Analysis 2B

Luc Veldhuis

13 april 2017

Methode van Lagrange multiplicatoren

Samenvatting

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. Inwendige kritieke punten en het gradient
   Neem $a \in D$ inwendig punt. Als f een maximum/minimum heeft in het punt a, dan $\nabla f = (0, 0)$
2. Methode van Lagrange multiplicatoren
   g continu differentieerbaar, $g : \mathbb{R}^2 \to \$$,
   $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ de nulverzameling.
   Als f in het punt p over S een maximum/minimum aanneemt en $\nabla g(p) \neq (0, 0)$, dan bestaat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$.
   λ heet de 'Lagrange multiplier'

Methode van Lagrange multiplicatoren

Voorbeeld

Vind maximum en minimum van de functie $f(x,y) = xy$ op $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Stap 1: Zoek inwendige kritieke punten. De oplossingen van $\nabla f(x,y) = (0,0)$ op $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ (open bol).
   $$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
   Dus 1 inwendig kritiek punt, $(0,0)$ waar $f(0,0) = 0$
2. Onderzoek de rand van D.
   Dat is de nul verzameling $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$,
   dus $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$
   Methode van Lagrange multiplicatoren is van toepassing.
   - f differentieerbaar
   - g continu differentieerbaar
   - $\nabla g(p) \neq (0,0)$ voor alle p in S

Methode van Lagrange multiplicatoren

Voorbeeld (vervolg)

We gaan de functie f optimaliseren onder de voorwaarde $g = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Maar $\Rightarrow (x,y) \neq (0,0)$ $\begin{cases} \lambda = \frac{y}{2x} \\ \lambda = \frac{x}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}, y^2 = \frac{1}{2}$

Dit geeft als oplossingen voor (x,y):

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Dus $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$ en $f(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$

Methode van Lagrange multiplicatoren

Voorbeeld (vervolg)

3. Waarde van de functie in de bij stap 1 en 2 gevonden punten vergelijken.
   Conclusie:
   - Het maximum van f op D is $\frac{1}{2}$ en wordt aangenomen in de punten $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
   - Het minimum van f op D is $-\frac{1}{2}$ en wordt aangenomen op $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Bij stap 2 hebben we het maximum van de functie $f(x, y) = xy$ gevonden onder de voorwaarde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Methode van Lagrange multiplicatoren

Opmerking

Dit is tevens de oppervlakte van de grootste rechthoek die in de eenheidscirkel ingeschreven kan worden. Stel x, y positief, dan is oppervlakte van de ingeschreven rechthoek met hoekpunt in (x, y): $4xy$,

Voorbeeld

Kunnen we iets zeggen over inwendige kritieke punt $(0, 0)$?
Neem lijnen $y = -x$ en $y = x$.
Langs $y = x$ heeft $f(x, x) = x^2$ een lokaal minimum in $(0, 0)$.
Langs $y = -x$ heeft $f(x, -x) = -x^2$ een lokaal maximum in $(0, 0)$.
Dus $(0, 0)$ geen lokaal maximum en geen lokaal minimum. Het is een is een zadelpunt.

Methode van Lagrange multiplicatoren

Definitie

Een punt is een **zadelpunt** als het een kritiek punt is zonder lokaal maximum of lokaal minimum

Stelling 4.4

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is twee keer differentieerbaar (f_x en f_y ook), in een kleine bal $B_r(p)$ met p een kritiek punt ($\nabla f(p) = 0$)
Beschouw de matrix van tweede orde partiële afgeleide in het punt p: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}$ en noem Δ de determinant van deze 2×2 matrix. Dan geldt:

- Als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$ en $\Delta > 0$, dan is p een **lokaal maximum**.
- Als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ en $\Delta > 0$, dan is p een **lokaal minimum**.
- Als $\Delta < 0$, dan is p een **zadelpunt**.

Methode van Lagrange multiplicatoren

Voorbeeld

- Voorbeeld maximum: $f(x,y) = x^2 + y^2$, $p = (0,0)$
  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$, $\Delta = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$
- Voorbeeld minimum: $f(x,y) = -x^2 - y^2$ in $p = (0,0)$ geeft
  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$
  $\Delta = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 > 0$
- Voorbeeld zadelpunt: $f(x,y) = xy$ in $p = (0,0)$
  $\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$
  Ook $f(x,y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

Methode van Lagrange multiplicatoren

Opmerking

Als $\Delta = 0$ geen conclusie mogelijk.

Methode van Lagrange multiplicatoren voor $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentieerbare functie.
We onderscheiden 2 gevallen:

- 1 voorwaarde. Stelling 5.5: Neem aan dat $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.
  Zij $M_g : \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$ de nulverzameling van g.
  Neem aan dat $\nabla g(p) \neq (0, \ldots, 0)$ $\forall p \in M_g$. De 'reguliere' punten van de nulverzameling van g.
  Als f een maximum/minimum heeft over M_g in een punt p, dan $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$
- Meer dan 1 voorwaarde.

Methode van Lagrange multiplicatoren

Voorbeeld

- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, dan $M_g = S^2$ de eenheids bol in $\mathbb{R}^3$
- Vind het maximum van de functie $f(x, y, z) = x$ over de snijkromme van het vlak $z = 1$ en de bolschil $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
  We hebben 2 voorwaardes:
  - $g_1(x, y, z) = z - 1 = 0$
  - $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

  Se snijkromme is de verzameling van oplossingen (x, y, z) van
  $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$
  Een cirkel met straal $\sqrt{3}$ op 'hoogte' $z = 1$

Methode van Lagrange multiplicatoren

Voorbeeld (Vervolg)

Controleer:

- f differentieerbaar
- g_1, g_2 continu differentieerbaar
- ∇g_1 en ∇g_2 lineair onafhangelijk in alle punten van de snijkromme.

$\nabla g_1(x, y, z) = (0, 0, 1)$
$\nabla g_2(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$
Lineair afhankelijk als $x = y = 0$. Maar die punten zitten niet in de snijkromme. $(x^2 + y^2 = 3)$
Als f een lokaal maximum/minimum heeft over K in een punt p, dan bestaan er een λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ zodanig dat
$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p)$

Methode van Lagrange multiplicatoren

Voorbeeld (Vervolg)

We moeten dus het volgende systeem oplossen (Stelling 5.8):

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p) \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_2 x \\ 0 = 2\lambda_2 y \\ 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 z \\ z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Snijkromme

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = 0 \wedge g_2(x,y,z) = 0\}$,
$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met $G(x,y,z) = \{g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)\}$