Analysis 2B

Luc Veldhuis

19 april 2017

Herhaling

Lokaal maximum/minimum

$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, met $\mathcal{U}$ open en $a \in \mathcal{U}$
Als f een lokaal maximum/minimum heeft dan is $\nabla f(a) = 0$ (er is een kritiek punt van f)

Vraag van vandaag

Als we een kritiek punt a gevonden hebben, hoe weten we of het een lokaal maximum of minimum is?
Antwoord: Kijk naar 2e orde afgeleide.
Link met stelling van Taylor.

Stelling van Taylor

Stelling van Taylor voor functies met 1 variabele

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met f k-maal differentieerbaar
$P_k(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k$ is de Taylor polynoom van graad k van f rond a
$f(x) = P_x(x-a) + R_k(x-a)$, met $R_x(x-a)$ als rest.
Formule van Taylor met Lagrange rest:
Als $f^{(k+1)}$ bestaat in alle punten van het interval met eindpunten x en a, dan bestaat er ξ tussen x en a zodat:
$R_x(x-a) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$

Opmerking

Dit is een generalizatie van de middelwaardestelling.
Kies $k = 0$ en je krijgt de middelwaardestelling.

Stelling van Taylor

Toepassing

Het berekenen van functiewaarden met zekere precisie.

Gebruik de stelling van Taylor om de waarde van $\frac{1}{e}$ te benaderen.

De Taylor polynoom van graad 4 van $f(x) = e^x$ rond 0:

$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

$\frac{1}{e} = e^{-1} = P_4(-1) + R_4(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + R_4(-1)$

De rest kunnen we als Lagrange rest schatten:

$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x)^5$ met $x < \xi < 0$

$R_4(-1) = -\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}$ met $-1 < \xi < 0$

$|R_4(-1)| = |\frac{e^{\xi}}{120}| < \frac{1}{120}$ omdat $e^{\xi} < 1$

Stelling van Taylor

Rest gaat naar 0 onder voorwaardes

Neem aan dat $f^{(k+1)}(x) : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat en continu is in $a \in \mathcal{U}$.
Dan is $f^{(k+1)}(x)$ begrensd in open interval rond a.
Bijvoorbeeld: $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, dat wil zeggen, $\exists M > 0$ zodanig dat $|f^{(k+1)}(x)| \leq M$ voor alle $x \in \mathcal{U}$ zodat $|x - a| < \epsilon$
Hieruit volgt $\left|\frac{R_k(h)}{h^k}\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!h^k}(x-a)^{k+1}\right| \leq \frac{M}{(k+1)!}|h| \to 0$ voor een $a < \xi < a + h = x$
$\lim\limits_{h \to 0} \left|\frac{R_k(h)}{h^k}\right| = 0$

Stelling van Taylor

Tweede afgeleide test

Neem aan dat f twee keer differentieerbaar is met continu tweede afgeleide. De formule van Taylor met $k = 2$:
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R_2(x-a)$
Neem aan dat a een kritiek punt is: $f'(a) = 0$.
Dan geldt $f(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R_2(x-a)$
$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R_2(x-a)$
Als $x \neq a$:
$\lim_{x \to h} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}f''(a) + \lim_{x \to h} \frac{R_2(x-a)}{(x-a)^2}$
$\lim_{x \to h} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}f''(a)$ want $\lim_{x \to h} \frac{R_2(x-a)}{(x-a)^2} = 0$
Dus maximum of minimum hangt af of $f''(a)$ negatief of positief is.

Stelling van Taylor

Gevolg

Stelling 6.3: Neem aan dat $f^{(k+1)}(x)$ bestaat in een open interval rond a en continu is in a. Neem ook aan dat
$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = f^{(k)}(a) = 0$
Maar $f^{(k+1)}(a) \neq 0$
Dan heeft f:

- Lokaal minimum als $k+1$ even is en $f^{(k+1)}(a) > 0$
- Lokaal maximum als $k+1$ even is en $f^{(k+1)}(a) < 0$
- Geen maximum of minimum als $k+1$ oneven is.

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Hogere orde partiële afgeleiden

We beschouwen functies van klasse $\mathcal{C}^k$
$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is een klasse van $\mathcal{C}^k$ als $\forall i_1, \dots, i_q,\ q \leq k$, $i_j \in \{1, \dots, n\} \forall j$ de afgeleide $D_{i_1} \dots D_{i_q} f$ bestaat en continu is op $\mathcal{U}$

Voorbeeld

$n = 2,\ k = 3,\ q = 3$
$(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 1)$
$D_1 D_2 D_1 f = D_1^2 D_2 f$

Belangrijke opmerking

Dankzij de continuïteit aanname maakt de volgorde niet uit:
$D_{i_1} \dots D_{i_q} f = D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} f$ waarbij $j_r =$ aantal keer dat $r \in i_1, \dots, i_q$ verschijnt.
Continu differentieerbaar $= \mathcal{C}^1$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Voorbeeld

$n = 2,\ k = 10,\ q = 6$
$(i_1, \ldots, i_q) = (1, 1, 2, 1, 2, 1)$
$D_1 D_1 D_2 D_1 D_2 D_1 f = D_1^4 D_2^2 f = D_1^2 D_2^2 D_1^2 f = D_1^3 D_2^2 D_1 f$
$j_1 = 4,\ j_2 = 2$

Richtingsafgeleide

$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ van klasse $\mathcal{C}^k$ op $\mathcal{U}$ en $D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n} f$ partiele afgeleide van orde $j_1 + \cdots + j_n$
Neem aan dat $j_1 + \cdots + j_n < k$. Dan is $D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n} f$ differentieerbaar en in het bijzonder bestaat de richtingsafgeleide $D_v(D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n} f)$ op $\mathcal{U}$ voor alle $v \in \mathbb{R}^n$ met $v = (v_1, \ldots, v_n)$ en is gelijk aan $\sum_{r=1}^{n} v_r D_r(D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n} f) = \sum_{r=1}^{n} v_r D_1^{j_1} \ldots D_r^{j_r+1} \ldots D_n^{j_n} f$
In het bijzonder bestaat $\forall v \in \mathbb{R}^n\ D_v^k f = (v_1 D_1 + \cdots + v_n D_n)^k f$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Voorbeeld

Voor $n = 2$, zij $v = (v_1, v_2)$

$$D_v^k = (v_1 D_1 + v_2 D_2)^k f = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} v_1^j v_2^{k-j} D_1^j D_2^{k-j}$$

Voor $n > 2$ 'multinominale coefficienten'

Taylor polynoom van graad k rond a

$$h \in \mathbb{R}^n : P_k(h) = \sum_{r=0}^{k} \frac{D_h^r f(a)}{r!}$$

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$P_2(h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a)$

$P_2(h) =$

$f(a) + h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a) + \frac{1}{2}(h_1^2 D_1^2 f(a) + 2 h_1 h_2 D_1 D_2 + h_2^2 D_2^2 f(a))$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$

Wat is de Taylor polynoom van graad k van f rond het punt $(0, 0)$?

We weten: $D_1^{j_1} D_2^{j_2} f = f \ \forall j_1, j_2$ en $D_1^{j_1} D_2^{j_2} f(0, 0) = 1$

$D_h^r f(0, 0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_1^j x_2^{k-j} D_1^j D_2^{k-j} f(0, 0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_1^j x_2^{k-j} =$

$(x_1 + x_2)^k$

Dus $P_k(x_1, x_2) = \sum_{r=0}^{k} \frac{D_h^r f(0,0)}{r!} = \sum_{r=0}^{k} \frac{(x_1+x_2)^r}{r!}$

Stelling van Taylor voor functies van meerdere variabelen

Voor volgende keer:
Stelling van Taylor:
$R_k(h) = f(a+h) - P_k(h)$
$\exists \xi \in L$ zodanig dat $R_k(h) = \frac{D_h^{k+1} f}{(k+1)!}$ met L een lijn van x naar a.