

Complexe Analyse

Luc Veldhuis

20 Februari 2017

Exponentiaal

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

$\exp^{-1}(z) = \log(z) = \ln |z| + i \arg(z)$ maar geen injectie, dus niet bijjectief.

Maak logaritme meerwaardig, omdat \arg meerwaardig is.

Hoofdtak: $\text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z)$, met $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.
(Principal value van $\log(z)$)

Definitie

Zij $c \in \mathbb{C}$, dan definiëren we $z \mapsto z^c = e^{c \log(z)}$, de **machtfunctie** en $z \mapsto c^z = e^{z \log(c)}$, de **exponentiële functie** met basis $c \in \mathbb{C}$. Na beperking op een kleiner domein $D \subset \mathbb{C}$ is de restrictie éénwaardig en analytisch. De hoofdtak van z^c is gedefinieerd als $e^{c \operatorname{Log}(z)}$

Opmerking

Omdat \log meerwaardig is, zijn deze functies in het algemeen ook meerwaardig. (Kan ook oneindigwaardig of éénwaardig zijn.)

Voorbeeld

- $i^i = e^{i \log(i)}$ met $\log(i) = \ln|1| + i \arg(i) = i\frac{\pi}{2} + 2i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Dus $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ met $n \in \mathbb{Z}$.
Dit is reëelwaardig en oneindigwaardig.
- $4^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log(4)}$ met $\log(4) = \ln(4) + i \arg(4) = 2\ln(2) + 2i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Dus $4^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}(2\ln(2) + 2i\pi n)} = e^{\ln(2) + \pi i n} = e^{\ln(2)} e^{\pi i n} = \pm 2$.
- $1^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \log(1)} = e^{\frac{1}{m} i 2\pi n}$, $n \in \{0, \dots, m-1\}$

In het algemeen

Als $c = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, dan is $z \mapsto z^c$ meerwaardig met m verschillende waarden.

Na beperking tot $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ kunnen we de machtfunctie éénwaardig definiëren als $e^{c \operatorname{Log}(z)}$.

Afleiding

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Dus } \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Definitie

Over de complexe getallen zijn sinus en cosinus op precies dezelfde manier gedefinieerd:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{voor } z \in \mathbb{C}.$$

Stelling

Het geldt dat:

- $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2)$
 $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2)$
- $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
- $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$
 $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$
- $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh(y) \in \mathbb{R}$
 $\sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y) = i \sinh(y) \in i\mathbb{R}$ met $y \in \mathbb{R}$.
- $\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$
 $\cos(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$
- $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$
 $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$

Goniometrische functies

Definitie

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$
$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Stelling

De inverse functie van sin en cos zijn gegeven door:

$$\sin^{-1}(z) = -i \log(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$$
$$\cos^{-1}(z) = -i \log(iz + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$$

Bewijs

$$w = \sin^{-1}(z) \Leftrightarrow z = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})$$
$$\Leftrightarrow (e^{iw})^2 - eize^{iw} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (bekende functie)} \Leftrightarrow$$
$$w = -i \log(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$$

Opmerking

\cos^{-1} en \sin^{-1} zijn meerwaardig.

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\sin^{-1}(i) &= -i \log(1 + 2^{\frac{1}{2}}) = -i \log(1 \pm \sqrt{2}) = \\ &= -i \ln |1 \pm \sqrt{2}| + \arg(1 \pm \sqrt{2}) \text{ met } \arg(1 \pm \sqrt{2}) = \begin{cases} 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \\ \pi + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Dit geeft } \begin{cases} 2\pi n - i \ln |1 + \sqrt{2}| \\ \pi + 2\pi n - i \ln |\sqrt{2} - 1| \end{cases} \quad \text{voor } n \in \mathbb{Z}.$$

Stelling

Ale functies die we hebben bekeken zijn inderdaad analytisch.

- $\exp(z)' = \exp(z)$
- $\log(z)' = \frac{1}{z}$
- $(z^c)' = cz^{c-1}$
- $(c^z)' = c^z \log(c)$
- $\cos(z)' = -\sin(z)$
- $\sin(z)' = \cos(z)$

Bewijs

- $(\exp^{-1})'(z) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(z))} = \frac{1}{z}$
- $(z^c)' = (e^{c \log(z)})' = \frac{c}{z} e^{c \log(z)} = c z^{c-1}$
- $(c^z)' = (e^{z \log(c)})' = \log(c) e^{z \log(c)} = c^z \log(c)$
- $\cos'(z) = (\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}))' = \frac{1}{2}(ie^{iz} + (-i)e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

Opmerking

Hoewel \log meerwaardig is, is de afgeleide éénwaardig.

De functie heeft dezelfde afgeleide voor zijn meerwaardige punten.

Ook zien we $w = f(z)$, $f' = \frac{dw}{dz}$, $(f^{-1})' = \frac{dz}{dw}$ met $f^{-1}(w) = z$.