Analysis 1B

Luc Veldhuis

2 December 2016

Differentiaal vergelijkingen

Voorbeeld met onbekende functie $x = x(t)$ van t, tijd

$$\frac{dx}{dt} = x \qquad\qquad x'(t) = x(t)$$

- Oplossing raden $x(t) = Ce^t$ (Niet $x(t) = e^t + C$!)
  $x'(t) = Ce^t$ klopt!
  $x(t) = x(0)e^t$ Hier is $x(0)$ de beginvoorwaarde
- Oplossen $x'(t) = x(t)$ is van gescheiden variabelen
  Primitieveer links en rechts naar t

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{x'(t)}{x(t)} = 1$$

$$ln|x(t)| = t + C$$

$$x(t) = e^{t+C} = e^C e^t = C_1 e^t$$

Differentiaal vergelijkingen

Voorbeeld

Bijzonder geval van $\phi(t, x(t)) \leftarrow$ eerste orde gewone differentiaal vergelijking :
Eerste orde vanwege 1$^{\text{e}}$ afgeleide. Gewoon vanwege slechts 1 onbekende.

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) = a(t)b(x(t))$$
$$x(t_0) = x_0 \leftarrow \text{ beginwaarde}$$

Dit is een beginwaarde probleem voor $x(t)$

Differentiaal vergelijkingen

Bijzondere gevallen

$\frac{dx}{dt} = b(x)a(t)$
$\frac{dx}{dt} = b(x) \Rightarrow$ delen door $b(x)$
$\frac{dx}{dt} = a(t)$ dit geeft:
$x(t) = A(t) + C$
$\frac{1}{b(x)} \frac{dx}{dt} = a(t)$
Als $B'(x) = \frac{1}{b(x)}$, $A'(t) = a(t)$ dan dan is $B(x)$ de primitieve van $\frac{1}{b(x)}$ naar x en $A(t)$ de primitieve van $a(t)$ naar t.
Impliciete oplossing: $B(x) = A(t) + C$, hopelijk is daarna $x(t) = \dots$ en C te kiezen zodat het uitkomt.

Voorbeeld

$$\frac{dy}{dx} = y' = xe^y$$

$$\frac{1}{e^y} = x$$

$$xdx = e^{-y}dy$$

$$\int xdx = \int dye^{-y}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = -\ln(C - \frac{1}{2}x^2)$$

De impliciete oplossing is $-e^{-y} = \frac{1}{2}x^2 + C$ want y is nog niet geïsoleerd.

Differentiaal vergelijkingen

Methoden voor DV's:

- exact oplossen
- iets anders (aflezen van grafiek)

Voorbeeld

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$\frac{1}{f(x)} dx = dt$$

Nulpunten van $f(x)$ zijn evenwichts oplossingen van $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Grafiek van $y = f(x)$ in (x, y)-vlak vertelt vrijwel alles over grafieken van oplossingen $x(t)$ in het (t, x)-vlak.

Differentiaal vergelijkingen

Volgend type

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x(t) = b(t)$$

Deze vergelijking is van de 1^e orde, linear in x en inhomogeen.
Bijbehoorende homogene vergelijking: $\frac{dx}{dt} + a(t)x(t) = 0$
Algemene oplossing (met constante) is oplossing van homogene vergelijking + de particuliere oplossing.
De particuliere oplossing is 1 oplossing van de inhomogene oplossing.
Algemene oplossing $= x_{part}(t) + Cx_{hom}(t)$
Vinden van homogene oplossing zoals hiervoor beschreven.
Hoe vind je de particuliere oplossing?
$Cx_{hom}(t)$ truc met scheiden van variabelen
$x_{part}(t)$ raden of gebruik voor 1^e orde integrerende factor

Particuliere oplossing

Integrerende factor

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x(t) = b(t)$$
$$e^{A(t)}(\frac{dx}{dt} + A'(t)x(t)) = e^{A(t)}b(t)$$
$$\frac{dx}{dt}e^{A(t)}x(t) = e^{A(t)}A'(t)x(t) + e^{A(t)}x'(t)$$
$$\frac{dx}{dt}e^{A(t)}x(t) = e^{A(t)}b(t)$$
$$[e^{A(s)}x(s)]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)ds$$
$$e^{A(t)}x(t) = e^{A(t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)dx$$

Particuliere oplossing

Integrerende factor (vervolg)

$$x(t) = e^{-A(t)+A(t_0)}x(t_0) + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)$$

Algemene vorm:

$$x(t) = e^{-A(t)} C + e^{-A(t)} \text{ primitieve van } e^{A(t)} b(t)$$

Particuliere oplossing

Voorbeeld

$$y' + 2xy = x$$

$$y' + 2xy = y'(x) + 2xy(x) = y'(x) + (x^2)'y(x) = x$$

$$(y'(x) + 2xy(x))e^{x^2} = xe^{x^2}$$

$$(y(x)e^{x^2})' = (\frac{1}{2}e^{x^2})'$$

$$y(x)e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$