Complexe Analyse

Luc Veldhuis

10 April 2018

Laurentreeksen

Herhaling

$f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, dan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ voor $z \in \{z \in \mathbb{C} | \; |z - z_0| < R\}$. Dus f is gelijk aan zijn taylor reeks voor elke schijf die volledig binnen D ligt.

Herhaling

$f(z) = \frac{1}{1-z}$ analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, convergentie alleen op $|z| < 1$.

Vraag

Wat kunnen we zeggen als f niet analytisch is op een gegeven schijf?

Laurentreeksen

Stelling van Laurent

Stel dat f analytisch is op een cirkelring $D = \{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Dan is f gelijk aan zijn Laurentreeks $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ met $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds$, waarbij C een linksom draaiende simpel gesloten contour in D om z_0 is.

Opmerking

Als f analytisch is op $\{z \in \mathbb{C} | \; |z - z_0| < R_2\}$ dan $a_n = 0$ voor elke $n < 0$.
$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^n+1} ds = 0$ (Cauchy-Goursat) is analytisch als $n < 0$.
Verder is $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ voor $n \geq 0$ vanwege veralgemeniseerde Cauchy integraal formule. Dus Laurentreeks = Taylorreeks.

Laurentreeks

Voorbeeld

1. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dus niet alleen op de schijf $D_1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$, maar ook op de cirkelring $D_2 = \{z \in \mathbb{C} |\ 1 < |z| < \infty\}$.
   Op $D_1 : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$ Taylorreeks. Op $D_2 : f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z}^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$
   convergeert als Laurentreeks. ($|z| > 1$, dus $|\frac{1}{z}| < 1$)
2. $f(z) = \frac{z+1}{z-1} = -z\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z}$ met D_1, D_2 zoals hiervoor.
   Op D_1: $f(z) = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ Taylorreeks.
   Op $D_2 : f(z) = (z+1)\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = 1 + 2\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$.
3. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ analytisch op $D = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < \infty\}$.
   $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{z}^n}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$

Laurentreeks

Bewijs van de stelling van Laurent

Kies C_1, C_2, γ met C_1 en γ niet overlappend in C_2. Vanwege veralgemeniseering van Cauchy-Goursat geldt
$0 = \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds - \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds - \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}$. De eerste integraal is analytisch op de tussenruimte van C_2, C_1 en γ. Dus
$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s} ds$.
We weten al dat $\frac{1}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{s^{n+1}}$ als $|s| > |z|$. Dus voor elke $s \in C_2$.
$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{s}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^{n+1}}{s^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{s^{n+1}}$.
En daarmee net zoals bij de stelling van Taylor krijgen wij het volgende
$\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds = \int_{C_2} f(s)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{s^{n+1}}) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds z^n = 2\pi i a_n$, $n \geq 0$
$\int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s} ds = \int_{C_1} f(s)(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{s^{n+1}}) ds = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\int_{C_1} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds) z^n = 2\pi i a_n$, $n < 0$.

Convergentie en continuiteit van machtreeksen

Stelling

Als een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ absoluut convergeert in een punt $z_1 \neq z_0$, dan convergeert de machtreeks absoluut op de gehele schijf $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z - z_0| < R_1\}$ met $R_1 = |z_1 - z_0|$ en gelijkmatig op elke schijf $D' = \{z \in \mathbb{C} | \ |z - z_0| < R'\}$ met $R' < R_1$.
De funtie $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ is continu op de gehele schijf D. Gelijkmatig: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $|z - z_N| < \epsilon$.
Bewijs: reele analyse (of boek)

Integratie en differentatie van machtreeksen

Stelling

Als de machtreeks $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ convergeert op de schijf $D = \{z \in \mathbb{C} |\; |z - z_0| < R\}$ dan is S analytisch (niet slechts continu)

Opmerking

Geldt niet bij reele analyse.

Lemma

Zij C een simpel gesloten contour in D en zij $g : C \to \mathbb{C}$ continu. Dan $\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz$

Bewijs lemma

$|\int_C g(z)S(z) - g(z)\sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n dz| \leq$
$\max\{|S(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n|\}|\int_C g(z)dz| \to 0$ als $N \to \infty$.

Integratie en differentatie van machtreeksen

Bewijs stelling

Kies $g = 1$. $\int_C S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n dz = 0$ want $\int_C (z - z_0)^n dz = 0$. Dus met gebruik van de stelling van Morera, S analytisch.

Stelling

$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$

Bewijs

Kies $g(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(s-z)^2}$. $S'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s)}{(s-z)^2} ds =$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C \frac{(z-z_0)^n}{(s-z)^2} ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$

Integratie en differentatie van machtreeksen

Stelling

$S(z)$ is gelijk aan zijn Taylorreeks.

Bewijs

Op dezelfde manier $S^{(n)}(z_0) = n!a_n$