Complexe Analyse

Luc Veldhuis

20 Februari 2017

Herhaling

Afleidbaarheid

$f : D \to \mathbb{C}$ analytisch met D open
$\Leftrightarrow \forall z \in D$ f is afleidbaar in $z \in D \Leftrightarrow f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

Belangrijke stelling

$f = u + iv$ analytisch $\Leftrightarrow u, v$ partieel afleidbaar op continue manier, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ (Cauchy-Riemann vergelijkingen)

Voorbeeld

$f(z) = |z|^2$, $\frac{\partial}{\partial x} = u_x \neq v_y = 0$ niet analytisch.

Harmonische functies

Vraag

Gegeven $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bestaat er altijd $v ; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zodat $f : u + iv$ analytisch is?
Nee!

Definitie

Een functie $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt **harmonisch** genoemd als deze aan de Laplace vergelijking voldoet.

$$0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Voorbeeld

$u(x, y) = e^x \cos(y)$, $u_{xx} = e^x \cos(y) = -u_{yy}$.

Harmonische functies

Stelling

Zij $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ analytisch en neem aan dat f' analytisch is. Dan zijn u en v harmonisch.

Bewijs

$$u_{xx} =^{\text{CR}} v_{yx} = v_{xy} =^{\text{CR}} -u_{yy}$$
$$v_{xx} =^{\text{CR}} -u_{yx} = -u_{xy} =^{\text{CR}} -v_{yy}$$

Speciale eigenschappen

Stelling

Stel $f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ analytische functies en zij $D' \subset D$ een deelverzameling of $D' = D \cap l$ met l een lijn.
Als $f_1(z) = f_2(z)\ \forall z \in D'$, dan $f_1 = f_2$ op D. Bewijs later.

Corollary (Schwartz reflexion principle)

Zij $D \subset \mathbb{C}$ domein, zodat $\overline{D} = \{\bar{z} : z \in D\} = D$ (symmetrisch in reële as) en f analytisch, dan geldt dat als $\forall z \in D\ f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow$ $\forall z \in D \cap \mathbb{R}$: $f(z) \in \mathbb{R}$.

Speciale eigenschappen

Bewijs

We laten eerst zien dat $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ ook analytisch is.
Met $\tilde{f} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ geeft $\tilde{u}(x,y) = u(x,-y)$, $\tilde{v}(x,y) = -v(x,-y)$.
$\tilde{u}_x = u_x = v_y = \tilde{v}_y$ en $\tilde{u}_y = -u_y = v_x = -\tilde{v}_x$.
Daarmee kunnen we de stelling gebruiken met $f_1 = f$, $f_2 = \tilde{f}$ en $I = \mathbb{R}$.
$\forall z \in D \cap \mathbb{R} : f(z) \in \mathbb{R}$
$\forall z \in D \cap \mathbb{R} : f(z) = \tilde{f}(z)$
$\forall z \in D \cap \mathbb{R} : \underline{f(z)} = \tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$
$\forall z \in D \cap \mathbb{R} : \overline{f(z)} = f(\overline{z})$

Elementaire functies

Definitie

Voor de complexe getallen is de exponentiële functie gedefinieerd als $\exp(z) = e^z = e^x e^{iy}$, waarbij $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$ en $z = x + iy$.

Opmerking

Blijkbaar geldt $|e^z| = e^x$ (omdat $|e^{iy}| = \cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$) en $arg(e^z) = y + e\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ waarbij de **meerwaardige** functie arg gedefinieerd is als $arg(z) := Arg(z) + 2\pi n \in (-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{Z}$

Stelling

Het geldt

- $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $e^{nz} = (e^z)^n$
- $e^z = e^x$ als $z = x$, $e^{iy} = e^{iy + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$ voor $z = x + iy$.
- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch met $\exp' = \exp$

Elementaire functies

Bewijs

$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) =$
$e^{x_1}(\cos(y_1) + i\sin(y_1))e^{x_2}(\cos(y_2) + i\sin(y_2))$
$e^z = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$. $u_x = e^x\cos(y) = v_y$,
$u_y = -e^x\sin(y) = -v_x \Rightarrow$ *exp* analytisch met $f' = u_x + iv_x = f$

Voorbeeld

$\exp(2 \pm 3\pi i) = \exp(2+\pi i) = \exp(2)\exp(\pi i) =$
$e^2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -e^2$

Elementaire functies

Vraag

Wat is de oplossing van $e^w = z$?
In poolcoordinaten: $z = re^{i\theta} = e^x e^{iy} = e^w$.
$\Rightarrow \begin{cases} x & = \ln(r) = \ln|z| \\ y & = \theta + 2\pi n = arg(z) \end{cases}$ meerwaardig voor $n \in \mathbb{Z}$.

Definitie

Het logaritme over de complexe getallen is gedefinieerd als **meerwaardige**(!) functie voor $z \in \mathbb{C}$:

$$\log(z) = \ln|z| + i\ arg(z)$$

Opmerking

$e^{\log(z)} = z$, $\log(e^z) = z + i2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Want $\ln|e^z| + i\ arg(e^z) = x + i(y + 2\pi n)$ voor $n \in \mathbb{Z}$ als $z = x + iy$

Elementaire functies

Voorbeeld

- $\log(e) = \ln|e| + i\ arg(e) = 1 + i2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$
- $\log(i) = \ln|i| + i\ arg(i) = 0 + i\frac{1}{2}\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$
- $\log(-1 + i\sqrt{3}) = \ln|-1 + i\sqrt{3}| + i\ arg(-1 + i\sqrt{3}) = \ln|2| + 2\pi i(\frac{1}{3} + n),\ n \in \mathbb{Z}.$

Stelling

Het geldt

- $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$
- $\log(\frac{1}{z}) = -\log(z)$, $\log(z^n) = n\log(z)$

Elementaire functies

Bewijs

$\log(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\ arg(z_1 z_2) =$
$\ln|z_1| + \ln|z_2| + i\ (arg(z_1) + arg(z_2))$ want *arg* is meerwaardig.

Opmerking

$Arg(z_1 z_2) \neq Arg(z_1) + Arg(z_2)$ op $(-\pi, \pi]$.

Tak van de logaritme

Definitie

Een tak van de logaritme is een beperking van de meervoudige functie log tot een domein $D \subset \mathbb{C}$ zodat de restrictie eenwaardig en analytisch is (continu).

Voorbeeld

Zij $l \in \mathbb{C}$ een straal die bij $O \in \mathbb{C}$ begint, dan bestaat een tak van log die op $D = \mathbb{C} \setminus l$ gedefinieerd is.

Definitie

De **hoofdtak** (of **principal branch**) is gedefinieerd als $Log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$, $Log(z) = \ln |z| i \ Arg(z)$. Er geldt $\theta \neq \pm\pi$.
Een andere tak kan zijn: $Log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ dan zit het argument tussen $(0, 2\pi)$.