ЛЕКЦІЯ 1.
ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ЇХ ІМОВІРНОСТІ

Теорія ймовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ при їх масовому повторенні.

Серед явищ, що відбуваються навколо нас, важко назвати такі, які б не були в тій чи іншій мірі піддані впливу випадкових факторів. Проте дослідження великої кількості одноманітних явищ показує, що в них прояв того чи іншого випадкового фактору підлягає певній закономірності або стійкості. На встановлення цих закономірностей і спрямовані методи теорії ймовірностей.

Виникнення теорії ймовірностей відноситься до середини 17-го сторіччя і пов'язане з іменами видатних французьких математиків П. Ферма (1601-1665), Б. Паскаля (1623-1662) та видатного швейцарського математика Я. Бернуллі (1654-1705), в працях яких вже фігурують такі важливі поняття, як імовірність випадкової події і математичне сподівання випадкової величини.

Проте низький рівень розвитку природознавства того часу, а також відсутність соціального замовлення на відповідні задачі стали причиною того, що основні поняття і методи теорії ймовірностей розвивалися головним чином на розв'язанні задач азартних ігор, демографії і страхової справи.

Лише кінець 18-го – початок 19-го сторіччя стали часом ґрунтовного застосування теорії ймовірностей до розв'язання актуальних проблем природознавства, виробничих і технологічних процесів, військової справи, економіки, статистики і інших галузей, що привело до необхідності створення розвинутого аналітичного апарата досліджень.

Велика роль в розробці аналітичних методів теорії ймовірностей належить англійському математику А. де Муавру (1667-1754), французьким математикам П. Лапласу (1749-1827) і С. Пуассону (1781-1840), німецькому математику К. Гаусу (1777-1855).

На сучасному етапі визначний внесок у розвиток теорії ймовірностей і математичної статистики, розробку нових напрямів і методів зробили відомі вчені – українські академіки Б.В. Гнєденко (1913-1996), Й.І. Гіхман (р.нар.1918), В.С. Королюк (р.нар.1925), А.В. Скороход (р.нар.1930), І.М. Коваленко (р.нар.1935).

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1.1. Стохастичне випробування і події. Види подій

Поняття події відноситься до основних понять, на яких базується теорія ймовірностей. Під *подією* будемо розуміти всякий факт, який в результаті випробування (досліду, експерименту, спостереження) може відбутися або не відбутися. При цьому в поняття “ випробування” входять не лише ті, які проводить людина, але й явища, що відбуваються в природі незалежно від людини.

В теорії ймовірностей розглядаються *стохастичні* (випадкові, імовірнісні) *випробування*, тобто такі, які можна повторити будь-яку кількість разів, але результат яких при кожному повторенні наперед невідомий, тобто випадковий. Тому теорія ймовірностей означається ще як *математичний аналіз стохастичного випробування.*

Кожне стохастичне випробування має деяку множину $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ всіх можливих результатів або наслідків, які не розкладаються на простіші. Множина Ω утворює так звану *множину* (або простір) *елементарних наслідків* (подій) ω_i, якщо ці наслідки є взаємовиключаючими і результатом випробування завжди є один і тільки один наслідок. Множина Ω може бути скінченною $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ або нескінченною

В теорії ймовірностей довільні події позначаються літерами $A, B, C, ...$ або літерами з індексами, наприклад, $A_1, A_2, ..., A_k, ...,$ інакше A_i $(i = 1, 2, ..., k)$. Зміст події, виражений словами або математичними залежностями, заключається в фігурні дужки. Наприклад, якщо з партії виробів навмання вибирається один для оцінки якості, то можлива подія – A = {вибрано бракований виріб}.

Всі події підрозділяються на 3 види: достовірні, неможливі і випадкові.

Означення 1.1. *Достовірною* називається подія, яка обов'язково відбудеться в даному випробуванні. Достовірну подію позначатимемо Ω.

Наприклад, якщо з партії, яка складається лише з стандартних виробів, навмання вибрано 3 вироби, то подія A ={всі відібрані вироби стандартні } – достовірна.

Означення 1.2. *Неможливою* називається подія, яка напевно не відбудеться в даному випробуванні. Неможливу подію позначатимемо $\varnothing$.

Так, подія B = {серед вибраних виробів є нестандартні} – неможлива в умовах випробування з попереднього прикладу.

Означення 1.3. *Випадковою* називається подія, яка в даному випробуванні може відбутися або не відбутися в залежності від впливу різноманітних випадкових факторів.

Приклади випадкових подій: поява шести очок при підкиданні грального кубика, відмова блоку системи на протязі певного часу t при дослідженні надійності системи та ін.

В наведених прикладах, крім події, вказано також випробування, наслідком якого є ця подія.

Оскільки довільна подія A є наслідком деякого стохастичного випробування, а простір Ω — множина всіх можливих елементарних наслідків випробування, то подія A входить в простір Ω або, іншими словами, подія A є підмножиною множини Ω, що позначається $A \subset \Omega$. При цьому ті елементарні наслідки ω_i з простору Ω, при яких подія A відбувається, тобто наслідки, які входять до складу події A $(\omega_i \in A)$, називаються *сприятливими* події A.

Приклад 1.1. Із двозначних чисел, що не перевищують 20, навмання вибирається одне число. Описати простір елементарних наслідків Ω і події

A = {вибране число ділиться на 5}; B = {вибране число – просте};
C = {вибране число – парне}.

Розв'язання. В результаті випробування може бути вибране будь-яке двозначне число, не більше 20, отже, простір елементарних наслідків $\Omega = \{10, 11, 12, ..., 20\}$. З усіх наслідків із простору Ω події A сприяють наслідки 10, 15, 20, отже,

A = {10, 15, 20}. Аналогічно $B = \{11, 13, 17, 19\}$ і $C = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.

1.1.2. Поняття ймовірності події.
Класична ймовірнісна схема і класичне означення ймовірності подій

Розв'язання прикладу 1.1 свідчить про те, що різні події характеризуються певною мірою можливості їх появи в результаті випробуванні. Так, зокрема, в прикладі 1.1 можливість появи події C більша, ніж події A або події B. Такою мірою можливості появи події є її *ймовірність*. Це поняття також відноситься до основних базових понять теорії ймовірностей.

Імовірність події A позначається $P(A)$ (від probabilitas (лат.) – імовірність). За одиницю її виміру природно прийняти ймовірність достовірної події Ω, тобто $P(\Omega)=1$. Тоді всяка інша подія A — можлива, але не достовірна, буде характеризуватись імовірністю, меншою за одиницю. Зрозуміло, що ймовірність неможливої події, яка в даному випробуванні не відбувається ні за яких умов, дорівнює нулю.

Отже,

$$P(\Omega)=1, \quad P(\varnothing)=0, \quad P(A)\in(0;1). \tag{1.1}$$

Класична ймовірнісна схема стосується подій найпростішого виду, які називають *випадками* або *шансами*. Це події, які утворюють *повну групу, несумісні* і *рівноможливі*.

Відповідно n подій $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються *попарно несумісними* (або просто несумісними), якщо поява однієї з них в даному випробуванні виключає появу всіх інших, тобто добуток двох будь-яких з цих подій в одному випробування є неможливою подією :

$$A_i A_j = \varnothing \quad (i, j = 1,\ 2,\ ...,\ n;\ i \neq j).$$

Наприклад, при випробуванні надійності двох приладів на протязі часу t події A={один прилад виявився надійним} і B = {обидва прилади виявились надійними} – несумісні.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ вважаються *рівноможливими* в даному випробуванні, якщо за умовами випробування немає підстав вважати появу однієї з них більш можливою, ніж поява кожної з решти цих подій.

Наприклад, при передачі в однакових умовах по каналу зв'язку трьох сигналів однакової довжини події A_1={перший сигнал передано правильно}, A_2={другий сигнал передано правильно} і A_3={третій сигнал передано правильно} є рівноможливими.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо принаймні одна з них неодмінно відбудеться в даному випробуванні, тобто їх сума є достовірною подією:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Зокрема, попарно несумісні події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу несумісних подій*, якщо в даному випробуванні неодмінно відбудеться одна і тільки одна з них, тобто їх сума є достовірною подією, а добуток будь-яких двох з цих подій є подія неможлива :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega; \qquad A_i A_j = \varnothing \quad (i \neq j).$$

Наприклад, при випробуванні надійності двох приладів на протязі часу t події A_1={обидва прилади виявились надійними}, A_2={перший прилад виявився надійним, другий – ні}, A_3 = {другий прилад виявився надійним, перший – ні},

A_4={жоден прилад не пройшов випробування} складають повну групу несумісних подій.

Дві події, які утворюють повну групу несумісних подій, називають *протилежними* подіями, і позначають A і $\overline{A}$.

Наприклад, при подачі запиту до системи продажу авіаційних білетів на придбання білета на даний рейс події A={одержано білет} і $\overline{A}$={одержано відмову} є протилежними.

<u>Означення 1.5.</u> *Імовірністю* $P(A)$ *події* A називають відношення числа m сприятливих цій події наслідків до загального числа n всіх рівноможливих наслідків випробування, що утворюють повну групу несумісних подій :

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.4}$$

<u>Приклад 1.7.</u> З партії виробів, яка містить 20 стандартних і 6 нестандартних виробів, навмання вибирається 1 виріб. Знайти ймовірність того, що він нестандартний.

Розв'язання. Оскільки в партії всього 26 виробів**,** і будь-який з них може бути вибраний, то випробування має 26 рівноможливих наслідків, отже, $n=26$. Сприятливими для події A = {вибрано нестандартний виріб} є 6 наслідків, що відповідають вибору одного з нестандартних виробів, отже, $m=6$. За формулою (1.4)

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}.$$

<u>Зауваження.</u> Тут і в подальшому вибір навмання у випробуванні будемо розуміти як рівноможливість наслідків цього випробування.

1.1.4. Застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірностей в класичній схемі

В багатьох випробуваннях класичної схеми обчислення загальної кількості елементарних наслідків і кількості сприятливих наслідків для подій, що відбуваються в цих випробуваннях, зв'язане з різними схемами вибору певного числа k елементів з n різних елементів деякої вихідної множини $M=\{m_1, m_2, ..., m_n\}$. В цих випадках для обчислення ймовірності події застосовуються формули комбінаторики. Наведемо основні принципи та формули комбінаторики.

1) *Комбінації* з n елементів по k.

Комбінаціями з n елементів $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ по k називаються всі підмножини множини M, що містять k елементів $(k=0, 1, ..., n)$ і відрізняються між собою принаймні одним елементом.

Наприклад, з множини 3-х чисел M = {1, 2, 3} можна утворити такі комбінації по 2 елемента : {1, 2 }; {1, 3}; {2, 3}.

Число всіх комбінацій з n елементів по k позначається C_n^k і обчислюється за формулою :

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1.5}$$

де $n!$ — добуток n перших натуральних чисел $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, зокрема, за означенням прийнято $0! = 1$.

2) *Розміщення* з n елементів по k.

Розміщеннями з n елементів по k називаються всі підмножини множини M, що містять k елементів $(k = 0, 1, \ldots, n)$ і відрізняються між собою принаймні одним елементом або порядком їх розташування.

Наприклад, з множини 3-х чисел $M = \{1, 2, 3\}$ можна утворити такі розміщення по 2 елемента : $\{1, 2\}$; $\{2, 1\}$; $\{1, 3\}$; $\{3, 1\}$; $\{2, 3\}$; $\{3, 2\}$.

Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,. \tag{1.7}$$

3) *Перестановки* з n елементів.

Перестановками з n елементів $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ називаються всі множини, що утворюються з множини M перестановкою будь-яких її елементів, тобто відрізняються між собою лише порядком розташування елементів.

Наприклад, з множини 3-х чисел $M = \{1, 2, 3\}$ можна утворити такі перестановки: $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{2, 1, 3\}$; $\{2, 3, 1\}$;$\{3, 1, 2\}$; $\{3, 2, 1\}$.

Число перестановок з n елементів позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = n!\,. \tag{1.8}$$

4) *Принцип добутку*. Якщо послідовно виконується k дій, причому першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і, нарешті, k-у дію n_k способами, то всі k дій разом можна виконати $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ способами.

5) *Принцип суми*. Якщо множини M_1, M_2, ..., M_k містять відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ елементів, причому добуток цих множин є пуста множина:

$$M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k = \varnothing,$$

то їх сума містить $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ елементів.

1.1.5. Геометричні ймовірності

Одним із способів подолання недоліку класичного означення ймовірності події в випадку, коли простір елементарних наслідків Ω випробування є нескінченною множиною, являється застосування *геометричних методів обчислення ймовірностей.*

При геометричному підході випробування інтерпретується як вибір навмання точки з деякої області Ω в n-вимірному координатному просторі, а випадкова подія A — як попадання вибраної точки в область A $(A \subset \Omega)$. Якщо вибір будь-якої точки з області Ω рівноможливий, то множина всіх наслідків випробування виражається відповідною мірою m_Ω області Ω, а множина наслідків, сприятливих події A, — мірою m_A області A. Імовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m_A}{m_\Omega}\,. \tag{1.10}$$

Зокрема, в одновимірному координатному просторі ймовірність в формулі (1.10) визначається відношенням довжин відрізків, в двовимірному просторі –

відношенням площ плоских фігур, в трьохвимірному просторі – відношенням об'ємів просторових тіл. Отже, якщо довжина позначена через L, площа – через S і об'єм – через V, то формула (1.10) в одно-, дво-, трьохвимірному координатних просторах відповідно набуває вигляду:

$$P(A)=\frac{L_A}{L_\Omega}, \qquad P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}, \qquad P(A)=\frac{V_A}{V_\Omega}. \tag{1.11}$$

Приклад 1.14. На колі радіуса R зафіксована точка M. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання на колі точка N знаходиться від точки M на відстані, меншій за R.

Розв'язання. Оскільки вибір точки N рівноможливий в будь-якому місці кола, то множині всіх можливих наслідків випробування відповідає довжина кола

$$L_\Omega = 2\pi R.$$

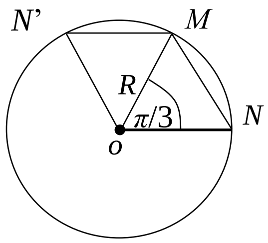

Рис. 1.3

Позначимо через A подію: $A=\{|MN|<R\}$ (рис.1.3).

Цій події сприяє будь-яка точка дуги $N'MN$, що стягує кут $N'ON$, рівний $\frac{2\pi}{3}$.

Отже, довжина дуги $N'MN$ складає третину довжини кола, тому

$$L_A=\frac{2\pi R}{3}.$$

Імовірність події A обчислюється за першою з формул (1.11):

$$P(A)=\frac{2\pi R}{3\cdot 2\pi R}=\frac{1}{3}.$$

1.1.6. Відносна частота появи події та її стійкість. Статистична ймовірність події

Класичне означення ймовірності події має ряд недоліків. Зокрема, класичне означення ймовірності події не можна застосувати у випадках:

– якщо простір Ω елементарних наслідків є нескінченна множина;

– якщо немає достатніх підстав вважати наслідки ω_i рівноможливими.

В цих випадках застосовують *статистичне* означення ймовірності події, яке ґрунтується на понятті *відносної частоти події.* Це поняття поряд з імовірністю належить до основних понять теорії ймовірностей.

Означення 1.6. Відносною частотою $W(A)$ події A називають відношення числа μ випробувань, в яких подія A відбулась, до числа ν всіх фактично проведених випробувань:

$$W(A)=\frac{\mu}{\nu}. \tag{1.9}$$

Різниця в означеннях імовірності події і відносної частоти полягає в тому, що для обчислення ймовірності за формулою (1.4) немає потреби проводити випробування, тобто ймовірність обчислюється апріорно в той час, як відносна частота може бути обчислена за формулою (1.9) лише після фактичного проведення випробувань.

Приклад 1.13. Авіакомпанія впродовж доби виконує 25 рейсів, із них 80% – власним авіапарком. На час t було виконано 18 рейсів, з них 16 – власним парком. Знайти ймовірність і відносну частоту виконання рейсу власним парком.

Розв'язання. Позначимо подію: A = {рейс виконується власним авіапарком}. Оскільки загальна добова кількість рейсів рівна 25, а власним парком виконується 20 рейсів (наслідки, сприятливі події A), то ймовірність події A

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0.8\,.$$

За умовою на час t було виконано 18 рейсів, тобто фактично проведено 18 випробувань, в яких подія A відбулась 16 разів. Отже, відносна частота події A

$$W(A) = \frac{16}{18} = 0.89\,.$$

Як бачимо, відносна частота $W(A)$ істотно відрізняється від імовірності $P(A)$. Проте, як свідчать багаторазові дослідження, відносній частоті притаманна властивість стійкості, яка полягає в тому, що із збільшенням числа випробувань вона починає наближатись до значення ймовірності події і відрізняється від нього тим менше, чим більше проведено випробувань.

При цьому можуть спостерігатися певні відхилення, тобто випадки, коли навіть при великій кількості проведених випробувань відносна частота $W(A)$ істотно відрізняється від імовірності події $P(A)$, проте загальна тенденція прямування відносної частоти до ймовірності простежується досить закономірно.

Означення 1.7. *Статистичною ймовірністю* випадкової події A називається граничне значення відносної частоти події, до якого збігається за ймовірністю ця частота при необмеженому збільшенні числа випробувань:

$$W(A) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} P(A)\,.$$

Приклади до п. 1.1.4. Застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірностей в класичній схемі

Приклад 1.10. Комплект з 30-ти однотипних радіодеталей містить 20% нестандартних. Для включення в схему навмання вибирається 4 деталі. Знайти ймовірність того, що будуть відібрані лише стандартні деталі.

Розв'язання. За умовою задачі комплект містить 24 стандартні і 6 нестандартних деталей. Випробування полягає в виборі 4-х деталей із 30, причому кожна вибірка визначається складом деталей і не залежить від порядку їх розташування у вибірці. Тому загальна кількість n наслідків випробування обчислюється за формулою (1.5) :

$$n = C_{30}^{4} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4!} = 27405\,.$$

Позначимо подію: A = {всі вибрані деталі стандартні}. Сприятливими цій події будуть лише ті наслідки, в яких вибір 4-х деталей проводиться з 24-х стандартних, тобто

$$m = C_{24}^{4} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{4!} = 10626\,.$$

Імовірність події A обчислюється за формулою (1.4):

$$P(A) = \frac{10626}{27405} = 0.39\,.$$

Приклад 1.11. Авіазавод одержав 16 однотипних агрегатів, 9 з яких виготовлені заводом N_1, а інші – заводом N_2. Для ремонту літака навмання відібрано 7 агрегатів. Знайти ймовірність того, що 5 з них виготовлені заводом N_1.

Розв'язання. За умовою задачі випробування полягає в виборі семи агрегатів із 16-ти. Загальна кількість n наслідків обчислюється за формулою (1.5):

$$n = C_{16}^{7} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{7!} = 11440.$$

Позначимо через B подію {вибрано 5 агрегатів заводу N_1 і 2 – заводу N_2}.

Кількість варіантів, якими 5 агрегатів можуть бути вибрані з 9-ти, виготовлених заводом N_1, обчислюється за формулою

$$\underline{m_1 = C_9^5 = C_9^4}$$

або

$$m_1 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126.$$

Кількість варіантів, якими 2 агрегати можуть бути вибрані з семи, виготовлених заводом N_2, обчислюється за формулою

$$m_2 = C_7^2 = 21.$$

На основі принципу добутку кількість m наслідків, сприятливих події B, дорівнює

$$m = m_1 m_2 = 2646,$$

а ймовірність події B

$$P(B) = \frac{2646}{11440} \approx 0.23.$$

Приклад 1.12. В аеропорту здійснили посадку 5 літаків, серед яких два Ту-154. Літаки випадковим чином розподіляються по стоянках, розташованих в одному ряду. Знайти ймовірність того, що обидва Ту-154 розташуються поряд, якщо

а) кількість стоянок – 8;

б) кількість стоянок – 5.

Розв'язання. а) За умовою задачі випробування полягає в розміщенні п'яти літаків на восьми стоянках. Загальне число n варіантів такого розміщення обчислюється за формулою (1.7), оскільки ці варіанти відрізняються порядком розташування літаків на стоянках. Тому

$$n = A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720.$$

Позначимо через C подію {літаки Ту-154 будуть розташовані поруч}.

Кількість варіантів m_1 розташування двох літаків поряд у випадку восьми стоянок знаходиться безпосереднім підрахунком і дорівнює

$$m_1 = 7 \cdot 2 = 14.$$

При цьому 3 інші літаки розташовуються в довільному порядку на 6-ти стоянках, що залишились вільними. Кількість варіантів m_2 такого розташування також обчислюється за формулою (1.7):

$$m_2 = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Кількість m наслідків, сприятливих події C, згідно з принципом добутку дорівнює:

$$m = m_1 m_2 = 1680,$$

а ймовірність події C обчислюється за формулою (1.4) :

$$P(C) = \frac{1680}{6720} = 0.25.$$

б) Загальна кількість n варіантів розташування п'яти літаків на п'яти стоянках обчислюється за формулою (1.8) :

$$n = P_5 = 5! = 120.$$

Кількість варіантів m_1 розташування двох літаків поряд на п'яти стоянках дорівнює

$$m_1 = 4 \cdot 2 = 8,$$

а кількість варіантів m_2 розташування інших 3-х літаків на трьох вільних стоянках також обчислюється за формулою (1.8):

$$m_2 = P_3 = 3! = 6.$$

Згідно з принципом добутку кількість наслідків m, сприятливих події C, дорівнює

$$m = m_1 m_2 = 48,$$

а ймовірність події C

$$P(C) = \frac{48}{120} = 0,4.$$

Із означення 1.5 і всіх розглянутих прикладів випливає, що ймовірність події – це цілком визначене число, причому зовсім не випадкове. Це – невипадкова (детермінована) характеристика випадкової події.