Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №4
Интерполирование по равноотстоящим узлам в середине таблицы
Вариант 7

Выполнил:
Студент 2 курса 7 группы ФПМИ
Лубенько Алексей Анатольевич

Преподаватель:
Будник Анатолий Михайлович

Минск, 2022

Интерполирование по равноотстоящим узлам

Будем находить значение функции в точке $x^{**} = 1$.
Значение находится в середине таблицы между x_5 и x_6 , поэтому воспользуемся формулами:

$$P_3(x) = \frac{f_5+f_6}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta f_5 + \frac{t(t-1)(\Delta^2 f_5 + \Delta^2 f_4)}{2} + \frac{t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)\Delta^3 f_4}{6};\ t = \frac{x - x_5}{0.1}$$

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i;\ i = 4,5,6$
$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i;\ i = 4,5$
$\Delta^3 f_4 = \Delta^2 f_5 - \Delta^2 f_4$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.85	0.605541	0.01587	0.00717	0.00092
0.95	0.621412	0.01314	0.00810	
1.05	0.634555	0.00995		
1.15	0.644507			

Истинную погрешность найдем по формуле $r(1) = f(1) - P_3(1)$
Остаток интерполирования по формуле

$$r_3(x) = 0.1^4 \frac{t(t^2-1)(t-2)}{24} f^{(4)}(\sigma);\ \sigma \in [x_5 - h, x_5 + 2h] = [0.85,1.15];$$

$$f^{(4)}(\sigma) \le \max_{[0.85;1.15]} |0.45e^{-x} + 0.55sinx| = 0.6445$$

$$r_3(x) \le 10^{-4} * 0.6445 \frac{t(t^2-1)(t-2)}{24};\ t = \frac{x^{**} - x_5}{h} = \frac{1 - 0.95}{0.1}$$

Листинг программы

```
object Main {
    var start = 0.6
    var step = 0.1
    var value = DoubleArray(4)
    var newtonValues = DoubleArray(4)
    var point_of_rebuilding = 1.0
    var rebPointValue = 0.0
    var differs = Array(4) { DoubleArray(4) }
    fun f(x: Double): Double = 0.45 * Math.exp(-x) + 0.55 * Math.sin(x)

    fun value_of_Newton_function(x: Double): Double {
        var temp = 1.0
        var sum = newtonValues[3]
        for (i in 1..3) {
            temp *= (((x - value[3]) / step) + i - 1) / i
            sum += temp * differs[3 - i][i]
        }
        return sum
    }

    fun calculate_all_values() {
        for (i in 0..3) {
            value[i] = start + i * step
            newtonValues[i] = f(value[i])
            differs[i][0] = newtonValues[i]
        }
        for (j in 1..3) {
            var i = 0
            while (i + j < 4) {
                differs[i][j] = differs[i + 1][j - 1] - differs[i][j - 1]
                i++
            }
        }
        rebPointValue = value_of_Newton_function(point_of_rebuilding)
    }

    fun ostatok(x: Double): Double {
        val t = (x - value[5]) / step
        return Math.abs(Math.pow(step, 4.0) * t * (pow(t,2) - 1) * (t - 2) / 24 * f(1.15))
    }

    @JvmStatic
    fun main(args: Array<String>) {
        calculate_all_values()
        println("Приближенное значение функции в точке x = 1:")
        println(point_of_rebuilding.toString() + ": " + rebPointValue)
        println("Оценка остатка интерполирования в точке x = 1:")
        println(ostatok(point_of_rebuilding))
        println("Истинная погрешность:")
        println(f(point_of_rebuilding) - rebPointValue)
    }
}
```

Выходные данные

```
Приближенное значение функции в точке x = 1:
0.628358776640492
Оценка остатка интерполирования в точке x = 1:
6.137861471783854E-5
Истинная погрешность:
2.964240499733986E-5
```

Выводы

Интерполированием на равноотстоящих узлах получили погрешность порядка 10^{-5} степени. Истинная погрешность меньше, чем остаток интерполирования в 3 раза. Это объясняется тем, что оценка остатка — это оценка сверху.

Метод	Наименьших квадратов	Многочлен Ньютона	Многочлен Ньютона с узлами Чебышева	Интерполяция по равноотстоящим узлам
Степень полинома	5	10	10	3
Порядок точности	10^{-7}	10^{-14}	10^{-16}	10^{-5}

Проанализировав таблицу можно сделать вывод, что с увеличением степени полинома, увеличивается точность интерполирования. Точность интерполирования также зависит и от выбора узлов интерполирования, что было показано в построении интерполяционного многочена по узлам Чебышева (при одинаковой степени полинома точность увеличилась в ~100 раз).