Topologie - Opdracht 4

Luc Veldhuis - 2538227

Maart 2017

1. Laat $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van samenhangende deelverzamelingen van een topologische ruimte X zijn. Stel, dat $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Toon aan, dat $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ samenhangend is.
   Gebruik inductie.
   Basis stap: Neem A_1 en A_2 samenhangende deelverzamelingen uit X met $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Construeer nu de rij (A_1, A_2). Uit het lemma van rijen samenhangende verzamelingen volgt dat $A_1 \cup A_2$ weer samenhangend is.
   Inductie hypothese: Neem aan dat $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n$ met $A_{n-1} \cap A_n \neq \emptyset$ weer samenhangend is met $\{A_i \subseteq X | 1 \leq i \leq n\}$ samenhangend.
   Bewijs dat voor $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ met $A_{n+1} \subseteq X$ samehangend geldt dat $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ samenhangend is:
   We weten dat $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ en dat $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ dus $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Construeer nu de rij $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_{n+1})$. Omdat we in de inductie hypothese hebben aangenomen dat $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ samenhangend is, en A_{n+1} samenhangend is, volgt uit het lemma van rijen samenhangende verzamelingen nu dat $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ ook samenhangend is. Dit geldt nu voor alle $n \geq 1$.
   Dus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ is samenhangend.

2. (a) Vind in elke geval deelversamelingen $A \neq \emptyset$ en $B \neq \emptyset$ van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}^2$ (met de standard topologie), zodanig dat A en B voldoen aan de eis:
      i. A en B samenhangend, maar $A \cap B \neq \emptyset$ onsamenhangend.
         Neem $A \subset \mathbb{R}^2 = [0,7] \times [0,7] \setminus (2,5) \times (2,5)$ en neem $B \subset \mathbb{R}^2 = [1,6] \times [3,4]$. Dan zijn A en B samenhangend, maar $A \cap B = [1,2] \times [3,4] \cup [5,6] \times [3,4]$ is onsamenhangend.
      ii. A en B samenhangend, maar $A \setminus B \neq \emptyset$ onsamenhangend.
         Neem $A \subset \mathbb{R} = [0,3]$ en $B \subset \mathbb{R} = [1,2]$. Dan zijn zowel A als B samenhangend, maar $A \setminus B = [0,1] \cup [2,3]$ duidelijk onsamenhangend.
      iii. A en B onsamenhangend, maar $A \cup B$ samenhangend.
         Neem $A \subset \mathbb{R} = [0,1] \cup [2,3]$ en $B \subset \mathbb{R} = [1,2] \cup [3,4]$. Dan zijn A en B duidelijk onsamenhangend, maar $A \cup B = [0,4]$ duidelijk samenhangend.

   (b) i. Bestaat er een topologische ruimte X en $A, B \subseteq X$, zodat $A \neq \emptyset$ en $B \neq \emptyset$ samenhangend zijn, cl $A\cap$ cl $B \neq \emptyset$ en $A \cup B$ onsamenhangend is?
         We hoeven alleen aan te tonen dat deze topologische ruimte bestaat.
         We weten dat als A en B samenhangend zijn, en $A \cap B \neq \emptyset$ dan is $A \cup B$ weer samenhangend (volgt uit lemma van rijen samenhangende verzamelingen). We weten ook dat de closure van een samenhangende verzameling weer samenhangend is. Nu is gegeven dat cl $A \cap$ cl $B \neq \emptyset$. Als $A \cup B$ kan alleen onsamenhangend zijn als $A \cap B = \emptyset$, oftwel, bestaan er samenhangende deelverzamelingen in een topologie, zodat $A \cap B = \emptyset$ maar cl $A \cap$ cl $B \neq \emptyset$? Dat kan alleen als cl $A \cap$ cl $B = \{x \in X | x \in \text{cl } A \setminus A \wedge x \in \text{cl } B \setminus B\}$. Dit bestaat in $(\mathbb{R}, T_st)$: laat $A = (0,1)$ en $B = (1,2)$. Dan is cl $A = [0,1]$, cl $B = [1,2]$ en cl $A \cap$ cl $B = \{1\} \neq \emptyset$. Maar $A \cup B = (0,2) \setminus \{1\}$ is onsamenhangend.

ii. Bestaat er een topologische ruimte X en $A, B \subseteq X$ zodat $A \neq \emptyset$ en $B \neq \emptyset$ samenhangend zijn, $A\cap$ cl $B \neq \emptyset$ en $A \cup B$ onsamenhangend is?
$A \cup B$ is onzamenhangend als voor open verzamelingen U, $V \subseteq X$ geldt dat
$A \cup B \subseteq U \cup V$
$(A \cup B) \cap U \neq \emptyset$ en $(A \cup B) \cap V \neq \emptyset$
$(A \cup B) \cap U \cap V = \emptyset$.
We weten ook dat $A \cup B$ samenhangend is als $A \cup B \neq \emptyset$. Dus we moeten wel hebben dat $A \cup B = \emptyset$. Maar voor gesloten verzamelingen weten we dat een punt $x \in X$ ligt in B dan en slechts dan als elke open omgeving W van x een niet-lege doorsnede heeft met B. We weten nu dat $A\cup$ cl $B \neq \emptyset$, dus er ligt een punt in $a \in A$ die ook in $a \in$ cl B, maar voor dit punt geldt dus ook dat elke open verzameling die a bevat een niet lege doorsede heeft met B. Oftewel $A \cap B \neq \emptyset$. Volgens het lemma voor rijen van samenhangende deelverzamelingen, moet $A \cup B$ weer samenhangend zijn. Dus $A \cup B$ kan in geen enkele topologische ruimte onsamenhangend zijn.

3. Is de topologische ruimte $(\mathbb{R}, T_{fin})$ (coeindige topologie) samenhangend?
We kijken eerst bij de definitie van de coeindige topologie.
Neem een verzameling X, en noem een deelverzameling $C \subseteq X$ gesloten als C een eindige deelverzameling is, of als $C = X$. Claim: de coeindige topologie is samenhangend.
Bewijs: Neem aan dat hij onsamenhangend is. Dan zijn er een U, $V \subseteq \mathbb{R}$ open niet-lege deelverzamelingen zodat $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$. In de coeindige topologie is iets open als het complement hiervan eindig is.
Schrijf nu $U \cap V = \emptyset$ als $\mathbb{R} \setminus C_1 \cap \mathbb{R} \setminus C_2 = \emptyset$ met C_1, C_2 eindige verzamelingen in $\mathbb{R}$.
Dit geeft: $\mathbb{R} \setminus C_1 \cap \mathbb{R} \setminus C_2 = \mathbb{R} \setminus (C_1 \cup C_2) = \emptyset$. Dit kan alleen als $(C_1 \cup C_2) = \mathbb{R}$. Maar $\mathbb{R}$ is een oneindige verzameling, maar C_1 en C_2 zijn eindige verzamelingen. De vereniging van eindig veel eindige verzamelingen is nooit gelijk aan een oneindige verzameling. Dus C_1 en C_2 bestaan niet, dus de coeindige topologie is niet onsamenhangend, dus hij moet wel samenhangend zijn.