідна від її функції розподілу $F(x)$.

Функцію $f(x)$ інколи називають також *диференціальною функцією* розподілу випадкової величини.

Властивості щільності розподілу неперервної випадкової величини $f(x)$.

<u>Властивість 1.</u> Щільність імовірності – невід'ємна функція: $f(x) \ge 0$.

<u>Властивість 2.</u> Імовірність того, що в результаті випробування неперервна випадкова величина прийме можливе значення з інтервалу $(\alpha;\ \beta)$, дорівнює визначеному інтегралу від щільності ймовірності на цьому інтервалі:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{2.16}$$

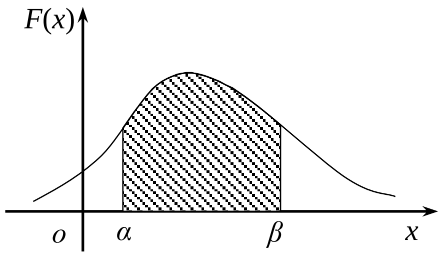

Рис. 2.6

Якщо крива розподілу $f(x)$ має схематичний вигляд, представлений на рис.2.6, то геометрично ймовірність $P\{\alpha < X < \beta\}$ дорівнює площі криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[\alpha;\ \beta]$ і обмежена зверху кривою розподілу $f(x)$.

Властивість 3. Функція розподілу $F(x)$ виражається через щільність розподілу $f(x)$ формулою:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{2.17}$$

Геометрична інтерпретація властивості 3: значення функції розподілу $F(x)$ в точці x дорівнює площі, яка розташована лівіше точки x і обмежена кривою розподілу і віссю Ox (рис.2.7).

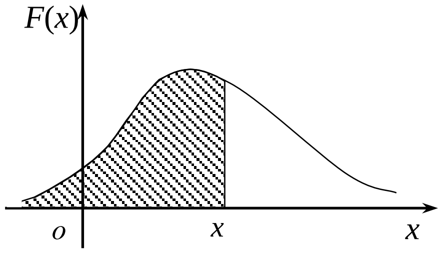

Рис. 2.7

Властивість 4. Якщо неперервна випадкова величина X приймає можливі значення на всій числовій осі, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1. \tag{2.18}$$

Якщо випадкова величина приймає всі можливі значення на обмеженому інтервалі $(a;\ b)$, то умова (2.18) набуває вигляду:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=1. \tag{2.19}$$

Із щільністю ймовірності зв'язане важливе поняття *елемента ймовірності*, яке використовується для знаходження числових характеристик неперервної випадкової величини (п.2.2).

Із формули (2.15) з точністю до нескінченно малих вищих порядків випливає рівність:

$$P\{x<X<x+\Delta x\}=f(x)\Delta x=f(x)dx. \tag{2.20}$$

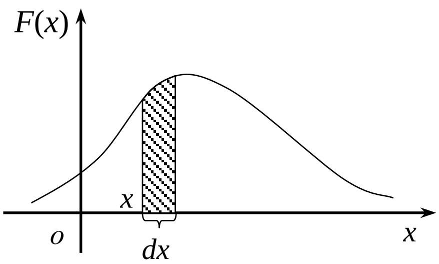

Рис. 2.8

Величина $f(x)dx$ (або $f(x)\Delta x$) називається *елементом імовірності* для точки x неперервної випадкової величини, оскільки вона дорівнює ймовірності того, що випадкова величина в результаті випробування потрапить в досить малий інтервал Δx.

Геометрично елемент імовірності наближено дорівнює площі елементарної криволінійної трапеції з основою dx, прилеглою до точки x (рис.2.8).

Приклад 2.4. Неперервна випадкова величина має щільність імовірності:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1;\\ A\ln x & \text{при } 1<x\le e^2;\\ 0 & \text{при } x>e^2.\end{cases}$$

Знайти:

1) сталий параметр A;
2) функцію розподілу $F(x)$ (побудувати її графік);
3) імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина потрапить в інтервал $(e;\ e^2)$.

Розв'язання. 1. Параметр A знайдемо з умови (2.19):

$$\int_a^b f(x)dx = A\int_1^{e^2} \ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x; & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = x \end{vmatrix} = A\left(x\ln x\Big|_1^{e^2} - x\Big|_1^{e^2}\right) = A(e^2+1) = 1.$$

Звідки

$$A = \frac{1}{e^2+1}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^2+1}\ln x \text{ при } 1 < x \le e^2.$$

2. Функція розподілу знаходиться за формулою (2.17):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{e^2+1}\int_1^x \ln x dx = \frac{1}{e^2+1}(x\ln x - x)\Big|_1^x = \frac{1}{e^2+1}(x\ln x - x + 1).$$

Отже, функція розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1; \\ \frac{1}{e^2+1}(x\ln x - x + 1) & \text{при } 1 < x \le e^2; \\ 1 & \text{при } x > e^2. \end{cases}$$

Графік $F(x)$ представлений на рис.2.9.

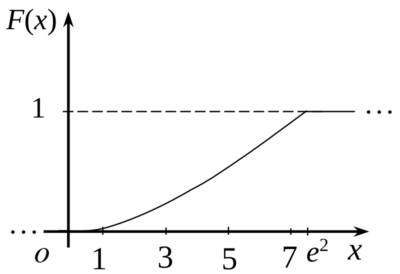

Рис. 2.9

3. Імовірність події $\{e < X < e^2\}$ обчислимо за формулою (2.16):

$$P\{e < X < e^2\} = \frac{1}{e^2+1}\int_e^{e^2} \ln x dx = \frac{1}{e^2+1}(x\ln x - x)\Big|_e^{e^2} = \frac{e^2}{e^2+1} \approx 0{,}881.$$

2.2. Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу найбільш повно характеризує випадкову величину і дозволяє обчислювати ймовірності всіх подій, зв'язаних з випадковою величиною. Проте при розв'язанні багатьох практичних задач важливу роль відіграють числові значення, які дають деяку узагальнену, усереднену характеристику випадкової величини та її розподілу. Ці значення називаються *числовими характеристиками* випадкової величини. Основними з них є математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та моменти різних порядків.

Для їх знаходження не треба знати точні закони розподілу випадкових величин, встановлення яких часто пов'язане з значними труднощами. В той же час числові характеристики в багатьох випадках вичерпують наші потреби в даних про випадкову величину.

2.2.1. Математичне сподівання випадкової величини та його властивості.

Розглянемо спочатку дискретну випадкову величину X, задану рядом розподілу:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n

(2.1)

<u>Означення 2.6.</u> *Математичним сподіванням* $M(X)$ дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх її можливих значень на ймовірності, з якими випадкова величина приймає ці значення:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k . \tag{2.21}$$

Із означення випливає, що математичне сподівання є величина невипадкова (стала). Вона має такий <u>імовірнісний зміст</u>: математичне сподівання при великій кількості випробувань наближено дорівнює середньому арифметичному можливих значень випадкової величини, які вона приймала в цих випробуваннях. Тому математичне сподівання $M(X)$ називають ще *середнім значенням* випадкової величини.

Перейдемо до обчислення математичного сподівання неперервної випадкової величини X, заданої щільністю ймовірності $f(x)$ на інтервалі $(a;\ b)$.

Розіб'ємо $(a;\ b)$ довільно на n частинних інтервалів з довжинами $\Delta x_1, \Delta x_2 ,..., \Delta x_n$ і виберемо на кожному частинному інтервалі довільну точку $x_1, x_2 ,..., x_n$. Будемо вважати, що на i-му частинному інтервалі випадкова величина приймає стале можливе значення, що дорівнює x_i $(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$. Імовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал Δx_i , згідно з формулою (2.20) дорівнює $f(x_i)\Delta x_i$, тому по аналогії з математичним сподіванням дискретної випадкової величини (2.21) одержимо

$$M(X)\approx\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)\Delta x_i .$$

Наближена рівність виникає внаслідок припущення про сталість можливих значень випадкової величини на кожному частинному інтервалі. Для усунення цієї наближеності перейдемо до границі за умови, що довжина найбільшого частинного інтервалу прямує до нуля:

$$M(X)=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)\Delta x_i$$

або за означенням визначеного інтегралу від функції $xf(x)$ на відрізку $[a;b]$

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx . \tag{2.22}$$

Якщо неперервна випадкова величина задана щільністю ймовірності $f(x)$ при $x\in(-\infty;\infty)$, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{2.23}$$

Ясно, що в цьому випадку для існування математичного сподівання випадкової величини невласний інтеграл повинен бути збіжним. Це ж зауваження стосується і дискретної випадкової величини, у якої множина можливих значень нескінченна, і для якої формула (2.21) приймає вигляд:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Математичне сподівання цієї випадкової величини існує при умові збіжності ряду в правій частині.

<u>Приклад 2.6.</u> Випадкова величина X – число надійних приладів в системі, розглянута в прикладі 2.1, має ряд розподілу

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

Знайти $M(X)$.

Розв'язання. Математичне сподівання заданої дискретної величини обчислюється за формулою (2.21)

$$M(X)=0\cdot 0{,}006+1\cdot 0{,}092+2\cdot 0{,}398+3\cdot 0{,}504=2{,}4.$$

<u>Приклад 2.7.</u> Імовірність події A дорівнює p. Знайти математичне сподівання кількості появ події A в одному випробуванні.

Розв'язання. Випадкова величина X — кількість появ події A в одному випробуванні приймає два можливі значення: $x_1=1$ (подія A відбулась) з імовірністю p і $x_2=0$ (подія A не відбулась) з імовірністю $q=1-p$, тому

$$M(X)=1\cdot p+0\cdot q=p.$$

Отже, математичне сподівання кількості появ події A в одному випробуванні дорівнює ймовірності цієї події.

<u>Приклад 2.9.</u> Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{при } x\in(1;\ e);\\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\,(1;\ e).\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання $M(X)$.

Розв'язання. Для знаходження математичного сподівання і використання в подальших прикладах обчислимо частинами інтеграл

$$\int_1^e x^n \ln x dx=\begin{vmatrix} u=\ln x; dv=x^n dx \\ du=\dfrac{dx}{x}; v=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\end{vmatrix}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\Big|_1^e-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Big|_1^e=\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}. \qquad (2.24)$$

Тоді за формулою (2.22)

$$M(X)=\int_1^e x\ln x dx=\frac{e^2+1}{4}\approx 2{,}1.$$

Властивості математичного сподівання випадкової величини

<u>Властивість1.</u> Якщо C – стала величина, то $M(C)=C$.

<u>Властивість2.</u> Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Для розгляду наступної властивості математичного сподівання дамо означення незалежних випадкових величин.

<u>Означення 2.7.</u> Дві випадкові величини X і Y називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення приймає друга величина.

<u>Властивість 3.</u> Математичне сподівання добутку двох *незалежних* випадкових величин X і Y дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Методом математичної індукції властивість 3 поширюється на довільну кількість n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$M(X_1 X_2 ... X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n).$$

<u>Властивість 4.</u> Сталий множник C можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = CM(X).$$

<u>Властивість 5.</u> Математичне сподівання відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ дорівнює нулю:

$$M[X - M(X)] = 0. \qquad (2.28)$$

2.2.2. Дисперсія випадкової величини та її властивості. Середнє квадратичне відхилення

Як уже відзначалося у п.2.2.1, математичне сподівання характеризує випадкову величину в середньому. Проте, випадкові величини, які мають одне і те ж математичне сподівання, можуть істотно відрізнятися законом розподілу. Отже, математичне сподівання недостатньо характеризує розподіл випадкової величини, так само, як, наприклад, однакова середня заробітна плата на двох підприємствах не дає уявлення про співвідношення низько- і високооплачуваних категорій працівників цих підприємств.

Тому для характеристики випадкової величини важливо оцінити принаймні в середньому міру її розкиду (розсіяння) навколо математичного сподівання. За таку міру природно було б прийняти математичне сподівання відхилення випадкової величини. Проте за формулою (2.28) ця величина дорівнює нулю і, отже, не може бути характеристикою розсіяння. Тому за міру розсіяння прийнята інша величина, яка називається *дисперсією* і поряд з математичним сподіванням відноситься до основних характеристик випадкової величини.

<u>Означення 2.10.</u> *Дисперсією (розсіянням)* $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата її відхилення:

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}. \qquad (2.29)$$

Виходячи з формул (2.21) і (2.22) для математичного сподівання, одержуємо формули для обчислення дисперсії:

- для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу (2.1):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i; \qquad (2.30)$$

- для неперервної випадкової величини, заданої щільністю ймовірності $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx. \qquad (2.31)$$

Очевидними перетвореннями із застосуванням властивостей 1 і 2 математичного сподівання виразу для дисперсії (2.29) можна надати іншого вигляду:

$$D(X)=M\{X^2-2XM(X)+[M(X)]^2\}=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+[M(X)]^2=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Отже, *дисперсія* випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом її математичного сподівання:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \qquad (2.32)$$

Квадрат випадкової величини X, заданої рядом розподілу (2.1), є випадкова величина X^2, яка приймає можливі значення x_i^2 з ймовірностями p_i ($i=1,2,...,n$), оскільки, як тільки випадкова величина X приймає певне можливе значення, наприклад, x_1, величина X^2 приймає можливе значення x_1^2.

Тому для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини X, крім формули (2.30), можна застосувати формулу:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-[M(X)]^2 \qquad (2.33)$$

і, відповідно, для неперервної випадкової величини, крім формули (2.31), формулу:

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-[M(X)]^2.$$

Якщо неперервна випадкова величина задана щільністю ймовірності $f(x)$ при $x\in(-\infty;\infty)$, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-[M(X)]^2. \qquad (2.34)$$

<u>Приклад 2.13.</u> Випадкова величина X — число надійних приладів в системі, розглянута в прикладі 2.1, має ряд розподілу

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

.

Знайти дисперсію $D(X)$.

Розв'язання. Математичне сподівання $M(X)$ = 2,4 було обчислено в прикладі 2.6. Знайдемо математичне сподівання квадрата цієї випадкової величини:

$$M(X^2)=1\cdot 0{,}092+4\cdot 0{,}398+9\cdot 0{,}504=6{,}22.$$

За формулою (2.32)

$$D(X)=6{,}22-(2{,}4)^2=0{,}46.$$

<u>Приклад 2.14.</u> Неперервна випадкова величина X має щільність імовірності

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{при } x\in(1;\ e);\\ 0 & \text{при } x\overline{\in}(1;\ e).\end{cases}$$

Знайти дисперсію $D(X)$ випадкової величини.

Розв'язання. Дисперсію обчислимо за формулою (2.32). Математичне сподівання $M(X)$ знайдено в прикладі 2.9: $M(X)=\frac{1}{4}(e^2+1)$.

Використовуючи значення інтеграла (2.24), одержимо

$$M(X^2)=\int_1^e x^2\ln x dx=\frac{2e^3+1}{9}.$$

Отже,

$$D(X)=\frac{2e^3+1}{9}-\frac{1}{16}(e^2+1)^2\approx 0{,}176.$$

Властивості дисперсії випадкової величини

<u>Властивість 1.</u> Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю:

$$D(C)=0.$$

<u>Властивість 2.</u> Сталу величину C можна виносити за знак дисперсії, підносячи її до квадрата:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

<u>Властивість 3.</u> Дисперсія суми двох *незалежних* випадкових величин X і Y дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

<u>Властивість 4.</u> Дисперсія суми випадкової величини X і сталої величини C дорівнює дисперсії випадкової величини X:

$$D(X+C)=D(X).$$

<u>Властивість 5.</u> Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Зауваження. Властивості 3 і 5 для дисперсії залежних випадкових величин будуть розглянуті в п.2.7.7.

Ще однією характеристикою розсіяння випадкової величини є *середнє квадратичне відхилення*. Оскільки за означенням дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, то для характеристики розсіяння зручніше застосовувати арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії. Ця величина називається *середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини і позначається $\sigma(X)$. Отже,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (2.35)$$