Analysis 2B

Luc Veldhuis

6 april 2017

Continu differentieerbaar

Herhaling

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$
F is continu differentieerbaar in $a \Rightarrow$
F is differentieerbaar in $a \Rightarrow$
F heeft een richtings en partiele afgeleide in a (Implicaties gelden niet andersom)

Definitie

$F : |R^n \to \mathbb{R}^m$ is **continu differentieerbaar** in $a \Leftrightarrow D_1 F, \ldots, D_n F$ bestaan in een open bol rond a en zijn continu in a.
$D_1 F, \ldots, D_n F$ bestaan in alle $x \in B_\epsilon(a)$. $\lim\limits_{x \to a} D_j F(x) = D_j F(a)$ voor alle $i = 1, \ldots, n$ (continuiteit in a).

Continu differentieerbaar

Voorbeeld

Een differentieerbare, niet continu differentieerbare functie:

$$h(x) \begin{cases} x^2 sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

h is overal differentieerbaar maar niet continu differentieerbaar, want $h'(x)$ is niet continu in $x = 0$

$h'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t}$

Is $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = h'(0)$?

Continu differentieerbaar

Voorbeeld

Vergelijking van het raakvlak T aan $S = Im(F)$ in $F(a)$
$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$F(x,y) = (x, y, x^+ y^2)$, $a = (0,1)$
$F(a) = (0,1,1)$
$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (1,0,2x)$ en $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (0,1,2y)$ zijn lineair onafhankelijke vectoren, en spannen een vlak op in $\mathbb{R}^3$
Voor $a = (0,1)$ geeft dit $(1,0,0)$ en $(0,1,2)$.
Deze spannen de lineaire deelruimte:
$\mathcal{L}_a = Im(dF_a) = \{D_v F(a) : v \in \mathbb{R}^3\}$

$$dF_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \leftrightarrow F'(a) \in \mathcal{M}(3 \times 2, \mathbb{R}) \text{ met } F'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Het raakvlak aan S in $F(a)$ is $F(a) + \mathcal{L}_a$ (transpose).

Continu differentieerbaar

Voorbeeld (vervolg)

Een normaalvector voor het vlak vind ik door het systeem op te lossen:

$$\begin{cases} x = 0 & \Leftrightarrow n \cdot (1,0,0) = 0 \\ y + 2z = 0 & \Leftrightarrow n \cdot (0,1,2) = 0 \end{cases}$$

Hieruit volgt $n = (0, -2, 1)$

(x, y, z) ligt in het raakvlak dan en slechts dan als

$(x, y, z) - (0, 1, 1) \perp n$ (Met $F(a) = (0, 1, 1)$ en $n = (0, -2, 1)$)

$(x, y - 1, z - 1) \cdot (0, -2, 1)$. Dit geeft:

$-2(y - 1) + z - 1 = 0$

$z = 2y - 1$

Continu differentieerbaar

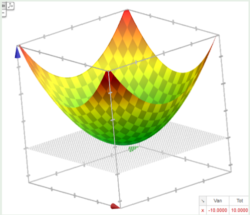
Voorbeeld (vervolg)

$v = a(1,0,0) + b(0,1,2)$ (Spant een vlak op)

n normaalvector

Dan moet gelden $v \cdot n = 0$ voor alle v

Hiervoor is voldoende dat $n \perp (1,0,0)$ en $n \perp (0,1,2)$



Figuur : Plot of $x^2 + y^2$

Kettingregel

Definitie

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ met alle $x \in$ domein(F) zodat $F(x) \in$ domein(G)

Neem aan dat F en G differentieerbaar zijn.

Dan is $G \circ F$ ook differentieerbaar en $d(G \circ F)_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

F differentieerbaar in a, dus $dF_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

G differentieerbaar in $F(a)$, dus $dG_{F(a)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$

Wat gebeurt er met de afgeleide?

$$\{\text{Lineaire afbeeldingen}\} \Leftrightarrow \{\text{Matrices}\}$$

$$L_1 \circ L_2 \leftrightarrow A_1 \cdot A_2$$

$$\text{Samenstelling} \leftrightarrow \text{Matrix vermenigvuldiging}$$

Samenstelling van F en G

Kettingregel

Reparametrisatie van krommen

$\mathbb{R} \to^{\phi} \mathbb{R} \to^{\gamma} \mathbb{R}^p$

$(\gamma \circ \phi)'(t) = \gamma'(\phi(t))\phi'(t)$

Transformatie van Cartesische naar poolcoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met $(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

- T is overal differentieerbaar, want componenten zijn differentieerbaar.
- T is niet injectief.

$T'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial r} & \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_2}{\partial r} & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Determinant is r.

Kettingregel

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(x,y) = x^2 + y^2$
$g : \mathbb{R}^2 \to^T \mathbb{R}^2 \to^f \mathbb{R}$ met $g = f \circ T$
$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 = r^2$
Maar ook $g'(r,\theta) = (\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 2t, \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0)$
Met de kettingregel:
$g'(r,\theta) = (\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta))$
$g'(r,\theta) = f'(T(r,\theta))T'(r,\theta)$
$f'(x,y) = (2x, 2y)$
$f'(T(r,\theta)) = (2r\cos(\theta), 2r\sin(\theta))$
$$g'(r,\theta) = (2r\cos(\theta), 2r\sin(\theta)) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = (2r, 0)$$
Klopt met onze eerdere berekening!

Kettingregel

Voorbeeld

$f'(x) = 0$ op een samenhangend interval I.
Dan is $f(x)$ constant $\forall x \in I$.
$I = (-1, 0) \cup (0, 1)$

$$f : I \to \mathbb{R} \text{ met } f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1, 0) \\ 1 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Definitie

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ samenhangend dan:
$\forall a, b \in \mathcal{U}$ bestaat er een kromme $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zodanig dat
$\phi(t) \in \mathcal{U}$ $\forall t$ en $\phi(0) = a$ en $\phi(1) = b$

Kettingregel

Stelling

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ samenhangend
Dan is $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ constant op $\mathcal{U}$ dan en slechts dan als
$F'(x) = 0$ voor alle $x \in \mathcal{U}$

Bewijs

$(F \circ \phi)(t)$ met $F = (f_1, \ldots, f_n)$
$(f_i \circ \phi)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ϕ bestaat omdat $\mathcal{U}$ samenhangend is.
$\frac{d}{dt}(f_i \circ \phi)(t) = \nabla f_i(\phi(t))\phi'(t) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b)$