Topologie - Opdracht 13

Luc Veldhuis - 2538227

Mei 2017

Q1) (a) Gegeven zijn continue afbeeldingen $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ en $g_0, g_1 : Y \longrightarrow Z$, zo dat $f_0 \simeq f_1$ en $g_0 \simeq g_1$. Laat zien, dat $(g_0 \circ f_0) \simeq (g_1 \circ f_1)$.
Omdat we weten dat $f_0 \simeq f_1$, bestaat er een homotopie, $F : X \times [0, 1] \to Y$ en omdat we weten $g_0 \simeq g_1$, bestaat er een homotopie, $G : Y \times [0, 1] \to Z$.
We zoeken nu een homotopie voor $g_0 \circ f_0$ naar $g_1 \circ f_1$.
Construeer nu de functie $H : X \times [0, 1] \to Z$ met $H(s, s) = G(F(s, s), s)$.
Deze functie is continu, omdat het een samenstelling is van continue functies. Ook is deze goed gedefinieerd, omdat de bereik van F hetzelfde is als het domein van G.
Nu rest te laten zien dat dit een homotopie is.
Er geldt $H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = (g_0 \circ f_0)(x)$ en $H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = (g_1 \circ f_1)(x)$
Dus H is een homotopie van $(g_0 \circ f_0)$ naar $(g_1 \circ f_1)$. Dus $(g_0 \circ f_0) \simeq (g_1 \circ f_1)$.

(b) Zij $f : X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding. Gegeven is dat er continue afbeeldingen $g, h : Y \longrightarrow X$ bestaan, zo dat $g \circ f \simeq id_X$ en $f \circ h \simeq id_Y$. Toon aan, dat $g \simeq h$ en dat f een homotopie-equivalentie is.
De functie f is een homotopie equivalentie als geldt dat er een een continue functie $k : Y \to X$ bestaat, zodat $f \circ k \simeq id_Y$ en $k \circ f \simeq id_X$.
Omdat geldt dat $g \circ f \simeq id_X$ en $f \circ h \simeq id_Y$, volgt uit deel a) dat $g \circ id_Y \simeq g \circ f \circ h$ en dat $g \circ f \circ h \simeq id_X \circ h$. Ook weten we dat $g \circ id_Y = g$ en dat $id_X \circ h = h$. Hieruit volgt dat $g = g \circ id_Y \simeq g \circ f \circ h \simeq id_X \circ h = h$.
Uit de equivalentie van '$\simeq$', volgt nu dat $g \simeq h$.
Hieruit volgt weer dat $g \circ f \simeq h \circ f \simeq id_Y$.
Omdat we nu hebben dat $h \circ f \simeq id_Y$ en $f \circ h \simeq id_X$, is aan de voorwaarde van homotopie-equivalentie voldaan voor f.
Dus f is een homotopie-equivalentie.

(c) Zij weer $f : X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding. Gegeven is nu, dat er continue afbeeldingen $g, h : Y \longrightarrow X$ bestaan, zo dat $g \circ f$ en $f \circ h$ homotopie-equivalenties zijn. Toon aan, dat f een homotopie-equivalentie is.
We weten nu dat er continue functies $k : X \to X$ en $M : Y \to Y$ bestaan, zodat:
$k \circ (g \circ f) \simeq id_X$
$(g \circ f) \circ k \simeq id_X$
$m \circ (f \circ h) \simeq id_Y$
$(f \circ h) \circ m \simeq id_Y$
Schrijf nu: $(k \circ g) \circ f \simeq id_X$ en $f \circ (h \circ m) \simeq id_Y$.
Noem nu $k \circ g = q : Y \to X$ en $h \circ m = p : X \to Y$.
Dus nu hebben we $q \circ k \simeq id_X$ en $f \circ p \simeq id_Y$. Omdat dit de exacte voorwaardes zijn van b), volgt nu dat $p \simeq q$ en dat f een homotopie-equivalentie is.

Q2) Een deelverzameling $A \subseteq X$ heet een retract als er een continue afbeelding $r : X \longrightarrow A$ bestaat, zo dat $r(x) \in A$ en $r(a) = a$ voor alle $a \in A$.

(a) Voor een deelverzameling $A \subseteq X$ laat $i : A \hookrightarrow X$ de inclusie-afbeelding zijn. Toon aan: Als $A \subseteq X$ een retract is, dan is $i_* : \pi_1(A, a_0) \longrightarrow \pi_1(X, a_0)$ injectief voor alle $a_0 \in A$.
Ook is gegeven dat voor r op het domein $A \subseteq X$ geldt dat $r(a) = a$ voor $a \in A$. In andere woorden, r beperkt op A is injectief, want voor $a, b \in A$ geldt als $r(a) = r(b)$, dan $r(a) = a = r(b) = b$, dus $a = b$.
Om aan alle elementen van X beperkt op A te komen, kunnen we de inclusie gebruiken, want deze functie beeld alle elementen van A af op hetzelfde element in X, oftewel het bereik van i is $A \subseteq X$.
Dus $\forall a \in A$ geldt nu dat $r(i(a)) = a$.
De functie g is injectief als geldt dat $\forall a, b \in Dom(g)$ als $g(a) = g(b)$ dan $a = b$.
Stel dat $r(i(a)) = r(i(b))$, dan geldt $r(i(a)) = a = r(i(b)) = b$, dus $a = b$.
Dus $r \circ i$ is injectief.
Kies een $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(A, a_0)$ willekeurig, met $\alpha, \beta : [0, 1] \to A$ paden in A.
Stel $i_*([\alpha]) = i_*([\beta])$.
Neem nu $(r_* \circ i_*)([\alpha]) = [r \circ i \circ \alpha] = [r \circ i \circ \beta] = (r_* \circ i_*)([\beta])$.
Maar we hebben net laten zien dat $r \circ i$ injectief is op A, dus als $r \circ i \circ \alpha = r \circ i \circ \beta$, dan $\alpha = \beta$. Dus nu geldt dat uit $[r \circ i \circ \alpha] = [r \circ i \circ \beta]$ volgt dat $[\alpha] = [\beta]$.
Dus als $i_*([\alpha]) = i_*([\beta])$, dan $[\alpha] = [\beta]$, dus i_* is injectief.

(b) Toon aan dat $S^1 \subset D^2$ geen retract is.
In de les hebben we gezien dat $\pi_1(S^1, 1) \equiv \mathbb{Z}$ met het bijectieve homomorfisme: $\phi : \mathbb{Z} \to S^1$ met $\phi(n) = [a_n]$ met $[a_n]$ de klasse van a_n in $\pi_1(S_1, 1)$ en met a_n een pad dat n keer tegen de klok in langs het punt $(1, 1)$ is gekomen. (Dus als n negatief is, met de klok mee. Het bewijs was behoorlijk lang, dus ik neem aan dat ik dat hier niet nog een keer op moet schrijven). Uit stelling 12.14 uit het boek halen we dat $\pi_1(S^1, 1) \simeq \pi_1(S^1, x)$ voor alle $x \in S^1$. Oftewel, voor alle $x \in S^1$ geldt dat $\pi_1(S^1, x) \equiv \mathbb{Z}$ uit de equivalentie van '$\simeq$'. Ook hebben we in les gezien dat $\pi_1(D^2, x) = 0$ voor een $x \in D^2$, omdat D^2 enkelvoudig samentrekbaar is. (Het is enkelvoudig samenhangend, omdat er een homotopie bestaat, zodat $C_{x_0} \simeq id_X$, namelijk $H(x, t) = xt + (1 - t)x_0$ en omdat D^2 padsamenhangend is). Geen enkele functie $f : \mathbb{Z} \to \{0\}$ kan injectief zijn, omdat er meer elementen in het domein zitten dan in het bereik. Dus voor $x, y \in \mathbb{Z}$ geldt er $f(x) = f(y) \nRightarrow x = y$. Omdat het domein equivalent is met $\pi_1(S^1, x)$ en het bereik met $\pi_1(D^2, x)$, bestaat er geen injectieve functie van $f : \pi_1(S^1, x) \to \pi_1(D^2, x)$. Dus uit a) volgt nu dat $S^1 \subseteq D^2$ geen retract is.

Q3) Laat $f_n : S^1 \longrightarrow S^1$ gegeven zijn door $f_n(z) = z^n$. Hier stellen we voor dat $S^1 \subseteq \mathbb{C}$. Laat $\alpha : [0, 1] \longrightarrow S^1$ een pad zijn met $\alpha(0) = 1$. Toon aan dat er een pad $\beta : [0, 1] \to S^1$ bestaat, zo dat $f_n \circ \beta = \alpha$ en dat $\beta(0) = 1$. Neem $\beta : [0, 1] \to S^1$ met $\beta(t) = \sqrt[n]{\alpha(t)}$.
Dan geeft dit $(f_n \circ \beta)(t) = f_n(\beta(t)) = f_n(\sqrt[n]{\alpha(t)}) = \sqrt[n]{\alpha(t)}^n = \alpha(t)$
Ook geldt $\beta(0) = \sqrt[n]{\alpha(0)} = \sqrt[n]{1} = 1$.
We weten ook dat we alle coordinaten van S^1 kunnen uitdrukken in de vorm e^{ix} met $x \in \mathbb{R}$.
Het pad β bestaat, omdat $\forall t \in [0, 1]$ geldt $\alpha(t) \in S^1$, en dat $\alpha(t) = e^{i\hat{\alpha}(t)}$ met $\hat{\alpha} : [0, 1] \to \mathbb{R}$.
Dit pad is goed gedefinieerd voor alle $n \neq 0$, en continu, omdat het een samenstelling is van continue functies.
Dus $\beta = \sqrt[n]{\alpha(t)} = \sqrt[n]{e^{i\hat{\alpha}(t)}} = e^{i\frac{1}{n}\hat{\alpha}(t)}$.
Dus $e^{i\frac{1}{n}\hat{\alpha}(t)} \subseteq S^1$.
Dus β is een pad wat bestaat, zo dat $f_n \circ \beta = \alpha$.