Analysis 1B

Luc Veldhuis

13 December 2016

Differentie vergelijkingen

Differentie vergelijking (Geen differentiaal)

$a_0 y_k + \cdots + a_n y_{k-n} = u_k$

$y_k = 2y_{k-1}$ Op tijdstip y_k zijn er 2 keer zoveel als op y_{k-1}

$y_0 = 3$

$y_k = 3(2^k)$

Differentie: $\frac{y_k - y_{k-1}}{1} \approx \frac{dy}{dx}$ maar stapgrootte is te groot.

Differentie vergelijking = Recurrentie betrekking

$y_k = y(k)$, $k \in \mathbb{Z} of k \in \mathbb{N}$

Differentie vergelijkingen

Lineare vergelijkingen met constante coefficienten

$$a_0(k)u_k + \cdots + a_n(k)y_{k-n} = u_k \tag{1}$$

$$a_0(k)u_k + \cdots + a_n(k)y_{k-n} = 0 \tag{2}$$

$y_k = y_k^h + y_k^p$
$y_k^h = c_1 y_k^{(1)} + \cdots + c_n y_k^{(n)}$
Met $y_k^{(i)}$ linear onafhankelijk.
$y_k^h = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\infty$

Vraag

Hoe los je 2 op?

Differentie vergelijkingen

Oplossen van homogene differentie vergelijking

$e^{\lambda k}$, $r^k = e^{k \ln(r)}$
$a_0 r^k + a_1 + r^{k-1} + \cdots + a_n r^{k-n} = 0$
$r^{k-n}(a_0 r^n + \cdots + a_n) = 0, \forall k$
Karakteristieke vergelijking : $a_0 r^n + \cdots + a_n = 0$ met $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$

- In het algemeen $r_i \neq r_j$, $i \neq j$ dan is $y_k^i = r_i^k$ lineair onafhankelijk
- $r_i = r_j$ dan $y_k^i = r_i^k$, $y_k^{i+1} = k r_i^k$
- $r_i = a + bi$, $r_i = a - bi$
  $c_1(a + ib)^k + \overline{c_1}(a - bi)^k$ met $c_1 = A + iB$
  $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) =$
  $\sqrt{a^2 + b^2}(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = \sqrt{a^2 + b^2}e^{i\phi}$
  $(a + bi)^k = (\sqrt{a^2 + b^2})^k e^{ik\phi}$

Differentie vergelijkingen

Voorbeeld

$$y_k - 2y_{k-1} + 4y_{k-2} = 0$$

$r^2 - 2r + 4 = 0$
$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$
LET OP! Anders dan bij differentiaal vergelijking vanaf hier!
Modulus $= \sqrt{1+3} = 2$
Argument $= \frac{\pi}{3}$
Dus homogene oplossing: $D_1 2^k \cos(\frac{\pi}{3}k) + D_2 2^k \sin(\frac{\pi}{3}k)$

Voorbeeld met imaginaire wortels

$$y_k - 2y_{k-1} + 2y_{k-2} = 0$$

$r^2 - 2r + 2 = 0$
$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$
$|1+i| = \sqrt{2}$
$Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$
Dus de homogene oplossing is
$D_1(\sqrt{2})^k \cos(\frac{\pi}{4}k) + D_2(\sqrt{2})^k \sin(\frac{\pi}{4}k)$

Differentie vergelijkingen

Voorbeeld met reëele wortels (Fibonacci)

$$\begin{aligned} y_k - y_{k-1} - y_{k-2} &= 0 \\ y_1 &= 1 \\ y_2 &= 1 \end{aligned}$$

$r^2 - r - 1 = 0$
$r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (Golden mean/ gulden snede)
Dus de homogene oplossing is $y_k = c_1 r_+^k + c_2 r_-^k$

Voorbeeld (vervolg)

Particuliere oplossing: $y_1 = c_1 r_+ + c_2 r_- = 1$

$y_2 = c_1 r_+^2 + c_2 r_-^2 = 1$

$\begin{pmatrix} r_+ & r_- \\ r_+^2 & r_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oplossen geef:

$c_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

$c_2 = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$

Invullen:

$y_k = \frac{1}{5}\sqrt{5}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^k - \frac{1}{5}\sqrt{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^k$

Differentie vergelijkingen

Voorbeeld met identieke oplossingen

$$y_k - 6y_{k-1} + 9y_{k-2} = 0$$

$r^2 - 6r + 9$
$(r-3)^2 = 0$
$r_1 = r_2 = 3$
$y_k = C_1 3^k + C_2 k 3^k$

Differentie vergelijkingen

Voorbeeld

$$y_k - \frac{5}{6}y_{k-1} + \frac{1}{6}y_{k-2} = 3^k$$
$$y_k - \frac{5}{6}y_{k-1} + \frac{1}{6}y_{k-2} = 0$$

$r^2 - \frac{5}{6}r + \frac{1}{6}$
$r = \frac{\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{1}{36}}}{2} = \frac{\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}}{2}$
$r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{3}$
De homogene oplossing is $y_k^h = C_1 2^{-k} + C_2 3^{-k}$

Differentie vergelijkingen

Voorbeeld (vervolg)

Particuliere oplossing:

$y_k^p = A3^k$

$A3^k - \frac{5}{6}A3^{k-1} + \frac{1}{6}A3^{k-2} = 3^k$

$A3^k(1 - \frac{5}{6}\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{9}) = 3^k$

$A(\frac{54-15+1=40}{54}) = 1$

$A = \frac{54}{40} = \frac{27}{20}$

$y_k^h = \frac{27}{20}3^k$

$y_k = y_k^p + y_k^h = \frac{27}{20}3^k + C_1 2^{-k} + C_2 3^{-k}$

Stelsel van eerste orde diverentiaal vergelijkingen

Neem het volgende stelsel:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Schrijf de volgende formule om naar deze vorm:

$y'' = ay' + by$

$y'' = (y')' = ay_1 + by_0$ met $y_0 = y$, $y_1 = y' = y_0'$

Dit geeft $y_1' = y'' = ay_1 + by_0$

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \overline{z}$$

$\overline{z}' = A\overline{z}$

$\overline{z}' = A(x)\overline{z} + \overline{f}(x)$ is een algemene vorm van een eerste orde stelsel