Sistemas de Numeração em Computação

Disciplina: Introdução à Arquitetura de Computadores

Luciano Moraes Da Luz Brum

Universidade Federal do Pampa – Unipampa – Campus Bagé

Email: lucianobrum18@gmail.com

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
  - Inteiros Positivos;
  - Sinal Magnitude;
  - Complemento de B-1;
  - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Introdução

- Números binários normalmente exigem uma grande quantidade de dígitos, ou seja, grandes cadeias de 0’s e 1’s.

- Isso pode induzir facilmente à erros visuais, portanto emprega-se normalmente as notações em base octal e hexadecimal para representar números binários, por serem mais compactas.

Introdução

BASE 10	BASE 2	BASE 8	BASE 16
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Introdução

- **Dos sistemas de numeração utilizados em computação:**

  - O sistema **decimal** é utilizado para entrada e saída de dados no computador;

  - O sistema **binário** é utilizado para cálculos internos e armazenamento;

  - Os sistemas **hexadecimal** e **octal** são utilizados como forma de compactar informações internas.

Introdução

- **Dos sistemas de numeração utilizados em computação:**
  - O sistema **decimal** é utilizado para entrada e saída de dados no computador;
  - O sistema **binário** é utilizado para cálculos internos e armazenamento;
  - Os sistemas **hexadecimal** e **octal** são utilizados como forma de compactar informações internas. (porque hexadecimal e octal?)

Introdução

- Cada digito do sistema binário é denominado de bit, a contração de **bi**nary digi**t**.

- Para um quarteto de bits, chamamos de nibble.

- Para um octeto de bits, chamamos de byte.

- Para grandes conjuntos de bits e bytes, usamos os mesmos denominadores do sistema decimal (K para kilo, M para mega, ...).

Introdução

0 ou 1	1 bit
4 bits	1 nibble
8 bits	1 byte
1024 bits	1 Kilobit (2^{10} $bits$)
1024 bytes	1 Kilobyte (2^{10} $bytes$)
1024 Kilobytes	1 Megabyte (2^{20} $bytes$)
1024 Megabytes	1 Gigabyte (2^{30} $bytes$)
1024 Gigabytes	1 Terabyte (2^{40} $bytes$)
1024 Terabytes	1 Petabyte (2^{50} $bytes$)
1024 Petabytes	1 Exabyte (2^{60} $bytes$)

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
    - Inteiros Positivos;
    - Sinal Magnitude;
    - Complemento de B-1;
    - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Soma de Números Binários

- Mesmas regras da soma de números decimais, porém só existem 2 símbolos em vez de 10;

a	b	C = a + b	Vai-um
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Soma de Números Binários

- Mesmas regras da soma de números decimais, porém só existem 2 símbolos em vez de 10;

a	b	Vem-um	C = a + b	Vai-um
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- <u>Representações de números</u>
    - Inteiros Positivos;
    - Sinal Magnitude;
    - Complemento de B-1;
    - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Representação dos Números

- Até o momento foi utilizada a notação de números inteiros positivos;
- É necessário modificar ou expandir essa representação para incluir números negativos;
- Existem 4 representações que serão analisadas em detalhes a seguir: Inteiros Positivos, Sinal-Magnitude, Complemento de B-1 e Complemento de B;

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
  - Inteiros Positivos;
  - Sinal Magnitude;
  - Complemento de B-1;
  - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Inteiros Positivos

- Faixa de representação: [0 , B^n – 1];

- Valor do número: $\sum_{n-1} x_i . B^i$, mesmo método usado para conversão pelo método polinomial;

- Troca de Sinal: Não existe tal função;

- Soma de dois números: Utilizamos a tabela de soma apresentada anteriormente;

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
  - Inteiros Positivos;
  - <u>Sinal Magnitude;</u>
  - Complemento de B-1;
  - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Sinal Magnitude

- Neste representação, um digito é utilizado para representar o sinal do número (o bit mais significativo);

- Em nossos exemplos, utilizaremos 0_2 para positivo e 1_2 para negativo;

- Exemplo: 100_2 é um número negativo e 011_2 é um número positivo;

Sinal Magnitude

- Neste representação, um digito é utilizado para representar o sinal do número (o bit mais significativo);
- Em nossos exemplos, utilizaremos 0_2 para positivo e 1_2 para negativo;
- Exemplo: 100_2 é um número negativo e 011_2 é um número positivo;
- O que acontece com a faixa de representação dos números?

Sinal Magnitude

- Neste representação, um digito é utilizado para representar o sinal do número (o bit mais significativo);

- Em nossos exemplos, utilizaremos 0_2 para positivo e 1_2 para negativo;

- Exemplo: 100_2 é um número negativo e 011_2 é um número positivo;

- O que acontece com a faixa de representação dos números?
  - **[- $(B^{n-1} - 1)$, $(B^{n-1} - 1)$];**

Sinal Magnitude

➢ Comparação dos valores: Inteiro Positivos X Sinal Magnitude.

Número Binário	Inteiro Positivo	Sinal Magnitude
000	0	**0**
001	1	1
010	2	2
011	3	3
100	4	**-0**
101	5	-1
110	6	-2
111	7	-3

➢ **A faixa de representação da magnitude é reduzida em um fator igual a base B em comparação com os Inteiros Positivos!**

Sinal Magnitude

- A faixa de representação da magnitude é reduzida em um fator igual a base B em comparação com os Inteiros Positivos! Das B^{n} combinações, usa − se somente $2.\mathrm{B}^{\mathrm{n}-1}-1$.

- Prova:
  - Representação em IP (decimal 2 dígitos): [0, 99].
  - Representação em SM (decimal 2 dígitos): [-9, 9].
  - Representação em IP (binário 4 dígitos): [0000, 1111].
  - Representação em SM (binário 4 dígitos): [-111, 111].

  - Obs: nos binários, apenas uma representação é perdida.

Sinal Magnitude

- Cálculo do valor do número: a = S(a)M(a), onde:
  - S(a) é o sinal do número. Pode ser ‘+’ (0) ou ‘-’ (1);
  - M(a) é a magnitude: $\sum_{n-2} x_i . B^i$;
- Troca de Sinal: Troca-se o S(a) e mantem-se a M(a) do número.
  - Se S(a) for ‘+’, então S(a) = ‘-’;
  - Se S(a) for ‘-’, então S(a) = ‘+’;

Sinal Magnitude

- Soma de dois números:

S (a)	S (b)	S (c)	M(c)	Exemplo
+	+	+	M(a) + M (b)	5 + 7 = 12
-	-	-	M(a) + M (b)	-5 + -7 = - 12
+	-	Se M(a) >= M(b), + Se M(a) < M(b), -	M(a) - M (b) M(b) - M (a)	7 + -5 = 2 5 + -7 = - 2
-	+	Se M(a) > M(b), - Se M(a) <= M(b), +	M(a) - M (b) M(b) - M (a)	-7 + 5 = -2 -5 + 7 = 2

Sinal Magnitude

- Soma de dois números:

S (a)	S (b)	S (c)	M(c)	Exemplo
+	+	+	M(a) + M (b)	$5_{10} + 7_{10} = 12_{10}$
-	-	-	M(a) + M (b)	$-5_{10} + -7_{10} = -\ 12_{10}$
+	-	Se M(a) >= M(b), + Se M(a) < M(b), -	M(a) - M (b) M(b) - M (a)	$7_{10} + -5_{10} = 2_{10}$ $5_{10} + -7_{10} = -\ 2_{10}$
-	+	Se M(a) > M(b), - Se M(a) <= M(b), +	M(a) - M (b) M(b) - M (a)	$-7_{10} + 5_{10} = -2_{10}$ $-5_{10} + 7_{10} = 2_{10}$

- **Necessidade de conhecer as tabelas de soma e subtração de números binários !**
- **Manipulação de números em Sinal Magnitude é muito complexa !**

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
  - Inteiros Positivos;
  - Sinal Magnitude;
  - <u>Complemento de B-1;</u>
  - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Complemento de B-1

- Números positivos são representados conforme os modos anteriores;
- Números negativos são representados através do complemento;
- Definição: O **Complemento** de um número é obtido subtraindo-se esse número da maior quantidade representável $(B^n - 1 - a)$;
- Exemplos:
  - Complemento de 458_{10} : $(B^n - 1 - a)$ = $(10^3 - 1 - 458)$ = $999_{10} - 458_{10} = 541_{10}$
  - Complemento de 101_2 : $(B^n - 1 - a)$ = $(2^3 - 1 - 101)$ = $111_2 - 101_2 = 010_2$

Complemento de B-1

- Faixa de representação, para B par: [- $\{(B^n/2) - 1\}$, +$\{(B^n/2) - 1)$];
- Faixa de representação, para B ímpar: [- $(B^n - 3)/2$, + $(B^n - 1)/2$];

Base	Dígitos	Faixa	Faixa em decimal
2	3	100,101,110,111,000,001,010,011	**-3,-2,-1,-0,0,1,2,3**
2	4	1000,1001,...,1111,0000,0001,...,0111	**-7,-6,...,-0,0,1,...,7**
3	3	112,120,121,...,222,000,001,...,111	**-12,-11,-10,...,-0,0,1,...,13**
10	2	50,...,98,99,00,01,...,48,49	**-49,,...,-1,-0,0,1,...,48,49**

Complemento de B-1

- Cálculo do valor do número:
- Sinal:
  - Se estiver na metade superior da faixa de representação, negativo;
  - Se estiver na metade inferior da faixa de representação, positivo;
  - Para bases pares, basta analisar o digito mais significativo;
- Magnitude
  - Se for positivo: $\sum_{n-1} x_i . B^i$;
  - Se for negativo: Efetua-se o complemento do número e após, $\sum_{n-1} x_i . B^i$;
  - Exemplo:
    - $011_2 = 0 . 2^2 + 1 . 2^1 + 1 . 2^0 = 3_{10}$
    - 101_2 (negativo) = $111_2 - 101_2 = 010_2 = 0 . 2^2 + 1 . 2^1 + 0 . 2^0 = -2_{10}$

Complemento de B-1

➢ Troca de sinal: Basta complementar todos os dígitos do número.

Base	Dígitos	Número(decimal)	Complemento (decimal)
2	4	1110_2 (-1_{10})	0001_2 ($+1_{10}$)
2	4	1001_2 (-6_{10})	0110_2 ($+6_{10}$)
2	4	1010_2 (-5_{10})	0101_2 ($+5_{10}$)
2	4	0101_2 ($+5_{10}$)	1010_2 (-5_{10})
3	3	102_3 ($+11_{10}$)	120_3 (-11_{10})
3	3	111_3 ($+13_{10}$)	111_3($+13_{10}$)

➢ Em bases ímpares, ocorre estouro de representação com o maior n° positivo!

Complemento de B-1

- Soma em complemento de B-1:

	a + b	- a - b	a – b	-a + b	a + b
1° Operando	0011_2 ($+3_{10}$)	1110_2 (-1_{10})	0110_2 ($+6_{10}$)	1011_2 (-4_{10})	0100_2 ($+4_{10}$)
2° Operando	+ 0011_2 ($+3_{10}$)	+ 1101_2 (-2_{10})	1010_2 (-5_{10})	0111_2 ($+7_{10}$)	+ 0100_2 ($+4_{10}$)
Resultado	0110_2 ($+6_{10}$)	11011_2 (erro)	10000_2 (erro)	10010_2 (erro)	1000_2 (-7_{10}) (ESTOURO)
Resultado Corrigido	0110_2 ($+6_{10}$)	1100_2 (-3_{10})	0001_2 ($+1_{10}$)	0011_2 (3_{10})	

- **Obs: Sempre que ocorrer vai-um e o resultado possuir 1 bit na posição n+1, eliminamos o vai-um e somamos ao resultado!**

Complemento de B-1

Representação	Dígitos	Faixa Positiva	Faixa Negativa
Decimal	3	000,001,002,...,498,499	500,501,...,998,999
C9	3	000,001,002,...,498,499	-499,-498,...,-1,-0

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
  - Inteiros Positivos;
  - Sinal Magnitude;
  - Complemento de B-1;
  - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Complemento de B

- Números positivos são representados conforme os modos anteriores;

- Magnitude dos números negativos são obtidas através do complemento de B $(B^n - a)$;

- Exemplos:

  Complemento de 458_{10} : $(B^n - a) = (10^3 - 458_{10}) = 1000_{10} - 458_{10} = 542_{10}$

  Complemento de 101_2 : $(B^n - a) = (2^3 - 101_2) = 1000_2 - 101_2 = 011_2$ $(010_2 + 1_2)$

Complemento de B

- Faixa de representação, para B par: [- $(B^n/2)$, $+(B^n/2) - 1$];
- Faixa de representação, para B ímpar: [- $(B^n - 1)/2$, + $(B^n - 1)/2$];

Base	Dígitos	Faixa	Faixa em decimal
2	3	100,101,110,111,000,001,010,011	-4,-3,-2,-1,0,1,2,3
2	4	1000,1001,...,1111,0000,0001,...,0111	-8,-7,...,-1,0,1,...,7
3	3	112,120,121,...,222,000,001,...,111	-13,-12,-11,...,-0,0,1,...,13
10	2	50,...,98,99,00,01,...,48,49	-50,,...,-2,-1,0,1,...,48,49

- **Obs: Não existe mais a dupla representação do zero e um número negativo adicional é representado !**

Complemento de B

- Cálculo do valor do número:
  - Sinal: **(MESMA REGRA DO COMPLEMENTO DE B-1)**
  - Magnitude
    - Se for positivo: $\sum_{n-1} x_i . B^i$;
    - Se for negativo:
      1. Efetua-se o complemento de B do número $(B^n - a)$ OU
      2. Efetua-se o complemento de B-1 e soma + 1 ao resultado;
    - Exemplo:
      - 011_2 (positivo) = $0 . 2^2 + 1 . 2^1 + 1 . 2^0 = 3_{10}$
      - 101_2 (negativo) = $010_2 + 1_2 = 011_2 = 0 . 2^2 + 1 . 2^1 + 1 . 2^0 = -3_{10}$

Complemento de B

- Troca de sinal: Complemento de B ou Complemento de B-1 e soma + 1 no resultado.

Base	Dígitos	Número(decimal)	Complemento (decimal)
2	4	1110_2 (-2_{10})	$0001_2 + 1_2 = 0010_2$ ($+2_{10}$)
2	4	1001_2 (-7_{10})	$0110_2 + 1_2 = 0111_2$ ($+7_{10}$)
2	4	1010_2 (-6_{10})	$0101_2 + 1_2 = 0110_2$($+6_{10}$)
2	4	0101_2 ($+5_{10}$)	$1010_2 + 1_2 = 1011_2$ (-5_{10})
2	4	1000_2 (-8_{10})	$0111_2 + 1_2 = 1000_2$ (-8_{10})
3	3	102_2 ($+11_{10}$)	$120_3 + 1_3 = 121_3$ (-11_{10})
3	3	111_2 ($+13_{10}$)	$111_3 + 1_3 = 112_3$ (-13_{10})

- Obs: Em bases pares, ocorre estouro ao trocar o sinal do maior n° negativo (maior magnitude)!

Complemento de B

- Soma em complemento de B:

	1° operando	2° operando	Resultado	Resultado Corrigido
a + b	0011_2 ($+3_{10}$)	0101_2 ($+5_{10}$)	1000_2 (-8_{10})	estouro
a + b	0010_2 ($+2_{10}$)	0101_2 ($+5_{10}$)	0111_2 (7_{10})	Já está Correto
- a - b	1011_2 (-5_{10})	1111_2 (-1_{10})	11010_2 (erro)	1010_2 (-6_{10})
a – b	0101_2 ($+5_{10}$)	1101_2 (-3_{10})	10010_2 (erro)	0010_2 ($+2_{10}$)
- a + b	1101_2 (-3_{10})	0100_2 ($+4_{10}$)	10001_2 ($+1_{10}$)	0001_2 ($+1_{10}$)

- **Obs: Quando ocorrer vai-um e o resultado possuir 1 bit na posição n+1, eliminamos o vai-um do resultado!**

Comparação dos Métodos

Binário	Inteiros Positivos	Sinal-Magnitude	Complemento de B-1	Complemento de B
0000_2	0	+0	+0	0
0001_2	1	1	1	1
0010_2	2	2	2	2
0011_2	3	3	3	3
0100_2	4	4	4	4
0101_2	5	5	5	5
0110_2	6	6	6	6
0111_2	7	7	7	7
1000_2	8	-0	-7	-8
1001_2	9	-1	-6	-7
1010_2	10	-2	-5	-6
1011_2	11	-3	-4	-5
1100_2	12	-4	-3	-4
1101_2	13	-5	-2	-3
1110_2	14	-6	-1	-2
1111_2	15	-7	-0	-1

Comparação das faixas de representação

- Inteiros Positivos: [0 , $B^n - 1$];
- Sinal Magnitude: [- $(B^{n-1} - 1)$, $(B^{n-1} - 1)$];
- Complemento de B-1: [- $\{(B^n/2) - 1\}$, +$\{(B^n/2) - 1\}$];
- Complemento de B: [- $\{(B^n/2)\}$, +$\{(B^n/2) - 1)$];

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
  - Inteiros Positivos;
  - Sinal Magnitude;
  - Complemento de B-1;
  - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Subtração de Números Binários

- Existem 2 formas de efetuar a subtração:
- FORMA 1:
  - Transformando a subtração em soma, efetuando o complemento do subtraendo:
    - C = a – b = a + (- b)
  - A troca de sinal e a soma são realizadas de acordo com o sistema de representação usado;

  - Exemplos:
  - 0111_2 (7_{10}) - 0101_2 (5_{10}) = 0111_2 (7_{10}) + 1011_2 (-5_{10}) = 10010_2 = 0010_2 (2_{10}) (comp. De B)
  - 1110_2 (-1_{10}) – 1101_2 (-2_{10}) = 1110_2 (-1_{10}) + 0010_2 (2_{10}) = 10000_2 = 0001_2 (1_{10}) (comp. de B-1)

Subtração de Números Binários

➢ FORMA 2: Através da Tabela própria de subtração:

a	b	Emprestou-um	C = a - b	Pede-um
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Subtração de Números Binários

- Exemplos:

Complemento de B				
1° Operando	1000_2 (-8_{10})	0110_2 (6_{10})	0100_2 (4_{10})	1010_2 (-6_{10})
2° Operando	- 1111_2 (-1_{10})	- 0101_2 (5_{10})	- 1110_2 (-2_{10})	- 0010_2 ($+2_{10}$)
Resultado	1001_2(-7_{10})	0001_2 (1_{10})	0110_2 (6_{10})	1000_2 (-8_{10})

Tópicos

- **Introdução;**
- **Soma de números binários;**
- **Representações de números**
  - **Inteiros Positivos;**
  - **Sinal Magnitude;**
  - **Complemento de B-1;**
  - **Complemento de B;**
- **Subtração de números binários;**
- **Estouro de Representação;**
- **Resumo;**

Estouros de Representação

- Exemplos (considere complemento de B):
  - $1000_2 + 0001_2 =$
  - $1000_2 + 1111_2 =$
  - $0111_2 + 1111_2 =$
  - $0111_2 + 0011_2 =$

Estouros de Representação

- Exemplos:
  - $1000_2 + 0001_2 = 1001_2$
  - $-8_{10} + 1_{10} = -7_{10}$ (não ocorreu estouro nem vai-um)

  - $1000_2 + 1111_2 = 0111_2$
  - $-8_{10} + -1_{10} = 7_{10}$ (ocorreu estouro e vai-um)

  - $0111_2 + 1111_2 = 0110_2$
  - $7_{10} + -1_{10} = 6_{10}$ (não ocorreu estouro e ocorreu vai-um)

  - $0111_2 + 0011_2 = 1010_2$
  - $7_{10} + 3_{10} = -6_{10}$ (ocorreu estouro e não ocorreu vai-um)

Estouros de Representação

- Existem 2 formas para determinar se ocorreu estouro em complemento de 2:
  - Ocorre estouro em complemento de 2 quando o vai-um é diferente do vem-um do dígito mais significativo;
  - Analisando o bit mais significativo dos operandos e do resultado, conforme tabela abaixo;

Sinal de a	Sinal de b	Sinal da resposta	Sinal real da resposta	Estouro
+	+	+	+	Não
+	+	-	+	Sim
-	-	-	-	Não
-	-	+	-	Sim
+	-	+/-	+/-	Nunca Ocorre
-	+	-/+	-/+	Nunca Ocorre

Tópicos

- Introdução;
- Soma de números binários;
- Representações de números
  - Inteiros Positivos;
  - Sinal Magnitude;
  - Complemento de B-1;
  - Complemento de B;
- Subtração de números binários;
- Estouro de Representação;
- Resumo;

Resumo

- Foi apresentado um maior detalhamento do sistema de numeração binário e parte de seu uso em computação;
- Foram introduzidas as operações de soma e subtração em binário e suas tabelas;
- Foram demonstrados os sistemas de representação de n°s binários;
- Foi demonstrado o quando e o porquê da ocorrência de estouros de representação;

Exercícios

1. Converter os números 16_{10} e 15_{10} para binário (6 bits), realizar a soma entre eles:
   - Sinal-Magnitude;
   - Complemento de B-1;
   - Complemento de B;

2. Mesmo exercício anterior para os números -16_{10} e -10_{10}:

3. Qual a faixa de representação de números binários inteiro-positivos de 6 bits?
   - E em Sinal-Magnitude?
   - E em complemento de B-1?
   - E em complemento de B?

Exercícios

4. Realize as seguintes operações em 4 bits (indicar estouro e carry se houver):

➢ Faça em Complemento de B-1 e em Complemento de B.

- $1001_2 + 1000_2 =$
- $0111_2 + 1001_2 =$
- $0101_2 + 1010_2 =$
- $0110_2 + 0111_2 =$
- $1000_2 + 1111_2 =$
- $1001_2 + 1111_2 =$

Sugestão de Leitura

Canal de Ensino do prof. Dr. Sandro Camargo: https://www.youtube.com/user/scamargo10/videos

Leitura do capítulo 2 do livro Fundamentos de Arquitetura de Computadores (Raul Fernando Weber).

Dúvidas ?