Analysis 1B

Luc Veldhuis

1 November 2016

Herhaling

Wanneer is een functie integeerbaar?
Als de onder en bovensommen aan elkaar gelijk zijn.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & x \in \mathbb{Q} \\ &= 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{aligned}$$

f differentieerbaar $\Rightarrow$ f continue $\Rightarrow$ f integreerbaar
Niet de andere kant op!

Regels

- $\int_a^b c(f+g)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx + c\int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_e^b f(x)dx + \int_a^e f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Mean value Theorem voor integralen

Stelling

$f[a,b] \to \mathbb{R}$ continu
$\exists c \in (a,b)$ zodanig dat $\int_a^b f = f(c)(b-a)$

Voorbeeld

$$f[2,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$$

$$\int_2^4 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4|_2^4 = 64 - 4 = 60$$

$$b - a = 2,\ \exists c,\ f(c) = \frac{60}{2} = 30$$

Bewijs integreerbaarheid

Laat $g[a,b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar
$g' \in R[a,b]$
Dan $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a) = g(x)|_a^b$

- Neem een partitie willekeurig, $\{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$
- Bekijk elk blokje apart.
  Omdat g differentieerbaar is $\Rightarrow \exists c \in (x_{k-1}, x_k) : g(c) = \frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \Rightarrow (x_k - x_{k-1})g'(c) = g(x_k) - g(x_{k-1})$ (Mean value theorem)
  $S(P, g') = \sum_{k=1}^{n} g'(c)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) - g(x_{x_{k-1}}) =$
  $g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_0) + \cdots + g(x_n) - g(x_{n-1}) =$
  $g(x_n) - g(x_0) = g(b) - g(a)$

Bewijs integreerbaarheid

- $L(P, g') \leq S(P, g') = g(b) - g(a) \leq U(P, g')$

  $\underline{\int_b^a} g(x)dx = sup_{\tilde{P} \ partition} L(\tilde{P}, g') \leq g(b) - g(a) \leq$
  $inf_{\tilde{P} \ partition} U(\tilde{P}, g') = \overline{\int_a^b} g'(x)dx$ en

  $g' \in R[a, b]$ (is Rieman integreerbaar)$\Rightarrow$

  $g(b) - g(a) \leq \overline{\int_a^b} g'(x)dx = \underline{\int_a^b} g'(x)dx \leq g(b) - g(a)$
  Dus $\int_a^b g'(x) = g(b) - g(a)$

Voorbeeld

Voorbeeld

Bereken de oppervlakte tussen $y = 1$ en $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ \frac{5}{x^2+1} &= 1 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Oppervlakte rechthoek $= 4$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)dx &= 5\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+1} \\ &= 5arctan(x)|_{-1}^{2} \\ &= 5(arctan(2) - arctan(-2)) \\ &= 5(2arctan(2)) \end{aligned}$$

Afleiden van primitieven

Primitieve van *arctan*

$$\begin{aligned}
arctan(x) &= y \\
x &= tan(y) \\
1 &= \frac{d\,tan(y)}{dy}\frac{dy}{dx} \\
1 &= (1 + tan^2(y))\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + tan^2(y)} \\
&= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

Partieel integreren

Product regel maar dan andersom

Stelling

Als f, g differentieerbaar zijn op $[a, b]$
$f', g' \in R[a, b]$ dan

$$\int_a^b (fg')(x)dx = fg(x)|_a^b - \int_a^b (f'g)(x)dx$$

Afleiding

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= f'g(x) + fg'(x)\\ fg'(x) &= (fg)'(x) + f'g(x)\\ \int_a^b fg'(x)dx &= (fg)(x)|_a^b - \int_a^b f'g(x)dx\end{aligned}$$

Partieel integreren

Bewijs

Neem f, g differentieerbaar en integreerbaar
$\Rightarrow fg', f'g$ ook integreerbaar (6.3.5)
$\Rightarrow fg' + f'g$ ook integreerbaar (6.3.1)
$\Rightarrow (fg)'$ ook integreerbaar

$$\int_a^b (fg)' dx = \int_a^b (f'g + fg') dx$$

$$fg|_a^b = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx$$

$$\int_a^b fg' dx = fg(x)|_a^b - \int_a^b f'g dx$$

Primitieve van $ln(x)$

Voorbeeld

Neem $f = ln(x)$ en $g' = 1$

$$\begin{aligned}\int ln(x)dx &= \int 1ln(x) \\ &= xln(x) - \int x\frac{1}{x}dx \\ &= xln(x) - \int 1dx \\ &= xln(x) - x + C\end{aligned}$$

Primitieve van $sin(3x)cos(x)$

Voorbeeld

Neem $f = sin(3x)$ en $g' = cos(x)$

$$\int sin(3x)cos(x)dx = sin(3x)sin(x) - 3\int cos(3x)sin(x)dx$$

$$= sin(3x)sin(x) + (3cos(3x)cos(x) +$$

$$9\int sin(3x)cos(x))$$

$$8\int sin(3x)cos(x) = -(sin(3x)sin(x) + 3cos(3x)cos(x))$$

$$\int sin(3x)cos(x) = \frac{-(sin(3x)sin(x) + 3cos(3x)cos(x))}{8}$$

Primitieve van xe^x

Voorbeeld

Neem $f = x$ en $g' = e^x$

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

Voorbeeld

Neem $f = sin(x)$ en $g' = e^x$

$$\int sin(x)e^x dx = sin(x)e^x - \int cos(x)e^x dx$$

$$= sin(x)e^x - (e^x cos(x) - \int e^x sin(x) dx)$$

$$\int sin(x)e^x dx = \frac{e^x}{2}(sin(x) - cos(x))$$

Primitieve van $x^n e^{-x}$

Voorbeeld

$$x^n e^{-x} = (x^n + nx^{n-1} + \cdots + n!)e^{-x} + C$$

De rest is huiswerk.

Veel gebruikte eigenschappen

Als $f \in R[a,b]$ en
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ dan:

- F uniform continue
- Als f continu op c dan F differentieerbaar op c en F'(c) = f(x)
- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

De afbeelding: oppervlakte blokje $= c = dx * f(x)$
$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dxf(x)}{dx} = f(x)$
Let op! a staat niet in de formule, dus waarde van a maakt niet uit.
Vraag: $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(x)dx$?