# Complexe Analyse

Luc Veldhuis

8 Mei 2018

# Veralgemeniseerde residu stelling

**Doel**

Willen integralen berekenen over contouren van willekeurige vorm.

# Omwendingsgetallen

## Definitie

Zij $C$ een gesloten contour en $z_0 \in \mathbb{C}$. Dan is het omwentelingsgetal van $C$ om $z_0$ gedefinieerd als

$$\chi(C; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - z_0}$$

## Voorbeeld

- $C = \{e^{it} | 0 \leq t \leq 2\pi\}, z_0 = 0$
  $\chi(C, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$
- $C = \{e^{ikt} | 0 \leq t \leq 2\pi\}, z_0 = 0, k \in \mathbb{N}$
  $\chi(C, z_0) = \frac{k}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \frac{2k\pi i}{2\pi i} = k$
- $C$ een simpel gesloten contour om $z_0 = 0$.
  $\chi(C, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z} =^{Cauchy-Goursat} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1.$

# Omwendingsgetallen

## Opmerking

$\chi(C, z_0) \in \mathbb{Z}$

## Definitie

Zij $C$ een gesloten contour. We definiëren:
$Int(C) := \{z \in \mathbb{C} \setminus C, \chi(C, z) \neq 0\}$
$Ext(C) := \{z \in \mathbb{C} \setminus C, \chi(C, z) = 0\}$ als de verzamelingen van de inwendig of uitwendig gelegen punten.

## Definitie

Een domein $D \subset \mathbb{C}$ wordt elementair genoemd als voor elke gesloten contour geldt dat $Int(C) \subset D$

## Voorbeeld

Een schijf is elementair en een cirkel ring niet.
"Een elementair domein heeft geen gaten."

# Omwendingsgetallen

## Bewering

A;s $D$ een elementair domein is, dan geldt $\int_C f(z)dz = 0$ voor elke analytische functie $f : D \to \mathbb{C}$ en elke gesloten contour $C \subset D$.
Daarmee: elke analytische functie $f : D \to \mathbb{C}$ heeft een anti-afgeleide. Dit is een corollary van de volgende stelling.

## Stelling (Veralgemeniseerde residustelling

Zij $D \subset \mathbb{C}$ een elementair domein en $z_1, \ldots, z_k \in D$. Stel dat $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ analytisch is en zij $C$ een gesloten contour in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$.
Dan geldt $\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res_{z=z_j} f(z)\chi(C, z_j)$

# Omwendingsgetallen

## Bewijs

Voor elke $j = 1, \ldots, k$, bekijk de Laurentreeks van $f$ bij $z_j$:
$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^{(j)}(z - z_j)^n$.
We definieren het principal deel $h_j(\frac{1}{z-z_j}) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n^{(j)}(z - z_j)$ van $f$ bij $z_j$.
Merk op dat $h_j$ gedefinieerd is op $D \setminus \{z_j\}$ en analytisch is (in tegenstelling tot Laurtensreeks) Daarmee geldt
$0 = \int_C f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j(\frac{1}{z-z_j})dz$ want dit is analytisch, dus geldt:
$0 = \int_C f(z)dz - \sum_{j=1}^{k} \int_C h_j(\frac{1}{z-z_j})dz$ met $\int_C h_j(\frac{1}{z-z_j})dz =$
$\int_C \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)}(z - z_j)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_C a_n^{(j)}(z - z_j)^n dz$ dit is0 als $n \neq -1$.
Dus $a_{-1}^{(j)} \int_C \frac{dz}{z-z_j} = \chi(C, z_j)$.

# Omwendingsgetallen

## Corrolary (Cauchy integraal formule)

Zij $C$ een gesloten contour (niet noodzakelijk simpel). Dan geldt $\chi(C, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ als $z_0 \notin C$.

## Definitie

Zij $f$ een analytische functie zonder essentiele signulariteiten

- Als $z_0$ een nul is van $f$ van orde $m$ dan $ord(f, z_0) = m$
- Als $z_0$ een pool is van orde $m$ dan is $ord(f, z_0) = -m$
- Anders $ord(f, z_0) = 0$

Dan geldt $f(z) = g(z)(z - z_0)^{ord(f,z_0)}$ op een cirkelring om $z_j$ waarbij $g$ analytisch is en $g(z_j) \neq 0$.

# Omwendingsgetallen

## Corrolary

Zij $D \subset \mathbb{C}$ een elementair domein en zij $f$ een functie die op $D$ geen essentiele singulariteiten heeft (dus $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ analytisch en $z_1, \ldots, z_k$ zijn polen) en niet gelijk aan 0.
Dan geldt $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum ord(f, z)\chi(X, z)$ waarbij we sommeren over eindige verzameling van nullen en polen op inwendige van $C$.

# Omwendingsgetallen

## Bewijs

Zij $z_0 \in D$ met $ord(f, z_0) = m \neq 0$ dan geldt
$Res_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = ord(f, z_0)$
$f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ met $g \neq 0$ analytisch.
$f'(z) = g'(z)(z - z_j)^m + mg(z)(z - z_0)^{m-1}$
$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{m}{z - z_0}$.
$Res_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = Res_{z=z_0} \frac{g'(z)}{g(z)} + Res_{z=z_0} \frac{m}{z-z_0} = m = ord(f, z_0)$ want $g$ en $g'$ zijn analytisch.

## Voorbeeld

Als elke pool simpel is geldt dat $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} = \#$ inwendig gelegen nullen

# Omwendingsgetallen

**Corrolary (Hunritz 1889)**

Zij $f_n : D \to \mathbb{C}$ een rij van analytische functies zonder nullen die tegen $f : D \to \mathbb{C}$ convergeert. Dan heeft ook $f$ geen nul of is identiek 0.

**Corrolary**

Zij $f_n : D \to \mathbb{C}$ een rij van functies die analytisch en *injectief* zijn. Dan is ook de limietfunctie $f$ analytisch en injectief.

**Opmerking**

Voor reeel-aftelbare functie geldt dit zeker niet of ze zijn constant.

# Omwendingsgetallen

## Bewijs (1e corrolary)

Bij tegenspraak, stel dat $f$ niet identisch 0 is, maar een nul $z_0 \in D$ bestaat, dan geldt $0 \neq \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lim_{n\to\infty} \int_{|z-z_0|<\epsilon} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz = 0$. Tegenspraak.

## Bewijs (2e corrolary)

Bij tegenspraak, stel dat $f$ niet injectief is en niet constant, maar $f_n$ wel. Zij $f(a) = f(b)$ met $a \neq b$. Dan heeft $g(z) = f(z) - f(a)$ een nul, maar $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$ niet, maar dit kan niet volgens Hunritz.