Complexe Analyse

Luc Veldhuis

13 Maart 2017

Herhaling

Primitieve

$f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, met $F : D \to \mathbb{C}$ de primitieve van $f \Leftrightarrow F' = f$

Stelling

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch. De volgende beweringen zijn equivalent.

1. Voor elke gesloten contour $C \subset D$ geldt $\int_C f(x)dz = 0$.
2. De integraal langs een contour C hangt alleen af van het begin en eindpunt. $\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ als deze dezelfde begin en eindpunten hebben.
3. f heeft een primitieve F

Primitieven

Voorbeeld

- $f(z) = z^n \Rightarrow F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$
- $f(z) = \frac{1}{z}$ heeft **geen** primitieve.

Bewijs

$1 \Rightarrow 2$. Zijn C_1, C_2 twee contouren met dezelfde begin en eindpunten, dan is $C_1 - C_2$ een gesloten contour en dus $\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1 - C_2} f(z)dz = 0$.
$2 \Rightarrow 3$. Kies $z_0 \in D$. Vanwege 2 is de volgende definitie onafhankelijk van de gekozen contour van z_0 naar z.
$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$. Dus
$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}(\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz - \int_{z_0}^{z} f(z)dz) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz = f(z)$ (volgens reele analyse)

Bewijs (vervolg)

$3 \Rightarrow 1$. C gesloten $\Rightarrow \int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = 0$ omdat $z_1 = z_2$.

Stelling

Stel dat er een $M > 0$ bestaat met $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in D$. Dan geldt voor elke contour met lengte L:

$$|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)|dz \leq ML$$

Bewijs

$|\int_C f(z)dz| \leq |\int_a^b f(z)z'(z)dt| \leq \int_a^b |f(z)| \cdot |z'(t)|dt \leq M \int_a^b |z'(t)|dt = ML$

Primitieven

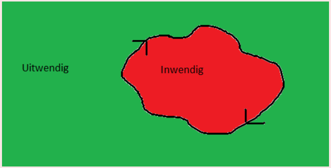
Definitie

Een contour C is **simpel** als elke parameterisatie injectief is, dus C is **niet** zelfdoorsnijdend.

Feit

Zij C een simpel en gesloten contour. Dan wordt het vlak $\mathbb{C}$ verdeelt in 2 gebieden:

- 'Inwendig' gebied, begrensd door C
- 'Uitwendig' gebied, die ook alle verweggelegen punten bevat.



Primitieven

Stelling van Cauchy-Goursat

Zij f een complex waardige functie, die op C en alle inwendiggelegen punten analytisch is, dan geldt $\int_C f(z)dz = 0$.

Opmerking

$f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, $C \subset D$ simpel gesloten contour, $\not\Rightarrow$ $\int_C f(z)dz = 0$. Alleen waar als ook alle inwendig gelegen z in D zijn!

Primitieven

Voorbeeld

- $\int_C z dz = 0$ met $C = \{z = e^{it} | 0 \leq t \leq 2\pi\}$
- $\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ omdat $z = 0$ inwendig is, maar $f(z) = \frac{1}{z}$ is niet gedefinieerd in $z = 0$.
- $\int_{C'} \frac{1}{z} dz = 0$ voor $C' = \{z = e^{it} + 2 | 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Omdat nu $f(z) = \frac{1}{z}$ wel analytisch is op alle inwendige punten p.
- $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z+2} dz = 0$, want $z^2 + 2z + 2$, heeft nulpunten in $z = -1 \pm i$, maar zitten niet in het inwendige van $|z| = 1$, dus $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$ is analytisch.

Andere manier voor $\frac{1}{z}$

$f : D \to \mathbb{C}$ met $f(z) = \frac{1}{z}$ heeft een primitieve, de hoofdtak *Log* van het logaritme als we kijken naar de cirkel van straal 1 in het punt 2.

Primitieven

Lemma

Zij $C \subset D$ een simpele gesloten contour en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch op C **en** alle inwendig gelegen punten.
Voor elke $\epsilon > 0$ kan de verzameling van inwendig gelegen punten overdekt worden door eindig veel rechthoeken R_j, $j = 1, \ldots, n$ zodat er altijd een punt $z_j \in R_j$ bestaat met
$|\frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} - f'(z_j)| < \epsilon \ \forall z \in R_j \setminus \{z_j\}$

Bewijsschets

Stel dat het niet geldt, maak de rechthoeken kleiner door splitsen.

Primitieven

Bewijs van Cauchy-Gouvret

Kies $\epsilon > 0$ en rechthoekjes R_j met punten $z_j \in R_j$ zoals in het lemma.
Zij C_j de rand van R_j, $j = 1, \ldots, n$. Dan geldt voor $z \in C_j \subset R_j$ dat $f(z) = f(z_j) + f'(z_j)(z - z_j) + \delta_j(z)(z - z_j)$ waarbij $|\delta_j(z)| < \epsilon$ vanwege het lemma.
Daarmee geldt
$\int_{C_j} f(z)dz = \int_{C_j} f(z_j)dz + \int_{C_j} f'(z_j)(z - z_j)dz + \int_{C_j} \delta_j(z)(z - z_j) =$
$f(z_j) \int_{C_j} 1dz + f'(z_j) \int_{C_j} (z - z_j)dz + \int_{C_j} \delta_j(z)(z - z_j) =$
$\int_{C_j} \delta_j(z)(z - z_j)$, omdat $z \mapsto 1$ en $z \mapsto z - z_j$ primitieven hebben en C_j een gesloten contour is, geldt
$f(z_j) \int_{C_j} 1dz = f'(z_j) \int_{C_j} (z - z_j)dz = 0$.

Bewijs (vervolg)

Als s_j = lengte van een zijde van R_j, dan $|z - z_j| < \sqrt{2}s_j$ en dus met gebruik van $|d_j(z)| < \epsilon$, $\forall z \in C_j \subset R_j$,
$|\int_{C_j} \delta_j(z)(z - z_j)| \leq \epsilon\sqrt{2}s_j l(C_j) = \epsilon 4\sqrt{2}A_j$ met $A_j = s_j^2 =$ oppervlakte van R_j.
Samenvattend:
$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)dz$.
$|\int_C f(z)dz| \leq \sum_{j=1}^n |\int_{C_j} f(z)dz| \leq \epsilon 4\sqrt{2}\sum_{j=1}^n A_j = \epsilon 4\sqrt{2}A$ met A = oppervlakte van R.
Omdat $\epsilon > 0$ willekeurige gekozen kan worden, geldt $\int_C f(z)dz = 0$.