Analysis 2B

Luc Veldhuis

4 mei 2017

Herhaling

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$
f **integreerbaar** op $[a, b]$ ($f \in R[a, b]$) met $\int_a^b f = I$ dan en slechts dan als $\sup_p L(f, P) = \inf_p U(f, P) = I$ dan en slechts dan als $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ zodat voor elke partitie P met lengte van deelinterval kleiner dan δ en selectie S voor deze partitie, $|R(f, P, S)| < \epsilon$
Hier geldt $L(f, P) = \sum_{i=1}^{k-1} m_k(x_i - x_{i-1})$ met
$P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_k = b\}$ een partitie en
$m_k = \min(f(x)), x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$
De Riemanssom:
$R(f, P, S) = \sum f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$ met $x_i^* \in S = \{x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]\}$
Als f continu is op $[a, b]$, dan $f \in R[a, b]$

§IV.1 Integratie

Eigenschappen van de integraal

- $f, g \in R[a,b] \Rightarrow f+g \in R[a,b]$ en $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- $f \in R[a,b]$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in R[a,b]$ en $\int_a^b cf = c\int_a^b f$
- $R[a,b]$ heeft de eigenschappen van een vectorruimte.
- $f, g \in R[a,b]$, $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$
  $f \in R[a,b]$, $c \in [a,b]$ dan geldt $f \in R[a,c]$ en $f \in R[c,b]$ en
  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
  Let op: $[a,c]$ en $[c,b]$ overlappen alleen in c, niet in inwendige punten.
- Substitutie ('transformatiestelling')
- Hoofdstelling van Calculus ('Fundamental theorem of Calculus')
  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ als $f \in R[a,b]$ en $x \in [a,b]$ dan is F differentieerbaar met $F'(x) = f(x)$

Oppervlakte

$f \in R[a,b]$, $f \geq 0$ op $[a,b]$ dan $I = \int_a^b f(x)dx =$ oppervlakte onder de functie
Waarbij $Opp_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$

Doel 1

Definitie van oppervlakte van een deelgebeid van $\mathbb{R}^2$ (of, in het algemeen, het volume van een deelgebied van $\mathbb{R}^n$)

Doel 1: voorbeeld

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $\int_R f =$ volume in $\mathbb{R}^3$ onder de grafiek van f en boven het gebied R

N-dimentionale rechthoeken

Een generalisatie van intervallen in $\mathbb{R}$

$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$

$n = 1$ geeft interval

$n = 2$ geeft oppervlakte

Definitie

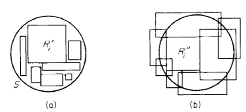
$V(R) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$ is het **volume** van R

Definitie (herhaling)

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ heet begrensd als $\exists R > 0$ zodat $S \subseteq B_R(0)$

Voorbeeld

Zij $A \subseteq \mathbb{R}^n$ een begrensde deelverzameling
Neem $n = 2$. Dan kunnen we rechthoeken die alleen maar in A tekenen, en rechthoeken zodat A precies in deze rechthoeken ligt



Figuur : 2 manieren om rechthoeken te tekenen

§IV.1 Integratie

Definitie

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heet **meetbaar** ('contented' in Edwards, als in 'with content') met volume V dan en slechts dan als $\forall \epsilon > 0$, bestaan er:

- $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ niet overlappende n-dimentionale rechthoeken zodanig dat $\bigcup Q_i \subseteq A$ en $\sum V(Q_i) > V - \epsilon$
- $\{R_1, \dots, R_n\}$ niet overlappende n-dimentionale rechthoeken zodanig dat $\bigcup R_i \supseteq A$ en $\sum V(Q_i) < V + \epsilon$

Definitie

A heet nulverzameling ('negligible set' of 'null-set') als A meetbaar is met $V(A) = 0$

§IV.1 Integratie

Stelling 2.1: De characterisatie van meetbare verzamelingen

Een begrensde verzameling $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is meetbaar dan en slechts dan als de rand van A $(= \partial A = \{\text{randpunten van } A\})$ een nulverzameling is.

Corollary

A en B meetbaar $\Rightarrow A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ ook meetbaar

Bewijs doornede

A en B meetbaar, dan zijn ∂A en ∂B nulverzamelingen:
$V(\partial A) = 0$, $V(\partial B) = 0$ dus

$$\left.\begin{array}{l} V(\partial A \cap \partial B) = 0 \\ \partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cap \partial B \end{array}\right\} \Rightarrow V(\partial(A \cap B)) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \text{ meetbaar}$$

Edward's approach

Idee

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Voor $f \geq 0$,
$Opp_f = \{(x, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 < x_{n+1} \leq f(x_1, \ldots, x_n)\}$

Definitie

De **drager** van f is $support(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}$

Definitie

f begrensd, met begrensde drager ('support')
$f^+ = \max\{0, f\}$
$f^- = \max\{0, -f\}$
$f = f^+ - f^-$. Dit maakt de oppervlaktes positief
Dan heet f integreerbaar als Opp_{f^+} en Opp_{f^-} meetbaar zijn (als deelverzamelingen van $\mathbb{R}^{n+1}$). In dat geval is
$\int f = V(Opp_{f^+}) - V(Opp_{f^-})$

Edward's approach

Definitie

Voor een willekeurige $A \subseteq \mathbb{R}^n$ begrensd heet:

$$\int_A f = \int f\phi_A \text{ waarbij } \phi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

mits $f\phi_A$ integreerbaar is, de 'karakteristieke functie van A'

Integreerbaarheid

Stelling 2.2

Als f begrensd is, met een begrensde drager en f is continu behalve op een nulverzameling, dan is f integreerbaar.

Corollary

Als f continu is en A begrensd, dan is f integreerbaar op A.