Topologie - Opdracht 10

Luc Veldhuis - 2538227

April 2017

Q1) Zij $X := [0,1] \times [0,1]$ met daarop de euclidische topologie. Zij $\sim$ de equivalentierelatie gegeven door $(s,t) \sim (s',t')$ als $s = s'$ en $t = t'$,als $s = s' = 0$, als $s = s'$, $t = 1$ en $t' = 0$, en als $s = s'$, $t = 0$ en $t' = 1$. (Je hoeft niet te bewijzen dat dit een equivalentierelatie is). Laat zien dat $\overline{X} := X/\sim$ met de quotiënt topologie en de schijf $D^2 := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ met de euclidische topologie homeomorf zijn.

We zien aan de definitie van de equivalentie relatie dat:

$$(s,t) \sim (s',t') = \begin{cases} (s,t) = (s',t') & \text{als } s = s' \text{ en } t = t' \\ (s,1) = (s',0) & \text{als } s = s' \\ (s,0) = (s',1) & \text{als } s = s' \\ (0,t) = (0,t') & \text{voor alle } t', t \in [0,1] \end{cases}$$

We krijgen nu ook de mapping:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & D^2 \\ \overline{X} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Al deze functies hebben ook een inverse de andere kant op.

Uit stelling 11.7 halen we nu dat als $f : X \to D^2$ een surjectieve afbeelding is, en $\sim_f$ de bijbehorende equivalentie relatie op X en $q : X \to \overline{X}$ de quotient afbeelding, met $\overline{X}$ de quotient afbeelding, we mogen stellen dat:

Als f een identificatie afbeelding is, dan is de bijectie $h : \overline{X} \to Y$ een homeomorfisme, dus dan zijn $\overline{X}$ en D^2 homeomorf.

Dan rest ons nu nog om een functie f te vinden, die X op Y surjectief afbeeld en een identificatie is. Een functie is een identificatie als voor alle deelverzamelingen $V \subseteq Y$ geldt dat V open in $Y \Leftrightarrow f^{-1}(V)$ open in X.

Kies $f(s,t) = (s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t))$ met $s,t \in [0,1]$, dan is $(s\cos(2\pi t))^2 + (s\sin(2\pi t))^2 = s^2(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)) = s^2 \leq 1$ dus hij voldoet aan de voorwaarde van D^2

We zien dat deze functie inderdaad voldoet aan de equivalentie relatie:

$f(0,t) = (0,0) = f(0,t')$

$f(s,t) = f(s',t')$ voor $s, s', t, t' \in (0,1)$

$f(s,1) = (s,0) = f(s',0)$ als $s' = s$

De functie f bestaat uit een samenstelling van continue functies, en voor continue functies geldt dat voor elke $U \subseteq Y$ open, dan is $f^{-1}(U)$ open. Dus nu moeten we alleen nog laten zien dat als $f^{-1}(U)$ open in X, dan is U open in Y.

Dit hoeven we alleen voor de basis elementen uit de euclidische topologie van $\mathbb{R}^2$ te laten zien.

Dit is er maar 1, dus kies $(a,b) \times (c,d) \in X$ met $a < b, c < d$ en $a, b, c, d \in [0,1]$.

Claim: er bestaat een open $U \subseteq Y$ open zodat $f^{-1}(U) = (a,b) \times (c,d)$

Pas f toe op beide kanten: $f(f^{-1}(U)) = f((a,b),(c,d)) = U$

Dit geeft de verzameling $\{(a\cos(2\pi c), b\sin(2\pi d)) \in D^2 | a, b \in (a,b), c, d \in (c,d)\}$ wat een open deelverzameling is in D^2. Dus f is een identificatie, dus er bestaat een homeomorfe afbeelding tussen X en D^2.

Q2) (a) Kan je een topologische ruimte X en een equivalentierelatie $\sim$ op X vinden, zodanig dat de quotientenafbeelding $X \longrightarrow X/\sim$ niet open is?

Een afbeelding is open als geldt dat voor elke open $U \in X$ open geldt dat $f(U)$ open is. Per definitie is $U \subseteq \overline{X}$ open als $q^{-1}(U) \subseteq X$ open is.

Kies als topologische ruimte: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ en kies als equivalentie relatie: $f(x) = \begin{cases} [\mathbb{Z}] & \text{als } x \in \mathbb{Z} \\ [x] & \text{als } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Nu geeft het open interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}$ de afbeelding $q(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \{[x] | x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})\} \cup \{[\mathbb{Z}]\}$, maar het inverse beeld geeft $q^{-1}(q(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup \mathbb{Z}$, omdat het inverse beeld van $q^{-1}([\mathbb{Z}]) = \mathbb{Z}$, maar $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup \mathbb{Z}$ is niet open in de standaard topologie. Dus de quotientenafbeelding is niet open.

(b) Bestaat er een Hausdorffruimte X en een equivalentierelatie op X zodanig dat $X/\sim$ niet Hausdorff is?

Een topologische ruimte is Hausdorff als geldt dat voor elk tweetal punten $x, y \in X$ met $x \neq y$ er open omgevingen U van x en V van y bestaan zodat $U \cap V = \emptyset$.

Neem als topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$. Deze is Hausdorff.

Kies nu als quotient afbeelding: $q(x) = \begin{cases} [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] & \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ [\mathbb{Q}] & \text{als } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Dan geldt dat $q^{-1}([\mathbb{Q}]) = \mathbb{Q}$ niet open is in $\mathcal{T}_{st}$, maar $q^{-1}(\{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}], [\mathbb{Q}]\}) = \mathbb{R}$ is wel open. Dus een open overdekking van $[\mathbb{Q}]$ is $\{[\mathbb{Q}], [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]\}$, maar omdat $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \in V$ met V een open omgeving van $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]$ is het nooit zo dat $U \cap V = \emptyset$. Dus deze quotienttopologie is niet Hausdorff.

Q4) Zij $A \subset X$ een deelverzameling van een topologische ruimte X. We definieren de equivalentierelatie $\sim_A$ door $x \sim_A x'$ als $x, x' \in A$. Stel dat X een normale ruimte is en dat $A \subseteq X$ gesloten is. Toon aan, dat $\overline{X} := X/\sim_A$ ook normaal is.

Een ruimte is normaal als scheidingsaxiomas T_1 en T_4 gelden.

T_1: alle 1-punts verzamelingen $\{x\} \subseteq X$ zijn gesloten.

T_4: als er voor elk tweetal niet-lege gesloten delen $C, D \subseteq X$ met $C \cap D = \emptyset$ open omgevingen U van C en V van D bestaan met $U \cap V = \emptyset$

Eerst bewijzen we dat $\overline{X}$ aan T_1 voldoet:

Per definitie is $U \subseteq \overline{X}$ open/gesloten als $q^{-1}(U) \subseteq X$ open/gesloten is.

Neem aan dat X voldoet aan T_1. Dan geldt voor elke 1-punts verzameling $\{x\} \in \overline{X}$ dat $q^{-1}(x) = \{x\}$ of $q^{-1}(x) = A$. A is gesloten, en omdat T_1 geldt, is elk punt $x \in X$ gesloten. Dus elk punt $x \in \overline{X}$ is gesloten, dus voldoet $\overline{X}$ aan T_1.

Nu bewijzen we dat $\overline{X}$ aan T_4 voldoet:

Kies gesloten deelruimtes $C, D \in \overline{X}$ zodat $C \cap D = \emptyset$.

Noem het punt $a \in \overline{X}$ als het punt waarop A wordt afgebeeld. Er zijn nu 2 gevallen mogelijk: Of a zit in C of D, of a zit niet in C en D.

We behandelen eerst het geval als a wel in C of D zit.

Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $a \in C$. Als $a \in C$, dan geldt dat $a \notin D$ en dat $N = q^{-1}(C) = \{x | x \in C, x \neq a\} \cup A \subseteq X$ gesloten. Omdat $a \notin D$, geldt dat geen enkel punt van $M = q^{-1}(D) \subseteq X$ gesloten in A zit. Ook weten we dat X voldoet aan T_4. Dus we hebben nu $M, N \subseteq X$ gesloten, zodat $M \cap N = \emptyset$, dus dan zijn er open omgevingen U en van M en V van N, zodat $U \cap V = \emptyset$, en ook geldt dat $A \subseteq V$ en dus geldt dat $q(U) \cap q(V) = \emptyset$ in $\overline{X}$.

Dan nu het tweede geval:

Als a niet in C of D zit, betekent dit dat $C' = q^{-1}(C) = \{x \in X | x \in C\} \subseteq \overline{X}$ en $D' = q^{-1}(D) = \{x \in X | x \in D\} \subseteq \overline{X}$ en dus nog steeds $C' \cap D' = \emptyset$. Dan bestaan er open omgevingen U van C' en V van D', zodat $U \cap V = \emptyset$, omdat X voldoet aan T_4.
Ook weten we, omdat $a \notin C$ en $a \notin D$, dat $A \cap C' = \emptyset$ en $A \cap D' = \emptyset$.
Dus dan hebben we weer 2 gesloten omgevingen in X, dus zijn er weer open verzamelingen, W van A, P van C', zodat $W \cap P = \emptyset$ en H van A en K van D', zodat $H \cap K = \emptyset$.
Nu kunnen we $U \cap P$ als open omgeving van C' en $V \cap K$ als open omgeving van D' nemen, zodat $U \cap P \cap V \cap K = \emptyset$, en er geen enkel element van A in $U \cap P$ of $V \cap K$ zit.
Nu is de afbeelding hiervan $q(U \cap P) = \{x \in \overline{X} | x \in U \cap P\}$ en $q(V \cap K) = \{x \in \overline{X} | x \in V \cap K\}$, met $a \notin q(U \cap P)$ en $a \notin q(V \cap K)$, dus $q(U \cap P) \cap q(V \cap K) = \emptyset$.
Er bestaan dus open omgevingen U' van $C \subseteq \overline{X}$ gesloten en V' van $D \subseteq \overline{X}$ gesloten, zodat $U' \cap V' = \emptyset$. Dus $\overline{X}$ voldoet aan T_4.