Groepen theorie

Luc Veldhuis

25 April 2017

§3.1 Quotiëntgroepen en homomorfismes

Samenvatting

G een groep. $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow \begin{cases} N \leqslant G \\ gng^{-1} \in N \ \forall n \in N, g \in G \end{cases}$

Er geldt ook $yN = Ny \forall y \in G$

$G/N = \{gN | g \in G\}$ is dan een groep via $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$ met $\overline{x} = xN$

$xN \cdot yN = xyN$ en $N \cdot N = N^2 = N$ want gesloten onder producten.

$N^2 = \{n_1 n_2 \in N | n_1, n_2 \in N\} = N$

Rekenregels

- $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$
- $(\overline{x})^{-1} = \overline{x^{-1}}$
- $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \in N$

Opmerking

Met $N \trianglelefteq G$ en $\pi : G \to G/N$ met $x \mapsto \overline{x} =$ de klasse van x

- π is een homomorfisme want $\pi(xy) = \overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y} = \pi(x)\pi(y)$ $\forall x, y \in G$
- Ker(π)$= N$
- Normaaldelers van G zijn precies de kernen van een homomorfisme $\phi : G \to H$

Stelling van Lagrange

Zij G een **eindige** groep, $H \leqslant G$. Dan $|H| \mid |G|$ en $\frac{|G|}{|H|}$ is het aantal linkernevenklassen van H in G.

Bewijs

Zij $|H| = n$ en k het aantal nevenklassen van H in G. Dus
$k = |G/N|$. Als $g \in G$, dan is $|gH| = |H|$
$H \to gH$ zijn elkaars inverses
$h \mapsto gh$
$x \mapsto g^{-1}x$
Dus elke linkernevenklasse van H in G heeft $|H| = n$.
G bestaat uit de (disjuncte) linkernevenklassen, dus
$|G| = kn = k|H|$ en $k = \frac{|G|}{|H|}$. $\square$

§3.2 Nevenklassen en de stelling van Lagrange

Voorbeeld

- $G = S^3$, $H = \langle(1\ 2)\rangle$. $k = \frac{|G|}{|H|} = \frac{3!}{2!} = 3$
  $H = \langle(1\ 2)\rangle$ cyklisch, dus $|\langle(1\ 2)\rangle| = |(1\ 2)| = 2 = |H|$
- S_3 heeft geen ondergroepen van orde 4 of 5, want die delen $|S_3| = 6$ niet.

Definitie

G een groep, $H \leqslant G$. Het aantal linkernevenklassen van H in G heet de index van H in G. Notatie: $|G : H|$
$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}$
In het bijzonder: Als $N \trianglelefteq G$, dan is $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$ met G eindig.

Voorbeeld

$G = S_3$, $H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$. Dan $|G : H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{3!}{3} = 2$ dus $\langle(1\ 2\ 3)\rangle \trianglelefteq S_3$

Corollary

Als G eindig is en $x \in G$, dan deelt de orde van x de orde van G: $|x| \mid |G|$.

Bewijs

Al gezien: $|x| = |\langle x\rangle|$ en $|\langle x\rangle| \mid |G|$ volgens Lagrange, want $\langle x\rangle \leqslant G$

Voorbeeld

Zij p een oneven priem. $G = D_{2p}$. Als $H \leqslant G$, dan $|H| \mid |G| = 2p$.
De positieve delers van $2p$ zijn: $1, 2, p, 2p$
Als $|H| = 1$, dan $H = \{e\}$, want $|e| = 1$
Als $|H| = 2$, dan $H = \langle sr^i \rangle$, want $|\langle sr^i \rangle| = 2$
Als $|H| = p$, dan $H = \langle r \rangle = \{e, r, r^2, \ldots, r^{p-1}\}$, want $|\langle r \rangle| = p$
Als $|H| = 2p$, dan $H = D_{2p}$

Let op!

In het algemeen geldt niet dat: Stel $n \mid |G|$ met $n \geq 1$, dan is er $H \leqslant G$ met $|H| = n$
Laat zien: $A_4 \leqslant S_4$, met 12 elementen, maar A_4 heeft geen ondergroep met 6 elementen.

Corollary (Lagrange)

Als G een eindige groep is met orde een priemgetal p, dan is G isomorf met $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle \overline{1} \rangle$, dus G cyklisch

Bewijs

Neem $x \in G$, $x \neq e$. Dan is $H = \langle x \rangle \leqslant G$, $H \neq \{e\}$
Dan geldt voor $|H|$: $|H| > 1$, $|H| \mid |G|$ (Lagrange)
Dus $|H| = 1$ of p (priem).
Dus $|H| = p = |G|$, dus $\langle x \rangle = H = G$
Al gezien als $|x| = n < \infty$, dan is $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $\overline{a} \mapsto x^a$
Pas dit toe met $n = p$ $\square$

Voorbeeld

De ondergroepen van S_3: $|S_3| = 3! = 6$
Zij $H \leqslant S_3$, dan $|H| \mid |G| \Rightarrow |H| \mid 6 \Rightarrow H = 1, 2, 3$ of 6.

- $|H| = 1 \Rightarrow H = \{e\}$
- $|H| = 2 \Rightarrow H = \langle x \rangle$ met $|x| = 2$, want 2 priem. (Volgens gevolg van Lagrange)
  Elementen van orde 2: $(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3) \Rightarrow 3$ ondergroepen H met $|H| = 2$
  $\langle(1\ 2)\rangle = \{e, (1\ 2)\}$ en $\langle(1\ 3)\rangle = \{e, (1\ 3)\}$
  $\langle(2\ 3)\rangle = \{e, (2\ 3)\}$
- $|H| = 3 \Rightarrow H = \langle y \rangle$ met $|y| = 3$, want 3 priem.
  $y = (1\ 2\ 3) \vee y = (1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)^{-1} \Rightarrow H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle = \langle(1\ 3\ 2)\rangle$
- $|H| = 6 \Rightarrow H = S_3$

§3.2 Nevenklassen en de stelling van Lagrange

Stelling

Zij G een groep, $H \leqslant G$ met $|G : H| = 2$, dan is $H \trianglelefteq G$

Bewijs (Incompleet)

Neem $g \in G$, $g \neq H$, dan is $H \neq gH$, dus de elementen van G/H zijn H en gH

Nu gaan we na: als $h \in H$ en $x \in G$, dan $xhx^{-1} \in H$. Bewijs uit ongerijmde:

Stel $xhx^{-1} \notin H$ voor een $h \in H$, $x \in G$ enz... (Zie boek)

Voorbeeld

- $G = D_{2p}$ met $n \geq 3$. $H = \langle r \rangle$, $|G| = 2n$, $|H| = n$
  Dus $|G : H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{2n}{n} = 2$, dus $\langle r \rangle \trianglelefteq N$
- $\langle (1\ 2\ 3) \rangle \trianglelefteq S_3$ (ga na)

Vraag

$H \leqslant G$, $K \leqslant G$. Is $HK = \{hk | h \in H, k \in K\} \leqslant G$?

Stelling

$H, K \leqslant G$. Dan is $HK \leqslant G \Leftrightarrow HK = KH$

Bewijs

'$\Leftarrow$': Neem $x = h_1k_1$ en $y = h_2k_2$ met $h_i \in H$ en $k_i \in K$
Dan is $xy^{-1} = h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$ met $k_1k_2^{-1} = k \in K$, $h = h_2^{-1} \in H$
Dus $kh \in KH = HK$ dan $kh = h'k'$ met $h'\ inH$ en $k' \in k$
Dus $h_1kh' = h_1h'k' \in HK$ want $h_1h \in H$ en $k' \in K$
'$\Rightarrow$': $HK \leqslant G$. $HK = \{x^{-1} | x \in HK\} = \{(hk)^{-1} | h \in H, k \in K\} = \{k^{-1}h^{-1} \in HK | h \in H, k \in K\} = KH$ $\square$

§3.2 Nevenklassen en de stelling van Lagrange

Voorbeeld

$G = D_{2n}$, $H = \langle s \rangle = \{e, s\}$. $K = \langle r \rangle = \{e, r, \ldots, r^{n-1}\}$
Dan is $HK = \{er^i | 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{sr^i | 0 \leq i \leq n-1\} = D_{2n}$
Dus $KH = HK = D_{2n}$

Stelling

$H, K \leqslant G_{eindig}$. $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$

Voorbeeld

$G = S_3$, $H = \langle (1\ 2) \rangle, K = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$
Dit geeft $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$
Want $|H \cap K|$ is een ondergroep van H, dus $|H \cap K| \mid 2$ en $|H \cap K| \mid 3$, dus $|H \cap K| = 1$
Omdat $|S_3| = 6$ geeft dit $S_3 = HK$