Groepen theorie

Luc Veldhuis

11 April 2017

§2.4 Ondergroepen voortgebracht door een verzameling

Definitie

Kies $A \subseteq G$, geen groep.
Dan is $\langle A \rangle = \bigcap_{H \leqslant G, A \subseteq G} H$ de doorsnede van alle ondergroepen van G die A bevatten.
Dit is de kleinste ondergroep van G die A bevat.

Opmerking

- $\langle \emptyset \rangle = \{e\}$
- Uit de definitie volgt dat als $H \leqslant G$, dan geldt $\langle A \rangle \subseteq H \leftrightarrow A \subseteq H$

§2.4 Ondergroepen voortgebracht door een verzameling

Uitleg

$\langle A \rangle$ heet de ondergroep voortgebracht door A.
Zij $\overline{A} = \{a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$ met alle $a_i \in A, n \geq 0, e_i = \pm 1\}$
Dan is $\overline{A}$ een ondergroep van G.
$e \in \overline{A}$, want met $n = 0$, leeg product is e.
Als $A \neq \emptyset, e = aa^{-1} \forall a \in A$

- $\overline{A}$ is gesloten onder producten.
- $\overline{A}$ is gesloten onder inverses.

Als $a_1^{e_1} \ldots a_n^{e_n} \in \overline{A}$, dan is $(a_1^{e_1} \ldots a_n^{e_n})^{-1} = a_n^{-e_n} \ldots a_1^{-e_1}$ weer in $\overline{A}$ met $-e_i = \pm 1$

§2.4 Ondergroepen voortgebracht door een verzameling

Opmerking

Als G abels is en $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, dan is
$\overline{A} = \{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n} | m_i \in \mathbb{Z}\}$ (Raap alle $a_i^{\pm 1}$ samen)

Bewijs

Claim: $\overline{A} = \langle A \rangle$ voor elke $A \subseteq G$
$\overline{A} \leqslant G$ en $A \subseteq \overline{A}$
$\langle A \rangle \subseteq \overline{A}$
$A \subseteq \langle A \rangle$ en $\langle A \rangle$ is een ondergroep.
$a_1^{e_1} \ldots a_n^{e_n} \in \langle A \rangle$ en in $\overline{A} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \langle A \rangle \Rightarrow \langle A \rangle = \overline{A}$

Opmerking

Als $H \leqslant G$, dan geldt $\langle A \rangle \subseteq H \Leftrightarrow A \subseteq H$

§2.4 Ondergroepen voortgebracht door een verzameling

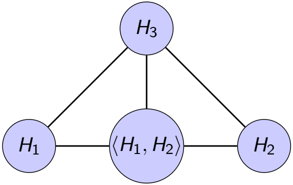
Voorbeeld

- $G = \mathbb{Z}$, dan krijg je $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots e_n + a_n$, omdat $\mathbb{Z}$ een optel groep is.
  $A = \{6, 8\} \Rightarrow \langle A \rangle = \langle 6, 8 \rangle$ $(= \langle \{6, 8\} \rangle)$
  $\langle 6, 8 \rangle = \{6m + 8n | m, n \in \mathbb{Z}\} = \langle 2 \rangle$ want
  $\langle 6, 8 \rangle \subseteq \langle 2 \rangle \leftrightarrow \{6, 8\} \subseteq \langle 2 \rangle$ en $\langle 2 \rangle \subseteq \langle 6, 8 \rangle \leftrightarrow \{2\} \subseteq \langle 6, 8 \rangle$
- $G = D_1 2$, $A = \{s, sr\}$, dan $\langle s, sr \rangle = D_1 2$:
  $s, sr \in H$, dus $ssr = r \in H \Rightarrow r^i \in H$ met $i \in \mathbb{Z}$.
  Dus $sr^i \in H$ met $i \in \mathbb{Z}$
  Maar $\{s^{m_1} (sr)^{m_2}$ met $m_i \in \mathbb{Z}\} = \{e, r, s, sr\}$ is veel te klein.
- $S_n = \langle (1\ 2)(1\ 2\ 3\ \dots\ n) \rangle$ als $n \geq 2$

§2.5 De graaf van ondergroepen

G eindige groep $\Rightarrow$ G heeft eindig veel ondergroepen.
Maak deze graaf:

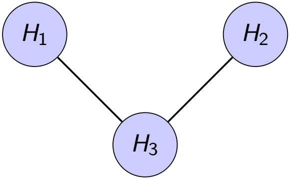
- Punten $\leftrightarrow$ ondergroepen



$\leftrightarrow H_3 = \langle H_1, H_2\rangle : H_1 \leqslant H_3, H_2 \leqslant H_3$, dus $\langle H_1, H_2\rangle \leqslant H_3$
Omdat er geen ondergroep is tussen H_1 en H_3 en $H_2 \not\leqslant H_1$
volgt er dat $H_3 = \langle H_1, H_2\rangle$

Maak deze graaf:

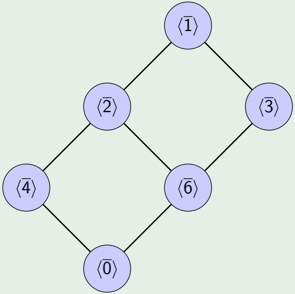
- Lijnen $\leftrightarrow$ $B \leqslant A$ en $\nexists$ ondergroep C met $B \leqslant C \leqslant A$
  Idem:



$\leftrightarrow H_3 = H_1 \cup H_2$

Voorbeeld

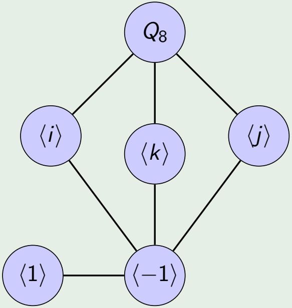
- $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \langle\overline{1}\rangle$ is cyklisch. Ondergroepen corresponderen met positieve delers van $12 = 2^2 \cdot 3$
  Namelijk: $\langle\overline{0}\rangle = \langle\overline{12}\rangle, \langle\overline{1}\rangle, \langle\overline{2}\rangle, \langle\overline{3}\rangle, \langle\overline{4}\rangle, \langle\overline{6}\rangle$



De graaf van ondergroepen

Voorbeeld (vervolg)

- $G = Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
  Cyklische ondergroepen:
  $\langle 1 \rangle, \langle -1 \rangle, \langle i \rangle = \langle -i \rangle, \langle -j \rangle = \langle -j \rangle, \langle k \rangle = \langle -k \rangle$



§3.1 Quotiëntgroepen en homomorfismes

Idee

$n \geq 2$, dan is $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ een optelgroep via $\overline{a} + \overline{b} =^{def} \overline{a+b}$, dus de optelling op $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ komt uit de optelling op $\mathbb{Z}$.
Je wilt $H \leqslant G$ en 'klassen' $\overline{X} = X$ modulo H en groepsbewerking $\overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{XY}$ (Tussen XY geldt de werking van G). Dat werkt als H aan een voorwaarde voldoet. (NL: Normaaldeler, EN: Normal subgroup)

Homomorfisme

$K = \text{Ker}\,(\phi) = \{g \in G | \phi(g) = e_H\} \leqslant G$
Voor $h \in H$ heet $\phi^{-1}(h) = \phi^{-1}(\{h\}) = \{g \in G | \phi(g) = h\}$ de vezel van ϕ bij h.
$\phi^{-1}(h) = \emptyset \Leftrightarrow h \notin \text{Im}(\phi)$

Opmerking

$\phi^{-1}(e_H) = K$

Gevolg

Als $h \in \text{Im}(\phi)$ en $\phi(g) = h$, dan is $\phi^{-1}(h) = g \cdot K = K \cdot g$ met $gK = \{gk|k \in K\}$ en $Kg = \{kg|k \in K\}$

Voorbeeld

- $\phi^{-1}(h) = gK$, $gK \subseteq \phi^{-1}(h)$: Neem gk met $k \in K$ en pas ϕ toe: $\phi(gk) = \phi(g)\phi(k) = he_H = h$
- $\phi^{-1}(h) \subseteq gK$: Neem $x \in \phi^{-1}(h)$, dus $\phi(x) = h$ $x = gk$ voor een $k \in K$. Te bewijzen: dan moet $k = g^{-1}x \in K = \text{Ker }(\phi)$ zijn.
  $\phi^{-1}(g^{-1}x) = \phi(g^{-1})\phi(x) = h^{-1}h = e_H$.
  Dus het klopt: $x = gk$ met $k = g^{-1}x \in K$

Voorbeeld

$G = \mathbb{Z}$m $H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ met $n \geq 2$
$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ met $\phi(a) \mapsto \bar{a}$
Vezel boven $\bar{0} = \phi^{-1}(\bar{0}) = n\mathbb{Z}$
Vezel boven $\bar{1} = \phi^{-1}(\bar{1}) = 1 + n\mathbb{Z}$ want $\phi(1) = \bar{1}$
Stel $n = 3$ dan
$\phi^{-1}(\bar{0}) = 3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
$\phi^{-1}(\bar{1}) = 1 + 3\mathbb{Z} == \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$
$\phi^{-1}(\bar{2}) = 2 + 3\mathbb{Z} == \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = 5 + 3\mathbb{Z}$

Definitie

G een groep en $H \leqslant G$ en $g \in G$
Zij $gH = \{gh | h \in H\}$
Zij $Hg = \{hg | h \in H\}$
gH heet de **linker** nevenklasse van H voor g
Hg heet de **rechter** nevenklasse van H voor g
Een element van een nevenklasse heet een representant van die klasse

Voorbeeld

$G = S_3$ en $H = \langle(1\ 2)\rangle = \{e, (1\ 2)\}$

Linker nevenklasse:

$eH = H = \{e, (1\ 2)\} = (1\ 2)H$

$(1\ 3)H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\} = (1\ 2\ 3)H$

$(2\ 3)H = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = (1\ 3\ 2)H$

Rechter nevenklasse:

$He = H = \{e, (1\ 2)\} = H(1\ 2)$

$H(1\ 3) = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\} = H(1\ 3\ 2)$

$H(2\ 3) = \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\} = H(1\ 2\ 3)$