Analysis 1B

Luc Veldhuis

15 November 2016

§6.5 Oneigenlijke integralen (improper integrals)

Te gebruiken bij:

- Niet gesloten intervallen ($[a, b), [0, \infty), f(0, \infty)$)
- Niet begrensde functies
- geen intervallen ($[a, c) \cup (c, b]$)

Definitie

$f[a, \infty) \to \mathbb{R}$
Als $f \in R[a, b]$ $\forall b \geq a$ en $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f_\infty = A \in \mathbb{R}$
Dan convergeert $\int_a^\infty f$. Dus als de limiet niet bestaat divergeert $\int_a^\infty f$.

§6.5 Oneigenlijke integralen (improper integrals)

Voorbeeld

$f(x) = sin(x)$
Dan $f \in R[0, b]$
$\int_0^\infty sin(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b sin(x)$
$\int_0^b sin(x) = -cos(x)|_0^b = 1 - cos(b)$. Divergeert!

Voorbeeld

$$\int_1^\infty x^p = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^p$$

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} \text{ als } p \neq -1 \quad \lim_{b\to\infty} \frac{b^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}$$

$$ln|x| \text{ als } p = -1 \quad \lim_{b\to\infty} ln(b)$$

$$p > -1 \text{ geeft } +\infty \quad p = -1 \text{ geeft } +\infty$$

$$p < -1 \text{ geeft } -\frac{1}{p+1}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} < \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty$$

Voorbeeld

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^p &= \frac{1}{p+1} \text{ voor } p \geq 0 \\
&= \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 x^p \text{ voor } p < 0 \\
\int_0^1 x^p &= \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_a^1 \text{ voor } p \neq -1 \\
&= ln(x)|_a^1 \text{ voor } p = -1 \\
&= \frac{1}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1} \to \frac{1}{p+1} \text{ voor } -1 < p < \infty \\
&= -\,ln(a) \to \infty \text{ voor } p \leq -1
\end{aligned}
$$

§6.5 Oneigenlijke integralen (improper integrals)

Voorbeelden samen

Kijk naar resultaat van beide integralen: $\int_0^1 x^p$ is eindig voor $p > -1$ en oneindig voor $p \leq -1$. $\int_1^\infty x^p$ is eindig voor $p < -1$ en oneindig voor $p \geq -1$. Dus $\int_0^\infty x^p$ is altijd oneindig.

Voorbeeld (Divergeert)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-2} &= \lim_{a\to 0^+} \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-2} \\
&= \lim_{a\to 0^+} \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_a^b \\
&= \lim_{a\to 0^+} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Voorbeeld (andere manier)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-2} &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1} + \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty x &= \lim_{a\to -\infty}\int_{-\infty}^0 x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b x \\ &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \\ &= -\infty + \infty\end{aligned}$$

Undefined dus bestaat niet

Let op!

Een iets andere vorm geeft een integraal die we soms wel kunnen berekenen. (Principal Value).

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f$$

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} x = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} x = -\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^2 = 0$$

Als $\int_{-\infty}^{\infty} f$ convergeert dan geldt:
$\int_{-\infty}^{\infty} f =$ Principal Value $\int_{-\infty}^{\infty} f$

Voorbeeld

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}$$
$$= -\infty + \infty$$

Undefined. Dus mag je geen uitspraak over doen. Gebruik de Principal Value bij een symmetrische functie

$$PV \int_{-1}^{1} \frac{1}{x} = \lim_{c \to 0} \int_{-1}^{-c} \frac{1}{x} + \int_{c}^{1} \frac{1}{x}$$
$$= ln|x|\big|_{-1}^{-c} + ln|c|\big|_{c}^{1} \qquad = ln(c) - ln(c) = 0$$

§6.5 Oneigenlijke integralen (improper integrals)

Voorbeeld

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} &= \lim_{c_1 \to 0^-} \int_{-1}^{c_1} \frac{1}{x^2} + \lim_{c_2 \to 0^+} \int_{c_2}^{1} \frac{1}{x^2} \\
&= -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{c_1} + \frac{1}{x}\Big|_{c_2}^{1} \\
&= 1 - \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - 1 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PV \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} &= \lim_{c \to 0^+} \int_{-1}^{-c} \frac{1}{x^2} + \int_{c}^{1} \frac{1}{x^2} \\
&= 1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{c} - 1 = \frac{2}{c} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

§6.5 Oneigenlijke integralen (improper integrals)

Stelling

Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu dan $|f|$, $\int_a^b f$ en $\int_a^b |f|$ ook continu.
$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Stelling absoluut integreerbaar

Gegeven $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is bsoluut integreerbaar als $\int_a^b |f|$ bestaat.

Stelling absoluut integreerbaar

Gegeven $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is bsoluut integreerbaar als $\int_a^\infty |f|$ bestaat.

§6.5 Oneigenlijke integralen (improper integrals)

Voorbeeld $\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}$

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Zie 6.5.17. Dirichlet integraal.
Hij bestaat in 0 want $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

$$\int_0^\infty \frac{|sin(x)|}{x} = +\infty$$

Hoe? Probeer zelf uit te zoeken. Soms kun je een integraal gebruiken om rijen getallen op te tellen of omgekeerd.