Analysis 2B

Luc Veldhuis

17 mei 2017

Herhaling: Volume en lineaire afbeeldingen

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaire transformatie
$B \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar
$V(L(B)) = |det\ A_L| \cdot V(B)$ met A_L de geassocieerde matrix van L.
$\mathcal{L}in(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \leftrightarrow Mat(n \times n, \mathbb{R})$
$L \leftrightarrow A_L$
$L(x) = A_L \cdot x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
Lineaire afbeelding heeft constante afgeleide.
Voorbeelden van volume behoudende afbeeldingen:

- Translaties
- Rotaties in $\mathbb{R}^2$, $R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Volume en willekeurige afbeeldingen

Idee

Wat gebeurt er met een willekeurige afbeelding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Neem $n = 2$, en een vierkant $Q \subseteq \mathbb{R}^2$.
Neem aan dat het middelpunt van Q is 0 en $T(0) = 0$.
(Dit kan zonder verlies van algemeenheid, omdat translaties volume behoudend zijn en het differentiaal van een translatie de identiteit is.)
Neem aan dat $dT_x \approx dT_0$ voor alle $x \in Q$.
(Dit kunnen we aannemen als Q klein genoeg is.)
Dan geldt $T(u, v) \approx T'(0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ voor alle $x = (u, v) \in Q$
$V(T(Q)) \approx V(dT_0(Q)) = |det\ T'(0)| \cdot V(Q)$ onder de aannames.
'Klein genoeg' als geldt dat $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, zodat $\forall Q$ rechthoeken met diag$(Q) < \delta$ de norm $\|dT_x - dT_0\| < \epsilon$ voor alle $x \in Q$. Met $dT_x \in \mathcal{L}in(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Volume en willekeurige afbeeldingen

Voor willekeurige rechthoeken Q

Verdeel Q in steeds kleinere rechthoeken.
$P = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ een partitie van Q.
$S = \{a_1, \dots, a_k\}$ een selectie voor P.

$$\int_{T(Q)} f = \sum_{i=1}^{k} \int_{T(Q_i)} f \approx \sum_{i=1}^{k} f(T(a_i))V(T(Q_i)) \approx$$

$\sum_{i=1}^{k} f(T(a_i)) \cdot |det\ T'(a_i)| \cdot V(Q_i)$ als voor alle Q_i geldt dat
$dT_x \approx dT_{a_i}\ \forall x \in Q_i$

$$\sum_{i=1}^{k} f(T(a_i)) \cdot |det\ T'(a_i)| \cdot V(Q_i) = R((f \circ T) \cdot |det\ T'|, P, S) \approx$$

$\int_Q (f \circ T) \cdot |det\ T'|$.

Dus $\int_Q (f \circ T) \cdot |det\ T'| = \int_{T(Q)} f$

Volume en willekeurige afbeeldingen

Riemans som (herhaling)

$$R(f,P,S) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)V(Q_i) \text{ met } x_i \in Q_i \text{ voor alle } i = 1, \ldots, k.$$

Voor een partitie P van Q en selectie S.
Als geldt dat $\lim diag(Q_i) = 0$ dan geldt $R(f,P,S) = \int_Q f$

Transformatie stelling voor integralen (Stelling 5.5+Add 5.6)

Zij R een rechthoek in $\mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een afbeelding die C^1-inverteerbaar is op $\text{int}(R)$ (Het inwendige van R)
Als f een integreerbare functie is, zo dat $f \circ T$ ook integreerbaar is, dan geldt:

$$\int_{T(R)} f = \int_R (f \circ T) \cdot |det\ \ T'|$$

Transformatie stelling

Stelling 5.5

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $R \subseteq U$ meetbaar, T is C^1-inverteerbaar op U is 'te' sterk.
$R = [0,1] \times [0, 2\pi]$ met $T(R) = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ is niet overal C^1 inverteerbaar.
Daarom kijken we naar het inwendige van R.

Notatie

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$T(u_1, \ldots, u_n) = (x_1, \ldots, x_n)$
$\int_{T(R)} f(dx_1, \ldots, dx_n) =$
$\int_R f(T(u_1, \ldots, u_n)) \cdot |det\ \ T'(u_1, \ldots, u_n)| \cdot (du_1, \ldots, du_n)$
$\int_T (R) f dx dy = \int_R f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr d\theta$ met
$T(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en $|det\ \ T'| = r$

Transformatie stelling

Voorbeeld

Tranformatie van coördinaten om de functie te vereenvoudingen.

$\int\int_R \frac{dxdy}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\frac{1}{2}}}$ waarbij

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$

Idee: Gebruik coordinaten: $u\sqrt{x}$ en $v = \sqrt{y}$

Dan geeft dit: $Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u > 0, v > 0, u + v \leq 1\}$

Dus $(x, y) = T(u, v) = (u^2, v^2)$, want $u = \sqrt{x}$ gaat van $R = T(Q)$ naar Q, dus we hebben de inverse nodig.

$f \circ T = \frac{1}{\sqrt{u+v}}$ is integreerbaar.

$T' = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$ en $det\ T' = 4uv$.

Dan volgt uit de transformatie stelling:

$\int\int_R \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\frac{1}{2}}} dxdy = \int\int_Q \frac{|4uv|}{\sqrt{u+v}} dudv = \int_0^1 (\int_0^{1-u} \frac{4uv}{\sqrt{u+v}} dv) du$

Transformatie stelling

Voorbeeld

$\int\int_R (x^2+y^2)dxdy$ met
$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\leq xy\leq 3\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\leq x^2-y^2\leq 4\}$
met $x>0, y>0$

Met $\begin{cases} u = xy \\ v = x^2-y^2 \end{cases}$ en $(x,y)=T(u,v)$ geldt dat $R=T(Q)$
met $Q=[1,3]\times[1,4]$.
Probleem: Wat is T?
$S(x,y)=(xy,x^2-y^2)=(u,v)$, maar we zoeken de inverse van S.
Deze bestaat, omdat S injectief is op R, dus een links-inverse heeft, een afbeelding T zodat $T\circ S = id_R$.

Transformatie stelling

Voorbeeld (vervolg)

Met de ketting regel: $id'_R = (T \circ S)' = T'(S) \circ S' = \mathbb{1}$

$S'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$ met $det\ S'(x,y) = -2(x^2+y^2)$ en

$det\ T'(u,v) \cdot det\ S'(x,y) = det \mathbb{1} = 1$

$det\ T'(u,v) = \frac{-1}{2(x^2+y^2)} = \frac{-1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}$

Want: $2x^2 = \sqrt{4u^2+v^2} + v$

$2x^2 = \sqrt{4u^2+v^2} - v$

$2(x^2+y^2) = 2\sqrt{4u^2+v^2}$

$(x^2+y^2) = \sqrt{4u^2+v^2}$

Dus $f(T(u,v)) = \sqrt{4u^2+v^2}$

Dus $\int\int_R (x^2+y^2)dxdy = \int\int_Q \sqrt{4u^2+v^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}} dudv =$
$\int_1^4 \int_1^3 \frac{1}{2} dudv$