Analysis 2B

Luc Veldhuis

12 april 2017

Middelwaardestelling

Definitie voor in $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $[a, b] \subseteq I$
$\exists \xi \in [a, b]$ zodanig dat $f(a) - f(b) = f'(\xi)(b - a)$
Richtingscoefficient van de lijn door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$:
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Vraag

Geldt de middelwaardestelling ook voor algemene afbeeldingen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?
Nee!
Bijvoorbeeld: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$
f differentieerbaar.
Bestaat er $\xi \in [0, 2\pi]$ zodat
$(0, 0) = f(2\pi) - f(0) = f'(\xi)2\pi = (-\sin(t), \cos(t))2\pi \neq (0, 0)$

Middelwaardestelling voor functies $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Middelwaardestelling voor $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathcal{U}$ en differentieerbaar
Definieer $L(a, b) = \{a(1-t) + bt : t \in [0, 1]\}$ het segment van a naar b en neem aan dat $L(a, b) \subseteq \mathcal{U}$.
Dan bestaat er een $c \in L(a, b)$ zodanig dat
$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a)$, met $\cdot$ het inproduct in $\mathbb{R}^n$.
De stelling geldt voor elke a en b als $\mathcal{U} = \text{domein}(f)$ convex is.

Definitie

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ heet **convex** dan en slechts dan als $\forall x, y \in \mathcal{U}$, $L(x, y) \subseteq \mathcal{U}$.
Bijvoorbeeld, $\mathbb{R}^n$ en $\overline{B_1(0)}$ zijn convex.
Twee disjuncte verzamelingen zijn nooit convex.

Middelwaardestelling voor functies $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Relatie met de kettingregel

Het bewijs van de middelwaardestelling gebruikt de kettingregel.
Definieer $\phi(t) = a(1-t) + bt,\ t \in (-\epsilon, 1+\epsilon)$
$\epsilon > 0$ klein, zodat $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathcal{U}$
Dan kunnen we de samenstelling beschouwen:
$(-\epsilon, 1+\epsilon) \to^{\phi} \mathcal{U} \to^{f} \mathbb{R}$
$g = f \circ \phi$ met $g : (-\epsilon, 1+\epsilon) \to \mathbb{R}$
g is differentieerbaar, want f en ϕ zijn differentieerbaar.
Middelwaarde voor functies van 1 variabele $\Rightarrow \exists \xi \in [0,1]$ zodat
$\nabla f(\phi(\xi)) \cdot \phi'(\xi) =_{kettingregel} g'(\xi) \cdot (1-0) = g(1) - g(0) =$
$f(b) - f(a)$
Noem $\phi(\xi) = c$
Dan geldt $f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot \phi'(\xi) = \nabla f(c) \cdot (b-a)$
$\phi(t) = (1-t)a + tb = (b-a)t + a,$
$\phi'(t) = b - a$

Lokale maxima en minima en het gradient

Definitie

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
f heeft een **lokaal maximum** in hetpunt $a \in D$ dan en slechts dan als $\exists r > 0$ zodat $f(a) \geq f(x)$ voor alle $x \in B_r(a) \cap D$

Definitie

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
f heeft een **lokaal minimum** in het punt $a \in D$ dan en slechts dan als $\exists r > 0$ zodat $f(a) \leq f(x)$ voor alle $x \in B_r(a) \cap D$

Opmerking

Als f een lokaal minimum/maximum in een inwendig punt a heeft, dan moet gelden $\nabla f(a) = (0, \dots, 0)$

Lokale maxima en minima en het gradient

Voorbeeld

$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
$\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$
$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

Bewijs

Definieer $g_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a + (t - a_i)e_i)$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to a_i} \frac{f(a+(t-a_i)e_i)-f(a)}{t-a_i} = \lim_{t \to a_i} \frac{g_i(t)-g_i(a_i)}{t-a_i} = g_i'(a_i)$
Als f een lokaal maximum/minimum heeft in a, dan heeft $g_i(t)$ een lokaal maximum/minimum in a_i, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$
Dus
$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) = (g_1'(a_1), \ldots, g_n'(a_n)) = (0, \ldots, 0)$

Lokale maxima en minima en het gradient

Voorbeeld

Vind maximum en minimum van de functie $f(x, y) = xy$ over $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Vind inwendige lokale maxima en minima door $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ op te lossen.
   $\nabla f(x, y) = (y, x)$
   Dus 1 inwendig kritiek punt, namelijk $\nabla f(x, y) = 0$
2. De rand onderzoeken. De rand van D is de cirkel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ is de **nulverzameling** van $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Om het maximum en minima van $f(x, y) = xy$ te vinden over $f_g = \{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ te vinden, zoeken we oplossingen van het systeem $\nabla g(x, y) = \lambda \nabla f(x, y)$

Lokale maxima en minima en het gradient

Voorbeeld (vervolg)

Dus we moeten oplossen:

$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(x, y) = (y, x)$

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

De λ heet de Lagrange multiplier.

Lokale maxima en minima en het gradient

Nulverzameling

Krommen in $\mathbb{R}^2$ als **nulverzameling** van een functie $g(x, y)$.
$f_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ is de nulverzameling van g met g differentieerbaar.
Als $p \in f_g$ met $\nabla g(p) \neq (0, 0)$, dan bestaat er een (injectieve) differentieerbare kromme $\phi(\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ met $\phi(0) = p$, $\phi'(0) \neq 0$ en zodat voor alle t geldt dat $\phi'(t) \in f_g$
Bijvoorbeeld, $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ in punten van f_g.
(Neem $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ op de cirkel)

Lokale maxima en minima en het gradient

Nulverzameling (vervolg)

Neem aan dat f een maximum/minimum heeft over f_g in het punt p en dat $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$. Dan bestaat er een kromme $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ zodat $\phi(0) = p$, $\phi(0) \neq (0,0)$ en $\phi(t) \in f_g$ voor alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.
Dus $g(\phi(t)) = 0 \ \forall t$
$0 = \frac{\partial}{\partial t} g(\phi(t)) = \nabla g(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$
$t = 0$ invullen geeft $\nabla g(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = 0$. f heeft een maximum/minimum over f_g in het punt p. Dus de functie $f \circ \phi$ heeft een maximum/minimum in $t = 0$.
Maar $f \circ \phi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ heeft een lokaal maximum in $t = 0$, dan moet $0 = (f \circ \phi)'(0) = \nabla f(\phi(0)) \circ \phi'(0) = \nabla f(p) \circ \phi'(0) = 0$
Conclusie: $\nabla f(p) \parallel \nabla g(p)$, dus $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ zodat $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$

Lokale maxima en minima en het gradient

Niveaukromme

Een **niveaukromme** van $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ van de vorm $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}$ voor een constante $k \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

$f(x, y) = xy$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = k\}$ met k constant.