Topologie

Luc Veldhuis - 2538227

February 2017

1. Laat $f : X \to Y$een afbeelding tussen twee topologische ruimten zijn. Toon aan dat f continu is dan en slechts dan als voor alle gesloten delen $C \subseteq Y$ ook de inverse $f^{-1}(C) \subseteq X$ beeld gesloten is.
   Bewijs $\Rightarrow$:
   Neem aan $f : X \to Y$ is continu. Dat betekend dat als een $U \subseteq Y$ open is, dan $f^{-1}(U) \subseteq X$ ook open is. Neem $C \subseteq Y$ gesloten. Bewijs dat geldt $f^{-1}(C)$ is gesloten.
   Omdat C gesloten is, weten we dat $Y \setminus C = U$ open is.
   Neem $f^{-1}(C) = \{x \in X | f(x) \in C\} = \{x \in X | f(x) \notin U\} = \{x \in X | x \notin f^{-1}(U)\} = \{x \in X | x \in X \setminus f^{-1}(U)\}$. Omdat we weten dat $f^{-1}(U)$ open is, is $X \setminus f^{-1}(U)$ gesloten, dus $f^{-1}(C)$ is gesloten.
   Bewijs $\Leftarrow$:
   Neem aan dat als $C \subseteq Y$ gesloten is, dan ook $f^{-1}(C) \subseteq X$ gesloten is.
   We weten dat als omdat C gesloten is, $Y \setminus C = U$ open is.
   Neem $f^{-1}(U) = \{x \in X | x \in f^{-1}(U)\} = \{x \in X | f(x) \in U\} = \{x \in X | f(x) \notin C\} = \{x \in X | x \notin f^{-1}(C)\} = \{x \in X | x \in X \setminus f^{-1}(C)\}$. Omdat we hebben aangenomen dat $f^{-1}(C)$ gesloten was, is $X \setminus f^{-1}(C)$ open. Dus $f^{-1}(U)$ is open.

2. Gegeven is een collectie topologische ruimten $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. We geven het product $Y := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ de producttopologie.

   (a) Voor elke $\alpha \in A$ geven we een gesloten deelverzameling $C_\alpha \subset X_\alpha$. Laat zien dat $\prod_{\alpha \in A} C_\alpha \subset Y$ gesloten is.
   We weten dat $\prod_{\alpha \in A} C_\alpha \subset Y$ gesloten is als $Y \setminus \prod_{\alpha \in A} C_\alpha$ open is. We weten ook dat voor elke C_α geldt $X_\alpha \setminus C_\alpha = U_\alpha$ open is.
   Te bewijzen: $Y \setminus \prod_{\alpha \in A} C_\alpha = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus C_\alpha$.
   Schrijf $Y = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Dit geeft $Y \setminus \prod_{\alpha \in A} C_\alpha = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in A} C_\alpha$. Omdat in de product topologie alleen de coördinaten met elkaar vergeleken worden, kunnen we deze operatie ook per coördinaat uitvoeren. Dit geeft $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in A} C_\alpha = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus C_\alpha$. Omdat we weten dat $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ open voor een eindig aantal U_α, geldt dat $\prod_{\alpha \in A} C_\alpha \subset Y$ gesloten is.

   (b) Voor elke $\alpha \in A$ geven we een niet lege open deelverzameling $U_\alpha \in X_\alpha$. Toon aan: Als er oneindig vele indices $\alpha \in A$ zijn zo dat $U_\alpha \neq X_\alpha$, dan is $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ niet open.
   Neem als subbasis voor de producttopologie de subbasis als beschreven in het college:
   $\mathbb{S}$ is de collectie van alle deelverzamelingen van Y van de vorm $= pr^{-1}(U_a) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in Y | x_\alpha \in U_\alpha\}$ waarbij $\alpha \in A$ en U_α een open deelverzameling in X_α.
   Er is nu precies 1 voor coördinaat een 'open conditie' geschreven, zodat deze coördinaat in U_α zit. We weten dat we met deze subbasis alle open verzamelingen van de producttopologie kunnen beschrijven. We weten ook dat deze topologie bestaat uit alle oneindige

verenigingen van deze deelverzamelingen en alle eindige doorsnedes van deze deelverzameling. Ook is gegeven dat U_α niet leeg zijn. Als we nu $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ willen construeren, maar er zijn oneindig veel U_α, moeten we de doorsnedes nemen van de deelverzamelingen waarin op elke plek $\alpha \in A$ een x_α staat uit U_α. Hiervoor hebben we oneindig veel doorsnedes nodig. Helaas staat in de definitie dat open verzamelingen alleen door eindig veel doorsnedes moeten worden geconstrueerd. Dus $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ is niet te construeren, en zit dus niet in de producttopologie. Hij is dus niet open.

3. Laat $A \subseteq X$ een deelverzameling van een topologische ruimte X zijn. Laat $B := X \setminus A$. We geven A en B de geïnduceerde deelverzamelingstopologie. Vervolgens schrijven we $Y := A \coprod B$ voor de disjunkte vereniging van A en B. We zeggen dat $U \subseteq Y$ open is als $U \cap A \subseteq A$ en $U \cap B \subseteq B$ open zijn. Dit definieert een topologie op Y (hoef je niet te bewijzen). Toon aan, dat de natuurlijke bijectie $Y \to X$ een homeomorfisme is dan en slechts dan als $A \subset X$ open en gesloten is.

   Bewijs $\Rightarrow$:
   Neem aan dat $f : X \to Y$ de natuurlijke bijectie en homeomorfisme is.
   Neem nu aan dat A niet open is. Dat betekent dat $f(A) = A \subseteq Y$ ook niet open is.
   Maar $A \subset Y$ is open als $A \cap A \subseteq A$ en $A \cap B \subseteq B$ open zijn.
   $A \cap A = A \subseteq A$ is open in de geïnduceerde topologie op A.
   $A \cap B = A \cap (X \setminus A) = \emptyset \subset B$ is open in de geïnduceerde topologie op B.
   Dus A is wel open in Y. Tegenspraak. De aanname dat A niet open is in X is fout, A is wel open in X.

   Neem aan dat A niet gesloten is. Dat betekent dat $f(A) = A \subseteq Y$ ook niet gesloten is.
   Maar $A \subset Y$ is gesloten als $Y \setminus A \subseteq Y$.
   Dus als $(Y \setminus A) \cap A \subseteq A$ en $(Y \setminus A) \cap B \subseteq B$ open zijn.
   $(Y \setminus A) \cap A = \emptyset \subseteq A$ is open in de geïnduceerde topologie op A.
   $(Y \setminus A) \cap B = (Y \setminus A) \cap (X \setminus A) = B \cap B = B \subset B$ is open in de geïnduceerde topologie op B.
   Dus $(Y \setminus A)$ is wel open in Y en A is gesloten in Y. Tegenspraak. De aanname dat A niet gesloten is in X is fout, A is wel gesloten in X.

   Bewijs $\Leftarrow$:
   Neem aan dat A zowel open als gesloten is. Dus $X \setminus A = B$ is ook open en gesloten. Laat f de natuurlijke bijectie zijn. Laat zien dat f een homeomorfisme is.
   Om te laten zien dat iets een homeomorfisme is, moeten we laten zien dat als U open in X, dan $f(U)$ open in Y en als U open in Y dan $f^{-1}(U)$ open in X.
   Laat zien dat als U open is in Y, dan geldt $f^{-1}(U)$ open in X.
   Dan geldt voor een $U \subseteq Y$ open, dat zowel $U \cap A \subseteq A$ en $U \cap B \subseteq B$ open is.
   Dit kan alleen als $U \cap A = V \cap A$ voor een $V \subseteq X$ open en $U \cap B = W \cap B$ voor een $W \subseteq X$ open.
   We weten ook dat $U = (U \cap A) \cup (U \cap B) = (V \cap A) \cup (W \cap B)$
   Nu weten we dat $V, W, A, B \subseteq X$ open verzamelingen zijn, en de eindige vereniging van open verzamelingen is weer een open verzameling. Dus U is open in X. Dus als U open in Y, dan $f^{-1}(U) = U$ open in X.

   De laatste variant, als U open is in X bewijs dat $f(U)$ open is in Y.
   Als U open is in X, dan is $U \cap A$ ook open in X, want doorsnedes blijven open, maar het ook open in de geïnduceerde topologie van A. We weten dat $X \setminus A$ ook een open verzameling is, dus $U \cap B$ is weer open in X maar ook in de geïnduceerde topologie van B. Dus als U open is in X is het ook open in $f(U) = U \subseteq Y$. Dus f is een homeomorfisme.