Analysis 2A

Luc Veldhuis

14 Maart 2016

Continuïteit

Samenvatting

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$a \in D$ limietpunt

- f continu in $a \in D$ ($\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$) dan en slechts dan als $f_i : D \to \mathbb{R}$ continu in a voor alle $i = 1, \dots, m$
  Continuïteit van f volgt uit de continuïteit van de coördinaat functies.
  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  $f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m))$
  $\forall i : f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Som, product en samenstelling van continue functies zijn continue.

Continuïteit

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f(x,y) = (xy^3, x\sin(y), y^2e^x)$
$f_1(x,y) = xy^3$
$f_2(x,y) = x\sin(y)$
$f_3(x,y) = y^2e^x$

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f(x,y) = (xy, \sqrt{1-x^2-y^2})$
$1 - x^2 - y^2 \geq 0$
$x^2 + y^2 \leq 1$
$\text{domein}(f) = \text{domein}(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$
$\text{domein}(f_1) = \mathbb{R}^2$

Continuïteit

Voorbeeld

$f(x,y) = (xy^3 - e^y\cos(x), y^4 - x\sin(y), e^{xy} - \cos(xy))$
Continu want hij is samengesteld/som/product.

Voorbeeld

Wanneer gebruik je de definitie?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

f is continue of $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$(0,0)$ is een limietpunt van $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
f continue op $\mathbb{R}^2$ als
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$ maar deze limiet bestaat niet!
$f(x,x) = \frac{1}{2}$, $f(x,\lambda x) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ als $\lambda \neq 0$

Continuïteit

Voorbeeld

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probeer met $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\lambda x}{x^2+\lambda^2} = 0$ met $\lambda \neq 0$

Nu langs de parabool $y = x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) = 1.$ Dus niet continue.

Voorbeeld

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Is wel continu, want

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \leq |y| \leq |\sqrt{x^2+y^2}| = \|(x,y) - (0,0)\|$$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Krommen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
$t \in \mathbb{R}$, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ is de positie van een deeltje in $\mathbb{R}^m$ op tijd t.

Voorbeeld

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$
Door het evenwicht in $t = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ Door het evenwicht in $t = \ldots, -\pi, 0, \pi, 2\pi \ldots$
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $h(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ (Spiraal omhoog)
Gaat alleen door het evenwicht in de evenwichtsstand $t = 0$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Differentiatie

$h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$

Kies $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}^m$

$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a)-f(a_0)}{a-a_0} \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}^m$

Als deze limiet bestaat, is f differentieerbaar in a.

Definitie

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ heet een inwendig punt als er een $\epsilon_0 > 0$ bestaat zodat $\forall \epsilon < \epsilon_0$ $B_\epsilon(a) \subseteq D$

(Is geen randpunt)

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Definitie

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$a \in I$ inwendig punt
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}$ als $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ bestaat.
Dan zetten we $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}^m$ en we noemen deze vector de '**snelheidsvector**' van f in a.
$\|f'(a)\| \in \mathbb{R}$ heet de '**speed**'

Gevolg

$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))$
f differentieerbaar in $a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ bestaat $\Leftrightarrow$
$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(a+h)-f_i(a)}{h}$ bestaat $\forall i = 1, \ldots, m \Leftrightarrow f_i$ is differentieerbaar in a
$\forall i = 1, \ldots, m$
Als dit het geval is, dan geldt: $f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_m'(t))$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Voorbeeld

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (\cos(t), \sin(t))$
Differentieerbaar dus $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$
(inner product) $f(t) \cdot f'(t) = 0$ want speed is constant.
$\|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1$

Voorbeeld

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$
Differentieerbaar dus $f'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t))$
$\|f'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(t)} = 2$

Voorbeeld

$f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
$f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$
Dus hij stijgt altijd in de z-richting als t groter wordt.

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Voorbeeld

graf(g), $g(x) = x^2$
beeld van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t^2)$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
graf$(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = g(x)\}$ is een kromme in $\mathbb{R}^2$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$f(x) = (x, g(x))$
$f'(x) = (1, g'(x))$

Opmerking

Niet elke kromme is een grafiek. Bijvoorbeeld $x^2 + y^2 = 1$
We kunnen dit wel 'opsplitsen', zodat elk stuk als grafiek te beschrijven is:
$y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Stelling 1.1

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$
Als f en g differentieerbaar zijn in t dan is $f + g$ ook differentieerbaar in t en er geldt: $(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t)$
$(\phi f)(t) = \phi(t)f(t)$
$(\phi f)'(t) = \phi'(t)f(t) + \phi(t)f'(t)$ (product regel)
$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t)$

Voorbeeld

$f(t) = (\cos(t), \sin(t))$
$\phi(t) = 2t$
$(\phi f)(t) = (2t\cos(t), 2t\sin(t))$
$(\phi f)'(t) = (2\cos(t) - 2t\sin(t), 2\sin(t) + 2t\cos(t))$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Gevolg

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
$(fg)(t) = f(t)g(t)$
$f(t)f(t) = \|f(t)\|^2 = \text{constant}$
$0 = \frac{d}{dt}(f(t) \cdot f(t)) = f(t)f'(t) + f'(t)f(t) = 2f'(t)f(t)$
Dat wil zeggen, $f'(t)$ en $f(t)$ zijn orthogonale vectoren.

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Herhaling

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
Differentieerbaarheid van f in a mits het limiet bestaat:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{n} = f'(a)$$

('snelheid' van de kromme f in a)
f differentieerbaar $\Leftrightarrow$ f_i differentieerbaar in a $\forall i = 1, \ldots, n$
Dan geldt: $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a))$

Eigenschappen

Neem $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, dan geldt:

- $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ is ook differentieerbaar en $(f + g)' = f' + g'$
- $(\phi f) = \phi' f + \phi f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
  $\mathbb{R} \to^{(f,g)} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
  $t \mapsto (f(t), g(t)) \mapsto f(t)g(t)$
- $(f \circ \phi) : \mathbb{R} \to^{\phi} \mathbb{R} \to^{f} \mathbb{R}^m$ heet ook wel de 'reparametrisatie' van f
  $(f \circ \phi)'(x) = f(\phi(x))' = f'(\phi(x))\phi'(x)$

want $(f \circ \phi)'(x) = (f_1(\phi(x)), \ldots, f_n(\phi(x)))' =$
$(f_1(\phi(x))', \ldots, f_n(\phi(x))') = (f_1'(\phi(x))\phi'(x), \ldots, f_n'(\phi(x))\phi'(x)) =$
$(f_1'(\phi(x)), \ldots, f_n'(\phi(x)))\phi'(x) = f'(\phi(x))\phi'(x)$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Voorbeeld

$f(t) = (\cos(t), \sin(t))$
$s(t) = 2t$ $(f \circ s) : \mathbb{R} \to^s \mathbb{R} \to^f \mathbb{R}$
$t \mapsto 2t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$

Krommen als deelverzameling

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{y} + y^2 = 1\}$
Vind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, zodanig dat $E = Im(f)$
$g(t) = (\cos(t), \sin(t)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ op $[0, 2\pi]$
Dus $f(t) = (2\cos(t), \sin(t)) = E$ op $[0, 2\pi]$

Voorbeeld

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ is een cylinder.
Laat ϕ de snijkromme van deze cylinder en het vlak
$x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$
$f(t) = (\cos(t), \sin(t), 1 - \cos(t) - \sin(t))$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Differentieerbaarheid

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}$
Volgens de definitie van differentieerbaarheid geldt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Gegeven $f'(a) \in \mathbb{R}^m$, kunnen we een lineaire afbeelding definieren:
$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ met $L(h) = f'(a)h$
Hier maken we een **affijn** afbeelding van

$$f(a) + L(h) = f(a) + f'(a)h$$

We beschouwen nu $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + f'(a)h)}{h} =$
$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \lim_{h \to 0} f'(a) - f'(a) = 0$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Voorbeeld

Omgekeerd, stel dat er een lineaire afbeelding $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ bestaat, zodat

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + L(h))}{h} = 0$$

Dan is f differentieerbaar in a.
Als $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, dan bestaat er een $b \in \mathbb{R}^m$ zodat $L(h) = bh$ voor alle $h \in \mathbb{R}$. De aanname wordt dan:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + bh)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - b = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$$

Krommen in $\mathbb{R}^m$

Stelling 1.2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ is differentieerbaar in alle $a \in \mathbb{R}$ dan en slechts dan als er een $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ bestaat zodat $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-(f(a)+bh)}{h} = 0$
De lineaire afbeelding L wordt de 'differentiaal van f in a' genoemd.
In het boek: $df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, linear
$df : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ met $a \mapsto df_a$
Deze karakterisatie gebruiken we voor de differentieerbaarheid van $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ namelijk:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{F(a+h) - (F(a) + F(h))}{\|h\|} = 0$$

Hieruit volgt: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, dan is F differentieerbaar in alle punten van $\mathbb{R}^n$ en $dF_a = F$ voor alle a.

Bewijs

F is lineair, dus
$F(a+h) - (F(a) + F(h)) = F(a+h) - F(a+h) = 0$ dus

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{F(a+h) - (F(a) + F(h))}{\|h\|} = 0$$

is altijd waar.