Analysis 2A

Luc Veldhuis

14 Februari 2016

Uniforme convergentie

We gaan kijken naar de eigenschappen van:

- Continuïteit
- Integreerbaarheid
- Differentieerbaarheid

voor uniform convergente functie-rijen. Belangrijk voor termsgewijs differentiëren en integreren van macht reeksen.

Sneak preview

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rij van pariële sommen

$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ In het bijzonder geïnteresseerd in functie-rijen waarbij: f_n de vorm $f_n(x) = a_n(x-a)^n$, in andere woorden in functie reeksen van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$, de macht reeks.

Uniforme convergentie

Funtie reeksen

We kunnen van functie-rijen ook functie reeksen maken.

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$

$\{F_n\}$ nieuwe functie-rij. We gaan e convergentie van deze functie-rij onderzoeken.

$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

'Som van functie reeks'

Stelling

Als $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een functie-rij is met $f_n : D \to \mathbb{R}$ continue op D $\forall n \in \mathbb{N}$ en de rijs convergeert uniform op D naar een functie $f : D \to \mathbb{R}$ dan is de limiet ook continue op D.
Uniforme limiet van continue functies is continue.

Uniforme convergentie

Idee van het bewijs

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$
Hiervoor hebben we de eigenschap van uniforme convergentie en continuïteit van $f_n \forall n \in \mathbb{N}$ nodig.

Continuïteit

- Bij puntsgewijze convergentie kan continuïteit verloren gaan.
- Bij uniforme convergentie niet.

Uniforme convergentie

Bewijs

Aannames:

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert uniform naar f op D
- f_n is continue op D voor alle $n \in \mathbb{N}$

Te bewijzen: f is continue op D, dat wil zeggen, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ voor alle $x_0 \in D$.
We moeten bewijzen $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ zodat als $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$, dan $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Zij $\epsilon > 0$. Dankzij de uniforme convergentie (1) vinden we n^* zodat $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ voor alle $n \geq n^*$ en alle $x \in D$.(*)
We beschouwen nu f_{n^*}. Uit de continuïteit (2) volgt dat f_{n^*} continue is in alle punten van D en uit de definitie van continuïteit in x_0 volgt $\exists\delta > 0$ zodat als $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$ dan is $|f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ (**)

Uniforme convergentie

Bewijs (vervolg)

Uit (*) en (**) volgt nu:
Voor alle $x_0 \in D$ als $x \in D$,$|x - x_0| < \delta$:
$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0) - f_{n^*}(x_0) - f(x_0)|$
$\leq |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| + |f_{n^*}(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$

Opmerking

$\{f_n\}$ rij van continue functies die puntsgewijs convergeert naar een continue limiet bewijst **geen** uniforme convergentie. Ook niet als $D = \mathbb{R}$.

Voorbeeld

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ (continue)
Maar er is geen sprake van uniforme convergentie.

Uniforme convergentie

Bewijs

Kies $\epsilon = \frac{1}{2}$, dan voor alle $n \in \mathbb{N}$ vinden we $x \in \mathbb{R}$ $x = \sqrt{n}$, waarvoor geldt:
$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x^2}{n}| = 1 > \frac{1}{2}$

Integreerbaarheid

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, f_n continue op $[a, b]$
$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert uniform op $[a, b]$ naar f
Dan is f integreerbaar en bovendien geldt
$\int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

Uniforme convergentie

Voorbeeld

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+\cos(x)}{ne^x+\sin(x)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\cos(x)}{ne^x+\sin(x)} = e^{-x}$ voor alle $x \in [0,1]$ en de convergentie is uniform.

$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{n+\cos(x)}{ne^x+\sin(x) - \frac{1}{e^x}}| = \frac{\cos(x) - e^{-x}\sin(x)}{ne^x+\sin(x)} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n+\cos(x)}{ne^x+\sin(x)} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}$

Uniforme convergentie

Samenvatting

$\{f_n\}_n$ een functie-rij

- $f_n : D \to \mathbb{R}$ continue op $D \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{f_n\}$ convergeert uniform naar $f : D \to \mathbb{R}$

Dan is f continue op D. Als $D = [a, b]$ is f bovendien integreerbaar met $\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx$

Differentieerbaarheid

Vraag: wordt differentieerbaarheid behouden onder uniforme convergentie? Nee!
Zelfs als f_n differentieerbaar is voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\{f_n\}$ convergeert uniform naar een differentieerbare functie kunnen we nog steeds niet altijd limiet en afgeleide wisselen. Hiervoor zijn uniforme convergentie en continuïteit van de afgeleiden nodig en dus continue differentieerbaarheid van de functie-rij.

Uniforme convergentie

Definitie

$f : D \to \mathbb{R}$ heet continue differentieerbaar op D als

- f differentieerbaar is op D
- f' is continue op D

Voorbeeld

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{nx^2+1}$ convergeert uniform naar $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dus is continue differentieerbaar. We hebben hier een rij differentieerbare functies die uniform convergeert (op $\mathbb{R}$) naar een differentieerbare functie.
$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{1+nx^2}$
$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = 1$ voor $x = 0$, 0 voor $x \neq 0$. Omdat g niet continue is, weten we dat $\{f_n'\}$ **niet** uniform convergeert.
Bovendien, $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) \neq f'(x)$. Dus we hebben meer voorwaardes nodig voor differentieerbaarheid!

Uniforme convergentie

Stelling 8.3.5

$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ rij continue differentieerbare functies. $\forall n \in \mathbb{N}$ voor $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ geldt

- f_n differentieerbaar en continue (is nodig)
- f_n' is continue

Zij $f(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$. Neem aan dat $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniform convergeert naar $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dan is f continue differentieerbaar op D met $f' = g$. (Continue door de aannames)

Uniforme convergentie

Bewijs

Omdat f_n' continue is op $[a, b]$, is f_n' ook integreerbaar $\forall n \in \mathbb{N}$. Uit de Hoofdstelling van de Integraal Calculus volgt:
$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a)$ voor alle $x \in [a, b]$
Neem aan beide zijden $\lim_{n\to\infty}$:
$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$.
Wegens uniforme convergentie en continuïteit van afgeleides kunnen we limiet binnen afgeleide schrijven:
$\int_a^x g(x)dx = f(x) - f(a)$
Differentieer naar x geeft (mag wegens continuïteit):
$\frac{d}{dx} \int_a^x g(x)dx = \frac{d}{dx}(f(x) - f(a))$
$g(x) = f'(x)$
Dus f continue differentieerbaar.

Convergentie van Functie Reeksen

Definitie

$\{f_n\}$ een functie-rij $f_n : D \to \mathbb{R}$
We definieren een nieuwe functie-rij als volgt:

$$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \; F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

Dit heet de rij van partiële sommen van de functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$

De functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ convergeert uniform/puntsgewijs naar $F : D \to \mathbb{R}$ dan en slechts dan als de rij $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniform/puntsgewijs naar F convergeert.

Voorbeeld

$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{n-1}$

$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 + x + \cdots + x^{k-1}$

De n-de partiële som van de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} x^k - 1$

$F_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$
$xF_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^k$
$F_n(x) - xF_n(x) = 1 - x^n$
$(1-x)F_n(x) = 1 - x^n$

Voorbeeld

$F_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$
We onderzoeken de convergentie van $\{F_n\}$ op $(-1,1)$:
$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

Convergentie van Functie Reeksen

Vraag

Convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ uniform naar $F(x) = \frac{1}{1-x}$ op $(-1, 1)$?

Antwoord: Nee!

Dit volgt bijvoorbeeld uit $F_n(x) = 1 + \cdots + x^{n-1}$ is begrensd op $(-1, 1)$ $\forall n$.

$F(x) = \frac{1}{1-x}$ is onbegrensd! Nu gebruiken we:

Als $\{f_n\}$ een rij begrensde functies is, die uniform naar een limiet f convergeert, dan is f ook begrenst.

Convergentie van Functie Reeksen

Opmerking

Op $[-a, a]$ met $a \in (0, 1)$ is de convergentie **wel** uniform want dan geldt:
$|F_n(x) - F(x)| = |\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}| = |\frac{x^n}{1-x}| \leq \frac{a^n}{1-a}$

Stelling §8.4.3

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ functiereeks $f_k : D \to \mathbb{R}$ continue $\forall k \in]N$. Neem aan dat de functiereeks uniform convergeert naar F op D

$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$

De n-de partiële som van de reeks is dan ook continue (als eindige som van continue functies)

De rij van partiële sommen is een uniform convergente rij van continue functies. Dus F is continue op D

Convergentie van Functie Reeksen

Te behandelen:

- Uniforme convergentie van functiereeksen
  - Criterium van Cauchy
- Absolute convergentie van functiereeksen
  - M-Test van WeiserStraß

Convergentie van Functie Reeksen

Criterium van Cauchy

Voor rijen: $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ functie-rij op D
$\{f_n\}$ convergeert uniform op D dan en slechts dan als voor alle $\epsilon > 0 \exists n^* \in \mathbb{N}$ zodat $\forall x \in D$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ als $n, m \geq n^*$
Dit gaan we toepassen op functiereeksen.

Criterium van Cauchy

Voor reeksen: $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ functie-rij op D
$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ convergeert uniform op D dan en slechts dan als ($\Leftrightarrow$) de rij van partiële sommen $\{F_n\}$ uniform convergeert op D dan en slechts dan als ($\Leftrightarrow$) voor alle $\epsilon > 0 \exists n^* \in \mathbb{N}$ zodat $\forall x \in D$
$|F_n(x) - F_m(x)| < \epsilon$ als $n, m \geq n^*$

Convergentie van Functie Reeksen

Bewijs

$|F_n(x) - F_m(x)| = |\sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{m} f_k| =$

(Neem zonder verlies van algemeenheid aan: $m \geq n$)

$= |\sum_{k=n+1}^{n} f_k| = |f_{n+1} + \cdots + f_m(x)|$

$\forall \epsilon > 0$, $\exists n^* \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\forall x \in D$ $|f_{n+1} + \cdots + f_m(x)| < \epsilon$ als $m \geq n \geq n^*$

Opmerking

In het bijzonder, als $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniform convergeert, dan moet gelden: $\forall \epsilon > 0$ $\exists n^* \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|f_{n+1}(x)| < \epsilon$ voor alle $n \geq n^*$ en alle $x \in D$ (Volgt uit Criterium van Cauchy met $m = n + 1$). In andere woorden: $\{f_n\}$ convergeert uniform naar $f = 0$ op D. (Noodzakelijke voorwaarde)

Convergentie van Functie Reeksen

Definitie

De functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ is absoluut (uniform) convergent op D dan en slechts dan als $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ (uniform) convergent is.

M-Test van WeiserStraß

Voor absolute convergentie
$\{f_n\}$ functie-rij op D, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{R}}$, $M_n \in \mathbb{R}$, $M_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Als $|f_n(x)| \leq M_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D$ en $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert, dan convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ uniform op D en dus convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniform en absoluut op D.

Convergentie van Functie Reeksen

Voorbeeld

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$

$|\frac{\sin(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle $n \in \mathbb{N}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent (p-test)

Dus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ is uniform absoluut convergent.

Voor volgende week:

Integeren & Differentieren van functie reeksen

Stelling 8.4.15 en 8.4.17