Groepen theorie

Luc Veldhuis

7 Februari 2016

Herhaling

Vorige keer

$n \geq 1$, $S_n = \{\text{Permutaties van } \{1, \ldots, n\}\ \}$
$= \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ bijectief}\}$
S_n is een symmetrische groep op $1, 2, \ldots, n$ een groep onder samenstelling. Als $\sigma, \tau \in S_n$, dan is $\sigma \circ \tau$ bepaald door
$(\sigma\tau)(i) = \sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$

Speciaal geval: *m*-cykels

Als $a_1, \ldots, a_n$ verschillend in $\{1, 2, \ldots, n\}$ dan is $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$ de permutatie met $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3$, ..., $a_{m-1} \mapsto a_m$, $a_m \mapsto a_1$
$b \mapsto b$ als $b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $b \neq$ alle a_1

Cykels

Voorbeeld

(1326) in S_6 (4-cykels)
$1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 5,\ 3 \mapsto 2,\ 4 \mapsto 4,\ 5 \mapsto 1,\ 6 \mapsto 6$
$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_m) = (a_m\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{m-1}) =$
$(a_{m-1}\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{m-2}) = \cdots = (a_2\ a_3\ \ldots\ a_m\ a_1)$
m verschillende schrijfwijzen voor hetzelfde element.

Voorbeeld

$n = 1,\ S_1 = \{e\}$
$n = 2,\ S_2 = \{e, (1\ 2)\}$
$n = 2,\ S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

Cykels

Definition

Twee cykels $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_m)$ en $\tau = (b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_m)$ heten **disjunct** als $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \cap \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} = \emptyset$

Opgave

Als σ en τ disjunct zijn, dan commuteren σ en τ. Dus $\sigma\tau = \tau\sigma$

Cykels

Stelling van cykel decompisatie

- Elke σ in S_n is te schrijven als $\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_m$ met alle τ_i cykels met lengte tenminste 2, paarsgewijs disjunct. Dat wil zeggen, $t_i \neq t_j$ als $i \neq j$
- Op volgorde van de τ_i na is die schrijfwijze uniek

Voorbeeld

$(1\ 3\ 2)(2\ 5\ 3) = (1\ 3)(2\ 5)(4)(6) = (1\ 3)(2\ 5)$ in S_6 want (4) en (6) zijn e-cycles en

$1 \mapsto 1 \mapsto 3$

$2 \mapsto 5 \mapsto 5$

$3 \mapsto 2 \mapsto 1$

$4 \mapsto 4 \mapsto 4$

$5 \mapsto 3 \mapsto 2$

$6 \mapsto 6 \mapsto 6$

Cykels

Methode voor construeren cykels

- Kies een element i in $\{1, 2, \ldots, n\}$ dat nog niet gebruikt.
- Bouw hierop de cykel $(i\ \sigma(i)\ \sigma^2(i))$
- Herhaal dit todat alle $i \in \{1, \ldots n\}$ gebruikt zijn.
- Verwijder alle 1-cykels

Voorbeeld

$(2\ 1\ 4)(1\ 3)(2\ 3) = (1\ 3)(2\ 4)$ in S_n, $n \geq 4$

$1 \mapsto 1 \mapsto 3 \mapsto 3$

$3 \mapsto 2 \mapsto 2 \mapsto 1$

$2 \mapsto 3 \mapsto 1 \mapsto 4$

$4 \mapsto 4 \mapsto 4 \mapsto 2$

Cykels

Voorbeeld

$(1\ 2\ 3)(4\ 2)(3\ 1) = (1)(2\ 4\ 3) = (2\ 4\ 3)$ in S_n, $n \geq 4$

Opgaven

S_4 heef $4! = 24$ elementen

Bestaat uit: e, 6 2-cykels, 8 3-cycles, 6 4-cykels

$(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 3)(2\ 4) = (1\ 4)(2\ 3)$

Opgave

S_n is commutatief $\Leftrightarrow$ $n = 1$ of $n = 2$

Matrix groepen

Definitie

Een **lichaam** (Engels: field, Duits: Körper, Frans: corps) is een verzameling F met optelling en vermenigvuldiging.
$F \times F \to F$ met $(a, b) \to a + b$ en
$F \times F \to F$ met $(a, b) \to a \cdot b$

- Voor $+$ is F een Abelse groep met neutraal element 0.
- Voor de vermenigvuldiging is $F \setminus \{0\}$ een abelse groep.
- $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ voor alle $a, b, c \in F$

Voorbeeld

$F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Als p een priemgetal is, dan is $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ een lichaam. Daarom schrijven we vaak F_p voor $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als p een priemgetal is

Matrix groepen

Voorbeeld

$F_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ een optelgroep.
$F_5 \setminus \{\overline{0}\} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ is een abelse groep onder vermenigvuldiging.

Opmerking

Lineaire algebra werkt grotendeels over een lichaam F, bijvoorbeeld basis, dimensie, matrices, determinant enz.'

Voorbeeld

F^n is een F-vectorruimte van dimensie n

Definitie

F een lichaam $n \geq 1$

$GL_n(F) = \{$alle $n \times n$ matrices met coefficient in F met determinant $\neq 0\}$

(GL = Generaal Lineair $\supset$ SL = Speciaal Lineair $\Rightarrow$ determinant = 1)

$GL_n(F)$ is een groep onder de normale matrixvermenigvuldiging.

(a_{ij}) staat voor $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

$(a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (c_{ij})$ met $c_i j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

(Som van de rij van eerste matrix keer kolom van 2e matrix)

Matrix groepen

Voorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*1+2*2+3*1 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Bewering: $GL_n(F)$ is een groep.

- $A,B \in GL_n(F)$ dan is $AB \in GL_n(F)$ want det A * det $B =$ det $AB \neq 0$
- Neutrale element is $n \times n$ identiteits matrix
- De inverse is de inverse matrix
- Matrix vermenigvuldiging is alijd associatief

Matrix groepen

Matrices

Wij kijken vooral naar 2×2 matrices

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ heeft determinant $t = ad - bc$ en inverse $e^{-1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Met t^{-1} het element in $F \setminus \{0\}$ met $tt^{-1} = 1$

Voorbeeld

$F = \mathbb{F}_7$

$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{2} \end{pmatrix}$ is in $GL_2(\mathbb{F}_7)$ want de determinant is $\overline{1} \cdot \overline{2} - \overline{0} \cdot \overline{3} = \overline{2} \neq \overline{0}$

met inverse:

$\overline{2}^{-1}\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ -\overline{3} & \overline{1} \end{pmatrix} = \overline{4}\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{8} & \overline{0} \\ \overline{16} & \overline{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{4} \end{pmatrix}$

Matrix groepen

Voorbeeld

$GL_2(\mathbb{F}_2) = \{\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}\}$ is een groep met 6 elementen.
De elementen met determinant $= 0$ zitten niet in deze groep.

Quaternionengroepen

Quaternionen groep

$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ is een groep met rekenregels. Het neurtrale element is 1

$(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1)$ met $-(-b) = b$

$i^2 = j^2 = k^2 = 1$

$ij = k \ jk = i \ hi = j$

$ji = -k \ kj = -i \ ih = -j$

Voorbeeld

$i^{-1} = -i$ want $i \cdot (-i) = i \cdot i \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) = 1$

$(-i) \cdot i = \cdots = 1$

Ordes zijn:

1 heeft order 1

-1 heeft orde 2

$\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ hebben order 4

Quaternionengroepen

Is het een groep?

Q_8 kun je in $GL_2(\mathbb{C})$ realiseren. (Dat wil zeggen, je schrijft 8 elementen op in $GL_2(\mathbb{C})$ die aan precies dezelfde rekenregels voldoen.)

$$Q_8 = \{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\}$$