Analysis 1B

Luc Veldhuis

18 November 2016

§6.5 afmaken

Voorbeeld $\int \frac{sin(x)}{x}$

$$\int_0^r \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Defineer:

$$sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad x \neq 0$$

$$sinc(x) = 1 \qquad x = 0$$

$$\int_0^r \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{|\sin(x)|}{x}$$

§6.5 afmaken

Voorbeeld $\int_1^\infty \frac{1}{x} = +\infty$

Neem de vereniging van intervallen (I_r) als $\frac{\pi}{4}$ tot $\frac{\pi 3}{4}$ herhalend. Neem I_r^c het complement hiervan.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\int_0^r \frac{|\sin(x)|}{x} > \int_{I_r} \frac{|\sin(x)|}{x} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_{I_r} \frac{1}{x}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^r \frac{1}{x} = \int_{I_r} \frac{1}{x} + \int_{I_r^c} \frac{1}{x} \leq 2 \int_{I_r} \frac{1}{x}$$

$$\int_{I_r} \frac{1}{x} < \int_{I_r^c}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \int_{I_r} \frac{1}{x} \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^r \frac{1}{x} \to \infty$$

Definitie van functies

Hoe zijn $\sin(x)\cos(x)$ etc gedefinieerd?

$\sin(x), \cos(x), ln(x), e^x, x^a$ $(x^r = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ voor $x > 0)$
$\int x^n = \frac{1}{n+1}x^n + C, n \neq -1, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$ $\int \frac{1}{x} = ?$
$\int_1^x \frac{1}{t}dt = F(t)|_1^x = F(x) - F(1)$
Kies 1 primitieve: $F(1) = 0$
$\int_1^x \frac{1}{t}dt = F(x)$ nieuwe functie voor $x \geq 1$!
Voor $0 < x \leq 1 \leq \infty$ (We hebben $\int_b^a f = -\int_a^b f$) Dus
$\int_1^x \frac{1}{t} = -\int_x^1 \frac{1}{t}$

Definitie van functies

Hoe zijn $\sin(x)\cos(x)$ etc gedefinieerd?

Nu geeft $\int_1^x f$:
$\int_1^x \frac{1}{t}dt$ voor $x \geq 1$
$-\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ voor $x \leq 1$
$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t} = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{x}$ voor $x \geq 1$
$\frac{d}{dx} - \int_x^1 \frac{1}{t} = \frac{d}{dx} - F(x) = - - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ voor $0 < x < 1$.
Dus $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{x}\ \forall x > 0$
Dus $F(x)$ is continu differentieerbaar en ∞ vaak differentieerbaar.
$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}$ voor $x > 0$
$\int \frac{1}{x} = ln|x| + C$ voor $x \neq 0$
$erf(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2}$ (Veel gebruikt in statistiek)

Bewijs met ln

Bewijs $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

$$ln(xy) = ln(x) + ln(y),\ \ x > 0,\ \ y > 0$$

$$\frac{d}{dx}(ln(xy) - ln(y)) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$ln(xy) - ln(y) = ln(x) + C,\ \ C = 0$$

Bewijs $ln(x^r) = rln(x)$

$$ln(x^r) = rln(x),\ \ x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(ln(x^r) - rln(x)) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} - \frac{r}{x} = \frac{r}{x} - \frac{r}{x}$$

$$ln(xy) - ln(y) = ln(x) + C,\ \ C = 0$$

Bewijs met *ln*

Bewijs met limiet

$$\lim_{x\to\infty} ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} ln(2^n) = nln(2) \to \infty$$

$$nln(2) = M > 0$$

$$\exists \delta_M = n \text{ zodanig dat}$$

$$f(x) > M \ \forall x \geq \delta_M$$

Neem inverse:

$$exp(ln(x)) = x, \ ln(exp(x)) = x$$

Bewijs met *exp*

Inverse $ln(2)$

Domein is $(0, \infty)$ dus voor inverse is het berijk $(0, \infty)$
$exp(0) = 1$ want $ln(1) = 0$
$x = exp(y)$ dan geldt $y = ln(x)$
$\frac{d}{dy} exp(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} ln(x)} = x = exp(y)$
$\frac{d}{dx} exp(x) = exp(x)$ dus is oneindig vaak differentieerbaar.

Bewijs $exp(x)^r = exp(rx)$

Neem $exp(x)^r = u$
Dan geldt: $ln(u) = ln(exp(x)^r) = rln(exp(x)) = rx$
Dus $u = exp(x)^r = exp(rx)$

Probeer zelf: $exp(x + y) = exp(x)exp(y)$

$exp(x + y) = exp(x)exp(y)$
$e^{x+y} = e^x e^y$

Definitie $exp(x)$

Definitie op $\mathbb{Q}$

$\frac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$
$exp(r) = exp(r1) = exp(1)^r = e^r = \sqrt[n]{e^m}$

Definitie op $\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$
$e^x := exp(x)$
$\lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\int e^x = e^x + C$
$a^x = exp(ln(a^x)) = exp(xln(a)) = e^{xln(a)}$

Definitie *log*

Definitie *log*

$x = a^y$

$y = log_a(x)$

$\frac{dlog_a(x)}{dx} = \frac{1}{a^y ln(a)} = \frac{1}{xln(a)}$

Definitie *sinh* en *cosh*

$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Want $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Want $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$