Topologie - Opdracht 7

Luc Veldhuis - 2538227

April 2017

Q2) Vind een open dekking $\mathcal{U}$ voor $(0,1) \subset \mathbb{R}$ (standard topologie) met de volgende eigenschap:
Voor alle $\epsilon > 0$ is er een $x \in (0,1)$ zodanig dat $B(x,\epsilon) \not\subset U$ voor alle $U \in \mathcal{U}$.
(Dat betekend, dat er geen Lebesgue getal voor $\mathcal{U}$ is.)
Kies als open overdekking $\mathcal{U} := \{(0,1)\}$. Dan geldt voor elke $\epsilon > 0$ maar $\epsilon < 1$, dat $B(\frac{\epsilon}{2},\epsilon) \not\subset U$ voor alle $U \in \mathcal{U}$, namelijk, $B(\frac{\epsilon}{2},\epsilon) \not\subset (0,1)$, want voor $(\frac{\epsilon}{2}-\epsilon, \frac{\epsilon}{2}+\epsilon)$ met $\epsilon > 0$ geldt dat $\frac{\epsilon}{2}-\epsilon < 0$ en dat zit nooit in $(0,1)$. Stel $\epsilon \geq 1$, dan kan $B(x,\epsilon)$ nooit worden overdekt door $\mathcal{U}$ voor elke $x \in (0,1)$, omdat dan $(x-\epsilon, x+\epsilon) \nsubseteq (0,1)$.

Q3) De collectie $\mathcal{B} := \{\prod_{i=1}^{\infty} U_i \subset \mathbb{R}^{\infty} : U_i \subset \mathbb{R} \text{ open }\}$ is een basis voor een topologie T_{dos} op $\mathbb{R}^{\infty}$ (kan je geloven en hoef je niet bewijzen).
Laat T_{π} de producttopologie op $\mathbb{R}^{\infty}$ zijn.

(a) Zijn de twee afbeeldingen:
id: $(\mathbb{R}^{\infty}, T_{dos}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\infty}, T_{\pi})$ en id: $(\mathbb{R}^{\infty}, T_{\pi}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\infty}, T_{dos})$
continu?
We weten dat voor de product topologie (T_{π}) geldt dat er maar op een eindig aantal plaatsen een open verzameling mag staan ongelijk aan $\mathbb{R}$. Als we naar de basis kijken voor de topologie T_{dos} zien we dat er op elke plek een open verzameling mag staan, dus ook op een oneindig aantal posities.
Een afbeelding $f : X_1 \mapsto X_2$ met is continu als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X_2$ geldt dat $f^{-1}(X_2) \subseteq X_1$ ook open is.
We kijken eerst naar de afbeelding id: $(\mathbb{R}^{\infty}, T_{dos}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\infty}, T_{\pi})$.
We weten dat voor alle open verzamelingen $U \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$ er slechts op een eindig aantal posities een verzameling staat ongelijk aan $\mathbb{R}$, dus dan geldt dat deze verzamling voldoet aan de definitie van de basis van T_{dos}. Dus nu is $id^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{\infty}$ ook open in T_{dos}. Dus deze afbeelding is continu.
Nu kijken we naar de afbeelding id: $(\mathbb{R}^{\infty}, T_{\pi}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\infty}, T_{dos})$
Stel we kiezen de open verzameling $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ en we construeren nu $\prod_{i=1}^{\infty}(0,1) \subset \mathbb{R}^{\infty}$, dan is dit open in T_{dos}. Maar er zijn nu een oneindig aantal posities die ongelijk zijn aan $\mathbb{R}$ en het is ook niet gelijk aan de lege verzameling. Dus het kan niet open zijn in de product topologie. Er geldt dus $U \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$ open in $\mathcal{T}_{dos}$, maar $id^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$ niet open in T_{π}. Dus deze afbeelding is niet continu.

(b) Laat $A := \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ zijn. Is de deelruimte $A^{\infty} \subset (\mathbb{R}^{\infty}, T_{dos})$ compact?
Een deelruimte is compact als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft. We gaan proberen een open overdekking te vinden voor A, zodat er geen eindige deeloverdekking bestaat.
We weten dat $\emptyset \subset \mathbb{R}$ open is.
Construeer nu de set $\mathcal{U} := \bigcup_{j=0}^{\infty}\{\prod_{i=1}^{j} \emptyset \times (-1,2) \times \prod_{j+1}^{\infty} \emptyset\}$.
Nu hebben we een open overdekking van A^{∞}, want $\mathcal{U} = \{\prod_{i=1}^{\infty}(-1,2)\}$, en dit is een open overdekking van A^{∞}, want voor elke $pr_j(A^{\infty}) = \{0,1\}$ geldt dat $pr_j(\mathcal{U}) = (-1,2)$, en

$\{0,1\} \subset (-1,2)$.
Maar er bestaat geen eindige deelverzameling van $\mathcal{U}$. Stel die bestaat wel, dan is er een eindige set I met alle indeces van de subsets van $\mathcal{U}$ met bijbehorende j. Neem nu $max(I) = m$. Dan geldt dat $pr_{m+1}(\mathcal{U}) = \emptyset$, en $\{0,1\} \not\subset \emptyset$. Dus dan is dit geen open overdekking meer van A^{∞}.

Q5) Zij (X,d) een metrische ruimte. Laat zien, dat er een aftelbare deelverzameling $A \subseteq X$ bestaat met cl $A = \overline{A} = X$ dan en slechts dan als er een aftelbare basis voor de geinduceerde topologie $\mathcal{T}_d$ bestaat.
$\mathcal{T}_d$ is de door de metriek geinduceerde topologie met als basis $\{B(x,r) | x \in X, r > 0\}$.
Bewijs '$\Leftarrow$':
Uit stelling 8.5 volgt dat als een basis aftelbaar is, dan voldoet hij aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.
In het tweede aftelbaarheids axioma (8.7) staat dat er dan een aftelbare deelverzameling is van X die dicht ligt in X.
$\mathcal{T}_d$ is een aftelbare basis voor X.
Dus er bestaat een aftelbare $A \subseteq X$ met $\overline{A} = X$.
Bewijs '$\Rightarrow$':
We hebben een aftelbare deelverzameling $A \subseteq X$ die dicht ligt in X.
Ook volgt uit 8.3, omdat X een metrische ruimte is, dat elk punt een aftelbare omgevingsbasis heeft, namelijk $\{B(x, \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}\}$
We kunnen nu voor elk punt in $x_i \in A$ een aftelbare omgevings basis maken. De vereninging hiervan is dan nog steeds aftelbaar. Dit geeft als aftelbare basis $\mathcal{B} = \{B(x_i, \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}, x_i \in A\}$ voor A.
Neem nu een willekeurige niet-lege open set $U \subseteq X$. We gaan nu laten zien dat voor een $x \in U$ geldt dat $x \in B \in \mathcal{B}$. Omdat U open is, geldt dat er een $B(x,\epsilon)$ bestaat met $\epsilon > 0 \in \mathbb{Q}$ zodat $B(x,\epsilon) \subseteq U$. Neem nu een getal $\frac{2}{n} < \epsilon$ met $n \in \mathbb{N}$. Dan betekent dit dat er ook een $B(x, \frac{1}{n})$ region bestaat, zodat $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x,\epsilon) \subseteq U$. Omdat geldt dat $\overline{A} = X$, moet er een punt zijn zodat $y \in X \cap B(x, \frac{1}{n})$. Dus we hebben nu $y \in B(x, \frac{1}{n})$, maar dan ook $x \in B(y, \frac{1}{n})$.
Voor elk punt $z \in B(y, \frac{1}{n})$ hebben we nu dat geldt $d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \epsilon$.
Dus geldt dat $x \in B(y, \frac{1}{n}) \subseteq B(x,\epsilon) \subseteq U$.
We weten dat $B(y, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$.
Dus elke $x \in X$ zit in een $B \in \mathcal{B}$.
Dus $\mathcal{B}$ is een basis voor $\mathcal{T}_d$ en $\mathcal{B}$ is aftelbaar.
Dus er bestaat een aftelbare basis voor $\mathcal{T}_d$