Analysis 1B

Luc Veldhuis

25 November 2016

Recap

(a_n) rij, eigenlijke notatie: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$, $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Reeks

Rij van partiele sommen (S_n)

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ divergeert of convergeert.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ betekend controleren of de reeks convergeert.

Stelling

Als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert dan geldt: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Waarschuwing

Let op! Geldt niet omgekeerd!

Voorbeeld criteria voor convergentie en divergentie

Neem $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f \geq 0$, dalend

$a_k = f(k)$ bijvoorbeeld $a_k = \frac{1}{k}, f(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Stel $0 \leq \int_1^{\infty} f(x) < \infty \Leftrightarrow$ reeks convergeert.
Kan alleen divergeren als $\int_1^{\infty} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ reeks divergeert.
$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x} = \lim_{r\to\infty} ln(x)|_1^r = \infty$ dus divergeert.

Voorbeeld

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^r = \lim_{r\to\infty}(1 - \frac{1}{r}) = 1$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$

Want $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1$ dus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{1^2} = 2$

Voorbeeld

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ geeft

$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x^p} = \lim_{r\to\infty} \int_1^r x^{-p} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{1-p} x^{-p+1}|_1^r =$
$\lim_{r\to\infty} (\frac{1}{1-p} r^{1-p} - \frac{1}{1-p})$

Voor $p \in (0,1)$ geeft $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = +\infty$

Voor $p > 1$ geeft $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} < \infty$

Stelling

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k,\ a_k \geq 0,\ b_k \geq 0$$

- Als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L < \infty$ dan convergeren beide of divergeren beide.
- Als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L = 0$ en als $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$

Voorbeeld

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k^2-4k+5} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \ b_k = \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{\frac{2n}{3n^2-4n+5}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3-4n^{-2}+5n^{-3}} \to_{n\to\infty} \frac{2}{3}$$

Dus criterium 1, dus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert.

Voorbeeld

Convergeert $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{k+47}{3k})^k$?

$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^k < \infty$ (zie vorige slides)

$$\frac{(\frac{n+47}{3n})^n}{(\frac{2}{3})^n} = (\frac{\frac{n+47}{3n}}{\frac{2}{3}})^n = (\frac{n+47}{2n})^n = (\frac{1+\frac{47}{n}}{2})^n$$

$$\frac{1+\frac{47}{n}}{2} \leq \frac{2}{3} \text{voor } n >> 1$$

$$(\frac{1+\frac{47}{n}}{2})^n \leq (\frac{2}{3})^n \to 0$$

Criterium 2 We hebben ook $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ dus geldt $a_n < \infty$

($n >> 1$ betekend voor n voldoende groot)

Voorbeeld (vervolg)

Werkt het met $b_n = \frac{1}{3}$?

$$\frac{(\frac{n+47}{3n})^n}{(\frac{2}{3})^n} = (\frac{\frac{n+47}{3n}}{\frac{1}{3}})^n = (\frac{n+47}{2n})^n = (1 + \frac{47}{n})^n$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+47}{n})^n = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{47})^{\frac{n}{47}})^{47} = e^{47} < \infty$$

Werkt ook!

Ratio test

$a_k > 0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \alpha < 1,\ k \geq k_* \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1,\ k \geq k_* \qquad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$$

Opmerking

Dit werkt ook voor $a_k \neq 0$. Dus ook negatieve getallen.

Corollaray

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ convergentie (zwakker)
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ divergentie (zwakker)

Voorbeeld

Convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$?

$a_k = \frac{k^k}{k!}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)^{(k+1)}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}} = \frac{(k+1)^{(k+1)}}{k^k} =$$

$$(\frac{k+1}{k})^k \frac{1}{k+1}(k+1) = (1+\frac{1}{k})^k \to e > 1$$

Nee divergeert!

Voorbeeld

Convergeert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$?

$a_k = \frac{k!}{k^k}$
Gebruik vorige resultaat: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \to e < 1$

Convergeert!

Als je een criterium opschrijft, hoef je alleen te stellen dat het geldt vanaf een bepaalde k.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \neq 0$, $k >> 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $|a_k| > 0$, $k >> 1$

Dan krijg je:

Als $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq \alpha < 1$ convergent.

Als $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ divergent.