Complexe Analyse

Luc Veldhuis

3 April 2018

Analytische functies

Corollary (Stelling van Morera)

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ continu. Als $\int_C f(z)dz = 0$ voor elke gesloten contour C in D, dan is f analytisch op D.

Bewijs

$\int_C f(z)dz = 0$ voor elke gesloten $C \Leftrightarrow f$ heeft een primitieve $F : D \to \mathbb{C}$.
Omdat f analytisch is, is ook $F' = f$ analytisch (vanwege veralgemeniseerde Cauchy integraal functie)

Analytische functies

Corollary (Ongelijkheid van Cauchy)

Stel dat f analytisch is op een cirkel C_R met middelpunt z_0 en straal R en alle inwendig gelegen punten. Dan geldt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}$$

waarbij $M_R = \max\{|f(z)| \mid |z - z_0| < R\} < \infty$

Corollary (Stelling van Liouville)

Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geheel. Als er $M > 0$ bestaat met $|f(z)| < M$, $\forall z \in \mathbb{C}$, dan is f constant. Dus een niet constante gehele functie heeft geen maximum.

Analytische functies

Bewijs (Ongelijkheid van Cauchy)

$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} dz \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! M_R}{R^n}$. Want $L = 2\pi R$.

Bewijs (Stelling van Lioville)

Kies $z_0 \in \mathbb{C}$. De ongelijkheid van Cauchy voor $n = 1$ geeft $|f'(z_0)| \leq \frac{M_R}{R}$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$. Omdat $R > 0$ willekeurig groot gekozen kan worden en $M_R \leq M$, geldt $f'(z_0) = 0$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, dus f' is constant.

Corollary (Fundamentaal stelling van algebra)

Voor elke polynoom $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ $(n \geq 1)$ bestaat $z_0 \in \mathbb{C}$ met $P(z_0) = 0$.

Analytische functies

Bewijs

Bij tegenspraak, stel dat $P(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$. Dan is maar $\frac{1}{P(z)}$ geheel. We moeten slechts nog laten zien dat er wel een $M > 0$ bestaat met $|\frac{1}{P(z)}| < M$. Ten eerste bestaat een $R > 0$ met $|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n|R^n$ als $|z| > R$. Dus $|\frac{1}{P(z)}| \leq \frac{2}{|a_n|R^n} = M^{uit}$ als $|z| > R$.

Anderzijds $M^{in} = \max\{|\frac{1}{P(z)}| \mid |z| \leq R\} < \infty$ bestaat, dus $M = \max\{M^{in}, M^{uit}\}$. Vanwege Lioville moet $\frac{1}{P(z)}$ en dus ook P constant zijn.

Taylorontwikkeling

Herhaling reële analyse

Elke gladde functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heeft een taylorreeks $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Opmerking

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ moet niet convergeren in elke $x \in \mathbb{R}$.
- Zelfs als de taylorreeks convergeert moet zij niet gelijk zijn aan f. $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Stelling van Taylor

Stel dat f analytisch is op een schijf $\{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_0| \leq R\}$. Dan is f gelijk aan zijn taylorreeks $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ in elk punt in de schijf.

Taylorontwikkeling

Opmerking

- De machtreeks convergeert in elke z in de schijf.
- Als $z_0 = 0$ wordt het ook Maclaurin reeks genoemd.
- Als f geheel is, dan is f gelijk aan zijn taylor reeks in elke $z \in \mathbb{C}$.

Taylorontwikkeling

Voorbeeld

1. $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$.
   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.
2. $f(z) = \sin(z)$, $f^{(n)} = \begin{cases} \sin(z_0) = 0 & n \equiv 0 \mod 4 \\ \cos(z_0) = 1 & n \equiv 1 \mod 4 \\ -\sin(z_0) = 0 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -\cos(z_0) = -1 & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$
   $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
3. $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
4. $z^3 e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{n!}$.

Taylorontwikkeling

Voorbeeld (vervolg)

5. $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = 0$, analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
   $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} = \frac{n!}{1^{n+1}}$
   $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n$ convergeert als $|z| < 1$. Dus kijk naar de schijf $\{z \in \mathbb{C} | \; |z| < 1\}$. Bevat net niet het probleempunt.
6. $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n$ (uit 5).
7. $f(z) = \frac{z}{z^4+4} = \frac{z}{4} \frac{1}{1-(\frac{z^4}{4})} = \frac{z}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{z}{4})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^{4n+1}$.
8. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ in de schrijf $1 \notin \{z \in \mathbb{C} | \; |z-i| < 1\}$.
   $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-(\frac{z-i}{1-i})}$.
   $f(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-i}{1-i})^n$..
   Convergeert als $|z-i| < |1-i| = \sqrt{2}$

Taylorontwikkeling

Opmerking

$1 \Rightarrow 2$, 3 vanwege $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
1-4 zijn allemaal geheel.
Bij 6 en 7 gebruik 5 of gebruik stelling van Taylor (veel lastiger).

Bewijs (Stelling van Taylor)

Zij f analytisch op de schijf $\{z \in \mathbb{C} | \ |z - z_0| < R\}$ zij z een willekeurig gekozen punt in de schijf en kies $|z| < r < R$. Dan geldt met de Cauchy integraal $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(s)}{s-z} ds$. Met $\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s} \frac{1}{1-\frac{z}{s}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{s})^n$ vinden we $f(z) =$ $\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(s)}{s^{n+1}} z^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.