Inlever opdracht 2

Luc Veldhuis

6 maart 2017

1. In een groep G zijn gegeven elementen x en y met $xy = y^{-1}x$
   (a) Laat met inductie naar n zien dat $xy^n = y^{-n}x$ voor alle $n \geq 0$.
   We doen eerst de basis stap:
   $$xy^0 = xe = x = ex = y^{-0}x$$
   Als inductie hypothese nemen we aan dat voor alle $n \geq 1$ geldt $xy^{n-1} = y^{-(n-1)}x$
   Bewijs nu dat $xy^n = y^{-n}x$
   Vermenigvuldig beide kanten van de inductie hypothese met y^{-1}:
   $$\begin{aligned} xy^n &= y^{-n}x && \text{(IH)} \\ y^{-1}xy^{n-1} &= y^{-1}y^{-(n-1)}x \\ xyy^{n-1} &= y^{-1}y^{-n+1)}x && \text{(Gegeven } y^{-1}x = xy\text{)} \\ xy^n &= y^{-1-n+1}x \\ xy^n &= y^{-n}x \end{aligned}$$
   (b) Leid nu af dat $xy^n = y^{-n}x$ voor alle n in $\mathbb{Z}$. (Aanwijzing: als $n < 0$ neem $m = -n$ zodat $xy^m = y^{-m}x$ volgens (a). Vermenigvuldig met machten van y om hieruit $y^{-n}x = xy^n$ te krijgen.)
   We hebben net bewezen dat $xy^n = y^{-n}x$ voor alle $n \geq 0$. We willen dit nu bewijzen voor alle $n < 0$. We nemen hiervoor $m = -n$ als $n < 0$, zodat $m \geq 0$. Omdat $m \geq 0$ weten we nu dat geldt $xy^m = y^{-m}x$. We weten ook dat we het resultaat van (a) kunnen omschrijven:
   $$\begin{aligned} xy^n &= y^{-n}x \\ y^nxy^n &= y^ny^{-n}x \\ y^nxy^n &= x \\ y^nxy^ny^{-n} &= xy^{-n} \\ y^nx &= xy^{-n} \end{aligned}$$
   Nu vermenigvuldigen we beide kanten met y^{2m}. Dit geeft:
   $$\begin{aligned} xy^m &= y^{-m}x \\ y^{2m}xy^m &= y^{2m}y^{-m}x \\ xy^{-2m}y^m &= y^{2m}y^{-m}x && \text{(uit (a))} \\ xy^{-2m+m} &= y^{2m-m}x \\ xy^{2n-n} &= y^{-n}x \\ xy^n &= y^{-n}x \end{aligned}$$
   Hier zien we dat dit ook geldt voor $n < 0$, dus geldt dit voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

2. Gegeven is dat

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } a, b \in \mathbb{R} \text{ en } a \neq 0 \right\}$$

een groep is onder matrix vermenigvuldiging.

(a) Vind een uitdrukking voor $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ als $n \geq 1$ en bewijs dat die klopt met inductie naar n.

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bewijs met inductie:

Basisstap:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & b(\sum\limits_{i=0}^{1-1} a^i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & b1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inductie hypothese: Neem aan dat $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bewijs nu dat $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a^{(n+1)} & b(\sum\limits_{i=0}^{n} a^i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =_{(\text{IH})} \begin{pmatrix} a^n & b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a^n * a + b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) * 0 & a^n * b + b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) * 1 \\ 0 * a + 0 * b + 1 * 0 & 0 * b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) + 1 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n+1)} & b(\sum\limits_{i=0}^{n} a^i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Bepaal alle elementen van eindige orde in G met hun orde. We weten dat voor een matrix het neutrale element $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is. Dus we moeten onderzoeken welke elementen uit G bestaan zodat $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

We zien direct dat $a^n = 1$, omdat we in een groep werken met matrix multiplicatie in $\mathbb{R}$ en geen rest klassen, kan deze vergelijking alleen kloppen als $a = 1$ en $b(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) = 0$. Omdat als $a = 1$ we altijd hebben dat $(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i) \neq 0$, moet wel gelden dat $b = 0$. Dus het enige element met eindige orde in G is het neutrale element $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ met orde 1. Alle andere elementen hebben een oneindige orde.