Linear Algebrea - Opdracht 5

Luc Veldhuis

Maart 2017

1. Zij $V = P_2(\mathbb{C})$ de ruimte van de polynomen met complexe coëficienten van de graad ten hoogste 2 met de inwendige product $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Zij U :=span$\{1, t\}$ en $P_U : V \to V$ de orthogonale projectie op U. Bepaal $P_U(p)$ voor $p(t) = 2 + 2t + t^2$.
   We weten dat voor een orthogonale basis $\{b_1, \dots, b_m\}$ van een deelruimte H van de unitaire ruimte V voor de orthogonale projectie $P : V \to H$ geldt dat $P(w) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle w,b_i\rangle}{\langle b_i,b_i\rangle} b_i$ voor alle $w \in V$.
   Om deze formule te gebruiken moeten we eerst de basis orthogonaal maken. Hiervoor gebruiken we het Gramm-Smidt process.
   $b_1 = 1$
   $b_2 = t - \frac{\langle t,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1$
   $\frac{\langle t,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} = \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}$
   $\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$
   $\langle t, 1\rangle = \int_0^1 tdt = [\frac{1}{2}t^2]_0^1 = \frac{1}{2}$
   $b_2 = t - \frac{\frac{1}{2}}{1} 1 = t - \frac{1}{2}$
   We weten ook dat $\langle t-\frac{1}{2}, t-\frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2 dt = \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}dt = [\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
   Deze basis is dus niet orthonormaal.
   We hebben nu de orthogonale basis span$\{1, t - \frac{1}{2}\}$
   We berekenen nu $P_U(p) = P_U(2 + 2t + t^2) = \frac{\langle 2+2t+t^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 + \frac{\langle 2+2t+t^2,t-\frac{1}{2}\rangle}{\langle t-\frac{1}{2},t-\frac{1}{2}\rangle}(t - \frac{1}{2})$
   $\langle 2 + 2t + t^2, 1\rangle = \int_0^1 2 + 2t + t^2 dt = [2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3]_0^1 = \frac{10}{3}$
   $\langle 2+2t+t^2, t-\frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 2t+2t^2+t^3-1-t-\frac{1}{2}t^2 dt = \int_0^1 -1+t+\frac{3}{2}t^2+t^3 dt = [-t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{4}t^4]_0^1 = \frac{3}{12}$
   $P_u(p) = \frac{\frac{10}{3}}{1} 1 + \frac{\frac{3}{12}}{\frac{1}{12}}(t - \frac{1}{2}) = \frac{10}{3} + 3t - \frac{3}{2} = \frac{11}{6} + 3t$

2. Zij U een unitaire complexe $(n \times n)$-matrix.
   (a) Bewijs, dat $|\det U| = 1$.
   We weten dat voor een unitaire matrix geldt dat $U^* = U^{-1}$. We weten ook dat $U^{-1}U = I$ en dus $U^*U = I$. We weten ook dat $U^* = \overline{U}^T$. Ook weten we dat $\det U^T = \det U$ en dat $\det \overline{U} = \overline{\det U}$ en dat $\det AB = \det A \det B$.
   Dit geeft dat $\det U^*U = \det U^* \det U = \det \overline{U}^T \det U = \det \overline{U} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|^2 = \det I = 1$
   Dus $|\det U|^2 = 1$. Dus dit geeft $|\det U| = 1$.
   (b) Zij λ een eigenwaarde van U. Bewijs, dat $|\lambda| = 1$.
   We weten dat als geldt dat $Uv = \lambda v$ dan is λ een eigenwaarde van U. We weten ook dat $\|Uv\| = \|v\|$ dus moet ook gelden dat $\|\lambda v\| = \|v\|$. Dus $(\langle \lambda v, \lambda v\rangle)^2 = (\langle v, v\rangle)^2$. Dus $\langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle$. Oftewel $\langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\langle v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle$. Oftewel $|\lambda|^2 = 1$. Dit geeft $|\lambda| = 1$