Complexe Analyse

Luc Veldhuis

13 Februari 2017

Herhaling complexe getallen

Vraag

$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ want $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Continuïteit

Definitie

Zij D een **domein** $\Leftrightarrow$ een open deelverzameling van $\mathbb{C}$.
Een functie $f : D \to \mathbb{C}$ is continu in een punt $z_0 \in D$ als $\lim_{z \to z_0} f(z)$ bestaat, dus $z_n \to^{n\to\infty} z_0 \Rightarrow f(z_n) \to^{n\to\infty} f(z_0)$.

Opmerking

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
- Alternatief: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Continuïteit

Stelling

Zij $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ met $z = x + iy$ dan:

$$f \text{ continu in } z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow \begin{cases} u & \text{is continu in } (x_0, y_0) \\ v & \text{is continu in } (x_0, y_0) \end{cases}$$

Bewijs

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

Stelling

- $z \mapsto Re(z), Im(z), |z|, \bar{z}$ zijn continu in elk punt.
- f_1, f_2 continu in $z_0 \Rightarrow f_1 + f_2,\ f_1 \cdot f_2$ ook continu
- f continu in z_0 en $f(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ continu in z_0.
- f_1, f_2 continu, dan ook $f_1 \circ f_2$ continu.

Continuïteit

Bewijs

Twee manieren: of direct (zoals over $\mathbb{R}$) of via u, v.
$\frac{1}{f} = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$ deze zijn continu met $f = u + iv$.

Definitie

$f : D \to \mathbb{C}$ continu $\Leftrightarrow$ f continu in alle $z_0 \in D$.

Stelling

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ continu en zij $K \subseteq D$ compact. Dan bestaat $M > 0$ met $|f(z)| \leq M \ \forall z \in K$

Bewijs

f continu en $|\cdot|$ is continu $\Rightarrow$ $|f|$ is continu en reëelwaardig.
Gebruik nu stelling uit de analyse.

Continuïteit

Stelling

Elk polynoom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ met alle $a_i \in \mathbb{C}$ is continu op het hele complexe vlak.

Differentiëerbaarheid

Definitie

Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ een domein en zij $f : D \to \mathbb{C}$ een functie.

- De afgeleide van f in een punt $z_0 \in D$ is gedefinieerd als limiet

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

- f wordt **differentieerbaar** genoemd als $f'(z_0)$ bestaat.

Opmerking

Alternatief:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Differentieerbaarheid

Voorbeeld

- $f(z) = \frac{1}{z}$ geeft $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}(\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z})\frac{1}{\Delta z}$
  $= \lim_{\Delta z \to 0}(\frac{-\Delta z}{z(z+\Delta z)}\frac{1}{\Delta z}) = -\frac{1}{z^2}$
- $f(z) = \bar{z}$ geeft $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$.
  $\Delta z = (\Delta x, 0)$ geeft $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = 1$
  $\Delta z = (0, \Delta y)$ geeft $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$.
  Dus het limiet bestaat niet!
  Dus niet afleidbaar.

Differentiteerbaarheid

Stelling

Het geldt gelukkig dat:

- f, g differentieerbaar $\Rightarrow f + g$, $f \cdot g$ met $(f+g)' = f' + g'$ en $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. (Product regel, of Leibnitz regel)
- f differentieerbaar en $f(z_0) \neq 0$ dan is $\frac{1}{f}$ differentieerbaar in z_0 met $(\frac{1}{f})' = \frac{-f'}{f^2}$.

Bewijs

Reële analyse.

Cauchy-Riemann vergelijkingen

Vraag

Is er echt een verschil tussen complexe en reëele differentieerbaarheid?
Ja.

Complexe afgeleide

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

Reële afgeleide

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ Df(x,y) = Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$ met

$u_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \ \ldots\ , v_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(y+\Delta y) - v(y)}{\Delta y}.$

Cauchy-Riemann vergelijkingen

Afgeide

Neem aan dat f in $z = (x, y)$ complex differentieerbaar is.

$\Delta z = (\Delta x, 0)$ geeft $f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x} = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$

$\Delta z = (0, \Delta y) = i\Delta y$ geeft $f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{i\Delta y} =$
$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + i\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y} = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$

Stelling

$f = u + v_i$ is complex differentieerbaar in een punt $z_0 = (x_0, y_0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u, v \text{ partieel differentieerbaar} \\ u_x, u_y, v_x, v_y \text{ continu} \\ u_x = v_y \text{ en } u_y = -v_x \text{ (Cauchy-Riemann vergelijkingen)} \end{cases}$$

Dus complexe differentieerbaarheid is ‘meer’ dan reële differentieerbaarheid.

Cauchy-Riemann vergelijkingen

Gevolg

Neem u, v gladde functies.

$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = -u_{yy}$

$v_{xx} = (v_x)_x = (-u_y)_x = -(u_x)_y = -v_{yy}$

Dus $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en $v_{xx} + v_{yy} = 0$ (Laplace vergelijkingen)

Opmerking

Als men poolcoordinaten wilde gebruiken:
$f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ met $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, dan zijn Cauchy-Riemann vergelijkingen van de vorm $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$.

Analytische functies

Definitie

- $f : D \to \mathbb{C}$ wordt **analytisch** genoemd als f in elke $z \in D$ differentieerbaar is.
- f wordt **geheel** genoemd als $D = \mathbb{C}$.

Voorbeeld

- Elke polynoom is een gehele functie met $f'(z) = na_n z^{n-1} + \cdots + a_1$
- $f(z) = \frac{1}{z}$ is niet geheel.

Stelling

$f : D \to \mathbb{C}$ analytisch met $f'(z) = 0 \ \forall z \in D$ en D is samenhangend $\Rightarrow$ f is constant.

Bewijs

$0 = f' = u_x + iv_x = -v_y - iu_y = 0 \Rightarrow Df \equiv 0 \Rightarrow f$ constant door analyse op R.