Analysis 1B

Luc Veldhuis

11 November 2016

Herhaling

Hoofdstelling calculus

Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is en $f' \in R[a, b]$ dan geldt $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Partieel integeren

Als f, g integreerbaar zijn en $f', g' \in R[a, b]$ dan geldt $\int_a^b fg'(x)dx = (fg)(x)|_a^b - \int_a^b (f'g)dx$

Theorem

Asl $f \in R[a,b]$ en $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ dan geldt:

- F uniform continue op $[a,b]$
- Als f continue is op $x = c \in [a,b]$ dan $F'(c) = f(c)$

Bewijs

$f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \exists M : |f| < M$
Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = y - x$ dan geldt voor $|x - y| < \delta$ en $x, y \in D$ dat

Bewijs (vervolg)

$$F(x) - F(y) = |\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt| =$$

$$|\int_a^x f(t)dt - (\int_x^y f(t)dt + \int_a^x f(t)dt)| =$$

$$|-\int_x^y f(t)dt| = |\int_x^y f(t)dt| \leq$$

$$|\int_x^y |f(t)|dt| \leq |\int_x^y Mdt| =$$

$$|Mt|_x^y| = M|(y-x)| < M\delta = \epsilon$$

Theorie integralen

Stelling

Gegeven f continu op c. Kies $\epsilon_W = \epsilon > 0$, er is een δ_W zodat als $|x - c| < \delta$ dan geldt $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.
Aan te tonen:

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

Theorie integralen

Bewijs

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = \delta_W$ dan:
$x \in (c-\delta, c+\delta) \oplus t \in (c,x) \Rightarrow t \in (c-\delta, c+\delta)$

$$|\frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt}{x-c} - f(c)| =$$

$$|\frac{\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt - f(c)(x-c)}{x-c}| =$$

$$|\frac{\int_c^x f(t)dt - \int_c^x f(t)dt}{x-c}| =$$

$$\frac{|int_c^x (f(t)-f(c))dt|}{|x-c|} \leq \frac{|int_c^x |f(t)-f(c)|dt|}{|x-c|} \leq$$

$$\frac{|\int_c^x \epsilon_W dt|}{x-c} = \frac{\epsilon_W |x-c|}{x-c} = \epsilon_W = \epsilon$$

Tweede hoofdstelling van de calculus

Corollary

Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu, en $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ dan geldt $F'(x) = f(x)$

Regels integreren

- $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
- $\int \frac{1}{x} dx = ln(x)$
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int sin(x) dx = -cos(x)$
- $\int cos(x) dx = sin(x)$
- $\int \frac{1}{cos^2(x)} dx = tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
- $\int \frac{1}{sin(x)} dx = cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$
- $\int tan(x) dx = -ln|cos(x)|$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctan(\frac{x}{a}), a > 0$
- $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = arcsin(\frac{x}{a})$

Bewijs

$$
\begin{aligned}
y &= arcsin(x) \\
x &= sin(x) \\
1 &= cos(y)\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{cos(y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(y)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}
$$

Substitutie stelling

Stelling

$g : [c, d] \to [a, b]$ differentieerbaar en $g' \in R[a, b]$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu. Dit geeft $a = g(c)$ en $b = g(d)$ dan geldt:

$$\int_c^d (f \circ g)(x) g'(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Voorbeeld

$$f(x) = sin(x)$$
$$g(x) = x^2 + 1$$
$$\int_c^d sin(x^2 + 1) 2x dx = \int_{a=c^2+1}^{b=d^2+1} sin(x) dx =$$
$$-cos(x)\Big|_{c^2+1}^{d^2+1} = -cos(d^2 + 1) + cos(c^2 + 1)$$

Substitutie stelling

Bewijs

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_a^x f(t)dt \\
h(x) &= F(g(x)) \\
&= \int_a^{g(x)} f(t)dt
\end{aligned}
$$

f continue dus f is differentieerbaar en $F'(x) = f(x)$.
Samenstelling differentieerbare functies is weer differentieerbaar
$\Rightarrow F(g(x)) = h$ differentieerbaar.

Substitutie stelling

Bewijs (vervolg)

$$\begin{aligned} h'(x) &= F(g(x))' \\ &= F'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

$F'(g(x))$ en $g'(x) \in R[c,d]$, dus $h'(x) \in R[c,d]$

$$\begin{aligned} \int_c^d h'(x) &= \int_d^c F'(g(x))g'(x)dx \\ &= F(g(d)) - F(g(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

Substitutie stelling

Bewijs (vervolg)

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = \frac{d}{dg(x)}\int_a^{g(x)} f(t)dt\frac{dg(x)}{dx}$$
$$= f(g(x))g'(x)$$

Voorbeelden

Voorbeeld 7a

$$u(x) = 1 - x^2 \quad du = -2x\ dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-u)x}{\sqrt{u}} dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} -\frac{1}{2}\frac{(1-u)(-2x)}{\sqrt{u}} dx = -\frac{1}{2}\int_{u(x)=u(0)=1}^{u(x)=u(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}} \frac{1-u}{\sqrt{u}} du =$$

$$-\frac{1}{2}(\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{u}} du - \int_{\frac{3}{4}}^{1} \sqrt{u}) = -\frac{1}{2}(\int_{\frac{3}{4}}^{1} u^{-\frac{1}{2}} du - \int_{\frac{3}{4}}^{1} u^{\frac{1}{2}}) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} |_{\frac{3}{4}}^{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} |_{\frac{3}{4}}^{1}$$

Voorbeelden

Voorbeeld 7b

$$u(x) = arctan(x)$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$
$$du = \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$x = tan(u)$$
$$\int \frac{arctan(x)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{arctan(x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{1+x^2}dx =$$

Voorbeelden

Voorbeeld 7b (Vervolg)

$$\int \frac{u}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} du = \frac{u}{\sqrt{1+tan^2(u)}} du =$$

$$\int \frac{u}{\sqrt{1+\frac{sin^2(u)}{cos^2(u)}}} du = \int \frac{u}{\sqrt{\frac{cos^2(u)+sin^2(u)}{cos^2(u)}}} du =$$

$$\int \frac{u}{\sqrt{\frac{1}{cos^2(u)}}} du = \int \frac{u}{\frac{1}{cos(u)}} du =$$

$$\int u \; cos(u) du = u \; sin(u) - \int sin(u) du =$$

$$u \; sin(u) + cos(u) + C =$$

$$arctan(x) \; sin(arctan(x)) + cos(arctan(x)) + C$$