

Analysis 1B

Luc Veldhuis

1 November 2016

What will be treated

- Chapter 6 and 7
- Dictate differential equations
- Dictate 'course doc' (handy summary of the book)

Rieman integraal

P partitie van $[a, b]$ met $a_0 = x_0 < \cdots < x_n = b$

$$P = \{x_k\}_{k=0}$$

$$|P| = \max(\Delta x_k) \text{ where } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Tussen een P en P' is P' fijner als $|P'| < |P|$. Q is een verfijning van P als geldt $P \not\subseteq Q$.

We hebben ook $P \not\subseteq P \cup P'$

$$P' \not\subseteq P \cup P'$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, begrensd.

$$\sup_{[a,b]} f(x) = M, \inf_{[a,b]} f(x) = m.$$

$$m_k = \inf_{[k-1,k]} f(x) \text{ en } M_k = \sup_{[k-1,k]} f(x).$$

Dus geldt $m \leq m_k \leq M_k \leq M$.

Als je m_k neemt, krijg je de ondersom:

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

Als je M_k neemt krijg je de bovensom:

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k$$

Riemansom:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

$m \Delta x_k \leq m_k \Delta x \leq f(c_k) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \leq M \Delta x_k$ want delta is altijd positief en we hebben $m_k \leq f(c_k) \leq M_k$.

Sommeer:

$$\begin{aligned}\sum m \Delta x_k &\leq \sum m_k \Delta x_k \leq \sum f(c_k) \Delta x_k \leq \sum M_k \Delta x_k \leq \sum M \Delta x_k \\ m \sum \Delta x_k &\leq \sum m_k \Delta x_k \leq \sum f(c_k) \Delta x_k \leq \sum M_k \Delta x_k \leq M \sum \Delta x_k\end{aligned}$$

En we weten $\sum \Delta x_k = b - a$ dus hieruit volgt:

$$m(b - a) \leq L(f, P) \leq S(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b - a)$$

We weten ook dat $P \not\subseteq Q \Rightarrow L(P, f) \leq L(Q, f)$ en ook $U(Q, f) \leq U(P, f)$ en $L(P, f) \leq U(Q, f)$ met P, Q willekeurig.

Bewijs $L(P, f) \leq U(Q, f)$

Kies een c in (x_{k-1}, x_k) , en definieer:

$$\inf_{[x_{k-1}, c]} f(x) = r_1$$

$$\inf_{[c, x_k]} f(x) = r_2$$

$$\sup_{[x_{k-1}, c]} f(x) = R_1$$

$$\sup_{[c, x_k]} f(x) = R_2$$

$$m_k = \min(r_1, r_2)$$

$$M_k = \max(R_1, R_2)$$

En we hebben voor $P \subseteq P \cup Q$ en $Q \subseteq P \cup Q$:

$$\begin{aligned} L(P, f) &= \dots m_k \Delta x_k \dots = \\ &= \dots + m_k(x_k - c) + m_k(c - x_{k-1}) + \dots \\ &\leq \dots + r_1(x_k - c) + r_2(c - x_{k-1}) + \dots = L(Q, f) \end{aligned}$$

Definieer inductief voor alle punten.

Bewijs $L(P, f) \leq U(Q, f)$

We kunnen nu ook laten zien dat:

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq L(P, f) \leq L(P \cup Q, f) \\ &\leq U(P \cup Q, f) \leq U(Q, f) \leq M(b-a) \end{aligned}$$

We kunnen nu definiëren:

$$\begin{aligned} \int_b^a f &= \sup L(P, f) \\ \int_b^{\bar{a}} f &= \inf U(P, f) \end{aligned}$$

Dus geldt:

$$L(P, f) \leq \int_b^a f \leq \int_b^{\bar{a}} f \leq U(P, f)$$

Definitie

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd is Rieman integreerbaar als geldt:

$$\underline{\int_b^a} f = \int_b^{\bar{a}} f = \int_b^a f$$

Voorbeeld

$$f(x) = x^2 \text{ op } [0, 2]$$

$$P = \{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, 2\}, \Delta x_k = \frac{2}{n}$$

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 * \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2(k-1)}{n}\right)^2 * \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 =$$

$$\frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} =$$

$$\frac{4}{3} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} &= \\ L(P, f) &\leq \int_0^2 f \leq \int_0^{\sqrt{2}} f \leq U(P, f) \\ &= \frac{4}{3} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\end{aligned}$$

For $n \rightarrow \infty$ we get:

$$\frac{8}{3} \leq \int_0^2 f \leq \int_0^{\sqrt{2}} f \leq \frac{8}{3}$$

Door de insluit stelling volgt dat $\int_0^2 x^2 = \frac{8}{3}$.

Voorbeeld x^2

$$f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0 \text{ for } x \in \mathbb{Q} \cap [-2, 3]$$

$$f(x) = 4 \text{ for } x \notin \mathbb{Q} \cap [-2, 3]$$

$$m = 0$$

$$M = 4$$

$$U(P, f) = \sum 4\Delta x_k = 4 * 5 = 20$$

$$L(P, f) = \sum 0\Delta x_k = 0 * 5 = 0$$

$$\int_3^{-2} f = 20 \neq \underline{\int_3^{-2}} = 0$$

Dus niet Rieman integreerbaar.

Integreerbare functies §6.2

Stelling

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd. Dan geldt: f is integreerbaar
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists P_\epsilon$ zodanig dat $U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon$.

Stelling

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotoon.
Dan geldt: $f \in \mathbb{R}[a, b]$.

Bewijs

f is monotoon dus stijgend.

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \rightarrow \text{begrensd}$$

$$P = \{x_0, \dots, x_n\}$$

$$|P| = \frac{b-a}{n} = \Delta x_k$$

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \\ &= \frac{C}{n} < \epsilon \end{aligned}$$

Voor $C = (b-a)(f(b) - f(a))$.