ЛЕКЦІЯ 11–12

2.7. СИСТЕМИ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

2.7.1. Поняття системи двох випадкових величин. Матриця розподілу системи дискретних випадкових величин та ряди розподілу її складових

В попередніх пунктах глави розглядались окремі випадкові величини, закони їх розподілу та числові характеристики. В практичних застосуваннях теорії ймовірностей часто виникають задачі, в яких результат випробування описується кількома випадковими величинами, які утворюють система.

Наведемо приклади систем двох випадкових величин (X,Y).

1. При постановці літака на періодичне технічне обслуговування його стан характеризується випадковими величинами: X – наліт годин після попереднього обслуговування і Y – кількість дефектів, виявлених в процесі обстеження. Ці випадкові величини приймають окремі цілочисельні значення. Число цих можливих значень, як правило, скінченне. Отже, (X,Y) – система *дискретних* випадкових величин.

2. Положення літака на екрані локатора визначається випадковими величинами: X – дальність і Y – азимут. Ці величини можуть приймати довільні значення з деяких інтервалів і число цих значень нескінченне. Отже, (X,Y) – система *неперервних* випадкових величин.

Величини X і Y, які утворюють систему (X,Y), називаються її *складовими*. Систему випадкових величин називають також *двовимірною випадковою величиною* (X,Y).

Закон розподілу системи (X,Y) дискретних випадкових величин задається таблицею, яку називають *матрицею розподілу:*

Y \ X	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...
x_k	p_{k1}	p_{k2}	...	p_{km}

(2.105)

в першому стовпці якої вказані всі можливі значення x_i $(i=1,2,..,k)$ складової X, в першому рядку – можливі значення y_j $(j=1,2,..,m)$ складової Y, а на перетині рядків і стовпців – імовірності p_{ij}, тобто ймовірності подій $\{X=x_i, Y=y_j\}$. Оскільки ці події складають повну групу, то для ймовірностей p_{ij} виконується умова

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \qquad (2.106)$$

яка називається *умовою нормування системи* (X,Y).

За матрицею розподілу (2.105) системи (X,Y) можна побудувати ряди розподілу її складових X і Y, для чого потрібно взяти суму ймовірностей відповідно в рядках і стовпцях матриці.

Тому ряди розподілу складових X і Y мають вигляд:

X	x_1	x_2	...	x_k
P	$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}$	$\sum_{j=1}^{m} p_{2j}$	...	$\sum_{j=1}^{m} p_{kj}$

Y	y_1	y_2	...	y_m
G	$\sum_{i=1}^{k} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{k} p_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{k} p_{im}$

(2.107)

<u>Приклад 2.37.</u>

2.7.2. Функція розподілу системи двох випадкових величин та її властивості

Матриця розподілу (2.105) є досить повною характеристикою системи (X,Y) дискретних випадкових величин, але її не можна побудувати для неперервної системи. Загальною формою закону розподілу, застосовною для систем як дискретних, так і неперервних випадкових величин, є функція розподілу.

<u>Означення 2.20.</u> *Функцією розподілу системи* називається функція $F(x,y)$, яка для кожної пари значень x,y визначає ймовірність того, що складова X прийме значення, менше x, а Y – менше y:

$$F(x,y) = P\{X < x,\ Y < y\}. \qquad (2.108)$$

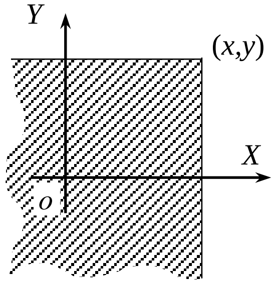

Рис.2.21

<u>Геометрично</u> функція $F(x,y)$ визначає ймовірність потрапляння випадкової точки (X,Y) в нескінченний квадрант з вершиною в точці (x,y), розташований лівіше і нижче цієї точки (рис.2.21).

Властивості функції $F(x,y)$ в основному співпадають з властивостями функції розподілу $F(x)$ однієї випадкової величини X (п.2.1.3).

<u>Властивість 1.</u> Функція розподілу знаходиться в межах $0 \le F(x,y) \le 1$.

<u>Властивість 2.</u> Функція $F(x,y)$ є неспадною функцією своїх аргументів, тобто при $x_2 > x_1 \quad F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$, а при $y_2 > y_1 \quad F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

<u>Властивість 3.</u> Для функції $F(x,y)$ мають місце граничні співвідношення

$$F(x,-\infty) = 0;\ \ F(-\infty,y) = 0;\ \ F(-\infty,\infty) = 0;\ \ F(\infty,\infty) = 1.$$

<u>Властивість 4.</u> При $y \to \infty$ функція $F(x,y)$ перетворюється в функцію розподілу складової X, а при $x \to \infty$ – в функцію розподілу складової Y:

$$F(x,\infty) = F_1(x), \qquad F(\infty,y) = F_2(y).$$

За допомогою функції розподілу $F(x,y)$ обчислюється ймовірність потрапляння випадкової точки (X,Y) в прямокутник, вершини якого мають абсциси x_1 і x_2, а ординати y_1 і y_2 (рис.2.22):

$$P\{x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) \qquad (2.109)$$

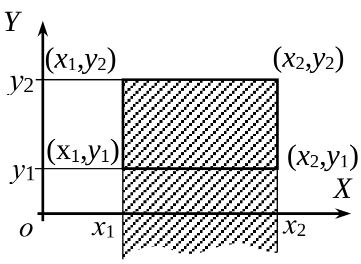

Рис.2.22

Функція розподілу дає також можливість обчислити ймовірність потрапляння випадкової точки (X,Y) в нескінченну напівсмугу з вершинами (x_1,y_2) і (x_2,y_2), заштриховану на рис.2.22:

$$P\{x_1 < X < x_2, Y < y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2).$$

2.7.3. Щільність розподілу системи двох неперервних випадкових величин та її властивості

Означення 2.21. *Щільністю ймовірності* або *щільністю розподілу* системи (X,Y) неперервних випадкових величин називається функція $f(x,y)$, рівна другій мішаній частинній похідній функції розподілу $F(x,y)$:

$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\{x<X<x+\Delta x, y<Y<y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}. \qquad (2.111)$$

Відношення в правій частині рівності (2.111) виражає величину ймовірності, яка припадає на одиницю площі прямокутника з сторонами Δx і Δy або, інакше, щільність імовірності в цьому прямокутнику. Тому функція $f(x,y)$ називається щільністю ймовірності або щільністю розподілу системи (X,Y).

З формули (2.111) одержуємо:

$$P\{x<X<x+\Delta x, y<Y<y+\Delta y\}=f(x,y)\Delta x\Delta y=f(x,y)dxdy.$$

Величина $f(x,y)dxdy$ називається *елементом імовірності системи* (X,Y), оскільки ця величина виражає ймовірність потрапляння можливих значень системи в елементарний прямокутник зі сторонами Δx і Δy.

Щоб одержати ймовірність потрапляння системи в заданий прямокутник (рис.2.22), потрібно проінтегрувати елемент імовірності при змінюванні x від x_1 до x_2 і y від y_1 до y_2:

$$P\{x_1<X<x_2, y_1<Y<y_2\}=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy. \qquad (2.112)$$

Розглянемо ***властивості щільності ймовірності*** $f(x,y)$.

Властивість 1. Функція $f(x,y)$ невід'ємна:

$$f(x,y)\ge 0.$$

Властивість 2. Щільність імовірності $f(x,y)$ зв'язана з функцією розподілу $F(x,y)$ формулою:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Властивість 3. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$

Властивість 4. Інтегрування щільності ймовірності $f(x,y)$ системи за змінною y приводить до щільності ймовірності $f_1(x)$ складової X, а за змінною x – до щільності ймовірності $f_2(y)$ складової Y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=f_1(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=f_2(y). \qquad (2.113)$$

2.7.4. Умови незалежності випадкових складових системи

Розглянемо умови незалежності випадкових складових X і Y, які утворюють систему.

Теорема 2.1. Нехай система дискретних випадкових величин (X,Y) задана матрицею розподілу (2.105). Якщо складові X і Y незалежні, то ймовірності p_{ij} з матриці розподілу дорівнюють добутку ймовірностей p_i і q_j з рядів розподілу (2.107) складових X і Y:

$$p_{ij} = p_i q_j = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot \sum_{i=1}^{k} p_{ij} . \qquad (2.114)$$

<u>Теорема 2.2.</u> Нехай система випадкових величин задана функцією розподілу $F(x, y)$. Якщо випадкові складові X і Y системи незалежні, то її функція розподілу $F(x, y)$ дорівнює добутку функцій розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$ складових:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \qquad (2.115)$$

<u>Теорема 2.3.</u> Нехай система неперервних випадкових величин задана щільністю розподілу $f(x, y)$. Якщо неперервні випадкові складові X і Y системи незалежні, то її щільність розподілу $f(x, y)$ дорівнює добутку щільностей $f_1(x)$ і $f_2(y)$ її складових:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y). \qquad (2.116)$$

Умови (2.114) – (2.116) є також і достатніми для незалежних складових системи. Якщо ж вони не виконуються, то складові X і Y системи – залежні.

Так в прикладі 2.37 складові X і Y залежні, оскільки не виконується умова (2.114): наприклад, $p_{21} = \frac{1}{8}$, а $p_2 \cdot g_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{48} = \frac{25}{192}$.

2.7.5. Основні числові характеристики складових системи

Розглянемо систему (X, Y) <u>дискретних</u> випадкових величин, задану матрицею розподілу (2.105). Якщо побудовані ряди розподілу (2.107) складових X і Y, то їх математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$ обчислюються за формулою (2.21):

$$M(X) = x_1 \sum_{j=1}^{m} p_{1j} + x_2 \sum_{j=1}^{m} p_{2j} + \ldots + x_k \sum_{j=1}^{m} p_{kj} = \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij};.$$

$$M(Y) = y_1 \sum_{i=1}^{k} p_{i1} + y_2 \sum_{i=1}^{k} p_{i2} + \ldots + y_m \sum_{i=1}^{k} p_{im} = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{k} p_{ij}. \qquad (2.117)$$

Одержані формули показують, що для обчислення математичних сподівань складових немає потреби попередньо складати ряди їх розподілів, оскільки $M(X)$ є сумою добутків можливих значень x_i складової X на суму ймовірностей відповідних цим значенням рядків матриці розподілу, а $M(Y)$ - значень y_j на суму ймовірностей відповідних стовпців матриці.

Дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ за формулою (2.32) складових системи обчислюються так:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sum_{j=1}^{m} p_{ij} - [M(X)]^2;$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \sum_{i=1}^{k} p_{ij} - [M(Y)]^2. \qquad (2.118)$$

<u>Приклад 2.40.</u>

Для знаходження числових характеристик складових системи <u>неперервних</u> випадкових величин (X, Y), заданої щільністю ймовірності $f(x, y)$, можна за властивістю 4 щільності знайти щільності ймовірності $f_1(x)$ і $f_2(y)$ складових X і Y системи і обчислити математичні сподівання за формулою (2.23):

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx; \qquad M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy,$$

а дисперсії – за формулою (2.34)

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx-[M(X)]^2; \qquad D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy-[M(Y)]^2.$$

або застосувати до обчислення вказаних характеристик подвійне інтегрування і безпосередньо щільність імовірності $f(x,y)$ системи:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy; \qquad M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy; \tag{2.119}$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dxdy-[M(X)]^2; \; D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dxdy-[M(Y)]^2. \tag{2.120}$$

Приклад 2.41.

2.7.7. Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції системи випадкових величин

Після встановлення умов залежності або незалежності складових X і Y системи випадкових величин розглянемо характеристики системи, які визначають міру (тісноту) лінійної залежності її складових. До таких характеристик відносяться кореляційний момент і коефіцієнт кореляції.

Означення 2.23. *Кореляційним моментом* K_{xy} системи випадкових величин (X,Y) називається математичне сподівання добутку відхилень цих величин від їх математичних сподівань:

$$K_{xy}=M[(X-M(X))\cdot(Y-M(Y))]. \tag{2.123}$$

Застосовуючи властивості математичного сподівання, вираз (2.123) можна подати у вигляді:

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y). \tag{2.124}$$

Тому для системи дискретних випадкових величин, заданої матрицею розподілу (2.105), кореляційний момент обчислюють за формулою:

$$K_{xy}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}-M(X)M(Y)\,. \tag{2.126}$$

Для системи неперервних випадкових величин, заданої щільністю ймовірності $f(x,y)$, формула для обчислення K_{xy} має вигляд:

$$K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy-M(X)M(Y). \tag{2.127}$$

Кореляційний момент K_{xy} називають ще *коваріацією* системи (X,Y). Він характеризує міру залежності випадкових величин X і Y в системі.

Теорема 2.4. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то кореляційний момент K_{xy} дорівнює нулю.

При $K_{xy}=0$ величини X і Y називаються *некорельованими*, а при $K_{xy}\neq 0$ — *корельованими*.

З формули (2.123) випливає, що кореляційний момент характеризує не лише міру залежності випадкових величин, а й їх відхилення від математичних сподівань. Так, наприклад, якщо відхилення $X-M(X)$ достатньо мале, то і K_{xy} буде малим навіть при значній залежності випадкових величин X і Y. Тому для характеристики міри залежності випадкових величин застосовується нормований кореляційний момент або *коефіцієнт кореляції* r_{xy}, який обчислюється за формулою

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}, \tag{2.129}$$

де $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$ — середні квадратичні відхилення величин X і Y.

Для незалежних випадкових величин $r_{xy}=0$.

<u>Приклад 2.43.</u> ! **<u>Приклад 2.44.</u>** !

2.7.6. Умовні закони розподілу складових системи

Нехай система (X,Y) дискретних випадкових величин задана матрицею розподілу (2.105), і складені ряди розподілу (2.107) її складових X і Y.

<u>Означення 2.22.</u> *Умовним розподілом* складової X за умови, що складова Y прийняла значення y_j, називається ряд розподілу, в якому ймовірності прийняття складовою X можливого значення x_i $(i=1,2,k.$ є умовними ймовірностями $p(x_i\,|\,y_j)$ і обчислюються за формулами

$$p(x_i\,|\,y_j)=\frac{p_{ij}}{g_j} \quad (i=1,2,3,\ldots k). \tag{2.121}$$

де ймовірності g_j вибираються з ряду розподілу складової Y.

Для умовного розподілу складової Y при $X=x_i$ умовні ймовірності $p(y_j\,|\,x_i)$ обчислюються за формулами

$$p(y_j\,|\,x_i)=\frac{p_{ij}}{p_i} \quad (j=1,2,\ldots,m), \tag{2.122}$$

де ймовірності p_i вибираються з ряду розподілу складової X (2.107).

Для системи неперервних випадкових величини, заданої щільністю ймовірності $f(x,y)$ аналогом розглянутих умовних законів розподілу є умовні щільності ймовірностей $f_1(x\,|\,y)$ і $f_2(y\,|\,x)$ складових X і Y, які знаходяться за формулами

$$f_1(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}; \qquad f_2(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)},$$

де $f_1(x)$ і $f_2(y)$ одержуються за формулами (2.113).

<u>Приклад 2.37.</u> Число X вибирається навмання із множини $\{1, 2, 3, 4\}$, після чого з тієї ж множини навмання вибирається число $Y \le X$. Побудувати матрицю розподілу системи (X, Y) і ряди розподілу її складових.

Розв'язання. За умовою задачі складова X може приймати будь-яке значення із заданої множини з імовірністю $\frac{1}{4}$. При $X = 1$ складова Y не приймає значень 2, 3 і 4, більших за одиницю, тому ймовірності $p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0$. Вона приймає лише значення 1 з імовірністю, рівною 1. Тому за теоремою 1.6 множення ймовірностей залежних подій

$$p_{11} = P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1 | X = 1\} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

При $X = 2$ складова Y може приймати значення 1 і 2 з імовірностями $\frac{1}{2}$, тому за теоремою 1.6

$$p_{21} = p_{22} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \qquad \text{а} \quad p_{23} = p_{24} = 0.$$

При $X = 3$ складова Y може приймати значення 1, 2 і 3 з імовірностями $\frac{1}{3}$ і не приймає значення 4, тому

$$p_{31} = p_{32} = p_{33} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \qquad p_{34} = 0.$$

Нарешті при $X = 4$ складова Y може прийняти будь-яке з чотирьох значень множини з імовірністю $\frac{1}{4}$, тому

$$p_{41} = p_{42} = p_{43} = p_{44} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

З одержаних результатів складемо матрицю розподілу системи (X, Y)

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Умова нормування (2.106) виконана.

Ряди розподілу складових X і Y одержуємо, взявши суми ймовірностей відповідно по рядках і стовпцях матриці

X	1	2	3	4

Y	1	2	3	4

P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

G	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

<u>Приклад 2.40.</u> Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення складових X і Y системи за матрицею розподілу, складеною в прикладі 2.37.

Розв'язання. За формулами (2.117)

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+3\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)+4\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=2.25;$$

$$M(Y)=1\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)+2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)+3\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)+4\cdot\frac{1}{16}=1,75,$$

а за формулами (2.118)

$$D(X)=1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{4}+16\cdot\frac{1}{4}-(2.25)^2=2.4375;$$

$$D(Y)=1\cdot\frac{25}{48}+4\cdot\frac{13}{48}+9\cdot\frac{7}{48}+16\cdot\frac{3}{48}-(1.75)^2=0.854$$

і відповідно $\sigma(X)=1{,}561;\quad \sigma(Y)=0{,}924$.

<u>Приклад 2.41.</u> Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення складових X і Y системи неперервних випадкових величин, заданої щільністю ймовірності

$$f(x,y)=4e^{-(x+4y)} \quad \text{при } x\geq 0, y\geq 0 \quad \text{(див. приклад 2.39).}$$

Розв'язання. За формулами (2.119)

$$M(X)=4\int_0^\infty\int_0^\infty xe^{-(x+4y)}dxdy=4\int_0^\infty xe^{-x}dx\int_0^\infty e^{-4y}dy=4\int_0^\infty xe^{-x}dx\left(\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-4y}dy\right)=\int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

Застосовуючи метод інтегрування частинами, одержимо:

$$M(X)=\lim_{c\to\infty}\int_0^c xe^{-x}dx=-\lim_{c\to\infty}\left(xe^{-x}+e^{-x}\right)\Big|_0^c=1.$$

Аналогічно

$$M(Y)=4\int_0^\infty ye^{-4y}dy\int_0^\infty e^{-x}dx=4\int_0^\infty ye^{-4y}dy=1.$$

Дисперсії складових обчислимо за формулами (2.120):

$$D(X)=4\int_0^\infty x^2e^{-x}dx\int_0^\infty e^{-4y}dy-1=\int_0^\infty x^2e^{-x}dx-1=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-x}dx-1=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2+2x+x^2}{e^x}\right)\Bigg|_0^b-1=-\lim_{b\to\infty}\frac{2+2b+b^2}{e^b}+\frac{2}{e^0}-1=1,$$

оскільки границя дорівнює нулю (за правилом Лопіталя);

$$D(Y)=4\int_0^\infty y^2e^{-4y}dy\int_0^\infty e^{-x}dx-1=1,$$

а, отже, і $\sigma(X)=\sigma(Y)=1$.

Приклад 2.43. Авіакомпанія впродовж доби виконує 2 рейси до аеропорту N. Імовірність затримки першого рейсу за метеоумовами дорівнює 0,1, другого – 0,05. Скласти закон розподілу системи (X,Y), де X – число затримок першого рейсу, а Y – сумарне число затримок по обом рейсам, і обчислити коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Розв'язання. Випадкова величина X приймає можливі значення 0 і 1, а Y – значення 0, 1 і 2. Обчислимо ймовірності p_{ij} для матриці розподілу:

$$X=0, Y=0: \quad p_{11}=0{,}9\cdot 0{,}95=0{,}855;$$
$$X=0, Y=1: \quad p_{12}=0{,}9\cdot 0{,}05=0{,}045;$$
$$X=0, Y=2: \quad p_{13}=0 \ (\text{неможлива подія});$$
$$X=1, Y=0: \quad p_{21}=0 \ (\text{неможлива подія});$$
$$X=1, Y=1: \quad p_{22}=0{,}1\cdot 0{,}95=0{,}095;$$
$$X=1, Y=2: \quad p_{23}=0{,}1\cdot 0{,}05=0{,}005.$$

Складаємо матрицю розподілу системи:

X \ Y	0	1	2
0	0,855	0,045	0
1	0	0,095	0,005

і ряди розподілу складових X і Y:

X	0	1
P	0,9	0,1

Y	0	1	2
G	0,855	0,14	0,005

Обчислимо числові характеристики складових системи за даними з рядів розподілу:

$$M(X)=0{,}1; \quad M(Y)=0{,}15; \quad D(X)=0{,}09; \quad D(Y)=0{,}1375;$$
$$\sigma(X)=0{,}3; \quad \sigma(Y)=0{,}37.$$

Кореляційний момент знайдемо за формулою (2.126):

$$K_{xy}=1\cdot 1\cdot 0{,}095+1\cdot 2\cdot 0{,}005-0{,}1\cdot 0{,}15=0{,}09,$$

а коефіцієнт кореляції — за формулою (2.129):

$$r_{xy}=\frac{0{,}09}{0{,}3\cdot 0{,}37}=0{,}81.$$

Отже, складові системи мають досить тісний додатний кореляційний зв'язок.

Приклад 2.44. Система неперервних випадкових величин задана сумісною щільністю розподілу

$$f(x,y)=\begin{cases} a\sqrt{xy} & \text{в області } D; \\ 0 & \text{за межами області } D, \end{cases}$$

де область D обмежена лініями $y=x, \ x=0, \ y=1$.

Знайти невідомий параметр a і коефіцієнт кореляції r_{xy}.

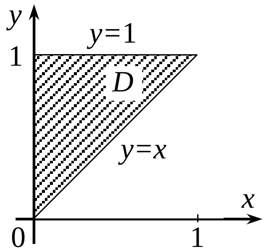

Рис.2.23

Розв'язання. Область D – трикутник, поданий на рис.2.23.

Параметр a знайдемо за властивістю 3 щільності ймовірності

$$a\int_0^1 \sqrt{x}dx\int_x^1 \sqrt{y}dy=1.$$

Обчислюємо послідовно двократний інтеграл

$$\frac{2}{3}a\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{3}{2}})dx=\frac{2}{3}a\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx=\frac{2}{9}a=1,\quad \text{звідки } a=\frac{9}{2}.$$

Знайдемо математичні сподівання складових X і Y за формулами (2.119):

$$M(X)=\frac{9}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx\int_x^1 y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x^{\frac{3}{2}})dx=3\int_0^1(x^{\frac{3}{2}}-x^3)dx=0.45;$$

$$M(Y)=\frac{9}{2}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx\int_x^1 y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{5}{2}})dx=\frac{9}{5}\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^3)dx=0.75.$$

Дисперсії складових знаходимо за формулами (2.120):

$$D(X)=\frac{9}{2}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx\int_x^1 y^{\frac{1}{2}}dy-(0.45)^2=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}(1-x^{\frac{3}{2}})dx-(0.45)^2=$$

$$=3\int_0^1(x^{\frac{5}{2}}-x^4)dx-(0.45)^2=\frac{9}{35}-(0.45)^2\approx 0.0546;$$

$$\sigma(X)\approx 0.234;$$

$$D(Y)=\frac{9}{2}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx\int_x^1 y^{\frac{5}{2}}dy-(0.75)^2=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{7}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{7}{2}})dx-(0.75)^2=$$

$$=\frac{9}{7}\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^4)dx-(0.75)^2=\frac{3}{5}-(0.75)^2=0.0375;$$

$$\sigma(Y)\approx 0.194.$$

Кореляційний момент обчислюємо за формулою (2.127):

$$K_{xy}=\frac{9}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx\int_x^1 y^{\frac{3}{2}}dy-0.45\cdot 0.75=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x^{\frac{5}{2}})dx-0.3375=$$

$$=\frac{9}{5}\int_0^1(x^{\frac{3}{2}}-x^4)dx-0.3375=0.36-0.3375=0.0225,$$

а коефіцієнт кореляції за формулою (2.129):

$$r_{xy}=\frac{0.0225}{0.234\cdot 0.194}=0.496.$$