Analysis 1B

Luc Veldhuis

6 December 2016

§1.3 Lineare differentiaal vergelijkingen

Lineare differentiaal vergelijking

$y(x)$, $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$ (*)

- Linear in $y, \ldots, y^{(n)}$
- Niet noodzakelijk linear in x
- Inhomogeen namelijk $f(x) \not\equiv 0$ maakt de vergelijking niet homogeen
  Homogeen als $f(x) \equiv 0$ (**)
- Lineare algebra: $A\overline{y} = \overline{f}$, $A\overline{y} = 0$
- Orde van de volgorde is n

Voorbeeld: $2y'' - 2y' + y = 3$

Link met lineare algebra

Stel ϕ_1, ϕ_2 oplossingen van de vergelijking (**) $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = \phi_3$ is weer een oplossing

$A(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1 A(y_1) + \lambda_2 A(y_2)$

$a_n\lambda_1\phi_1^{(n)} + \cdots + a_0\lambda_1\phi_1 = 0$

$a_n\lambda_2\phi_2^{(n)} + \cdots + a_0\lambda_2\phi_2 = 0$

$a_n\lambda_1\phi_1^{(n)} + a_n\lambda_2\phi_2^{(n)} + \cdots + a_0\lambda_1\phi_1 + a_0\lambda_2\phi_2 = 0$

$a_n\phi_3 + \cdots + a_0\phi_3 = 0$

Stelling

Als geldt $a_n(x) \neq 0$ op $\mathbb{R}$ dan zijn er n linear onafhankelijke oplossingen voor (**)

$\phi_1, \ldots, \phi_n$

$\phi_i \neq \sum_{k \neq i}^{n} \lambda_k \phi_k \forall x$ (Linear onafhankelijk)

Iedere oplossing kan geschreven worden als $\phi = \lambda_1 \phi_1 + \cdots + \lambda_n \phi_n$

Dimentie van de kern is de hoogste afgeleide in de vergelijking.

Vragen

- Hoe vind je $\phi_1, \ldots, \phi_n$?
- Hoe gebruik ik $\phi_1, \ldots, \phi_n$ om (*) op te lossen?
- Hoe vind ik de y_p (particuliere oplossing)?

ψ_1, ψ_2 van (*)

$Ly = f$
$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_0$
$L\psi_1 = f$, $L\psi_2 = f$
$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L y_1 + \lambda_2 L y_2$
$L\psi_1 - L\psi_2 = L(\psi_1 - \psi_2) = f - f = 0$
$\psi_1 - \psi_2 = \lambda_1 \phi_1 + \cdots + \lambda_n \phi_n$
$\psi_1 = \psi_2 + \lambda_1 \phi_1 + \cdots + \lambda_n \phi_n = y_p + y_h$
Particuliere oplossing + homogene oplossing. Net als bij lineare algebrae met een nulruimte + offset vanaf de oorsprong.

§1.3 Lineare differentiaal vergelijkingen

Vinden van $\phi_1, \dots, \phi_n$

Neem de vergelijking $a_n y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$
Als $\forall k, a_k$ constant is kun je de volgende manier gebruiken:
Los eerst homogene vergelijking op: $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = 0$
Substitueer $y = e^{\lambda x}$, $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$
$a_n(x)\lambda^n e^{\lambda x} + \cdots + a_0(x)e^{\lambda x} = 0$
$e^{\lambda x}(a_n\lambda^n + \cdots + a_0) = 0$, $e^{\lambda x} \neq 0$
$a_n\lambda^n + \cdots + a_0 = 0$ (Characteristic equation/Karakterestieke vergelijking)
Als $\lambda \in \mathbb{C}$ dan zijn er n oplossingen (eigenwaarden) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$
$e^{\lambda_1 x} = \phi_1, \dots, e^{\lambda_n x} = \phi_n$ oplossingen van de vergelijking.

- In het algemeen geldt, λ_1 tot en met λ_n allemaal verschillend zijn en dus $\phi_1, \dots, \phi_n$ linear onafhankelijk
- Het kan geburen dat $\lambda_i = \lambda_j$ etc. Wat moet je dan doen?

§1.3 Lineare differentiaal vergelijkingen

Wat te doen als $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$?

Gebruik de oplossingen: $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_2 x}, x^2 e^{\lambda_3 x}, e^{\lambda_4 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$

Wat te doen met complexe oplossingen van λ?

$\lambda = a + bi$, $e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{bix} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$

$\lambda = a + bi$

We vinden ook: $\lambda = a - bi = \overline{a + bi}$

$\overline{a_n\lambda^n + \cdots + a_0} = 0$

$a_n\overline{\lambda}^n + \cdots + a_0 = 0$

Geeft $e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx))$ als oplossingen.

Dan vallen de sin tegen elkaar weg.

Voorbeeld verschillende eigenwaarden

$y'' + 6y' + 5y = 0$
Karakterestieke vergelijking:
$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ Oplossen:
$(\lambda + 5)(\lambda + 1) = 0$
$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = -1$
$\phi_1 = e^{-5x},\ \phi_2 = e^{-x}$
$y_h = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-x}$

Voorbeeld zelfde eigenwaarden

$y'' + 2y'' + y = 0$
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda + 1)^2 = 0$
$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1$
Let op! Twee keer dezelfde waarde!
$\phi_1 = e^{-x},\ \phi_2 = xe^{-x}$
$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}$

§1.3 Lineaire differentiaal vergelijkingen

Voorbeeld complexe eigenwaarden

$y'' + 2y' + 10y$
$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$
$\lambda_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2} = \frac{-2\pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$
$\lambda_1 = -1 + 3i,\ \lambda_2 = -1 - 3i$
$\phi_1 = e^{-x}\cos(3x),\ \phi_2 = e^{-x}\sin(3x)$
$y_h = c_1 e^{-x}\cos(3x) + c_2 e^{-x}\sin(3x)$

Uitwerken van complexe oplossingen

$(a+bi)e^{-x+3i} + (p-iq)e^{-x-3i} = (a-bi)e^{-x-3i} + (p+iq)e^{-x+3i}$
Dus $p = a$ en $q = b$
$(a+bi)e^{-x+3i} + (a-ib)e^{-x-3i} =$
$(a+bi)(\cos(3x) + i\sin(3x)) + (a-ib)(cos(3x) - i\sin(3x))$
$= e^{-x}(2a\cos(3x) - 2b\sin(3x)) = c_1 e^{-x}\cos(3x) + c_2 e^{-x}\sin(3x)$

Voorbeeld

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$
$\lambda_1 = 1$ (Moet je zien)
Staart delen geeft: $\lambda - 1/\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 \backslash lambda^2 - 2\lambda + 1$
$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
$\phi_1 = e^x, \phi_2 = xe^x, \phi_3 = x^2 e^x$
Controle:
$\phi_2' = e^x + xe^x$
$\phi_2'' = 2e^x + xe^x$
$\phi_3''' = 3e^x + xe^x$
$3e^x + xe^x - 6e^x - 3xe^x + 3e^x + 3xe^x - xe^x = 0$ Klopt!