Analysis 2B

Luc Veldhuis

5 April 2017

Richtingsafgeleide en differentiaal

Definitie

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Kies $v \in \mathbb{R}^n$, de **richtingsafgeleide** van F in het punt $a \in \mathbb{R}^n$ is de richting van v.

$$D_v F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t}$$

Mits deze limiet bestaat

Definitie

F wordt **differentieerbaar** genoemd in $a \in \mathbb{R}^n$ als er een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bestaat zodat

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a + h) - F(a) - L(h)}{||h||} = 0$$

Richtingsafgeleide en differentiaal

Stelling

Als F differentieerbaar is in a dan heeft F alle richtingsafgeleiden in dat punt.

Opmerking

Voor elke $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt dat voor een richtingsafgeleide in a geldt dat $D_{\lambda v}F(a) = \lambda D_v F(a)$

Partiele afgeleide

$\{e_1, \ldots, d_n\}$ standaard basis voor $\mathbb{R}^n$
$D_{e_i}F = D_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ is de i-de partiele afgeleide van F.

Richtingsafgeleide en differentiaal

Voorbeeld

$g(x, y) = x^2 + y^2$
$graf(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = g(x, y)\} = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
Voor een horizontaal vlak in $\mathbb{R}^3$ hebben we $z = C$ met C constant.
Om de snijkromme te vinden, los op:

$$\begin{cases} z = g(x, y) \\ z = C \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = C \\ z = C \end{cases}$$

Dus de doorsnede van $graf(g)$ met het vlak $x = 0$ (yx-vlak), is gegeven door oplossingen van de vergelijking.
Dit geeft $x = 0, z = y^2$.

Richtingsafgeleide en differentiaal

Voorbeeld

$F(x, y) = (x, y, g(x, y))$
$Im(F) = graf(g)$
$Im(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ met
$F(a, b) = (x, y, z)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ met
$(a, b, F(a, b)) \in \mathbb{R}^3\}$

Voorbeeld

$D_1 F(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0+t, y_0) - F(x_0, y_0)}{t} =$
$\lim_{t \to 0} \frac{(x_0+t, y_0, g(x_0+t, y_0)) - (x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{t} =$
$(x_0 - x_0 + \frac{t}{t}, 0, \lim_{t \to 0} \frac{g(x_0+t, y_0) - g(x_0, y_0)}{t}) = (1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0))$
$D_1 F(x, y) = (1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}(x, y))$ bij differentiëren naar x
$D_2 F(x, y) = (0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y))$ bij differentiëren naar y

Richtingsafgeleide en differentiaal

Differentieerbaarheid

Als F differentieerbaar is in a dan heeft F alle richtingsafgeleiden in dat punt.

Bovendien:

Als $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ met $v = (v_1, \ldots, v_n)$, dan geldt:

$$D_v F(a) = \sum_{i=1}^{n} v_i D_i F(a)$$

Richtingsafgeleide en differentiaal

Voorbeeld

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f heeft alle richtings afgeleiden in $(0,0)$, $v = (v_1, v_2)$,

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} \frac{2v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \\ 0 & v_2 = 0 \end{cases}$$

$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$

$D_{(1,1)} f(0,0) = 2 \neq 1 \cdot D_1 f(0,0) + \cdot D_2 f(0,0)$

Dus f kan niet differentieerbaar zijn in $(0,0)$.

Richtingsafgeleide en differentiaal

Bewijs

Volgt uit lineairiteit van het differentiaal:

$$D_vF(a) = dF_a(v) = dF_a(\sum_{i=1}^{n} v_ie_i) = \sum_{i=1}^{n} v_idF_a(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v_iD_iF(a)$$

Linear naar Matrix

F differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$dF_a \in \mathcal{L}in(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \leftrightarrow \mathcal{M}at(m \times n, \mathbb{R})$
De afgeleide van F in a, $F'(a)$ is de matrix geassocieerd met dF_a.
Vraag: Hoe ziet $F'(a)$ eruit?

Richtingsafgeleide en differentiaal

Stelling

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}^n$

Dan geldt:

$$F'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}at(m \times n, \mathbb{R})$$

Richtingsafgeleide en differentiaal

Voorbeeld

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$F(x,y) = (3x^2y - e^x y^2, 2xy^3 - \sin(x))$
$F_1(x,y) = 3x^2y - e^x y^2$
$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = 6xy - e^x y^2$ en $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 2e^x y$
$F_2(x,y) = 2xy^3 - \sin(x)$
$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2y^3 - \cos(x)$ en $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = 6xy^2$
Geeft $F'(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - e^x y^2 & 3x^2 - 2e^x y \\ 2y^3 - \cos(x) & 6xy^2 \end{pmatrix}$ en
$F'(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$D_v F(0,1) = dF_{(0,1)}(v) = F'(0,1) \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v =$
$(-v_1 - 2v_2, v_1)$

Richtingsafgeleide en differentiaal

Definitie

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
f differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}^n$
$f'(a) \in \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door $f'(a)v = df_a(v)$
$\nabla f(a) := f'(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ is de **gradient** van f in a

Loodrecht

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1 \cdot u_2 = \|u_1\| \|u_2\| \cos(\theta)$. Als $u_1 \perp u_2$ dan $\theta = 0$, dus $\cos(0) = 1$ en dus $u_1 \cdot u_2 = \|u_1\| \|u_2\|$

Richtingsafgeleide en differentiaal

Betekenis van gradient

Kies $\|v\| = 1$ $D_v f(a) = df_a(v) = f'(a)v = \nabla f(a)v$
$f'(a) \in \mathbb{R}^n$ want $\mathcal{L}in(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \leftrightarrow f'(a) \in \mathcal{M}at(1 \times n, \mathbb{R})$
$D_v F(a) = \nabla f(a) \cdot v = \|\nabla f(a)\| \|v\| \cos(\theta)$
$D_v F(a)$ is het grootst als $\theta = 0$, dat wil zeggen, v wijst in de richting van $\nabla f(a)$.
$v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$
Dus de functie f stijgt het snelst in de richting van $\nabla f(a)$.

Voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f(x, y) = x^2 + y^2$
$\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = (2x, 2y)$
$\nabla f(1, 1) = (2, 2)$