Groepen theorie

Luc Veldhuis

21 Maart 2016

Ondergroepen

Herhaling

G een groep, $H \subseteq G$ is een ondergroep, notatie $H \leqslant G \Leftrightarrow$

- $H \neq \emptyset$
- H is gesloten onder producten en het nemen van inverses: $x, y \in H$ dan $xy \in H$ en $x^{-1} \in H$

$\Leftrightarrow$

- $H \neq \emptyset$
- als $x, y \in H$, dan $xy^{-1} \in H$

Ondergroepen

Voorbeeld

- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ondergroep want $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ en $0 \in \mathbb{Z}$. En ook $x, y \in \mathbb{Z}$ dan ook $x - y \in \mathbb{Z}$
- $G = GL_2(\mathbb{F}_3)$
  $H = \{\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$ met $\overline{a} \in \mathbb{F}_3\} \subseteq G$ is een ondergroep. $H \neq \emptyset$ want $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in H$. Ook geldt als $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{b} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in H$ met $\overline{a}$ en $\overline{b} \in \mathbb{F}_3$ dan is
  $$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{b} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{-b} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{a} - \overline{b} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in F_3$$
  want $\mathbb{Z}$ en $x, y \in \mathbb{Z}$ dan $x - y \in \mathbb{Z}$ $\overline{a - b} \in \mathbb{F}_3$

Centralisator

Definitie

G een groep, $\emptyset \neq A \subseteq G$
$C_G(A) = \{g \in G | gag^{-1} = a \text{ voor alle } a \in A\}$ is de centralisator van A in G

Merk op

$gag^{-1} = a \Leftrightarrow ga = ag$
Dus $g \in C_G(A) \Leftrightarrow g$ commuteert met alle $a \in A$.

Centralisator

Gevolg

- Als $A = \{a\}$ dan schrijf je $C_G(a)$ in plaats van $C_G(\{a\})$
- Dus is $C_G(A) = \bigcap_{a \in A} C_G(A) = \{g \in G \text{ met } gag^{-1} = a\}$
- $C_G(A) \leqslant G$ want $eae^{-1} = eae = a$ voor alle $a \in A$. Dus $e \in C_G(A)$
  Als $x, y \in C_G(A)$ dan is $xy \in C_G(A)$ want $xya(xy)^{-1} = xyay^{-1}x^{-1} = xax^{-1} = a$ voor alle $a \in A$.
  Als $x \in C_G(A)$ dan $x^{-1} \in C_G(A)$ want we weten dat $xax^{-1} = a$ voor alle $a \in A$. Dus is $x^{-1}ax = x^{-1}xax^{-1}x$ $= eae = a$ voor alle $a \in A$

Centralisator

Definitie

G een groep.

$Z(G) = \{g \in G$ met $gx = xg$ voor alle $x \in G\}$

$=$ het **centrum** van G

$=$ { alle $g \in G$ die met elk element van G commuteert }

$= C_G(G)$ een ondergroep van G

Normalizator

Definitie

G een groep, $\emptyset \neq A \subseteq G$
$N_G(A) = \{g \in G \text{ met } gAg^{-1} = A\}$ = de **normalizator** van A in G.
$gAg^{-1} = \{gag^{-1} \text{ met } a \in A\}$

Gevolg

- $N_g(A) \leqslant G$
- $C_G(A) \subseteq N_G(A)$ maar ongelijkheid kan gelden
- $\{g \in G | gAg^{-1} \subseteq A\}$ is in het algemeen géén ondergroep van G

Normalizator

Voorbeeld

$G = D_{24} = \{e, r, r^2, \ldots, r^11, s, sr, sr^2, \ldots, sr^11\}$ met $r^12 = e = s^2$
en $r^i s = sr^{-i}$ met $i \in \mathbb{Z}$
$A = \{r, r^{-1}, s\}$

- Bepaal $C_G(A)$: Neem $x = r^i$ of sr^i in G en bepaal of $xrx^{-1} = r$, $xr^{-1}x^{-1} = r^{-1}$ en $xsx^{-1} = s$
  Maar voor $x = r^i$ geeft dit $xsx^{-1} = sr^{-2i} = s$, alleen als $i = 0$ of $i = 6$. En als $x = sr^i$ geldt dat $sr^i rsr^i = r^{-1} \neq r$
  Dus $C_G(A) = \{e, r^6\}$
- Bepaal $N_G(A)$: $xAx = A$ voor $x = r^i$ of $x = sr^i$.
  Geval als $x = r^i$ dan $xAx^{-1} = A \Leftrightarrow (xsx^{-1} = s) \wedge (xrx^{-1} = r) \wedge (xr^{-1}x^{-1} = r^{-1}) \Leftrightarrow x \in C_G(A)$
  Geval als $x = sr^i$ dan $xrx^{-1} = r^{-1}$, $xr^{-1}x^{-1} = r$ en $xsx^{-1} = sr^{2i}$ dus alleen voor $i = 0$ of $i = 6$. Dus $N_G(A) = \{e, s, r^6, sr^6\}$

Normalizator

Voorbeeld

$G = S_3,\ A = \{(1\ 2)\}$
$B = \{(1\ 2)(1\ 3)\}$
$C_G(A) = \{e, (1\ 2)\}$
$N_G(A) = \{e, (1\ 2)\}$
$C_G(B) = \{e\}$
$N_G(B) = \{e, (2\ 3)\}$

Normalizator

Voorbeeld

$$Z(S_n) = \begin{cases} \{e\} & \text{als } n \neq 2 \\ S_2 & \text{als } n = 2 \end{cases}$$

Als $n = 1$ of $n = 2$ dan is $S_n = \{e\}$ of $\{e, (1\ 2)\}$, abels dus
$Z(S_n) = S_n$
Neem $n \geq 3$ en stel $\sigma \in Z(S_n)$. Dan is
$\sigma(1\ 2) = (1\ 2)\sigma \Leftrightarrow \sigma(1\ 2)\sigma^{-1} = \sigma(1)\sigma(2)$
Dus $\{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{1, 2\}$
Net zo: $\sigma(1\ 3)\sigma^{-1} = \{1, 3\}$
Dus $\{\sigma(1), \sigma(2)\} \cap \{\sigma(1), \sigma(3)\} = \{\sigma(1)\} = \{1\}$. Dus $\sigma(1) = 1$
en net zo krijg je $\sigma(2) = 2$ en $\sigma(3) = 3$
Zo krijg je ook dat $\sigma(1 i)\sigma^{-1} = (1\ i)$ met $i \geq 4$ geeft $\sigma(1\ i) = i$
Conclusie: $\sigma = e$ en $Z(S_n) \subseteq \{e\}$. Duidelijk: $\{e\} \in Z(S_n)$ dus
$Z(S_n) = \{e\}$

Stabilisator en kern van groepswerkingen

Groepswerking

Een groep G werkt op een verzameling $S \neq \emptyset$: $G \times S \to S$ met $(g, s) \mapsto g \cdot s$ met eigenschappen:

- $g_1(g_2 s) = (g_1 g_2)s$ voor alle $g_1, g_2 \in G$, $s \in S$
- $es = s$ voor elke $s \in S$

Definitie

Voor $s \in S$ is $G_s = \{g \text{ in } G \text{ met } gs = s\}$ de **stabilisator** van $s \in G$

Opgave

$G_s \leqslant G$

Definitie

$\{g \in G \text{ met } gs = s \text{ voor alle } s \in S\}$ heet de **kern** van de werking $= \bigcap_{s \in S} G_s$

Stabilisator en kern van groepswerkingen

Opgave

De kern is een ondergroep van G

Voorbeeld

$G = \{\pm 1\} \leqslant R^*$ (groep onder vermenigvuldiging) werkt op $\mathbb{R}$ via $G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $(g, s) \mapsto g \cdot s$

Wat is G_s?

$e_G = 1 \in G_s$ want $G_s \leqslant G$

Dus de echte vraag is, wanneer is $-1 \in G_s$?

$-1 \in G \Leftrightarrow (-1) \cdot s = s \Leftrightarrow 2 \cdot s = 0 \Leftrightarrow s = 0$

Dus $G_s = \begin{cases} \{1\} & \text{als } s \neq 0 \\ \{\pm 1\} & \text{als } s = 0 \end{cases}$

Ter compensatie

De baan $G \cdot s = \{gs \text{ met } g \in G_s\}$

Stabilisator en kern van groepswerkingen

Banen

$G \cdot 0 = \{g \cdot 0 \text{ met } g = \pm 1\} = \{0\}$
$G \cdot s = \{g \cdot s \text{ met } g = \pm 1\} = \{s, -s\}$ voor $s \neq 0$ (2 elementen)
Hier geldt altijd: $|G_s| \cdot |G \cdot s| = 2$
Een dergelijk principe geeft later telmogelijkjeden (combinatoriek)

Stabilisator en kern van groepswerkingen

Voorbeeld

$G = GL_2(\mathbb{R})$ werkt op $\mathbb{R}^2$ (kolomvectoren) via:
$G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met $(A, v) \mapsto Av$

Als $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan is $G_v = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} | b, d \in \mathbb{R}, d \neq 0\}$

Neem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $GL_2(\mathbb{R})$ dus $ad - bc \neq 0$

Dan geldt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1, c = 0$

Dus $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ het is $\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $d \neq 0$