Complexe Analyse

Luc Veldhuis

17 April 2018

Residuen en polen

Herhaling

Zij C een simpel gesloten contour in D. Als $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch is, dan geldt $\int_C f(z)dz = 0$ volgens Cauchy-Goursat. Wat kunnen we zeggen als f niet overal analytisch is?

Definitie

Als er een $\epsilon > 0$ bestaat, zodat f analytisch is op de cirkelring $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$, dan wordt $z_0 \in \mathbb{C}$ een geïsoleerde singulariteit genoemd.

Voorbeeld

1. De singulariteiten van $f(z) = \frac{z-1}{z^5(z^2+9)}$ zijn $z = 0$ en $z = \pm 3i$. Zij zijn allemaal geisoleerd.
2. De singulariteiten van $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ zijn $z = 0$ en $z = \frac{1}{n}$ voor $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. $z = 0$ is niet geisoleerd, de rest wel.

Residuen en polen

Stelling

Als $z_0 \in \mathbb{C}$ een geïsoleerde singulariteit is, bestaat er een Laurtentreeksontwikkeling van f op een voldoende kleine cirkelring $D = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$.
$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ met $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, waarbij C een simpel linksomdraaiend gesloten contour is en $z_0 \in D$.

Definitie

Het coëfficiënt $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ wordt het residu van f bij $z = z_0$ genoemd en we schrijven $Res_{z=z_0} f := a_{-1}$ (uniek).

Residuen en polen

Residustelling van Cauchy

Veralgemensizering van Cauchy-Goursat. Zij C een simpel linksomdraaiend gesloten contour. Stel dat f analytisch is op alle inwendig gelegen punten van C behalve in een eindig aantal van geïsoleerde singulariteiten, $z_1, \ldots, z_n$.
$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res_{z=z_k} f$.

Bewijs

Kies on elke geïsoleerde singulariteiten een cirkelring D_k met met een linksom draaiende simpel gesloten contour C_k. Dan volgt met Cauchy-Goursat
$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res_{z=z_k} f$ omdat f analytisch is in alle punten tussen $C_1, \ldots, C_n$ en C.

Residuen en polen

Opmerking

Een andere manier om da te zien gaat als volvt. Stel dat er slechts *een* geïsoleerde singulariteit is, dan
$\int_C f(z)dz = \int_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_C (z-z_0)^n dz$
met $\int_C (z-z_0)^n dz = 0$ als $n \neq -1$,
$\int_C (z-z_0)^n dz = \int_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$ als $n = -1$. Dus
$\int_C (z-z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}$.

Voorbeeld

1. $\int_{|z|=1} \frac{e^z-1}{z^4} dz = 2\pi i Res_{z=0} \frac{e^z-1}{z^4}$.
   $\frac{e^z-1}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!} + \ldots$. Dus
   $Res_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}$.
   Dus $\int_{|z|=1} \frac{e^z-1}{z^4} dz = \frac{i\pi}{3}$

Residuen en polen

Voorbeeld

2. $\int_{|z|=1} cosh(\frac{1}{z})dz = 2\pi i Res_{z=0} cosh(\frac{1}{z})$.
   $cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$.
   $cosh(\frac{1}{z}) = 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} + \ldots$.
   Dus $Res_{z=0} cosh(\frac{1}{z}) = a_{-1} = 0$. Dus $\int_{|z|=1} cosh(\frac{1}{z})dz = 0$.

Opmerking

Dit is niet in tegenspraak met Morera, want $cosh(\frac{1}{z})$ is niet continu.

Residuen en polen

Voorbeeld

3. $\int_{|z|=2} \frac{4z-5}{z(z-1)} dz = 2\pi i Res_{z=0} \frac{4z-5}{z(z-1)} + Res_{z=1} \frac{4z-5}{z(z-1)}$.
   Bekijk laurent reeks rond $z = 0$:
   $\frac{4z-5}{z(z-1)} = \frac{-4z+5}{z} \frac{1}{1-z} = \frac{-4z+5}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = (-4z+5) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$
   geeft $Res_{z=0} \frac{4z-5}{z(z-1)} = 5$.
   Bij $z = 1$: $\frac{4z-5}{z(z-1)} = \frac{4(z-1)-1}{z-1} \frac{1}{z} = \frac{4(z-1)-1}{z-1} \frac{1}{1-(1-z)} =$
   $\frac{4(z-1)-1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{n-1}$.
   Dus $Res_{z=1} \frac{4z-5}{z(z-1)} = -1$.
   Dus $\int_{|z|=2} \frac{4z-5}{z(z-1)} dz = 2\pi i(5-1) = 8\pi i$.

Residuen en polen

Definitie

Het residue van f bij ∞ is gedefinieerd als $Res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ waarbij C een linksomdraaiende simpel gesloten contour is zodat **alle** singulariteiten van f inwendig liggen.

Stelling

Het geldt $Res_{z=\infty} f(z) = -Res_{z=0}(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}))$

Residuen en polen

Bewijs

Kies $R > 0$ voldoende groot, zodat alle singulariteiten $|z_k| < R$, $k = 1, \ldots, n$ omdat f analytisch is op de cirkelring $D = \{z \in \mathbb{C}|\ R < |z| < \infty\}$ dus er bestaat een Laurentreeksontwikkeling $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, $|z| > R$, dus $\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}}$, $|z| < \frac{1}{R}$,
$Res_{z=0} \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$.

Voorbeeld

3. $\int_{|z|=2} \frac{4z-5}{z(z-1)} dz = 2\pi i Res_{z=\infty} \frac{4z-5}{z(z-1)} = -Res_{z=0} \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ waarbij $\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2} \frac{4z-5z^2}{1-z} = (\frac{4}{z} - 5) \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Dus $\int_{|z|=2} \frac{4z-5}{z(z-1)} dz = 2\pi i Res_{z=0} \frac{4z-5}{z(z-1)} = 8\pi i$.