Analysis 2A

Luc Veldhuis

21 Februari 2016

Machtreeksen §8.5

WeiserStraß M-test

Beschouw de functie reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$
Als er een rij reeële getallen bestaat $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, $M_r \in \mathbb{R}$ zodat $M_{k \geq 0}$, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ convergent is en $|f(x)| \leq M_k \ \forall x \in D$, dan volgt $\sum f_k$ convergeert uniform op D.

Cauchy Ration-test

Beschouw de functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$.
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$
Als $\rho > 1$, dan divergeert $\sum a_n$
Als $\rho < 1$, dan convergeert $\sum a_n$

Machtreeksen §8.5

Definitie

Een machtreeks is een functiereeks waarbij $f(n) = a_n(x - x_0)^n$ voor $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_N \in \mathbb{R}$.
$x_0 \in \mathbb{R}$ is het 'middelpunt van de machtreeks'.
$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ want we nemen $0^0 = 1$

Vraag

Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de machtreeks convergent? Zeker voor $x = x_0$, want $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - x_0)^n = a_0$. Convergentie in andere punten onderzoeken we met de ration test.

Voorbeeld

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ in dit geval $x_0 = 0$ en $a_n = \frac{1}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Met de ratio test onderzoeken we de absolute convergentie van de reeks in x: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. $0 < 1$ dus het is absoluut convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Machtreeksen §8.5

Voorbeeld

$\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$ een machtreeks met $a_n = 3$ en $x_0 = 2$.

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} = |x-2|$. Dan volgt uit de ratio test dat

- Als $|x-2| < 1$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} |3(x-2)^n|$ convergent en $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$ dus absoluut convergent.
- Als $|x-2| > 1$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$ divergent

dus $-1 < x-2 < 1$ oftewel $1 < x < 3$ Er is sprake van convergentie als
$x \in \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\} = (1, 3)$

Machtreeksen §8.5

Voorbeeld

$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+3)^n$ (machtreeks met $a_n = n!$ en middelpunt $x_0 = -3$).

$\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)!(x+3)^{n+1}}{n!(x+3)^n}| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x+3|$. Convergeert alleen als $x = -3$ anders divergeert de reeks.

Opmerking

Deze 3 voorbeelden geven alle mogelijke uitkomsten voor machtreeksen. Zie stelling §8.5.5

Machtreeksen §8.5

Stelling §8.5.5

Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ convergeert in $x_0 + r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dan convergeert de reeks absoluut voor alle $x \in \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$

Comparison test

$0 \le A_n \le MB_n$ en $\sum B_n$ convergeert, dan is $\sum A_n$ ook convergent.

Let op!

Boek zegt: $\sum a_k(x - a)^k$ $x = a + x_0$
Aantekeningen: $\sum a_n(x - x_0)^n$ $x = x_0 + r$
Let op: $x_0 = r$ in de aantekeningen!!!

Bewijs

De aanname is dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ convergeert. Dan moet gelden $\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$ dus dit betekend dat de rij begrenst is. Er bestaat dus $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ zodat $|a_n r^n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dus $|a_n(x-x_0)^n| = |a_n r^n| |\frac{(x-x_0)^n}{r^n}| \leq M|\frac{x-x_0}{r}|^n$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ zodat $|x - x_0| < r$ geldt: $|\frac{x-x_0}{r}| < 1$. Dat betekend $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x-x_0}{r}|^n$ is convergent. (Meetkundige reeks met 'straal' < 1). Samengevat: $|a_n(x-x_0)^n| \leq M|\frac{x-x_0}{r}|^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x-x_0}{r}|^n$ is convergent. Uit de vergelijkings test volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ ook convergent is.

Machtreeksen §8.5

Definitie

Het **convergentie interval** van $\sum a_n(x-x_0)^n$ is de verzameling $I = \{x \in \mathbb{R} : \sum a_n(x-x_0)^n\}$ convergeert.
$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$ waarbij $0 \leq R \leq \infty$, met R de convergentiestraal van de machtreeks.

Wat we nu weten

- $\sum a_n(x-x_0)^n$ convergeert absoluut als $|x - x_0| < R$ (dat wil zeggen x op $(x_0 - R, x_0 + R)$)
- $\sum a_n(x-x_0)^n$ divergeert als $|x - x_0| > R$ (dat wil zeggen $x < x_0 - R$ of $x > x_0 + R$)

Bovendien $\sum a_n(x-x_0)^n$ convergeert uniform op $(x_0 - r, x_0 + r)$ voor alle $r \in (0, R)$.

Machtreeksen §8.5

Bewijs

Zij $x \in \mathbb{R}$ zodat $|x - x_0| < r < R$. Omdat $r < \mathbb{R}$, is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ absoluut convergent. Als $|x - x_0| < r$, geldt $|a_n(x - x_0)^n| < |a_n r^n| = M_n$. $M_n = \sum |a_n r^n|$ is convergent (omdat $\sum a_n r^n$ absoluut convergent is). Uit de Weierstraß M-test volgt dat $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ uniform convergent is. Dat wil zeggen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absoluut uniform convergent is op $(x_0 - r, x_0 + r)$

Machtreeksen §8.5

Voorbeeld

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{2^k(k+1)}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+2)}}{\frac{(x-1)^k}{2^k(k+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{k+1}{2(k+2)}|x-1| = \frac{1}{2}|x-1|$. De machreeks convergeert absoluut op $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2}|x-1| < 1\} = (-1, 3)$

Rand gevallen

Wat gebeurt er in $x = x_0 \pm R$?

Zie voorbeeld. Vul $x = -1$ in. Dat geeft $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ Dit geeft de alternerende harmonische reeks. (relatief convergent).

Vul $x = 3$ in. Dat geeft $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)}$. Deze reeks divergeert.

De machtreeks convergeert op $[-1, 3)$

Machtreeksen §8.5

Stelling van Abel

Als de reeks $\sum a_n(x-x_0)^n$ convergeert naar f op (x_0-R, x_0+R) en is convergent in x_0-R of x_0-R, dan is de som van de reeks continue in x_0+R. Dat wil zeggen dat

$$\lim_{x\to x_0\pm R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Voorbeeld

$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ op $(-1,1)$. Deze reeks convergeert ook in $x=1$. Uit de stelling van Abel volgt nu dat de reeks nu ook continue is in $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{n+1} \; (= \ln(2))$$

Samenvatting

Machtreeksen:

- Convergentie

  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ met convergentiestraal R:
  - Convergeert absoluut op $(x_0 - R, x_0 + R)$
  - Divergeert als $x < x_0 - R$ of $x > x_0 + R$
  - is uniform convergent op $(x_0 - r, x_0 + r)$ $\forall r in (0, R)$
  - Eindpunten $x = x_0 \pm R$ moten apart onderzocht worden.
- Continuïteit op het open convergentie interval

  Als de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ convergentie straal R heeft, dan is $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ('de som van de machtreeks') continue op $(x_0 - R, x_0 + R)$.
- Integreren & differentiëren

Machtreeksen §8.5

Bewijsschets voor stelling van Abel

f continue op $(x_0 - R, x_0 + R)$ betekent dat f continue is voor alle $x \in (x_0 - R . x_0 + R)$. Kies $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, dan bestaat er een $r \in (0, R)$ zodat $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ en omdat de convergentie op dit kleinere interval uniform is, dat is f is de uniforme limiet van een rij continue functies (polynomen) en dus continue.

Corollary

Continuiteit in de randpunten van het convergentie interval. Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ convergentiestraal R heeft en convergent is in $x_0 + R$ dan is $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ continue in $x_0 + R$ (en analoog voor $x_0 - R$)

Machtreeksen §8.5

Differentiëren en integreren

Neem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ met convergentiestraal R. Dan geldt

- $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ voor alle $|x - x_0| < R$ (op het convergentie interval)
- f differentieerbaar op $(x_0 - R, x_0 + R)$ en
  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ op het convergentie interval

Opmerking

- Voor (2) hebben we nodig dat $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ uniform convergeert op $(x_0 - R, x_0 + R)$.
- $f(x), F(x)$ en $f'(x)$ hebben dezelfde convergentiestraal.

Voorbeeld 1.1 van §8.5

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ voor $x \in (-1, 1)$

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ voor $|x| < 1$.

Convergentie interval is nog steeds $(-1, 1)$.

$\frac{d}{dt}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n$

Termsgewijs integreren geeft:

$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t^2)^n dt$ als $x \in (-1, 1)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Convergentie in de eindpunten van $x \in (-1, 1)$:

$x = -1$ is relatief convergent. $x = 1$ is relatief convergent.

Dus de somreeks convergeert op $[-1, 1]$. (De convergentie is absoluut op $(-1, 1)$ relatief als $x = \pm 1$)

Uit de stelling van Abel volgt dat de som continue is in $x = \pm 1$ en dus geldt $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ voor alle $x \in [-1, 1]$

Voorbeeld arctan

$\lim\limits_{x\to 1} \arctan(x) = \lim\limits_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} =$
$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$