Analysis 1B

Luc Veldhuis

9 December 2016

Differentiaal vergelijkingen

Recap

$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = 0$
$a_i \neq 0$
$y = e^{\lambda t}$
$a_n \lambda^n + \cdots + a + 0\lambda = 0$
Los op voor $\lambda \in \mathbb{C}$
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$
$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$

Opmerking

Als $\lambda_i = \cdots = \lambda_{i+k}$
$e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \ldots, x^k e^{\lambda_i x}$
$-\lambda_i = a + ib$, $\lambda_{i+1} = a - ib$
$y_i = e^{ax} \cos(bx)$, $y_{i+1} = e^{ax} \sin(bx)$

Wanneer het niet werkt

Deze manier werkt niet als $y'' + xy' + y = 0$
$e^{\lambda x}$, $e^{\lambda(x)}$
Gebruik als constante misschien?
$\lambda^2 e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x}$
$\lambda^2 + x\lambda + 1 = 0$ heeft geen oplossing.
Dus dan werkt deze manier niet.

Differentiaal vergelijkingen

Manieren tot nu toe

$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = 0$

$y = y_p + y_h$

- Substitutie methode (makkelijker, maar werkt niet altijd)
- Variatie van parameters (werkt altijd)

$f(x) : x^n$ of $f(x) : e^{\lambda x}$ of $f(x) : \sin(\alpha x)$ of $f(x) : \cos(\beta x)$ of lineare combinaties van deze zijn op dezelfde manier op te lossen.

Voorbeelden van lineare combinaties

$Ax^n + Be^{\lambda x} + C\sin(\alpha x)$

$x^n e^{\lambda x}\cos(\alpha x) + (x + x^2)\sin(\beta x)$

Differentiaal vergelijkingen

Voorbeeld

Probeer substitutie maar mislukt, dus gebruik variatie van variabelen

$$y'' + 6y' + 5y = e^{-x}$$

$$\text{Homogeen}$$

$$y'' + 6y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda + 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -5 \quad \lambda = -1$$

$$y_h = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-x}$$

Voorbeeld (vervolg)

Particulier

$$
\begin{aligned}
y_p &= Ae^{-x} \\
0 &= e^{-x} \text{ lukt niet} \\
Ae^x + 6Ae^x + 5Ae^x &= e^x \\
12A &= 1 \\
A &= \frac{1}{12} \\
y &= y_p + y_h \\
y &= \frac{1}{12}e^x + c_1 e^{-5x} + c_2 e^{e-x}
\end{aligned}
$$

Voorbeeld(vervolg)

Particuliere oplossing met substitutie

$$y = Axe^{-x}$$
$$y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$$
$$y_p'' = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$$

Invullen in formule:

$$y'' + 6y' + 5y = e^{-x}$$
$$-2Ae^{-x} + Axe^{-x} + 6Ae^{-x} - 6Axe^{-x} + 5Ae^{-x} = e^{-x}$$
$$y_p = \frac{1}{4}e^{-x}$$

Voorbeeld

Met substitutie methode

$$
\begin{aligned}
y'' + 6y + 5y &= 5x^2 + \sin(x) \\
y_p &= A + Bx + Cx^2 + D\sin(x) + E\cos(x) \\
y_p' &= B + 2Cx + D\cos(x) - E\sin(x) \\
y_p'' &= 2C - D\sin(x) - E\cos(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2C + 6B + 5A) + (5B + 12C)x + 5Cx^2 \\
&+(-D - 6E + 5D)\sin(x) + (-E + 6D + 5E)\cos(x) \\
&= x^2 + sin(x)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld (vervolg)

$$
\begin{aligned}
2C + 6B + 5A &= 0 \quad 5B + 12C = 0 \\
5C &= 5 \quad 4D - 6E = 1 \\
4E + 6D &= 0 \\
D &= \frac{1}{13} \quad E = -\frac{3}{26} \\
B &= -\frac{12}{5} \quad A = \frac{62}{25} \\
C &= 1
\end{aligned}
$$

$$y_p = \frac{62}{25} - \frac{12}{5}x + x^2 + \frac{1}{13}\sin(x) - \frac{3}{26}\cos(x)$$

$$y = \frac{62}{25} - \frac{12}{5}x + x^2 + \frac{1}{13}\sin(x) - \frac{3}{26}\cos(x) + c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-x}$$

Voorbeeld

Oplossen met variatie van parameters (werkt altijd)

$$y = c_1(x)e^{-5x} + c_2(x)e^{-x}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-5x} & e^{-x} \\ -5e^{-5x} & -e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-x}}{1} \end{pmatrix}$$

e^{-x} is linkerzijde, 1 is parameter voor hoogste afgeleide

$$e^{-5x}c_1' + e^{-x}c_2' = 0$$

$$5e^{-5x}c_1' - e^{-x}c_2' = e^{-x}$$

$$c_2' = -e^{-4x}c_1'$$

$$c_2' = \frac{1}{4}$$

Voorbeeld (vervolg)

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= -\frac{1}{16}e^{4x} + c_1 \\
c_2(x) &= \frac{1}{4}x + c_2 \\
y_p &= (-\frac{1}{16}e^{4x} + c_1)e^{-5x} + (\frac{1}{4}x + c_2)e^{-x} \\
y &= \frac{1}{16}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} + c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-x}
\end{aligned}
$$

Particuliere oplossing is niet uniek, maar door nog niet gekozen c_2 is dit hetzelfde als de andere gevonden oplossing.

Differentiaal vergelijkingen

Bewijs variabele van parameters

$ay'' + by' + cy = f(x)$
$y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$
$y' = c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 + c_1\phi_1' + c_2\phi_2'$
$y'' = c_1''\phi_1 + c_2''\phi_2 + 2c_1'\phi_1' + 2c_2'\phi_2' + c_1\phi_1'' + c_2\phi_2''$
Stel $c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 \equiv 0$
Dit is een keuze en beperkt c_1 en c_2
Dan is $c_1''\phi_1 + c_2''\phi_2 + c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' \equiv 0$
Dit geeft: $y' = +c_1\phi_1' + c_2\phi_2'$
$y'' = c_1\phi_1'' + c_2\phi_2'' + c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2'$

Bewijs variabele van parameters (vervolg)

Invullen in vergelijking:

$ac_1\phi_1''+bc_1\phi_1'+cc_1\phi_1+ac_2\phi_2''+bc_2\phi_2'+cc_2\phi_2+ac_1'\phi_1'+ac_2'\phi_2' = f(x)$

Dit geeft $c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' = \frac{f(x)}{a}$

Want $c_1(a\phi_1'' + b\phi_1' + c\phi_1) + c_2(a\phi_2'' + b\phi_2' + c\phi_2) = 0$ volgens de homogene oplossing $a\phi_i'' + b\phi_i' + c\phi_i = 0$

Differentiaal vergelijkingen

Voorbeeld

$y'' + y = \sin(x)$
$\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$
$\phi_1 = \cos(x),\ \phi_2 = sin(x)$
$y = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x)$
Maak stelsel:

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

$c_1' \cos(x) + c_2' \sin(x) = 0$

Differentiaal vergelijkingen

Voorbeeld (vervolg)

$$
\begin{aligned}
c_2' &= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} c_1' \\
-\sin(x)c_1' + \cos(x)c_2' &= \sin(x) \\
-\sin(x)c_1' - \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} c_1' &= \sin(x) \\
-c_1'\left(\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin(x)}\right) &= \sin(x) \\
\frac{-c_1'}{\sin(x)} &= \sin(x) \\
c_1' &= -\sin^2(x) \\
c_2' &= \sin(x)\cos(x) \\
c_2 &= \frac{1}{2}\sin(x) + C_2 \\
c_1 &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\sin^2(x) \\ \sin(x)\cos(x) \end{pmatrix}
$$

Differentiaal vergelijkingen

Voorbeeld (vervolg)

Nodig bij integeren van $c_1' \; e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$
$(e^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2$
$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ Dit geeft
$c_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C_1$
Dus
$y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{4}\sin^2(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\sin^3(x)$