Analysis 1B

Luc Veldhuis

1 November 2016

Stelling voor Riemans integraal

Stelling

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, begrensd
als $\forall \epsilon > 0 \exists P_\epsilon$ partitie van $[a, b]$ zodanig dat:

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Stelling voor Riemans integraal

Bewijs

$(\Rightarrow)$

$$sup_P = L(P,f) = \underline{\int_b^a f} = \int_b^{\bar{a}} f = inf_P = U(P,f) = \int_b^a f = A$$

$$A - \frac{\epsilon}{2} \exists P_1 \text{ zodanig dat } L(P_1, f) > A - \frac{\epsilon}{2}$$

$$A + \frac{\epsilon}{2} \exists P_2 \text{ zodanig dat } U(P_2, f) < A - \frac{\epsilon}{2}$$

$$P_1 \subseteq P_1 \cup P_2 \text{ en } P_2 \subseteq P_1 \cup P_2$$

$$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1, f) \leq L(P_1 \cup P_2, f)$$

$$\leq U(P_1 \cup P_2, f) \leq U(P_2, f) < A + \frac{\epsilon}{2}$$

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < (A + \frac{\epsilon}{2}) - (A - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

Stelling voor Riemans integraal

Bewijs

($\Leftarrow$)

$$\exists P_\epsilon \text{ zodanig dat } U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

$$L(P_\epsilon, f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \bar{int}_a^b f \leq U(P_\epsilon, f)$$

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f - \bar{int}_a^b f \leq U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Stelling voor Riemans integraal

Stelling 1.4.6

$$0 \leq x < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Dus } \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

Dus f is integreerbaar.

Stelling voor Riemans integraal

Stelling

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue
$\Rightarrow f$ Rieman integreerbaar.
Stelling 4.4.6: Continue $\iff$ Uniform Continue op begrenst interval.

Bewijs

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon \text{ zodanig dat } |x - y| < \delta_\epsilon$$
$$\text{for } x, y \in [a, b] \Rightarrow |f(x) - f(y) < \epsilon|$$
$$P_\epsilon, |P|_\epsilon < \delta_\epsilon, \Delta x_k < \delta_\epsilon \forall k$$
$$\text{op } s_k, t_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ neem:}$$
$$min = m_k = f(s_k)$$
$$max = M_k = f(t_k)$$

Stelling voor Riemans integraal

Bewijs (vervolg)

$$
\begin{aligned}
|s_u - t_u| &< \delta_\epsilon \\
0 \leq M_k - m_k &= f(t_k) - f(s_k) \\
U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k \Delta x_k - m_k \Delta x_k) \\
= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k) &< \sum_{k=1}^{n} \epsilon \Delta x_k) \\
= \epsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k) &= \epsilon (b - a) = \epsilon'
\end{aligned}
$$

Bereken integraal van $\int_0^2 x^2 = \frac{8}{3}$ of $\int_0^2 x^2 dx$

Neem functie $g(x) = \frac{1}{3}x^3$, $g'(x) = f(x) = x^2$. Riemans som zit tussen boven en ondersom in. Kijk naar interval $[x_{k-1}, x_k]$, $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ en gebruik middelwaarde stelling.

Bewijs

$$\frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = g'(x) = f(x)$$

$$S(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

$$= g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_1) + \cdots + g(x_n) - g(x_{n-1})$$

$$= f(c_k) = g(x_n) - g(x_0) = g(b) - g(a) = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

§6.3 Standaard regels

Enkele standaard regels zijn:

- $f, g \in R[a,b]$
- $f \pm g \in R[a,b]$
- $cf \in R[a,b]$
- $f \leq g \Rightarrow \int_b^a f \leq \int_b^a g$
- $f \in R[a,b] \iff f \in R[a,c] \wedge f \in R[c,b]$
- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- $f \in R[a,b]$, g continue op $[c,d]$,
  $f([a,b]) \subseteq [c,d] \rightarrow g \bullet f = g(f(x)) \in R[a,b]$
- $f \bullet g \in R[a,b]$

Definities

Regels die als waar worden aangenomen:

- $\int_c^c f = 0$
- $\int_a^b f = -\int_b^a f$

Opmerking

Als er in een functie er eindig veel punten zijn is waar de functie sprong discontinue is, is deze functie ook integreerbaar. Intuitie: oppervlakte onder het punt is 0.

Lezen

§6.2 6.2.1-6.2.6
§6.3 6.3.1-6.3.9

Middelwaarde stelling voor integralen

Middelwaarde stelling voor integralen

$$g \in R[a,b], f \text{ continue op } [c,d]$$
$$g \geq 0$$
$$\exists c \in (a,b) \text{ zodanig dat}$$
$$\int_a^b f \bullet g = f(c) \int_a^b g$$

Bewijs

$$m \leq f(x) \leq M$$
$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$
$$m \int_a^b g \leq \int_a^b f \bullet g \leq M \int_a^b g$$

Middelwaarde stelling voor integralen

Bewijs (vervolg)

Geval 1:

$$\int_a^b g = 0 \text{ klopt!}$$

Geval 2:

$$\int_a^b g \neq 0 \text{ dan volgt } \int_a^b g > 0$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f \bullet g}{\int_a^b g} \leq M$$

$$\exists c \in (a, b) \text{ zodanig dat}$$

$$\frac{\int_a^b f \bullet g}{\int_a^b g} = f(c)$$

Middelwaarde stelling voor integralen

Bewijs (vervolg)

$$\int_a^b f = f(c)(b-a) \text{ Stelling 4.3.6}$$

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

$$= \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$$

En dat is de normale middelwaarde stelling.

Standaard definities en afgeleiden

- $sin(x)$
- $cos(x)$
- $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
- $cosecans = cosec(x) = \frac{1}{sin(x)}$
- $secans = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$
- $cotan(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$
- $arcsin(x) = sin^{-}1(x) \neq \frac{1}{sin(x)}$ op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $[e^x]' = e^x$
- $[ln|x|]' = \frac{1}{x}$
- $arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ met $x \in (-1, 1)$
- $arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ met $x \in (-1, 1)$
- $arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Bewijs afgeleide arcsin en arccos

Bewijs

$$y = sin(x)$$
$$arcsin(y) = x$$
$$sin'(x) = cos(x) > 0$$
$$arcsin'(y) = \frac{1}{sin'(x)} = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{cos(arcsin(y))}$$
$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$
$$cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$$
$$cos(x) = \sqrt{1 - sin^2(x)}$$

Bewijs afgeleide arcsin en arccos

Bewijs (vervolg)

$$\frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ met } x \in (-1, 1)$$

$$arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ met } x \in (-1, 1)$$

Bewijs afgeleide arctan

Bewijs

$$
\begin{aligned}
tan(x) &= y \\
tan'(x) &= \frac{1}{cos^2(x)} > 0 \\
arctan(y) &= x \\
arctan'(y) &= cos^2(x) \\
\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} &= y^2 \\
\frac{1}{cos^2(x)} &= 1 + y^2 \\
arctan'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1}
\end{aligned}
$$