Analysis 2B

Luc Veldhuis

24 mei 2017

Integratie

Idee

In $\mathbb{R}^3$ lijnen en oppervlakken zijn nulverzamelingen $\rightarrow$ lijnintegralen, oppervlakte integralen.
$\int_A f$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $V(A) = 0$, $\in_A f = 0$

Lijnintegralen

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ een kromme, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ met $Im(\gamma) = C$
$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $C \subseteq \mathcal{U}$
$\int_C f = \int_b^a f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$ neem $h(t) = f(\gamma(t))|\gamma'(t)|$
$\int_C f$ is onafhankelijk van de gekozen parametrisatie.
$\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ monotoon steigend. $\phi'(t) > 0\ \forall t \in [a, b]$
Dan $\gamma = \beta \circ \phi$ ('γ en ϕ equivalent')
Dan is $\int_b^a f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_c^d f(\beta(t))|\beta'(t)|dt$

Voorbeeld

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$
$\phi : [0, 2\pi] \to [0, 4\pi]$, $\phi(t) = 2t$
$\gamma = \beta \circ \phi$ geeft $(\cos(t), \sin(t)) = \beta \circ 2t$, dus $\beta = (\cos(\frac{1}{2}t), \sin(\frac{1}{2}t))$
$\|\beta'(t)\| = \|(-\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}t), \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}t))\| =$
$\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2(\frac{1}{2}t) + \frac{1}{4}\cos^2(\frac{1}{2}t)} = \frac{1}{2}$
$\int_b^a f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_c^d f(\beta(t))|\beta'(t)|dt$ volgt nu uit de ketting regel.

Integratie

Lijnintegralen

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ een kromme, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$
Als $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, dan is γ_i differentieerbaar en γ_i' continu $\forall i = 1, \dots, n$
$\sigma(t) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| \; du =$ lengte van γ tussen $\gamma(a)$ en $\gamma(b)$
$\sigma(b) = \text{lengte}(\gamma) = L$
Dus σ differentieerbaar met $\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$, $\gamma'(t) \neq (0, \dots, 0)$
Dus σ inverteerbaar, met inverse τ.
$\sigma : [a, b] \to [0, L]$ en $\tau : [0, L] \to [a, b]$ met $\tau^{-1}(s) = \frac{1}{\sigma'(\tau(s))}$
$\hat{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ met $\hat{\gamma} = \gamma \circ \tau(s)$ dus $\|\gamma'(s)\| = 1$ voor alle $s \in [0, L]$
Dit heet de 'unit speed' parametrisatie en $\hat{\gamma}$ heet de 'booglengte' parametrisatie

Integratie

Hoofdstelling integraal calculus

$f(t) = \int_a^t h(s)ds$ met f differentieerbaar en $f'(t) = h(t)$

Inverse stelling

$g = f^{-1}$ dan $g'(s) = \frac{1}{f'(g(s))}$ als hij ongelijk is aan 0, want $(f \circ g)' = 1$, dus $f'(g(s))g'(s) = 1$.

Vector calculus

Vectorveld

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ met $x \in \mathbb{R}^n$

$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\int_\gamma F = \int_b^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$

$= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)))$