Complexe Analyse

Luc Veldhuis

27 Februari 2017

Herhaling

Exponentiaal

$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$
$\exp^{-1}(z) = \log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ maar geen injectie, dus niet bijectief.
Maak logaritme meerwaardig, omdat arg meerwaardig is.
Hoofdtak: $Log(z) = \ln|z| + i\ Arg(z)$, met $Arg(z) \in (-\pi, \pi]$.
(Principal value van $\log(z)$)

Machtfunctie

Definitie

Zij $c \in \mathbb{C}$, dan definieren we $z \mapsto z^c = e^{c \log(z)}$, de **machtfunctie** en $z \mapsto c^z = e^{z \log(c)}$, de **exponentiële functie** met basis $c \in \mathbb{C}$.
Na beperking op een kleiner domein $D \subset \mathbb{C}$ is de restrictie éénwaardig en analytisch.
De hoofdtak van z^c is gedefinieerd als $e^{c \ Log(z)}$

Opmerking

Omdat log meerwaardig is, zijn deze functies in het algemeen ook meerwaardig. (Kan ook oneindigwaardig of éénwaardig zijn.)

Machtfunctie

Voorbeeld

- $i^i = e^{i \log(i)}$ met $\log(i) = \ln|1| + i \arg(i) = i\frac{\pi}{2} + 2i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
  Dus $i^i = e^{-\frac{pi}{2} + 2\pi n}$ met $n \in \mathbb{Z}$.
  Dit is reelwaardig en oneindigwaardig.
- $4^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(4)}$ met $\log(4) = \ln(4) + i \arg(4) = 2\ln(2) + 2i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
  Dus $4^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}(2\ln(2) + 2i\pi n)} = e^{\ln(2) + \pi i n} = e^{\ln(2)} e^{\pi i n} = \pm 2$.
- $1^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\log(1)} = e^{\frac{1}{m} i 2\pi n}$, $n \in \{0, \ldots, m-1\}$

In het algemeen

Als $c = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, dan is $z \mapsto z^c$ meerwaardig met m verschillende waardes.
Na beperking tot $D = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) \geq 0\}$ kunnen we de machtfunctie éénwaardig definiëren als $e^{cLog(z)}$.

Goniometrische functies

Afleiding

$e^{ix} = \cos(x) + i\cos(x)$, $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Dus $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Definitie

Over de complexe getallen zijn sinus en cosinus op precies dezelfde manier gedefinieerd:
$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ voor $z \in \mathbb{C}$.

Goniometrische functies

Stelling

Het geldt dat:

- $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$
  $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$
- $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
- $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$
  $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$
- $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh(y) \in \mathbb{R}$
  $\sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y}) = i\sinh(y) \in i\mathbb{R}$ met $y \in \mathbb{R}$.
- $\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$
  $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$
- $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$
  $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$

Goniometrische functies

Definitie

$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$
$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

Stelling

De inverse functie van sin en cos zijn gegeven door:
$\sin^{-1}(z) = -i\log(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$
$\cos^{-1}(z) = -i\log(iz + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$

Bewijs

$w = \sin^{-1}(z) \Leftrightarrow z = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})$
$\Leftrightarrow (e^{iw})^2 - eize^{iw} - 1 = 0$
$\Leftrightarrow e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ (bekende functie) $\Leftrightarrow$
$w = -i\log(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$

Goniometrische functies

Opmerking

$\cos^{-1}$ en $\sin^{-1}$ zijn meerwaardig.

Voorbeeld

$\sin^{-1}(i) = -i\log(1 + 2^{\frac{1}{2}}) = -i\log(1 \pm \sqrt{2}) =$

$-i\ln|1 \pm \sqrt{2}| + \arg(1 \pm \sqrt{2})$ met $\arg(1 \pm \sqrt{2}) = \begin{cases} 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \\ \pi + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Dit geeft $\begin{cases} 2\pi n - i\ln|1 + \sqrt{2}| \\ \pi + 2\pi n - i\ln|\sqrt{2} - 1| \end{cases}$ voor $n \in \mathbb{Z}$.

Afgeleide functies

Stelling

Ale functies die we hebben bekeken zijn inderdaad analytisch.

- $\exp(z)' = \exp(z)$
- $\log(z)' = \frac{1}{z}$
- $(z^c)' = cz^{c-1}$
- $(c^z)' = c^z \log(c)$
- $\cos(z)' = -\sin(z)$
- $\sin(z)' = \cos(z)$

Afgeleide functies

Bewijs

- $(\exp^{-1})'(z) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(z))} = \frac{1}{z}$
- $(z^c)' = (e^{c\log(z)})' = \frac{c}{z}e^{c\log(z)} = cz^{c-1}$
- $(c^z)' = (e^{z\log(c)})' = \log(c)e^{z\log(c)} = c^z\log(z)$
- $\cos'(z) = (\frac{1}{z}(e^{iz} + e^{-iz}))' = \frac{1}{2}(ie^{iz} + (-i)e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{iz})$

Opmerking

Hoewel log meerwaardig is, is de afgeleide éénwaardig.
De functie heeft dezelfde afgeleide voor zijn meerwaardige punten.
Ook zien we $w = f(z)$, $f' = \frac{dw}{dz}$, $(f^{-1})' = \frac{dz}{dw}$ met $f^{-1}(w) = z$.