Complexe Analyse

Luc Veldhuis

6 Maart 2017

Integralen

Vraag

Op welke manier moet integratie gedefinieerd worden zodat het de inverse is van differentiatie?

Definitie

Zij $w : t \in [a, b] \to \mathbb{C}$, $w(t) = u(t) + iv(t)$.

- De afgeleide van w is gedefinieerd als $\frac{d}{dt} w = w'(t) = u'(t) + iv'(t)$.
  Dus we bekijken $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ en w is afleidbaar als u, v dat zijn.
- $\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \in \mathbb{C}$.

Voorbeeld

$w(t) = e^{it} \Leftarrow u(t) = \cos(t), v(t) = \sin(t)$.
$\int_0^\pi e^{it} dt = \int_0^\pi \cos(t)dt + i \int_0^\pi \sin(t)dt =$
$[sin(t)]_0^\pi + i[-\cos(t)]_0^\pi = 2i$

Integralen

Stelling

Zij $w, W : [a, b] \to \mathbb{C}$. Het geldt $w = W' \Leftrightarrow \int_a^b w(t)dt = [W(t)]_a^b$

Bewijs

$w = u + iv$, $W = U + iV$.
$\int_a^b w(t)dt = [U(t)]_a^b + i[V(t)]_a^b = [W]_a^b$

Definitie

Een **contour** is een equivalentieklasse van stukwijs differentieerbare afbeeldingen $w : [a, b] \to \mathbb{C}$, waarbij w en $z : [a', b'] \to \mathbb{C}$ equivalent worden genoemd, als zij gelijk zijn modulo reparametrisatie, dus dat er een $\phi : [a, b] \to [a', b']$ bestaat met $w = z \circ \phi$ met $\phi'(t) > 0$ en we schrijven $C = \{z = z(t) | t \in [a, b]\}$.

Integralen

Voorbeeld

$C_1 = \{z(t) = e^{it} | 0 \leq t \leq 2\pi\}$
$C_{-1} = \{z(t) = e^{-it} | 0 \leq t \leq 2\pi\}$
$C_2 = \{z(t) = e^{2it} | 0 \leq t \leq 2\pi\}$
Deze 3 contouren hebben dezelfde verzameling van punten in $\mathbb{C}$, maar niet hetzelfde als contour.
Als C_2 loopt tot $0 \leq t \leq \pi$, dan is dit wel hetzelfde als C_1.

Definitie

De **lengte** van een contour is gedefinieerd als $L = \int_a^b |z'(t)| dt$ voor $C : \{z = z(t) | a \leq t \leq b\}$.
De lengte van C is onafhankelijk van de gekozen parametrisatie:
Zij $w : [a', b'] \to \mathbb{C}$, $w = z \circ \phi$, dan $\int_{a'}^{b'} |w'(\tau)| d\tau = \int_a^b |z'(t)| dt$

Integralen

Definitie

C wordt **gesloten** genoemd als $w(a) = w(b)$.

Voorbeeld

C_1, C_{-1}, C_2 zijn gesloten contouren.

Definitie (continue integraal)

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ continu en $C \subseteq D$ een contour.
We definiëren $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt$

Integralen

Voorbeeld

- $f(z) = \frac{1}{z}$, $C_1 = \{z(t) = e^{it} | 0 \leq t \leq \pi\}$,
  $C_2 = \{z(t) = e^{-it} | 0 \leq t \leq \pi\}$.
  $\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^\pi f(z(t)) \cdot z'(t)dt = \int_0^\pi e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^\pi i dt = \pi i$
  $\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^\pi -e^{it} i e^{-it} dt = \int_0^\pi -idt = -\pi i$
  Neem $C = \{z = e^{it} | 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{z = e^{2it} | 0 \leq t \leq \pi\}$.
  Dit geeft $\int_C f(z)dz = 2\pi i$
- $f(z) = z$ met C_1, C_2 zoals net.
  $\int_{C_{1,2}} f(z)dz = \int_0^\pi f(z(t)) \cdot z'(t)dt = \int_0^\pi e^{\pm it} \pm i e^{\pm it} dt = \pm i \int_0^\pi e^{\pm 2it} dt = \pm i [\frac{1}{2it} e^{\pm 2it}]_0^\pi = 0$
- $f(z) = z$, $C = \{z = z(t) | t \in [a, b]\}$ (willekeurig)
  $\int_C f(z)dz = \int_a^b z(t) \cdot z'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(z(t))^2)dt = \frac{1}{2}[z(t)^2]_a^b = \frac{1}{2}(z(b)^2 - z(a)^2)$

Integralen

Voorbeeld

Het 3e voorbeeld werkt inderdaad voor voorbeeld 2.
$(z_1 = 1, z_2 = -1)$.

Definitie

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch. Een analytische functie $F : D \to \mathbb{C}$ wordt anti-afgeleide (**primitieve**) genoemd, van f genoemd als $F' = f$.

Voorbeeld

- $F(z) = \frac{z^2}{2}$ is een primitieve van $f(z) = z$. (Op constante na)

Integralen

Stelling (fundamental theorem of complex analysis

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ met primitieve F, dan geldt

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z-1)$$

waarbij C van z_1 naar z_2 loopt ($C = \{z = z(t) | a \leq t \leq b\}$ met $z(a) = z_1$, $z(b) = z_2$).
De integraal $\int_C f(z)dz$ hangt alleen af van begin en eindpunt.

Opmerking

Omdat $\int_C \frac{1}{z}dz$ wel afhangt van de gekozen contour heeft $f(z) = \frac{1}{z}$ geen primitieve.
Let op! $\log(z)' = \frac{1}{z}$ maar log is meerwaardig, dus niet toegestaan.

Integralen

Bewijs

$F(z(b)) - F(z(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(z(t)))dt = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_C f(z)dz$ met $\frac{d}{dt}(F(z(t))) = \frac{d}{dt}(U(z(t))) + i\frac{d}{dt}(V(z(t))) = \frac{d}{dt}(U(x(t) + iy(t))) + i\frac{d}{dt}(V(x(t) + iy(t)))$ (Cauchy Riemann vergelijkingen gebruiken, en je komt uit) waarbij $F = U + iV$, $z = x + iy$, $f = u + iv$.