# Topologie - Opdracht 8

Luc Veldhuis - 2538227

April 2017

Q1) Laat $(X, \mathcal{T})$ een lokaal compacte Hausdorff-ruimte en $(X^*, \mathcal{T}^*)$ de eenpuntscompacticatie van $X$ zijn. Bewijs de volgende twee uitspraken.

(a) $X$ is compact dan en slechts dan als $\{*\} \subset X^*$ open is.
Bewijs '$\Rightarrow$':
Neem aan $X$ compact is.
We weten dat voor $\mathcal{T}^*$ geldt dat voor een $V \subseteq X^*$, $* \in V$, als $X \setminus (V \setminus \{*\})$ compact is, dan is $V$ open.
We nemen $V = \{*\}$. Dan geldt dat $X \setminus (\{*\} \setminus \{*\}) = X \setminus \emptyset = X$ compact is.
Dus $\{*\}$ is open.
Bewijs '$\Leftarrow$':
Neem aan dat $\{*\}$ open is.
We weten dat $(X^*, \mathcal{T}^*)$ compact en Hausdorff is. We weten ook dat voor elke gesloten deelverzameling van een compacte ruimte geldt dat deze weer compact is (7.6). We nemen $X^* \setminus \{*\} = X$ is gesloten omdat $\{*\}$ open is.
Omdat $X$ een gesloten deelverzameling is van de compacte set $X^*$, moet gelden dat $X$ ook compact is.

(b) cl $X = X^*$ dan en slechts dan als $X$ niet compact is.
Bewijs '$\Rightarrow$':
Neem aan dat cl $X = X^*$.
Als $X$ gesloten is, moet gelden van cl $X = X$.
Dit is niet het geval, dus $X$ is niet gesloten.
Dat betekend dat $X^* \setminus X = \{*\}$ niet open is.
We weten dat in $\mathcal{T}^*$ voor een $V \subseteq X^*$, met $* \in V$, geldt dat als $X \setminus (V \setminus \{*\})$ compact is, dan is $V$ open. Dus als $V$ niet open is, is $X \setminus (V \setminus \{*\})$ niet compact. Neem nu $V = \{*\}$.
Hieruit volgt dat $X \setminus (\{*\} \setminus \{*\}) = X$ niet compact is.
Bewijs '$\Leftarrow$':
Neem aan dat $X$ niet compact is.
Stel $X$ is gesloten. We weten dat $X^*$ compact is. Dan volgt uit 7.6 dat elke gesloten deelverzameling van een compacte ruimte weer compact is. Dus dan is $X$ compact. Tegenspraak.
Dus $X$ is niet gesloten.
Dit betekend dat cl $X \neq X$.
De enige gesloten verzameling die $X$ bevat, is $X^*$, omdat $X^* = X \cup \{*\}$.
Uit de definitie halen we: cl $X = \bigcap_{C \text{ gesloten}, X \subseteq C} = X^*$.
Dus cl $X = X^*$.

Q2) Zij $X$ een locaal compacte ruimte en $A \subseteq X$ een gesloten deelverzameling. Toon aan, dat $A$ ook locaal compact is.

Op $A$ geldt nu de deelverzamelings topologie.
Dus $V \subseteq A$ open in $\mathcal{T}_A$ als er een open $U \subseteq X$ open bestaat zodat $V = U \cap A$.
Voor de definitie van lokale compactheid gebruiken we de definitie uit Croom [1], omdat de definitie uit het dictaat eigenlijk alleen gebruikt mag worden als $X$ Hausdorff is (10.2) en dat is nu niet het geval.
Hierin staat dat een ruimte $X$ lokaal compact is als geldt dat voor elk punt $x \in X$ een open set $U$ bestaat, zodat $x \in U$ en cl $U = \overline{U}$ compact is.
Omdat $X$ lokaal compact is, bestaat er dus voor elk punt $a \in A$ een $U$ open in $\mathcal{T}_X$, zodat $x \in U$ en cl $U$ compact is.
We weten dat $U \cap A$ open is in $\mathcal{T}_A$, omdat $U$ open is in $\mathcal{T}_X$.
Voor een willekeurige $a \in A$ geldt nu dat $a \in A$ en $a \in U$, met $U$ open in $\mathcal{T}_X$, dus ook $x \in U \cap A$ open in $\mathcal{T}_A$
Nu moeten we bewijzen dat cl $(U \cap A)$ compact is.
We weten dat voor $A, B \subseteq Y$, met $Y$ een set met een topologie, geldt dat $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Zie opdracht 2.1 uit het dictaat.
Dus we weten dat cl $(U \cap A) \subseteq$ cl $U \cap$ cl $A$. Maar $A$ is gesloten, dus cl $A = A$. Dus cl $(U \cap A) \subseteq$ cl $U \cap A$.
Elke afsluiting is gesloten. Dus als cl $U \cap A$ compact is in $\mathcal{T}_A$, dan is cl $(U \cap A)$ weer een gesloten deelverzameling van een compacte verzameling, en volgt uit 7.6 weer dat cl $(U \cap A)$ ook compact is.
Nu moeten we alleen nog bewijzen dat cl $U \cap A$ compact is in $\mathcal{T}_A$.
We weten dat in $\mathcal{T}_X$ geldt dat voor een $a \in A$ er een $U$ bestaat zodat $a \in U$ en cl $U$ is compact en gesloten.
Ook is cl $U \cap A$ weer gesloten in $\mathcal{T}_X$, omdat $A$ gesloten is.
Ook geldt cl $U \cap A \subseteq$ cl $U$. Dus geldt volgens 7.6 dat elke gesloten deelverzameling van een compacte ruimte weer compact is.
Dus cl $U \cap A$ is compact in $\mathcal{T}_X$.
Dit betekend dat er voor elke open overdekking van cl $U \cap A$ geldt dat er een eindige deel overdekking bestaat die ook cl $U \cap A$ overdekt.
Claim: Elke deelverzameling $B \subseteq A \subseteq X$ die compact is in $\mathcal{T}_X$ is compact in $\mathcal{T}_A$.
Elke open overdekking van $B$ in $\mathcal{T}_A$ heeft de volgende vorm:
$B \subseteq \bigcup_{i \in I}(U_i \cap A) = A \cap \bigcup_{i \in I} U_i$, met $U_i$ open in $X$.
Maar we weten dat er altijd een eindig aantal indeces bestaat zodat $B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, omdat $B$ compact is in $\mathcal{T}_X$. Dus er bestaat ook een compacte deeloverdekking van $B$ in $\mathcal{T}_A$.
Hieruit kunnen we afleiden dat cl $U \cap A$ ook compact is in $\mathcal{T}_A$.
Dus er bestaat nu een $U$ open in $\mathcal{T}_A$, zodat cl $U$ compact is.
Dus als $A$ een gesloten deelverzameling is van $X$, en $X$ is lokaal compact, dan is $A$ ook lokaal compact.

Q3) Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Voor een vast gekozene $x \in X$ construeren we een nieuwe topologie $\mathcal{T}_x := \{U \subset X : U \in \mathcal{T}, x \notin U\} \cup \{X\}$. (Je hoeft niet te bewijzen, dat dit weer een topologie is.)

(a) Toon aan, dat $(X, \mathcal{T}_x)$ compact is.
Er geldt dat $X$ compact is als voor elke open overdekking van $X$ er een eindige deeloverdekking bestaat die heel $X$ overdekt.
Neem $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ een open overdekking zijn, zodat $X = \cup_{a \in A} U_a$ met $U_a \in \mathcal{T}_x$.
Er geldt voor elke $U \in \mathcal{T}_x$ met uitzondering van $X \in \mathcal{T}_x$, dat $x \notin U$. Maar $x \in X$, dit betekend dat elke open overdekking van $X$ het element $\{X\}$ moet bevatten, om het element $x$ te kunnen overdekken. Dit betekend ook dat er voor elke open overdekking, het element $\{X\} \in \mathcal{U}$ te kiezen is, als eindige deeloverdekking van $X$.

Dus $(X, \mathcal{T}_x)$ is compact.

(b) Geef een voorbeeld van een locaal compacte ruimte, die een open niet locaal compacte deelverzameling bevat.
We weten dat als een ruimte compact is, dan is hij ook lokaal compact (10.2).
Dus voor de zojuist beschreven topologie $\mathcal{T}_x$ geldt dat hij compact is, en dus ook lokaal compact is.
Neem nu als $X$ de verzameling $\mathbb{R}$, en als $\mathcal{T}$ de rechter spelden topologie. Kies nu $x = 0$.
Dit geeft $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ als lokaal compacte ruimte.
Kies nu $A = (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ als open deelverzameling. Hierop geldt nu de deelverzamelings topologie.
Claim: deze ruimte is niet lokaal compact.
We hebben $\mathcal{T}_A = \{U \cap (1, 2) | U \in \mathcal{T}_0\}$.
Als deze ruimte lokaal compact is, zou er voor elk $x \in (1, 2)$ een compacte omgeving $C$ bestaan, zodat $x \in C$.
$[a, b)$ is open in $\mathcal{T}_A$, omdat $[a+\frac{1}{n}, b)$ in de spelden topologie, $0 \notin [a+\frac{1}{n}, b)$ als $1 \leq a < b \leq 2$ dus open in $\mathcal{T}_0$ en dus ook open in $\mathcal{T}_{(0,1)}$.
$C$ kan de volgende vormen aannemen: $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$, met $1 < a < b \leq 2$
We gaan nu laten zien dat geen van deze intervallen compact kan zijn.

- $(a, b)$ heeft als open overdekking $\{[a + \frac{1}{n}, b)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Er bestaat nu geen eindige deelverzameling van deze open overdekking. Stel hij bestaat wel, kies dan als $n^*$ de $n$ die hoort bij de grootste geselecteerde deelverzameling. Dan is de overdekking gelijk aan $(a, b) \not\subseteq [a + \frac{1}{n^*}, b)$. Dus er bestaat geen eindige deelverzameling van de open overdekking.
- $[a, b)$ met $a \neq 1$ heeft als open overdekking $\{[a, b - \frac{1}{n}]\}_{n\in\mathbb{N}}$. Er bestaat nu geen eindige deelverzameling van deze open overdekking. Stel hij bestaat wel, kies dan als $n^*$ de $n$ die hoort bij de grootste geselecteerde deelverzameling. Dan is de overdekking gelijk aan $[a, b) \not\subseteq [a, b - \frac{1}{n^*})$. Dus er bestaat geen eindige deelverzameling van de open overdekking.
- $(a, b]$ met $b \neq 2$ heeft als open overdekking $\{[a + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$. Er bestaat nu geen eindige deelverzameling van deze open overdekking. Stel hij bestaat wel, kies dan als $n^*$ de $n$ die hoort bij de grootste geselecteerde deelverzameling. Dan is de overdekking gelijk aan $(a, b] \not\subseteq [a + \frac{1}{n^*}, b + \frac{1}{n^*})$. Dus er bestaat geen eindige deelverzameling van de open overdekking.
- $[a, b]$ met $a \neq 1$, $b \neq 2$ en $a < c < b$ heeft als open overdekking $\{[a, c - \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{[c, b + \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$. Omdat we werken in $\mathbb{R}$ en er geldt $a < b$, bestaat er ook een $c$ zodat $a < c < b$. Er bestaat nu geen eindige deelverzameling van deze open overdekking. Stel hij bestaat wel, kies dan als $n^*$ de $n$ die hoort bij de grootste geselecteerde deelverzameling. Dan is de overdekking gelijk aan $[a, b] \not\subseteq [a, c - \frac{1}{n^*}) \cup [c, b)$

Dus de ruimte $((1, 2), \mathcal{T}_A)$ is niet lokaal compact.
Dus $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ is een lokaal compacte ruimte, die een open niet lokaal compacte deelverzameling bevat met als originiele topologie de rechter spelden topologie.

# Referenties


[1] Principles of topology, Croom, Fred H, 2008, Courier Dover Publications