Analysis 2B

Luc Veldhuis

4 mei 2017

Integratie

Herhaling

- Definitie van **meetbaar** voor een begrensde $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is meetbaar dan en slechts dan als $V(\partial A) = 0$
- Definitie van **integreerbaar** voor een begrensde functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ met begrensde drager.
- Voldoende voorwaarde voor integreerbaarheid van een begrensde functie met begrensde drager:
  f is continu behalve op een nulverzameling (Stelling 2.2)
  Zo'n functie heet toelaatbaar ('admissable' in het boek)
  Als f toelaatbaar is, dan is f integreerbaar en
  $\int f = V(O_{f^+}) + V(O_{f^-})$
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ begrensd: $\int\limits_A f = \int f\phi_A$ met $\phi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Integratie

Grafiek van toelaatbare functie is een nulverzameling

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar en $f : A \to \mathbb{R}$ toelaatbaar

$G_f = \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1, \ldots, x_n) \in A, y = f(x_1, \ldots, x_n)\}$

Claim: G_f is een nulverzameling van $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- $\tilde{f}$ heeft een begrensde drager
- $\tilde{f}$ is begrensd
- $\tilde{f}$ is continu behalve op deelverzameling van ∂A
- $V(\partial A) = 0$

Hieruit volgt $\tilde{f}$ is toelaatbaar $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ integreerbaar $\Rightarrow$ $O_{\tilde{f}}$ is meetbaar $\Rightarrow \partial O_{\tilde{f}}$ is een nulverzameling.

Propositie 2.4

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toelaatbaar, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar.
Dan is $f\phi_A$ integreerbaar $\Leftrightarrow \int\limits_A f$ is gedefinieerd.

Integratie

Eigenschappen van $\int_A$

- $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toelaatbaar, $f \leq g$ op $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar.
  $\int\limits_A f \leq \int\limits_A g$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toelaatbaar, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar,
  $|f(x)| \leq M \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ dan is $|\int\limits_A f| \leq MV(A)$
  In het bijzonder: als $V(A) = 0$ dan $\int\limits_A f = 0$
- $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar, $V(A \cap B) = 0$ dan $\int\limits_{A \cup B} f = \int\limits_A f + \int\limits_B f$
- $f = g$ behalve op een nulverzameling. Dan is $\int\limits_A f = \int\limits_B g$
  (nulverzamelingen tellen er niks bij!)

Bewijs

We gaan nu bewijzen dat $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar, $V(A \cap B) = 0$ dan

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Eerst het geval $A \cap B = \emptyset$:

Dan is $\phi_{A \cup B} = \phi_A + \phi_B$

$$\int_{A \cup B} = \int f \phi_{A \cup B} = \int f(\phi_A + \phi_B) = \int f \phi_A + \int f \phi_B = \int_A f + \int_B f$$

Als $A \cap B \neq \emptyset$:

Gebruik het eerste geval om te splitsen.

$$\int_{A \cup B} f = \int_{A \setminus B} f + \int_{A \cup B} f + \int_{B \setminus A} f \text{ met } \int_{A \cap B} f = 0 \text{ (aanname)}$$

Voorbeeld

$[-1,1]$ meetbaar in $\mathbb{R}$.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ met $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ is continu op $[-1,1]$.
G_f is een nulverzameling van $\mathbb{R}^2$
Hetzelfde geldt voor $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$
De samenstelling van nulverzamelingen is weer een nulverzameling.
Dus de eenheidscirkel is een nulverzameling van $\mathbb{R}^2$.
Dus de schijf $D^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$ is meetbaar.
Kies nu de functie $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ (bovenste hemisfeer).
f is continu, D^2 is meetbaar, dus de grafiek is een nulverzameling van $\mathbb{R}^3$.
Zelfde geldt voor $g(x)=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.
Dus $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$ is een nulverzameling van $\mathbb{R}^3$

§IV.3 Karakterisaties van integreerbare functies

Stapfuncties

- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heet een **stapfunctie** als $h = \sum_{i=1}^{r} a_i \phi_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\phi_i = \phi_{Q_i}$ voor $\{Q_1, \ldots Q_r\}$ n-dimentionale rechthoeken met niet overlappend inwendig
- Stapfuncties zijn integreerbaar en als $h = \sum_{i=1}^{r} a_i \phi_i$, dan is $\int h = \sum_{i=1}^{r} a_i V(Q_i)$

§IV.3 Karakterisaties van integreerbare functies

Stelling 3.3

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ begrensde functie met begrensde drager, dan is f integreerbaar dan en slechts dan als $\forall \epsilon > 0 \; \exists h, k$ stapfuncties zodanig dat $h \leq f \leq k$ en $\int (k - h) < \epsilon$
$\int (k - h)$ berekent het volume van een gebied waar graf(f) ingesloten zit.

Gebruik

Deze karakterisatie wordt gebruikt om te bewijzen dat de ruimte van integreerbare functies een vector ruimte is.
Dat wil zeggen, als f_1, f_2 integreerbaar zijn, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, dan is $a_1 f_1 + a_2 f_2$ integreerbaar en $\int (a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \int f_1 + a_2 \int f_2$

§IV.3 Karakterisaties van integreerbare functies

Riemann sommen

R een n-dimentionale rechthoek
$P = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ een partitie van R, een verzameling rechthoeken met nietoverlappende inwendig, zodat $\bigcup_{i=1}^k Q_i = R$
$S = \{x - 1, \ldots, x_n\}$ een 'selectie' punten van R met $x_i \in Q_i \forall i$
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \equiv 0$ buiten R
$R(f, P, S) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)V(Q_i) = \int \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\phi_{Q_i}$, de integraal van een stapfunctie!

Stelling 3.4

f begrensd, $f = 0$ buiten R. Dan is f integreerbaar met $\int f = I$ dan en slechts dan als $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ zodat $|I - R(f, P, S)| < \epsilon$ voor alle P partities met $\max_{1 \leq i \leq k} diam(Q_i) < \delta$ en alle S selecties voor P.

§IV.3 Karakterisaties van integreerbare functies

Vragen

Welke deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ zijn meetbaar?
Hoe is de integraal van een continue functie over een meetbare verzameling uit te rekenen?

Voorbeeld

In $\mathbb{R}^2$ alle rechthoeken, maar ook alle gebieden in de vorm:
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$ en h_1, h_2 continu.
$\int_A f \overset{def}{=} \int_a^b (\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f \; dy) dx$