Linear Algebrea - Opdracht 4

Luc Veldhuis

Maart 2017

1. In $\mathbb{C}^3$ zij $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ en $V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

   Bestaat er een deelruimte $W \subset \mathbb{C}^3$ zodat $\mathbb{C}^3 = U \oplus W$ en $\mathbb{C}^3 = V \oplus W$?

   Ja, namelijk $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

   Nu moeten we nog laten zien dat het een directe som is door te laten zien dat:

   - $U + W = \mathbb{C}^3$

     Neem $x \in \mathbb{C}^3 = \begin{pmatrix}d\\e\\g\end{pmatrix}$.

     Dan kunnen we dit schrijven als $g\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (d-g)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (e-g)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g+d-g\\g+e-g\\g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d\\e\\g\end{pmatrix}$. Hierbij gebruiken we dat $g\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in U$ en $(d-g)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, (e-g)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in W$. Dus $U + W = \mathbb{C}^3$.

   - $U \cap W = \{0\}$

     Neem $x \in U \cap W$ met α, β en $\gamma \in \mathbb{C}$. Dit geeft $x = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

     Dit geeft:

     $$\begin{cases}\alpha = \beta\\ \alpha = \gamma\\ \alpha = 0\end{cases}$$

     Dus $\alpha = \beta = \gamma = 0$, dus de enige vector $x \in U \cup W$ is $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

   Dus $\mathbb{C}^3 = U \oplus W$

   - $V + W = \mathbb{C}^3$

     Neem $x \in \mathbb{C}^3 = \begin{pmatrix}d\\e\\g\end{pmatrix}$.

Dan kunnen we dit schrijven als $g\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+(d-g)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(e-g)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-g+d+g\\-g+e+g\\g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\e\\g\end{pmatrix}$. Hierbij gebruiken we dat $g\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\in V$ en $(d-g)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, (e-g)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in W$. Dus $V+W=\mathbb{C}^3$.

- $V\cap W=\{0\}$

  Neem $x\in V\cap W$. Dit geeft $x=\alpha\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ met α, β en $\gamma\in\mathbb{C}$

  Dit geeft:

$$\begin{cases}-\alpha=\beta\\-\alpha=\gamma\\\alpha=0\end{cases}$$

  Dus $\alpha=\beta=\gamma=0$, dus de enige vector $x\in V\cup W$ is $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Dus $\mathbb{C}^3=V\oplus W$

2. Zij V een vectorruimte over $\mathbb{C}$ en $P:V\to V$ een projectie en $I:V\to V$ de identiteit. Bewijs de volgende uitspraken:

   (a) $I-P$ is ook een projectie
   Voor een projectie moet gelden: $P(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha P(v_1)+\beta P(v_2)$. Bewijs dit:

$$\begin{aligned}(I-P)(\alpha v_1+\beta v_2)&=I(\alpha v_1+\beta v_2)-P(\alpha v_1+\beta v_2)\\&=I(\alpha v_1)+I(\beta v_2)-(P(\alpha v_1)+P(\beta v_2))\\&=\alpha I(v_1)+\beta I(v_2)-\alpha P(v_1)-\beta P(v_2))\\&=\alpha(I(v_1)-P(v_1))+\beta(I(v_2)-P(v_2))\\&=\alpha(I(v_1)-P(v_1))+\beta(I(v_2)-P(v_2))\\&=\alpha(I-P)(v_1)+\beta(I-P)(v_2)\end{aligned}$$

   Dus dit is een lineaire afbeelding. Nu moeten we nog bewijzen dat geldt $(I-P)^2=(I-P)$. Dit geeft: $(I-P)(I-P)(x)=(I-P)(x-P(x))=(I-P)(x)-(I-P)(P(x))=x-P(x)-P(x)+P^2(x)=x-2P(x)+P(x)=x-P(x)=(I-P)(x)$.

   (b) Ker $P=\mathrm{Im}(I-P)$
   We weten dat P een projectie is, dus $P=P^2$. Hieruit volgt dat $P(x)=P^2(x)$ voor een willeurige $x\in\mathbb{C}$.
   Eerst bewijzen we dat $\mathrm{Im}(I-P)\subseteq$ Ker P.
   Im $(I-P)=\{(I-P)(x)|x\in\mathbb{C}\}=\{(x-P(x)|x\in\mathbb{C}\}$ deze vectoren behoren tot Ker P omdat $P(x-P(x))=P(x)-P^2(x)=(P-P)(x)=0$
   Nu bewijzen we dat Ker $P\subseteq$ Im $(I-P)$
   Ker $P=\{x\in\mathbb{C}|P(x)=0\}$ deze vectoren behoren tot Im $(I-P)$ omdat $(I-P)(x)=x-P(x)=x-0=x$
   Dus Ker $P=\mathrm{Im}(I-P)$

(c) Im $P = \mathrm{Ker}(I - P)$

Bewijs eerst dat Im $P \subseteq \mathrm{Ker}(I - P)$

Im $P = \{P(x) | x \in \mathbb{C}\}$. Deze vectoren behoren tot Ker $(I - P)$ omdat $(I - P)(P(x)) = P(x) - P^2(x) = (P - P)(x) = 0$

Bewijs nu dat $\mathrm{Ker}(I - P) \subseteq$ Im P

Ker $(I - P) = \{x \in \mathbb{C} | (I - P)(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{C} | x - P(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{C} | x = P(x)\}$.

Deze vectoren behoren tot Im P omdat $P(x) = x$.

Dus Im $P = \mathrm{Ker}(I - P)$.