Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №1

Нахождение корня нелинейного уравнения методами простой итерации, Ньютона, Чебышева

Вариант №4

Выполнил:
Студент 2 курса 7 группы ФПМИ
Лубенько Алексей Анатольевич

Преподаватель:
Будник Анатолий Михайлович

Минск, 2022

Алгоритм решения

1. Метод простой итерации

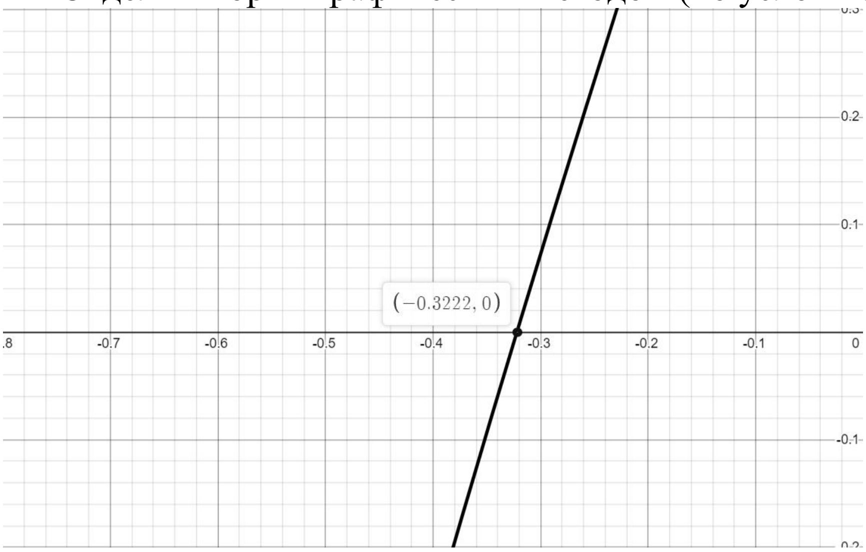
Рассмотрим заданное уравнение $x^3 + 3x + 1 = 0$. Приведем его к каноническому виду:

$x = \varphi(x)$. Выразив x из уравнения, получим, $\varphi(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}$

Тогда итерационный процесс будет выглядеть следующим образом: $x_{n+1} = \frac{-1}{3}x_n^3 - \frac{1}{3}; \quad n = 0,1,\ldots; \quad x_0$

Критерий останова: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon = 10^{-7}$

Отделим корни графическим методом (по условию):



Выберем начальное приближение $x_0 = -0{,}45$ и отрезок $\Delta = [-0.7;\ -0.2]$, тогда $\delta = 0.25$, и проверим выполнение условий теоремы о сходимости метода простой итерации:

1) $q = \max\limits_{\Delta} |\varphi'(x)| = |-x^2| = 0.49 < 1$

2) $m = |\varphi(x_0) - x_0| = 0.0862917$

3) $\frac{m}{1-q} = 0.169199 < \delta$

Следовательно, условия теоремы выполнены, и метод простой итерации сходится.

Найдем априорное число итераций для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-7}$:

$$n = \frac{ln\dfrac{\varepsilon(1-q)}{m}}{lnq} = 21$$

Для проверки результата найдем невязку $r = f(x_{n+1})$.

Листинг программы

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

double f(double x){
    return pow(x,3.)+3.*x+1.;
}
double fi(double x){
    return (-1./3.)*pow(x,3)-(1./3.);
}
int main(){
    const double eps=pow(10,-7);
    double xn1=-0.45;
    double xn=0;
    int count=0;
    while(abs(xn1-xn)>eps){
        xn=xn1;
        xn1=fi(xn);
        count++;
    }
    double r=f(xn1);
    cout<<"Корень уравнения: "<<xn1<<endl;
    cout<<"Невязка: " <<r<<endl;
    cout<<"Число итераций:" <<count<<endl;
    return 0;
}
```

Выходные данные

```
Корень уравнения: -0.322185357
Невязка: -7.82568e-09
Число итераций: 16
```

2. Метод Чебышева

Берем промежуток и начальное приближение из первого пункта:

$\Delta = [-0.7;\ -0.2]$

$x_0 = \ -0{,}45$

Построим итерационный процесс вида:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f^{''}(x_n)}{2(f^{'}(x_n))^3} \quad n = 0,1,2.... \quad x_0 =- 0.45$$

Данный процесс — метод Чебышева, обладающий кубической скоростью сходимости.

Листинг программы

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

double f(double x){
    return pow(x,3.)+3.*x+1.;
}
double f_1der(double x){
    return 3*pow(x,2)+3;
}
double f_2der(double x){
    return 6*x;
}

int main(){
    setlocale(LC_ALL, ".1251");
    const double eps=pow(10,-7);
    double xn1=-0.45;
    double xn=0;
    int count=0;
    while(abs(xn1-xn)>eps){
        xn=xn1;
        xn1=xn-(f(xn)/ f_1der(xn))-(f(xn)*f(xn)* f_2der(xn)/2/pow(f_1der(xn),3));
        count++;
    }
    double r=f(xn1);
    cout<<setprecision(9)<<xn1<<endl;
    cout<<r<<endl;
    cout<<count<<endl;
    return 0;
}
```

Выходные данные

```
Корень уравнения:-0.322185355
Невязка: 0
Число итераций:3
```

3. Метод Ньютона

Берем промежуток и начальное приближение из первого пункта:
$\Delta = [-0.7;\ -0.2]$
$x_0 = -0,45$

Построим итерационный процесс вида:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} \quad n = 0,1,2.\dots \quad x_0 =-0.45$$

Он обладает квадратичной скоростью сходимости и погрешность на каждой итерации представима в виде:

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{f^{''}(x^*)}{2f^{'}(x^*)}\varepsilon_n^2,\ \varepsilon_n = x^* - x_n$$

Для проверки результата найдем невязку $r = f(x_{n+1})$

Листинг программы

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

double f(double x){
    return pow(x,3.)+3.*x+1.;
}
double f_1der(double x){
    return 3*pow(x,2)+3;
}

int main(){
    setlocale(LC_ALL, ".1251");
    const double eps=pow(10,-7);
    double xn1=-0.45;
    double xn=0;
    int count=0;
    while(abs(xn1-xn)>eps){
        xn=xn1;
        xn1=xn-(f(xn)/ f_1der(xn));
        count++;
    }
    double r=f(xn1);
    cout<<setprecision(9)<<xn1<<endl;
    cout<<r<<endl;
    cout<<count<<endl;
    return 0;
}
```

Выходные данные

```
Корень уравнения:-0.322185355
Невязка: 0
Число итераций:6
```

Вывод:

Метод простой итерации сошелся к корню с требуемой точностью, т.к невязка решения меньше, чем требуемая точность. Априорная оценка — 21 итерация, а реальное число итераций — 16. Это связано с тем, что априорная оценка показывает завышенный результат.

Для взятого начального условия метод Ньютона сошелся. Выбранная точность привела к тому, что невязка решения оказалась равной нулю(в пределах точности типа double). Сравнивая метод Ньютона с МПИ, можно заметить, что метод Ньютона сошелся к решению уравнения значительно быстрее (6 итераций против 16), а само приближение точнее, чем в МПИ. Это обусловлено квадратичной скоростью сходимости метода Ньютона в сравнении с линейной скоростью МПИ.

Метод Чебышева, обладающий кубической скоростью сходимости, сошелся к решению быстрее, чем метод Ньютона
(3 итерации против 6) . Невязка решения оказалась равной нулю (в пределах точности типа double).