ЛЕКЦІЇ 9-10

2.4. ОСНОВНІ РОЗПОДІЛИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

2.4.1. Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл неперервної випадкової величини X виникає в випробуваннях типу кидання навмання точки на відрізок $[a;b]$ (X — відстань точки від границі a відрізка), або в випробуваннях, зв'язаних з округленням вимірювань фізичних величин за допомогою приладів (X — похибка округлень).

<u>Означення 2.14.</u> Неперервна випадкова величина X, яка приймає можливі значення з відрізку $[a;b]$, називається *рівномірно розподіленою*, якщо її щільність імовірності має стале значення на цьому відрізку:

$$f(x)=\begin{cases} c & \text{при } x\in[a;\ b];\\ 0 & \text{при } x\notin[a;\ b].\end{cases}$$

Значення сталої величини c знаходиться з умови (2.19):

$$\int_a^b f(x)dx=c\int_a^b dx=c(b-a)=1,\quad \text{звідки}\quad c=\frac{1}{b-a}.$$

Отже, щільність імовірності рівномірно розподіленої на відрізку $[a;b]$ випадкової величини приймає вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in[a;\ b];\\ 0 & \text{при } x\notin[a;\ b].\end{cases}$$

Графік щільності ймовірності приведений на рис.2.14.

Функція розподілу $F(x)$ на відрізку $[a;b]$ знаходиться за формулою (2.17):

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^x dx=\frac{x-a}{b-a},$$

а за властивістю 4 функції розподілу $F(x)=0$ при $x\le a$ і $F(x)=1$ при $x>b$, отже,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x\le b;\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}\qquad (2.66)$$

Графік функції розподілу $F(x)$ поданий на рис.2.15.

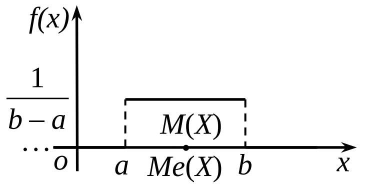

Рис. 2.14

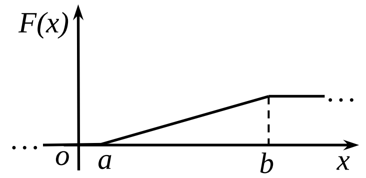

Рис. 2.15

Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ рівномірно розподіленої випадкової величини знаходяться відповідно за формулами (2.22), (2.34) і (2.35):

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},\qquad (2.67)$$

тобто математичне сподівання $M(X)$ співпадає з серединою відрізка $[a;b]$;

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}; \qquad (2.68)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (2.69)$$

Імовірність того, що в результаті випробування рівномірно розподілена випадкова величина X прийме можливе значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$, який міститься у відрізку $[a;b]$, обчислюється за формулою (2.16):

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_{\alpha}^{\beta}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (2.70)$$

Приклад 2.21. Автобуси "Політ" вирушають до аеропорту Бориспіль з інтервалом 30 хв. Час очікування автобуса на зупинці – випадкова рівномірно розподілена величина X . Знайти функцію розподілу, числові характеристики цієї випадкової величини, а також імовірність того, що час очікування для пасажира, який в випадковий момент підійшов до зупинки, не перевищить 5 хв.

Розв'язання. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[0;30]$, тому на цьому відрізку щільність розподілу $f(x)=\frac{1}{30}$, а функція розподілу, згідно з формулою (2.66)

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ \frac{x}{30} & \text{при } 0<x\le 30;\\ 1 & \text{при } x>30.\end{cases}$$

Числові характеристики знаходяться за формулами (2.67)–(2.69):

$$M(X)=15; \quad D(X)=75; \quad \sigma(X)=5\sqrt{3},$$

а ймовірність того, що час очікування не перевищить 5 хв. — за формулою (2.70):

$$P\{0<X<5\}=\frac{1}{6}.$$

2.4.2. Нормальний розподіл

Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини є одним із найбільш часто вживаних в практичних застосуваннях розподілів. Йому підлягають похибки вимірювань різних фізичних величин, розміри або маса виробів, які сходять з поточної лінії, тощо. Взагалі, будь-яка випадкова величина, яка являє собою суму багатьох незалежних випадкових величин, кожна з яких відіграє незначну роль в утворенні суми, має нормальний розподіл.

Означення 2.15. Неперервна випадкова величина X називається *розподіленою за нормальним законом* (або законом Гаусса) з параметрами a і σ, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2.71)$$

для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

Параметри нормального розподілу мають такий імовірнісний зміст:

$$a=M(X); \quad \sigma^2=D(X).$$

Отже, у нормально розподіленої випадкової величини

$$M(X)=a; \quad D(X)=\sigma^2; \quad \sigma(X)=\sigma.$$

Дамо коротку характеристику графіка щільності ймовірності $f(x)$ нормального розподілу, який називається *нормальною кривою* або *кривою Гаусса*. Оскільки різниця $x-a$ входить в аналітичний вираз $f(x)$ (2.71) в квадраті, нормальна крива симетрична відносно прямої $x=a$.

Перша похідна $f'(x)=-\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ в точці $x=a$ перетворюється в нуль, а при переході через цю точку змінює знак з + на -, отже, в точці $x=a$ функція $f(x)$ має максимум $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Друга похідна $f''(x)=\frac{(x-a)^2-\sigma^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ в точках $x=a\pm\sigma$ перетворюється в нуль, а при переході через ці точки змінює знак, отже, в точках $x=a\pm\sigma$ графік функції має перегин

$$f(a\pm\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}.$$

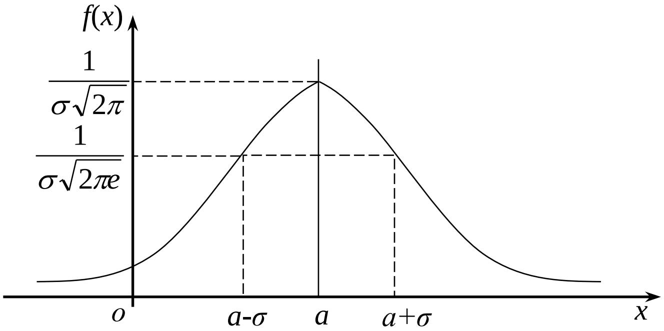

Рис.2.16

При $x\to\pm\infty$ $f(x)\to 0$, отже, вісь абсцис є лівою і правою асимптотою графіка функції $f(x)$.

Графік щільності ймовірності $f(x)$ поданий на рис.2.16.

Імовірність того, що в результаті випробування нормально розподілена випадкова величина X прийме можливе значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$, обчислюється за формулою (2.16):

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Застосовуючи заміну $t=\frac{x-a}{\sigma}$, одержуємо $dx=\sigma\,dt$ і межі інтегрування для змінної t від $\frac{\alpha-a}{\sigma}$ до $\frac{\beta-a}{\sigma}$, отже,

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

або з використанням функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

маємо остаточно

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (2.77)$$

Формула (2.77) дає можливість обчислити ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютним значенням буде меншим заданого ε:

$$P\{|X-a|<\varepsilon\}=P\{a-\varepsilon<X<a+\varepsilon\}=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (2.78)$$

З формули (2.78) випливає важливе для нормального розподілу *правило „трьох сигм”*.

При $\varepsilon=3\sigma$

$$P\{|X-a|<3\sigma\}=P\{a-3\sigma<X<a+3\sigma\}=2\Phi(3)=0,9973,$$

тобто ймовірність того, що випадкова величина приймає можливі значення з інтервалу $(a-3\sigma; a+3\sigma)$, близька до одиниці, отже, ця подія практично достовірна. Виконання цього правила дає підставу вважати випадкову величину X розподіленою за нормальним законом.

З формули (2.77) можна одержати вираз функції розподілу $F(x)$ нормально розподіленої випадкової величини X через функцію Лапласа $\Phi(x)$:

$$F(x)=P\{X<x\}=P\{-\infty<X<x\}=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)-\Phi(-\infty)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0,5. \qquad (2.79)$$

Приклад 2.23. Нормально розподілена випадкова величина X задана щільністю ймовірності

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення з інтервалу $(1,5;\ 4)$.

Розв'язання. Згідно з означенням 2.15 $a=3$, $\sigma=2$, отже, за формулою (2.77)

$$P\{1,5<X<4\}=\Phi\left(\frac{4-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1,5-3}{2}\right)=\Phi(0,5)-\Phi(-0,75)=$$
$$=\Phi(0,5)+\Phi(0,75)=0,1915+0,2734=0,4649$$

(значення функції $\Phi(x)$ взяті із таблиці (додаток 2)).

Приклад 2.24. За даними відділу технічного контролю 10% виробів підприємства має довжину, меншу 14,7 см, а 20% – довжину, більшу 15,2 см. Довжина виробів – нормально розподілена випадкова величина X. Знайти середній (номінальний) розмір виробів і його середнє квадратичне (стандартне) відхилення.

Розв'язання. За умовою задачі $P\{X<14,7\}=0,1$, $P\{X>15,2\}=0,2$. Згідно з формулою (2.77)

$$P\{X<14,7\}=P\{-\infty<X<14,7\}=\Phi\left(\frac{14,7-a}{\sigma}\right)-\Phi(-\infty)=$$
$$=\Phi\left(\frac{14,7-a}{\sigma}\right)+0,5=0,1,\ \text{звідки}\ \Phi\left(\frac{14,7-a}{\sigma}\right)=-0,4.$$

Із таблиці (додаток 2) за відомим значенням функції $\Phi(x)$ знаходимо

$$\frac{14,7-a}{\sigma}=-1,28 \quad \text{або} \quad a-1,28\sigma=14,7.$$

Аналогічно за формулою (2.77)

$$P\{X>15,2\}=P\{15,2<X<\infty\}=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{15,2-a}{\sigma}\right)=0,5-\Phi\left(\frac{15,2-a}{\sigma}\right)=0,2,$$

звідки $\Phi\left(\frac{15,2-a}{\sigma}\right)=0,5,\quad \frac{15,2-a}{\sigma}=0,84$ або $a+0,84\sigma=15,2$.

Одержана система
$$\begin{cases} a-1,28\sigma=14,7; \\ a+0,84\sigma=15,2 \end{cases}$$

має розв'язок $a=15,\ \sigma=0,235$, отже, середній розмір виробів дорівнює 15 см, а стандартне відхилення 0,235 см.

Приклад 2.25. Систематична похибка утримання висоти літаком складає ± 20 м, а випадкова похибка розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням 75 м. Для польоту літаку надано коридор висотою 100 м. Знайти ймовірність того, що політ буде відбуватись а) нижче; б) всередині; в) вище коридора, якщо літаку задана висота, відповідна середині коридора.

Розв'язання. Позначимо через X сумарну похибку утримання висоти. Її систематична складова $a=20$ м, середнє квадратичне відхилення $\sigma=75$ м. Оскільки літаку задана висота, відповідна середині коридора, для того, щоб політ відбувався нижче коридора, повинно бути $X<-50$, всередині коридора $-50<X<50$ і вище коридора $X>50$.

За формулою (2.77) одержимо

$$\text{а) } P\{X<-50\}=P\{-\infty<X<-50\}=\Phi\left(\frac{-50-20}{75}\right)-\Phi(-\infty)=$$
$$=-\Phi(-0,93)+0,5=-0,3238+0,5=0,1762;$$
$$\text{б) } P\{-50<X<50\}=\Phi\left(\frac{50-20}{75}\right)-\Phi\left(\frac{-50-20}{75}\right)=$$
$$=\Phi(0,4)+\Phi(0,93)=0,1554+0,3238=0,4792;$$
$$\text{в) } P\{X>50\}=P\{50<X<\infty\}=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{50-20}{75}\right)==0,5-0,1554=0,3446.$$

Очевидно, розглянуті події утворюють повну групу, тому їх сумарна ймовірність дорівнює одиниці.

2.4.5. Показниковий розподіл

Показниковий або *експоненціальний* розподіл неперервної випадкової величини має широке застосування в теорії надійності технічного обладнання для характеристики терміну безвідмовної роботи елементів та пристроїв і в теорії масового обслуговування для характеристики тривалості обслуговування або технологічних процесів.

Означення 2.18. Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за *показниковим (експоненціальним) законом* з параметром λ, якщо її щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x>0, \\ 0 & \text{при } x\le 0. \end{cases} \tag{2.82}$$

Функція розподілу $F(x)$ при $x>0$ знаходиться за формулою (2.17):

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}. \tag{2.83}$$

Графіки щільності ймовірності $f(x)$ і функції розподілу $F(x)$ подані відповідно на рис.2.19, 2.20.

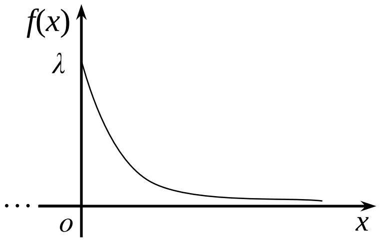

Рис. 2.19

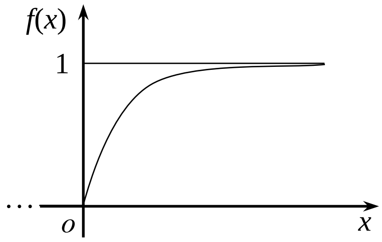

Рис. 2.20

Визначимо числові характеристики показникового розподілу. Математичне сподівання $M(X)$ обчислюється за формулою (2.23):

$$M(X) = \lambda\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = \lambda\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-\lambda x}dx .$$

Інтегруючи частинами при $u = x,\ dv = e^{-\lambda x}dx$ і, відповідно, $du = dx,\ v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$, одержимо:

$$M(X) = \lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b + \frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda x}dx \right) =$$

$$= \lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{\lambda}e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^b \right) = \lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{\lambda}e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda^2}(e^{-\lambda b} - 1) \right).$$

Оскільки $\lim\limits_{b\to\infty} be^{-\lambda b} = 0$ (в чому легко впевнитись, застосувавши правило Лопіталя) і $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-\lambda b} = 0$, то

$$M(X) = \lambda\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}, \tag{2.84}$$

тобто математичне сподівання показникового розподілу є величина, обернена до параметра λ.

Дисперсію $D(X)$ обчислимо за формулою (2.34):

$$D(X) = \lambda\int_0^{\infty} x^2e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \lambda\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Інтегруючи частинами при $u = x^2,\ dv = e^{-\lambda x}dx$ і, відповідно, $du = 2xdx,\ v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$, одержимо:

$$D(X) = \lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b + \frac{2}{\lambda}\int_0^b xe^{-\lambda x}dx \right) - \frac{1}{\lambda^2} = \lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b^2}{\lambda}e^{-\lambda b} + \frac{2}{\lambda}\int_0^b xe^{-\lambda x}dx \right) - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{b\to\infty} b^2e^{-\lambda b} = 0$, то

$$D(X) = \lambda\cdot\frac{2}{\lambda}\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

При обчисленні математичного сподівання було одержано $\lambda\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-\lambda x}dx = \dfrac{1}{\lambda}$, тому

$$D(X)=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2} \quad \text{і, відповідно, } \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Імовірність того, що випадкова величина X, яка має показниковий розподіл, в результаті випробування прийме можливе значення з інтервалу $(a;b)$ при $a>0,\ \ b>0$, обчислюється за формулою (2.16):

$$P\{a<X<b\}=\lambda\int_a^b e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_a^b=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \tag{2.85}$$

Зауваження. При $a\le 0$ згідно з означенням 2.18 слід взяти $a=0$ і обчислити ймовірність за формулою

$$P\{a<X<b\}=1-e^{-\lambda b}.$$

<u>Приклад 2.26.</u> Час обслуговування пасажира в авіакасі – випадкова величина T, розподілена за показниковим законом з середнім значенням, рівним 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який звернувся до каси буде обслуговуватись:

а) від 2,5 до 5 хв.;

б) більше 10 хв.

Розв'язання. а) За умовою задачі математичне сподівання (середнє значення) $M(T)=5$, тому за формулою (2.84) параметр розподілу $\lambda=0,2$. Імовірність того, що час обслуговування пасажира буде знаходитись в межах від 2,5 до 5 хв., обчислюється за формулою (2.85):

$$P\{2,5<T<5\}=e^{-0,2\cdot 2,5}-e^{-0,2\cdot 5}=e^{-0,5}-e^{-1}\approx 0,2386.$$

б) Імовірність того, що час обслуговування буде більший 10 хв., також обчислюється за формулою (2.85):

$$P\{T>10\}=P\{10<T<\infty\}=e^{-0,2\cdot 10}=e^{-2}\approx 0,1353.$$

Якщо випадкова величина T з показниковим розподілом – тривалість безвідмовної роботи деякого елемента, а λ - інтенсивність відмов цього елемента, то функція розподілу $F(t)=1-e^{-\lambda t}$ $(\lambda>0)$ визначає ймовірність відмови елемента за час t. При цьому функція $R(t)=e^{-\lambda t}$ визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час t і називається функцією надійності.

<u>Приклад 2.27.</u> Тривалість часу безвідмовної роботи елемента системи – випадкова величина T, розподілена за показниковим законом з функцією розподілу $F(t)=1-e^{-0,01t}$. Знайти ймовірність того, що на протязі доби елемент: а) відмовить; б) не відмовить.

Розв'язання. а) Імовірність відмови P_B елемента на протязі доби дорівнює значенню функції розподілу $F(t)$ при $t=24$ год.:

$$P_B=F(24)=1-e^{-0,24}\approx 1-0,7866=0,2134;$$

б) імовірність невідмови P_H елемента на протязі доби дорівнює значенню функції надійності $R(t)$ при $t=24$ год.:

$$P_H=R(t)=e^{-0,24}\approx 0,7866.$$

Той же результат випливає з умови протилежності подій а) і б), тобто $P_H=1-P_B$.

2.6. Закон великих чисел

В означенні випадкової величини відмічено, що вона приймає ті чи інші можливі значення в залежності від впливу різних факторів випадкового характеру. Природно сподіватись, що при розгляді суми великого числа випадкових величин вплив цих факторів посилюється. Проте при певних умовах їх вплив втрачає випадковий характер і в ньому проявляються досить чіткі закономірності, а саме: за певних умов середнє арифметичне великої кількості $(n \to \infty)$ випадкових величин з імовірністю, близькою до одиниці, приймає конкретне невипадкове значення.

В цьому полягає стислий зміст закону великих чисел, а умови, за яких цей закон має місце, сформульовані в ряді фундаментальних теорем, об'єднаних загальною назвою – *закон великих чисел* і пов'язаних з іменами видатних математиків Я. Бернуллі, П.Л. Чебишова, О.М. Ляпунова, А.А. Маркова та ін.

2.6.1. Нерівності П.Л. Чебишова

Перша та друга нерівності Чебишова мають велике прикладне значення для оцінки ймовірностей, а друга нерівність, крім того, відіграла основну роль в доведенні теорем закону великих чисел.

Перша нерівність Чебишова: якщо випадкова величина $X \geq 0$ має скінченне математичне сподівання $M(X)$, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$:

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}. \tag{2.91}$$

Оскільки сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P\{X \geq \varepsilon\} + P\{X < \varepsilon\} = 1,$$

то нарівні з оцінкою (2.91) застосовується оцінка

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}. \tag{2.92}$$

Друга нерівність Чебишова: якщо випадкова величина X має скінченну дисперсію $D(X)$, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$:

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{2.93}$$

Для ймовірності протилежної події відповідна оцінка має вигляд:

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{2.94}$$

Приклад 2.32. Річна виручка авіакомпанії від перевезень пасажирів – випадкова величина з середнім значенням 250 млн. грв. і стандартним (середнім квадратичним) відхиленням 30 млн. грв.

Знайти :

а) оцінку ймовірності того, що в наступному році авіакомпанія матиме виручку, не меншу 280 млн. грв.;

б) оцінку ймовірності того, що виручка буде знаходитись в межах від 200 до 300 млн. грв.;

в) в яких межах з імовірністю, не меншою 0,9, можна очікувати виручку в наступному році.

Розв'язання. а) За умовою $M(X) = 250, \quad \varepsilon = 280$, тому за формулою (2.91)

$$P\{X \geq 280\} \leq \frac{250}{280} = 0{,}893.$$

б) За умовою $\sigma(X)=30$, тому $D(X)=900$. Події $\{200<X<300\}$, $\{-50<X-250<50\}$, $\{|X-250|<50\}$ - рівносильні, тому за формулою (2.94)

$$P\{200<X<300\}=P\{|X-250|<50\}\geq 1-\frac{900}{2500}=0,64.$$

в) За формулою (2.94)

$$P\{|X-250|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{900}{\varepsilon^2},$$

а за умовою ця ймовірність не менша 0,9, тому можна покласти

$$1-\frac{900}{\varepsilon^2}=0,9,$$

звідки $\varepsilon=94,868$ або $\varepsilon\approx 95$.

Отже, з імовірністю, не меншою за 0,9, має місце подія $\{|X-250|<95\}$ або $\{155<X<345\}$.

<u>Приклад 2.33.</u> При вимірюванні курсу літака систематична похибка приладу відсутня, а випадкова похибка має середнє квадратичне відхилення $0,5^{\circ}$. Оцінити ймовірність того, що при вимірюванні курсу похибка буде: а) не менша 2°; б)менша 1°.

Розв'язання. Позначимо через X випадкову величину – похибку визначення курсу. За умовою $M(X)=0$ (систематична похибка відсутня), $D(X)=0,25$.

а) За нерівністю (2.93)

$$P\{|X|\geq 2\}\leq\frac{0.25}{4}=0,0625.$$

б) За нерівністю (2.94)

$$P\{|X|<1\}\geq 1-\frac{0,25}{1}=0,75.$$

2.6.2. Закон великих чисел в формі П.Л. Чебишова

<u>Теорема Чебишова.</u> Якщо $X_1,X_2,...,X_n,...$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями і дисперсіями, обмеженими однією і тією ж сталою C

$$D(X_i)\leq C \quad (i=1,2,...), \tag{2.95}$$

то для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ має місце гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{2.96}$$

Тобто при виконанні умов теореми з імовірністю, практично рівною одиниці, середнє арифметичне великого числа випадкових величин як завгодно мало відрізняється від невипадкової (детермінованої) величини — середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Частинним випадком теореми Чебишова, який виникає за умови, що всі випадкові величини задовольняють умовам теореми і мають однакові математичні сподівання $M(X)$, є

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-M(X)\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{2.98}$$

З теореми Чебишова випливає, що при досить великих n з будь-яким заданим ступенем точності $\varepsilon>0$ практично достовірною є наближена рівність

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i). \qquad (2.99)$$

Оцінка ймовірності цієї рівності $1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$ називається її *надійністю* і виражається або у відносних одиницях (як імовірність), або у відсотках. Отже, теорему Чебишова можна ще сформулювати так: якщо дисперсії попарно незалежних випадкових величин обмежені, то з будь-якими досить великими точністю і надійністю виконується рівність (2.99) для всіх досить великих n.

Приклад 2.34. Проводяться вимірювання деякої фізичної величини. Результати вимірювань – випадкові величини, дисперсії яких не перевищують 0,2. Скільки потрібно зробити вимірювань, щоб їх середнє арифметичне дало вимірювану величину з точністю до 0,05 і надійністю 90%?

Розв'язання. Оскільки вимірювання виконуються незалежно одне від одного, то результати вимірювань – незалежні випадкові величини, дисперсії яких обмежені величиною $C=0,2$. Отже, до них застосовна теорема Чебишова. Щоб одержати задану точність $\varepsilon=0,05$ з надійністю 0,9, кількість вимірювань n має задовольняти умові:

$$1-\frac{C}{n\varepsilon^2}\ge 0,9 \quad \text{або} \quad \frac{0,2}{0,0025n}\le 0,1, \qquad \text{звідки } n\ge 800.$$

Отже, потрібно провести не менше 800 вимірювань.

Приклад 2.35. Задана послідовність попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$. Чи застосовний до неї закон великих чисел, якщо кожна величина X_n рівномірно розподілена на відрізку а) $[0;100]$; б) $[0;n]$.

Розв'язання. Перша умова теореми Чебишова про незалежність випадкових величин виконана, тому перевіримо умову про обмеженість їх дисперсій, які для рівномірно розподілених на відрізку $[a;b]$ випадкових величин обчислюються за формулою (2.68):

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Тому

а) $$D(X_n)=\frac{10000}{12}=833,(3),$$

тобто дисперсії всіх величин однакові і їх можна вважати обмеженими одержаною сталою, отже, закон великих чисел в цьому випадку застосовний;

б) $$D(X_n)=\frac{n^2}{12},$$

тобто із зростанням n значення дисперсій збільшуються, і не можна вказати єдину сталу, яка б обмежувала всі дисперсії.

Отже, закон великих чисел тут не застосовний.

2.6.3. Закон великих чисел в формі Бернуллі

Розглянемо схему Бернуллі (п.1.3.1): нехай в кожному з n незалежних випробувань подія A може або відбутися з сталою ймовірністю p, або не відбутися з імовірністю $q=1-p$. Позначимо через m кількість появ події A в цих n

випробуваннях. Очевидно, різниця $\left(\frac{m}{n}-p\right)$ між частотою появи події і її ймовірністю залежить від випадкових факторів і може істотно змінюватись, оскільки m може приймати значення від 0 до n.

Проте при досить великих n ця різниця з імовірністю, близькою до одиниці, виявляється меншою як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$. В цьому полягає суть теореми Бернуллі, яка є однією з форм закону великих чисел.

Теорема Бернуллі. Якщо m — кількість появ події A в n незалежних випробуваннях, а p — імовірність появи події A в кожному з цих випробувань, то для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ має місце гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{2.100}$$

З теореми Бернуллі, що при необмеженому зростанні числа випробувань наближена рівність $\frac{m}{n} \approx p$ виконується з як завгодно високими точністю ε та надійністю $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

Ця обставина є обґрунтуванням визначення статистичної ймовірності як границі (в розумінні збіжності за ймовірністю) відносної частоти при необмеженому збільшенні числа випробувань (див.п.1.1.6).

Приклад 2.36. За даними служби перевезень аеропорту кількість затриманих за метеоумовами рейсів складає 7% від їх загальної щорічної кількості. Наступного року планується виконати 1400 рейсів. Застосовуючи теорему Бернуллі,

а) оцінити ймовірність того, що в наступному році відносна частота затримки рейсів відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною менше ніж на 0,02;

б) визначити, в яких межах з імовірністю, не меншою 0,96, буде знаходитись відносна частота затримки рейсів;

в) знайти, скільки потрібно зробити рейсів, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, можна було б сподіватись, що абсолютна величина відхилення відносної частоти затримки рейсів від її ймовірності буде меншою 0,01.

Розв'язання. За умовою $n = 1400,\ p = 0{,}07,\ q = 0{,}93$.

а) За формулою (2.103)

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| < 0{,}02\right) \geq 1 - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{1400 \cdot (0{,}02)^2} = 0{,}884.$$

б) Щоб імовірність була не меншою 0,96, достатньо в формулі (2.103) покласти

$$1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.96, \text{ звідки } \varepsilon = 0.034.$$

Отже, з ймовірністю, не меншою 0,96, має місце подія

$$\left|\frac{m}{n}-0{,}07\right| < 0{,}034 \qquad \text{або} \qquad 0{,}036 < \frac{m}{n} < 0{,}104.$$

в) За формулою (2.103)

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}07\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{n \cdot (0{,}01)^2} \geq 0{,}9, \quad \text{звідки } n \geq 6510.$$