Ringen en Lichamen - Opdracht 3

Luc Veldhuis - 2538227

Oktober 2017

1. De Chinese reststelling voor ringen met twee gegeven idealen kan ook geformuleerd worden zonder aan te nemen dat de ring commutatief is of een identiteit heeft. Dat doen we in deze opgave.
   Zij R een ring (misschien niet commutatief of zonder 1) met twee idealen I en J zo dat $I+J=R$. Gegeven is dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \phi : R &\to R/I \times R/J \\ x &\mapsto (x+I, x+J) \end{aligned}$$

   een ringhomomorfisme is.

   (a) Laat zien dat φ surjectief is en dat $\ker(\varphi) = I \cap J$. *Aanwijzing: als a in R is dan is $a = i_a + j_a$ met i_a in I en j_a in J. Waar beeldt j_a op af?*
   Als voor elk element $(x+I, y+J) \in R/I \times R/J$ er tenminste 1 element $r \in R$ bestaat zodat $\varphi(r) = (x+I, y+J)$, dan is φ surjectief.
   Kies een willekeurig element $(x+I, y+J) \in R/I \times R/J$. Dan hebben we $x = i_x + j_x \in R$, $y = i_y + j_y \in R$ omdat $I + J = R$.
   Dit geeft $(x+I, y+J) = (i_x+j_x+I, i_y+j_y+J) = (j_x+I, i_y+J) = (0+I, i_y+J)+(j_x+I, 0+J)$.
   Maar omdat $I+J = R$ en R abels is onder optelling, weten we dat er een element $i_y+j_x \in R$ bestaat, zodat:

$$\begin{aligned} \varphi(i_y + j_x) &= \varphi(i_y) + \varphi(j_x) \\ &= (i_y + I, i_y + J) + (j_x + I, j_x + J) \\ &= (0 + I, i_y + J) + (j_x + I, 0 + J) \\ &= (j_x + I, i_y + J) \\ &= (x + I, y + J) \end{aligned}$$

   Dus elk element in $R/I \times R/J$ heeft minimaal 1 element uit R wat hierop afbeelt, dus φ is surjectief.
   Nu moeten we nog laten zien dat $\ker(\varphi) = I \cap J$.
   Bewijs '$\ker(\varphi) \supseteq I \cap J$':
   Neem een $r \in I \cap J$ willekeurig. Dan geldt $\varphi(r) = (r+I, r+J) = (0+I, 0+J)$. Dus $r \in \ker(\varphi)$.
   Dus elk element $r \in I \cap J$ zit in $\ker(\varphi)$.
   Dus $\ker(\varphi) \supseteq I \cap J$.
   Bewijs '$\ker(\varphi) \subseteq I \cap J$':
   Neem een element $r \in \ker(\varphi)$.
   Dan geldt nu per definitie $\varphi(r) = (r+I, r+J) = (0+I, 0+J)$.
   Dus $r + I = 0 + I$ en $r + J = 0 + J$.
   Uit $r + I = 0 + I$ volgt dat $r \in I$, en uit $r + J = 0 + J$ volgt dat $r \in J$, dus $r \in I \cap J$ voor

alle $r \in \ker(\varphi)$.
Dus $\ker(\varphi) \subseteq I \cap J$.
Hieruit volgt dat $\ker(\varphi) = I \cap J$.

De eerste isomorfiestelling geeft nu een isomorfisme $R/I \cap J \simeq R/I \times R/J$.

(b) Laat zien dat als R een 1 heeft dan geldt dat $I \cap J = IJ + JI$.
Bewijs '$I \cap J \subseteq IJ + JI$':
Neem een element $r \in I \cap J$ willekeurig. We hebben dat $1 = i_1 + j_1$, dus $1r = i_1 r + j_1 r$.
Omdat $r \in J$, geldt $i_1 r \in IJ$ en omdat geldt $r \in I$, geldt $j_1 r \in JI$.
Dus $r = i_1 r + j_1 r \in IJ + JI$.
Omdat dit geldt voor elke $r \in I \cap J$, geldt dat $I \cap J \subseteq IJ + JI$.
Bewijs '$I \cap J \supseteq IJ + JI$':
Neem een element $r \in IJ + JI$.
Dan geldt dat $r = \sum_{l=1}^m i_l j_l + \sum_{k=1}^n j_k i_k$ met $m, n \geq 0$ en $i_k, i_l \in I$ en $j_k, j_l \in J$ voor alle $k, l \in \mathbb{N}$.
Dan geldt voor alle $i_l j_l$ voor $0 \leq l \leq m$, dat $i_l j_l \in I$ en $i_l j_l \in J$, dus $i_l j_l \in I \cap J$.
Hetzelfde geldt voor alle $j_k i_k$ voor $0 \leq k \leq n$, dat $j_k i_k \in I$ en $j_k i_k \in J$, dus $i_l j_l \in I \cap J$.
Omdat er gegeven is dat een doorsnede van idealen weer een ideaal is, en een ideaal een deelring is en een deelring altijd gesloten is onder optelling, geldt dat $r = \sum_{l=1}^m i_l j_l + \sum_{k=1}^n j_k i_k \in I \cap J$.
Omdat dit geldt voor elke $r \in IJ + JI$, hebben we dat $I \cap J \supseteq IJ + JI$.
Dus $I \cap J = IJ + JI$.

Neem nu expliciet

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a, b, c \text{ in } \mathbb{Z} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z})$$

met

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a \text{ in } 2\mathbb{Z} \text{ en } c \text{ in } 3\mathbb{Z} \right\} \text{ en } J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a \text{ in } 3\mathbb{Z} \text{ en } c \text{ in } 2\mathbb{Z} \right\}$$

Het is gegeven dat R een deelring is van $M_2(\mathbb{Z})$, en dat I en J idealen van R zijn.

(c) Laat zien dat $I + J = R$ maar dat $IJ \subsetneq I \cap J$ en $JI \subsetneq I \cap J$.
Bewijs '$I + J \subseteq R$':
Bij definitie is $I + J$ een ideaal van R, dus geldt altijd dat $I + J \subseteq R$.
Bewijs '$I + J \supseteq R$':
Kies een matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ met $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
We zien dat $-2a + 3a = a$ en dat $3c - 2c = c$. Uit de definitie van $3\mathbb{Z}$ en $2\mathbb{Z}$ weten we dat $-2a, -2c \in 2\mathbb{Z}$ en dat $3a, 3c \in 3\mathbb{Z}$ voor een willekeurige $a, c \in \mathbb{Z}$.
Dan schrijven we nu $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + 3a & b \\ 0 & 3c - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & b \\ 0 & 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$, met $\begin{pmatrix} -2a & b \\ 0 & 3c \end{pmatrix} \in I$ en $\begin{pmatrix} 3a & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix} \in J$ en dus $\begin{pmatrix} -2a & b \\ 0 & 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix} \in I + J$.
Omdat nu voor elke $r \in R$ geldt dat $r \in I + J$, hebben we dat $I + J \supseteq R$.
Dus $I + J = R$.
Voor $r \in I \cap J$ moet gelden dat $a, c \in 2\mathbb{Z}$ en $3\mathbb{Z}$. Dit kan alleen als $a, c \in 6\mathbb{Z}$, want $kgv(2, 3) = 6$.

Dus $I \cap J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \text{ met } a, c \text{ in } 6\mathbb{Z} \right\}$.
Nu gaan we laten zien dat $IJ \subset I \cap J$ en $JI \subset I \cap J$:
Neem elementen $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in I$ en $\beta = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in J$ willekeurig.
Dit geeft $\alpha\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$.
Omdat $a, f \in 2\mathbb{Z}$ en $e, c \in 3\mathbb{Z}$, geldt dat $ae, cf \in 6\mathbb{Z}$, dus $\alpha\beta \in I \cap J$.
Omdat dit geldt voor elke $\alpha\beta \in IJ$, geldt dat $IJ \subset I \cap J$.
Ook hebben we $\beta\alpha = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da & db + ec \\ 0 & fc \end{pmatrix}$.
Hierin geldt weer dat $a, f \in 2\mathbb{Z}$ en $e, c \in 3\mathbb{Z}$ dus $ae, cf \in 6\mathbb{Z}$, dus $\beta\alpha \in I \cap J$.
Omdat dit geldt voor elke $\beta\alpha \in JI$, geldt dat $JI \subset I \cap J$.
Nu rest ons te laten zien dat $IJ \subsetneq I \cap J$ en $JI \subsetneq I \cap J$.
Kies $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in I \cap J$.

- We laten eerst zien dat $IJ \subsetneq I \cap J$.
  Als $IJ \subseteq I \cap J$, dan moeten er elementen $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in I$ en $\beta = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in J$ bestaan, zodat $\alpha\beta = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
  Uit de matrix multiplicatie zoals hierboven beschreven halen we dat nu $1 = ae + bf$, met $a \in 2\mathbb{Z}$ en $f \in 2\mathbb{Z}$, dus $ae + bf \in 2\mathbb{Z}$ voor $e, b \in \mathbb{Z}$.
  Maar $1 \notin 2\mathbb{Z}$. Dus $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} \notin IJ$.
  Dus $IJ \subsetneq I \cap J$.
- Nu laten we zien dat $JI \subsetneq I \cap J$.
  Als $JI \subseteq I \cap J$, dan moeten er elementen $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in I$ en $\beta = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in J$ bestaan, zodat $\beta\alpha = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
  Uit de matrix multiplicatie zoals hierboven beschreven halen we dat nu $1 = db + ec$, met $d \in 3\mathbb{Z}$ en $c \in 3\mathbb{Z}$, dus $db + ec \in 3\mathbb{Z}$ voor $b, e \in \mathbb{Z}$.
  Maar $1 \notin 3\mathbb{Z}$. Dus $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} \notin JI$.
  Dus $JI \subsetneq I \cap J$.