Analysis 2B

Luc Veldhuis

10 mei 2017

Integratie

Herhaling

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar (in het bijzonder: begrensd)
Bijvoorbeeld: een rechthoek of het gebied ingesloten tussen de grafieken van 2 functies.
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ begrensd en continu behalve op een nulverzameling (meetbare verzameling met volume 0).
Dan is f integreerbaar op A. In andere woorden: $\int\limits_A f$ bestaat.

Vraag: Hoe kunnen we $\int\limits_A f$ berekenen?

Antwoord: Met herhaald integeren ('iterated integrals')

Heuristisch argument (schets)

Neem $n = 2$, $A = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, meetbaar.
$f : A \to \mathbb{R}$ continu en $f \geq 0$.
$G_f = \{(x, y, z) \subseteq \mathbb{R}^3 | (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$
$A_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in [a, b], y = const \in [c, d], z \in [0, f(x, y)]\}$
(Vlak in de grafiek)
$Opp(A_f) = \int_a^b f(x, y) dx$
$V(A) = \int_c^d Opp(A_f) dy = \int_c^d (\int_a^b f(x, y) dx)\ dy$

Integratie

Voorbeeld

$A = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ meetbaar, begrensd.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(x,y) = 1 - x^2$ is continu, en begrensd op A
$\int_A f = \int_0^1 (\int_0^1 1 - x^2 dx)\, dy = \int_0^1 [x - \frac{1}{3}x^3]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{2}{3} dy = [\frac{2}{3}y]_0^1 = \frac{2}{3}$

Stelling van Fubini (Stelling 4.1)

$f : \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
f integreerbaar
$f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f_x(y) = f(x,y)$ integreerbaar.
$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar.
$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ met $F(x) = \int_B f_x = \int_B f(x,y) dy$.
Dan is F integreerbaar en $\int_{A \times B} f = \int_A F = \int_A (\int_B f(x,y) dy) dx$
Met $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ en $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ en
$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Integratie

Opmerkingen

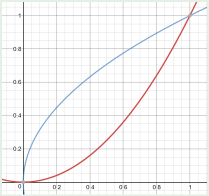
- De stelling geldt ook voor: $f_y(x) = f(x,y)$ integreerbaar als functie van y en $F(y) = \int_A f_y$. Dat wil zeggen, F integreerbaar en $\int_A \times B = \int_B F = \int_B (\int_A f(x,y)dx)dy$
- f continu, dan zijn f_x, f_y continu en dus integreerbaar.

Corollary (Stelling 4.3)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ continue functies.
$C : \{(x_1, \ldots, x_n, y) = (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in A, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$
(Oppervlak tussen 2 functies) is een meetbare deelverzameling van $\mathbb{R}^{n+1}$
Als $g : C \to \mathbb{R}$ continu is, dan $\int_C g = \int_A (\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x,y)dy)\ dx$

Voorbeeld

$\int\int_R xy^2 dA$, waarbij $f(x,y) = xy^2$ continu dus integreerbaar, $f_x(y)$ en $f_y(x)$ ook allebei integreerbaar (continu).
Waarbij R het gebied in het eerste kwadrant van $\mathbb{R}^2$ is $(x \geq 0, y \geq 0)$ ingesloten door $y = x^2$ en $x = y^2$.
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0,1], x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [0,1], y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$



Figuur : Plot van R

Integratie

Voorbeeld (vervolg)

Met herhaald integreren:
$\int\int_R xy^2 dA = \int_0^1 (\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2 dy) dx = \int_0^1 [\frac{1}{3}xy^3]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$
$\int_0^1 (\frac{1}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^7) dx = [\frac{2}{21}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{24}x^8]_0^1 = \frac{2}{21} - \frac{1}{24} = \frac{3}{56}$
Maar ook $\int\int_R xy^2 dA = \int_0^1 (\int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy^2 dx) dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2y^2]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy =$
$\int_0^1 (\frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^6) dy = [\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{14}y^7]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{14} = \frac{3}{56}$

Let op!

De volgorde kan niet altijd worden omgedraaid.
$\int (\int_0^x e^{x^2} dy) dx$
Soms veranderen de grenzen:
$\int_0^1 (\int_0^x f(x,y) dy) dx = \int_0^1 (\int_y^1 f(x,y) dx) dy$

Voorbeeld

$\int\int_T\int f(x,y,z)dV$ met $f(x,y,z)=z$ en T het gebied in het eerste octant is $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ wat onder het vlak $x+y+z=1$ ligt.

$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|(x,y)\in R, 0\leq z\leq 1-(x+y)\}$

$\int\int_T\int f(x,y,z)dV =^{4.3} \int\int_R(\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz)dA$

$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\in[0,1], 0\leq y\leq 1-x\}$

$\int\int_R(\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz)dA =$

$\int_0^1(\int_0^{1-x}(\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz)dy)dx =$

$\int_0^1(\int_0^{1-x}(\int_0^{1-x-y} z\ dz)dy)dx = \int_0^1(\int_0^{1-x}[\frac{1}{2}z^2]_0^{1-x-y}dy)dx =$

$\int_0^1(\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(1-x-y)^2dy)dx = \int_0^1[-\frac{1}{6}(1-x-y)^3]_0^{1-x}dx =$

$\int_0^1\frac{1}{6}(1-x)^3dx = [-\frac{1}{24}(1-x)^4]_0^1 = \frac{1}{24}$

$V(T)=\int\int_T\int 1dV = \int\int_R(1-x-y)dA$

Corollary (Stelling van Cavalieri)

Probleem: integratie van gebieden in poolcoordinaten. (Gedeeltes van cirkels)

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$

$R = \{(r, \theta) | r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$

Oplossing:

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ meetbaar

$A \subseteq R \times [a, b]$ met R een n-dimentionale rechthoek.

$A_t = \{x \in \mathbb{R}^n | (x, t) \in A\}$ meetbaar.

Dan $V(A) = \int_a^b V(A_t)dt$ (Schijven uit een bol)

Integratie

Voorbeeld

$B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subseteq [-1, 1]^3$
$A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y, t) \in B^3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1 - t^2\}$,
een 2-dimentionale schijf met straal $\sqrt{1 - t^2}$
$V(B^3) = \int_{-1}^{1} \pi(1 - t^2) = \pi[t - \frac{1}{3}t^3]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi$, omdat Opp(Cirkel) $= \pi r^2$