Analysis 2A

Luc Veldhuis

1 Maart 2016

Lineaire afbeeldingen

Lineaire afbeelding

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$a \in \mathbb{R}^n$
De afgeleide an f in a is een lineaire afbeelding
$f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$
$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \ \forall 0 \leq i \leq m$
f_i heet een coördinaat functie.

Uit Analyse 1

Uit Analyse 1, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} : f'(a)$
Raaklijn: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$
Constante functie + lineaire afbeelding = affine ($y = a + bx$ met $a \neq 0$)

Lineaire afbeeldingen

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f(x,y) = (x^2 - xy, 2x - y^3, x^2)$
$f_1(x,y) = x^2 - xy$
$f_2(x,y) = 2x - y^3$
$f_3(x,y) = x^2$

Definitie

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heet **lineair** dan en slechts dan als
$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$
$\forall a, b \in R$ als scalar, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ als vector.

Lineaire afbeeldingen

Regels

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{$Lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m\}$ is ook een vector ruimte.
$M(m \times n, \mathbb{R})$ matrices met m rijen en n kolommen,
$(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$
Er is een 1-1 correspondentie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \leftrightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$
$L \leftrightarrow A$
$L(x) = A \cdot x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$L_2 \circ L_1 \leftrightarrow A_{L_2 \circ L_1} = A_2 \cdot A_1$

Rotaties

Rotaties van $\mathbb{R}^2$ zijn lineaire afbeeldingen
$\mathbb{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$v \mapsto R_\theta(v)$
Matrix geassocieerd met $\mathbb{R}_\theta$ is een isometrie, behoudt de lengte want de determinant is $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$||v|| = ||\mathbb{R}_\theta(v)|| \ \forall v \in \mathbb{R}^2$.
'$\mathbb{R}_\theta$ is een isometrie van $\mathbb{R}^2$'

Samengestelde rotaties

$\mathbb{R}_\theta \circ \mathbb{R}_\phi = \mathbb{R}_{\theta+\phi}$.
De geassocieerde matrix is:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}$$

Lineaire afbeeldingen

Determinanten

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ met L associeerbaar met een matrix $A \in M(n \times m, \mathbb{R})$.
Determinant $A \in \mathbb{R}$ is gedefinieerd:
$\det AB = \det A \det B$
$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
A^{-1} is de **inverse** van A als $AA^{-1} = 1_{n \times n} = A^{-1}A$

Limieten en continuïteit

Limieten en continuïteit

$f : D \to \mathbb{R}^m$
$D \subseteq \mathbb{R}^n$
$(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
$\text{Domein}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 - x^2 - y^2 > 0\} =$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ \|(x, y)\| < 1\}$

Limieten en continuïteit

Open bal

$a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$
$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - a\| < r\}$ open bal met straal r en middelpunt a.

Definitie limietpunt

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ $a \in \mathbb{R}^n$ heet limietpunt dan en slechts dan als $\forall r > 0$

$$B_r(a) \cap D \begin{cases} \neq \emptyset \text{ als } a \notin D \\ \not\supseteq \{a\} \text{ als } a \in D \end{cases}$$

Rand van een bal

$$\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - a\| = r\}$$

Gesloten bal

$\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - a\| \leq r\}$ beval al zijn limietpunten

Definitie limiet

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ a een limietpunt van D, $b \in \mathbb{R}^m$.
$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ zodat als $x \in D$ en $\|x - a\| < \delta$ dan $\|f(x) - b\| < \epsilon$
In andere woorden, Alle punten in $B_\delta(a)$ in $\mathbb{R}^n$ worden afgebeeld op $B_\epsilon(b)$ in $\mathbb{R}^m$.

Definitie continuïteit

Neem aan dat a een limiet punt is en $a \in D$.
f is **continu** in a dan en slechts dan als $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Limieten en continuïteit

Stellingen

- 'Limieten kunnen per coördinaat functie berekend worden'
- 'Continuïteit van f reduceert tot continuiteit van de coordinaat functies van f'

Stelling

$f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a een limietpunt van D, $b \in \mathbb{R}^m$.
Dan geldt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow$
$\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = b_i$ voor alle $1 \leq i \leq m$

Limieten en continuïteit

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x^2 - 2y, y - x^3)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = (-1,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f_1(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2 - 2y = -1 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} y - x^3 = 0 \end{cases}$$

Limieten en continuïteit

Bewijs continuïteit

Uit de stelling van het limiet volgt onmiddellijk als $a \in D$, f continue in $a \Leftrightarrow f_i$ continu in a voor alle $1 \leq i \leq m$

$$\lim_{x \to a} f(x) = (\lim_{x \to a} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to a} f_n(x)) = (f_1(a), \ldots, f_n(a)) = f(a)$$

Limieten en continuïteit

Herhaling

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- a een limiet punt van D, $b \in \mathbb{R}^n$
  $\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \; \forall 1 \leq i \leq m$
- $a \in D$ een limietpunt
  f continu in a dan en slechts dan als f_i continue in a $\forall 1 \leq i \leq m$

Limieten en continuïteit

Bewijs

$\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \; \forall 1 \leq i \leq m \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b$

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_i$ zodat als $x \in D$, $\|x - a\| < \delta_i$ dan geldt

$|f_i(x) - b_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}$

Kies $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Dan geldt voor $x \in D$ en $\|x - a\| < \delta$

dat $\|f(x) - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - b_i)^2} < \sqrt{m \frac{\epsilon^2}{m}} = \epsilon$

Voorbeeld

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  $f(x, y) = x + y$
  Bewering: f continu in (x_0, y_0) voor alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x - x_0 + y - y_0| \leq$
  $|x - x_0| + |y - y_0| \leq 2\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$
  Dus $\forall \epsilon > 0$, als $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$ dan
  volgt dat $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$
  Want $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, y - y_0)\| =$
  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ en
  $a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
  $b \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
  $a + b \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}$ dus
  $a + b \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ('product'), $f(x, y) = xy$ is ook continu

Continuiteit van samengestelde functies

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Bewijs dat hij continu is.
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto^{som} f(x) + g(x)$ is een samenstelling van 2 continue functies, dus continu.

Samenstelling van continue functies is continu

$f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$, gedefinieerd op $\{x \in D_1 : f(x) \in D_2\} = D$
Als f continu is in $a \in D_1$ en g is continu in $f(a)$ dan is $g \circ f$ continu in a

Lemma

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim_{y \to b} g(y) = c$ dan $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$

Product is continu

Voor het product $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = p \circ (f, g)(x)$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x)g(x)$

Gevolg

Uit continuïteit van som, product en samenstelling van continue functies volgt: som/product van continue functies is continu.
In het bijzonder, alle polynomen zijn continu.
$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \in J \subseteq \overline{\mathbb{N}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{N}}} a_I x^I = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ met
$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ en $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$
Alle lineaire functies zijn continu!

Limieten en continuïteit

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f(x, y, z) = \sin(x + \cos(yz))$
Bewijs dat f continu is.
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y, z) \mapsto (x, \cos(yz)) \mapsto x + \cos(yz) \mapsto \sin(x + \cos(yz))$
Nog te bewijzen de functie: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \mapsto (x, \cos(yz))$
is continu.
Eerste coordinaat functie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto x$ is continu.
Tweede coordinaat functie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto \cos(yz)$ kunnen we schrijven als $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y, z) \mapsto (y, z) \mapsto yz \mapsto \cos(yz)$ en deze is ook continu. Dus ook continu.
Daarmee is f ook continu.

Limieten en continuïteit

Voorbeeld niet continue functie

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Voor $x = y$ geldt $f = \frac{1}{2}$. Maar in $(0,0)$ geeft dit $f = 0$.
Voor $\epsilon = \frac{1}{4}$ geldt: $\forall \delta > 0\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ en $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = \frac{1}{2} > \epsilon$ dus niet continu!
In feite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat niet. In andere woorden, we kunnen de definitie van f niet veranderen in $(0,0)$ zodat het continu wordt.

Bewijs

Stel dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \alpha \in \mathbb{R}$ bestaat.
Construeer $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\phi(t) = (t, 0)$
$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\psi(t) = (t, t)$
Dan $\lim_{t\to 0}(f \circ \phi)(t) = \lim_{t\to 0} \alpha = \lim_{t\to 0}(f \circ \psi)(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Maar $\alpha = 0 \neq \frac{1}{2}$. Tegenspraak. Dus limiet bestaat niet!