Groepen theorie

Luc Veldhuis

21 Februari 2016

Groepen theorie

Herhaling

$|g| = 3$, $g = \{e, a, b\}$
Als g een (eindige) groep is, dan komt in de groepstabel elk element van g in elke rij en in elke kolom precies 1 keer voor. Uit $g_i g_j = g_i g_k$ volgt de schrapwet: $g_j = g_k$ dus $j = k$. Elke rij bevat elke g_m hooguit 1 keer. g heeft n elementen, de rij heeft n partities dus elk element komt precies 1 keer voor in elke rij. Voor de kolommen geldt het zelfde.

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Dihedrale groepen

Dihedrale groep

Voor $n \geq 3$ zij
$D_{2n} = \{$isommetriën van een regelmatige n hoek, dat wil zeggen, afstandsbewarende bijecties$\}$

Voorbeeld

$n = 4$, $\frac{2\pi}{4}i$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, geeft 4 spiegelingen. $n = 3$, 3 rotaties over $\frac{2\pi}{3}i$ $i \in \{0, 1, 2\}$, heeft 3 spiegelingen.

Opmerking

D_{2n} heeft $2n$ elementen. In veel boeken heet het D_n voor het aantal hoekpunten.

Dihedrale groepen

Opgave

D_{2n} is een groep onder samenstelling van functies.
Na te gaan:

- als f, g in D_{2n} dan is $f \circ g$ dat ook
- Er is een neutraal element, de identieke afbeelding.
- Associativiteit, samenstelling van functies is altijd associatief.
- Als $f \in D_{2n}$ dan is f^{-1} de inverse afbeelding. Ook in D_{2n} : • de inverse van een bijectie behoudt ook alle afstanden.
  Te controleren: $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x, y)$

Dihedrale groepen

Regelmatige n-hoek

Merk op:
Als $d(P,Q)$ met P,Q in de n-hoek, maximaal is dan zijn P en Q hoekpunten. Als $f \in D_{2n}$ is, dan zijn $f(P)$ en $f(Q)$ weer hoekpunten. Als f bekend is op de hoekpunten, dan ligt f vast:
Zij r de rotatie over $\frac{2\pi}{n}$ met $r^n = id$ de identiteit.
$r^\circ = id = e, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ zijn alle verschillend.
Zij s de spiegeling in lijn door 1 en het centrum C. $s \neq id$ want $s(1) = 1$, $s(2) = n \geq 3$. Dan is
$D_{2n} = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
Dan (1) zijn die elementen s, r verschillend en (2) dit is heel D_{2n}.
Voor (1): de r^i $(0 \geq i \geq n-1)$ zijn verschillend.
Stel $sr^i = sr^j$ met $0 \geq i < j \geq n-1$ dus $r^i = r^j$ kan niet.
Stel $r^i = sr^j$, dan $s = r^i r^{-j} = r^{i-j}$ maar $s(1) = 1$ en $r^{i-j} = 1 + i + j \bmod n$, maar $i - j \in \{-(n-1), \dots, n-1\}$ dan is $s = e$ kan niet.

Dihedrale groepen

Regelmatige n-hoek (vervolg)

Voor (2) neem $\sigma \in D_{2n}$ dan is er een $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ zodat $\sigma \circ r^{-i}$ 1 op 1 afbeeldt. Dus $\sigma \circ r^{-i} = e$ of s en $\sigma = r^{-i}$ of sr^i.

Hoe reken je in D_{2n}?

D_{2n} is niet commutatief. $r^i s = sr^{-i}$
$s = s^{-1}$ Neem $n = 7$, dan geldt:
$r^3 sr^6 = sr^{-3} r^6 = sr^3$
$(sr^2)^{-1} = (r^2)^{-1} s^{-1} = r^{-2} s^{-1} = s^{-1} r^2 = sr^2$

Symmetriegroepen

Permutatie groepen

Ω een niet lege verzameling
$S_\Omega = \{\text{bijecties met } f : \Omega \to \Omega\ \}$
S_Ω is een groep onder samenstelling van functies.
Als $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, dan heet de groep S_n de permutatie groep op n elementen. $|S_n| = n!$

Cycles

Als $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ verschillend zijn, dan is $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_m)$ de permutatie van $\{1, 2, \ldots, n\}$ met:
$a_1 \mapsto a_2$
$\ldots$
$a_m \mapsto a_1$
$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_m)$ heet de m-cycle.

Symmetriegroepen

Waarschuwing

Een 1-cycle is de identieke afbeelding e.

Rekenregels

- $(a_1 \ \ldots \ a_m)^{-1} = (a_m \ \ldots \ a_1)$
- $(a \ \ldots \ a_m) = (a_1 \ \ldots \ a_k)(a_k \ a_{k+1} \ a_m)$ voor $0 \leq k \leq n$
- $\sigma(a_1 \ \ldots \ a_m)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ \ldots \ \sigma(a_m))$
- Een m-cycle heeft orde m.