Topologie - Opdracht 5

Luc Veldhuis - 2538227

Maart 2017

Q1) Vind een open over dekking voor $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$, die geen eindige deeloverdekking bevat.
$C = \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})\}_{n=4}^{\infty} = (-\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}) \setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\} \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
Maar als C eindig is voor een N, dan geldt dat het interval $D = [\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{N}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{N}]$ niet in C zit.
Maar $D \cap (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \neq \emptyset$ want $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{N}$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zijn irrationeel, dus $\exists q \in \mathbb{Q}$ zodat $q \in [\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{N}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.
Dus er bestaat geen eindige deeloverdekking.

Q3) Bepaal de compacte deelversamelingen van $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{fin})$. ($\mathcal{T}_{fin}$ is de coeindige topologie.)
Laat $Z \subseteq \mathbb{R}$. Dan geldt dat Z compact is als voor elke collectie $\{U_a\}_{a \in A}$ van open deelverzamelingen met $Z \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$ een eindig aantal indices bestaan $a_1, \ldots, a_n \in A$ zodat $Z \subseteq U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$
Laat $\bigcup_{a \in A} U_a$ een open overdekking zijn van Z. Dan geldt dat $Z \setminus U_0$ eindig is, want $\mathbb{R} \setminus U_0$ is eindig. Noem deze eindige punten $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Omdat deze punten ook in de overdekking zitten, moeten er open deelverzamelingen zijn die deze punten bevatten. Laat $U_i \in \bigcup_{a \in A} U_a$ de deelverzameling zijn die het punt x_i bevat. Dan zijn er eindig veel open ruimten, U_i voor $1 \leq i \leq k$ die dit deze punten bevatten.
De verzameling $\bigcup_{0 \leq i \leq k} U_i$ is dan een eindige deelverzameling voor een willekeurige Z. Elke deelverzameling van $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{fin})$ is dus compact. Dus $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ zijn alle compacte deelverzamelingen.

Q4) Gegeven is een compacte ruimte X. Gegeven zijn verder een rij van gesloten deelverzamelingen $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en een open deelverzameling $U \subseteq X$ zo dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subset U$. Bewijs dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $\bigcap_{n=1}^{N} C_n \subset U$.
X is compact en elke $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is gesloten. Uit stelling 7.6 volgt nu dat elke $\{C_n\}_{n \in N}$ ook compact is.
Uit de definitie van gesloten verzamelingen volgt dat de doorsnede van een mogelijk oneindig aantal gesloten delen weer gesloten is.
Dus $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subset U$ is gesloten en compact.
We weten ook $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$.
Dus $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.
Maar ook $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq X \setminus U$
We weten dat $X \setminus U$ gesloten is omdat U open is.
Nu is $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq X \setminus U$ een open overdekking van $X \setminus U$.
$X \setminus U \subseteq X$ en gesloten, dus volgens 7.6 is $X \setminus U$ weer compact.
Dat betekent dat voor elke open overdekking er een eindige deelverzameling van bestaat zodat $X \setminus U \subseteq \bigcup_{i \in A} U_i$.
Neem nu $N = \max(A)$. Dit geeft $X \setminus U \subseteq \bigcup_{i \in A} U_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_i$
Neem hier nu het complement van. Dit geeft $U \supseteq X \setminus \bigcup_{i=1}^{N} U_i = \bigcap_{i=1}^{N} (X \setminus U_i) = \bigcap_{n=1}^{N} C_n$
Dus er bestaat een N zodat $\bigcap_{n=1}^{N} C_n \subseteq U$.