Analysis 2B

Luc Veldhuis

20 april 2017

Herhaling

Stelling van Taylor met 1 variabele

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van klasse $\mathcal{C}^3$ met $a \in I$ en $f'(a) = 0$

Dan is $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_2(h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h^2} = \frac{1}{2}f''(a) + \lim_{h\to 0}\frac{R_2(h)}{h^2} = \frac{1}{2}f''(a)$$

Vandaag

- Stelling van Taylor voor meerdere variabelen
- Tweede afgeleide test voor kritieke punten van functies $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Generalisatie stelling van Taylor

$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f van klasse $\mathcal{C}^k$ op $\mathcal{U}$ en $a \in \mathcal{U}$
De Taylor polynoom van graad k van f rond a is:
$P_k(h) = \sum_{r=0}^{k} \frac{D_h^r f(a)}{r!}$
Dan definiëren we de rest van graad k als
$R_k(h) = f(a+h) - P_k(h)$

Stelling van Taylor in meerdere variabelen (Stelling 7.1)

Als f van klasse $\mathcal{C}^{k+1}$ is op $\mathcal{U}$ en het segment L tussen a en $a+h$ helemaal in $\mathcal{U}$ ligt, dan bestaat er een $\xi \in L$ zodat
$R_k(h) = \frac{D_h^{k+1} f(\xi)}{(k+1)!}$.

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Formule van Taylor

$f(a+h) = P_k(h) + R_k(h) = (\sum_{r=0}^{k} \frac{D_h^r f(a)}{r!}) + \frac{D_h^{k+1} f(\xi)}{(k+1)!}$ voor een $\xi \in L(a, a+h) = \{x \in \mathbb{R}^n | x = a + th, 0 \leq t \leq 1\}$

Propositie

Zoals in het geval van functies van 1 variable geldt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_k(h)}{\|h\|^k} = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - P_k(h)}{\|h\|^k} = 0$$

$\Leftrightarrow$ (Corrollary 7.2 & Stelling 7.4) We hebben de volgende karakterisatie van de Taylor polynoom:
P een polynoom van graad k in n variabelen is de Taylor polynoom van graad k van f rond a

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Toepassing

Classificatie van kritieke punten

$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ met $a \in \mathcal{U}$ open een kritiek punt van f $(\nabla f(a) = (0, \ldots, 0))$ en f heeft klasse $\mathcal{C}^3$

Dan kunnen we de formule van Taylor voor de Taylor polynoom van graad 2 gebruiken:

$D_h f(a) = \nabla f(a) \cdot h = 0$ omdat f differentieerbaar is.

$f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + R_2(h) =$
$f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + R_2(h)$

$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + R_2(h)$ met $\lim\limits_{h \to 0} \frac{R_2(h)}{\|h\|^2} = 0$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Toepassing (vervolg)

Neem $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$
$\frac{1}{2}D_h^2 f(a) = \frac{1}{2}(h_1 D_1, \ldots, h_n D_n)^2 f(a) = q(h)$ is een homogeen polynoom van graad 2 in de variabelen $h_1, \ldots, h_n$ en

$$q(h) = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} h_i h_j = (h_1, \ldots, h_n) \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \text{ is}$$

de quadratische vorm van f rond a.

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Voorbeeld

$f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x)$
$\nabla f(0,0) = (0,0)$
Taylor polynoom van graad 2 van f rond $(0,0)$:
$P_2(h_1, h_2) = f(0,0) + D_h f(0,0) + \frac{1}{2} D_h^2 f(0,0)$
$D_h f(0,0) = 0$
$D_h^2 f(0,0) =^{def} (h_1 D_1 + h_2 D_2)^2 f(0,0) =$
$h_1^2 D_1^2 f(0,0) + 2 h_1 h_2 D_1 D_2 f(0,0) + h_2^2 D_2^2 f(0,0)$
$D_1 f(x, y) = 2x - \sin(x)$ en $D_1^2 f(x, y) = 2 - \cos(x)$
$D_1^2 f(0,0) = 2 - 1 = 1$
$D_1 D_2 f(x, y) = D_2 D_1 f(x, y) = 0$
$D_2 f(x, y) = 2y$ en $D_2^2 f(x, y) = 2$ dus $D_2^2 f(0,0) = 2$
$q(h_1, h_2) = \frac{1}{2} D_h^2 f(0,0) = \frac{1}{2}(h_1^2 + 2h_2^2) = \frac{1}{2} h_1^2 + h_2^2 =$
$(h_1, h_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Voorbeeld (vervolg)

Omdat we hebben:

$P_2(h_1, h_2) = f(0,0) + D_h f(0,0) + \frac{1}{2} D_h^2 f(0,0)$

$f(h_1, h_2) = P_2(h_1, h_2) + R_2(h_1, h_2)$

$q(h) = \frac{1}{2} D_h^2 f(0,0)$

Krijgen we :$f((0,0) + (h_1, h_2)) - f(0,0) = q(h_1, h_2) + R_2(h_1, h_2)$

Kwadratische vorm van f rond a

Dus in het algemenere geval krijgen we:

$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}D_h^2 f(a) + R_2(h) = q(h) + R_2(h)$

$c_{1,1} = \frac{1}{2}D_1^2 f(a)$

$$c_{i,j} = \begin{cases} D_i D_j f(a) & i \neq j \\ \frac{1}{2}D_i^2 f(a) & i = j \end{cases}$$

De matrix is altijd symmetrisch, omdat $\forall i,j : D_i D_j = D_j D_i$ vanwege de aanname.

$$q(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ \|h\|^2 q(\frac{h}{\|h\|}) & h \neq 0 \end{cases}$$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Rekenregels

Voor $\lambda \in \mathbb{R}$ hebben we:
$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$
$q(h) = q(\|h\| \frac{h}{\|h\|}) = \|h\|^2 q(\frac{h}{\|h\|})$ met $\frac{h}{\|h\|} \in S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, een vector van lengte 1.

Vormen van kwadratische vorm

We noemen q, de kwadratische vorm van f in a:

- **Positief definiet** als $q(h) \geq 0$ voor alle $h \in \mathbb{R}^n$ en $q(h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$
- **Negatief definiet** als $q(h) \leq 0$ voor alle $h \in \mathbb{R}^n$ en $q(h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$
- **Indefiniet** als $q(h)$ zowel positieve en negatieve waardes aanneemt.

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Gevolg

Als $q(h)$ positief definite is, dan zijn $f(a+h) - f(a)$ positief voor h 'klein genoeg' en $h \neq 0$.
Een matrix is positief/negatief definiet als zijn eigenwaardes allemaal positief/negatief zijn (dus ook geen 0).
We hebben al gehad:
Als $D_1 f(x_0) > 0$ en $\Delta = D_1^2 f(x_0) D_2^2 f(x_0) - (D_1 D_2 f(x_0))^2 > 0$ dan x_0 lokaal minimum.
In de matrix staat: $\begin{pmatrix} D_1^2 f(x_0) & D_1 D_2 f(x_0) \\ D_2 D_1 f(x_0) & D_2^2 f(x_0) \end{pmatrix}$.
Met determinant: $ac - b^2 > 0$ en $a > 0 \Rightarrow c > 0$.
Eigenwaardes zijn dan: $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c) - 4(ac - b^2)}}{2}$
$(a+c)^2 - f(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b < (a+c)$
Dus teller altijd positief $\Rightarrow$ eigenwaardes positief $\Rightarrow$ q positief definiet $\Rightarrow$ $q(h)$ is een lokaal minimum.