§3.5 S_n en A_n

Definitie

Voor $n \geq 2$, $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ met x_i variabelen.

Voorbeeld

$n = 3$: $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$
Voor $\sigma \in S_n$ met $n \geq 2$ is:
$\sigma(\Delta) =^{def} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) = \epsilon(\sigma) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \epsilon(\sigma) \cdot \Delta$
met $\epsilon(\sigma) = \pm 1$
$\sigma = (1\ 2) : \sigma(\Delta) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -\Delta$
Want: $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ met $i \neq j$ doorloopt precies alle $\{i, j\}$ met $i \neq j$.

§3.5 S_n en A_n

Voorbeeld

$\sigma = (1\ 2) \in S_n$

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_n)\prod_{3\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$$

$$\sigma(\Delta) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_n)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)\prod_{3\leq i<j\leq n}(x_i - x_j) = -\Delta,$$ dus $\epsilon((1\ 2)) = -1$

Stelling

$\epsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ voor $n \geq 2$ is een homomorfisme. Dat wil zeggen: $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$. Het tekenhomomorfisme.

§3.5 S_n en A_n

Bewijs

Neem $\sigma, \tau \in S_n$. Dan is $(\sigma\tau)(\Delta) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_{\sigma(\tau(i))} - x_{\sigma(\tau(j))})$
Stel k paren $(\tau(i), \tau(j))$ voldoen aan $\tau(i) > \tau(j)$.
Dus $\epsilon(\tau) = (-1)^k$. Ook
$(\sigma\tau)(\Delta) = \epsilon(\sigma\tau)\Delta = (-1)^k \prod_{1 \le i' < j' \le n} (x_{\sigma(i')} - x_{\sigma(j')}) = (-1)^k \epsilon(\sigma)\Delta$
met $i' = \tau(i)$ en $j' = \tau(j)$
Dus $\epsilon(\sigma\tau) = (-1)^k \epsilon(\sigma) = \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma) =^{Abels} \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$

Gevolg

$\epsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ is een surjectief homomorfisme.
Want $\epsilon(e) = 1$ en $\epsilon((1\ 2)) = -1$

§3.5 S_n en A_n

Definitie

$n \geq 2$, $A_n = Ker(\epsilon)$. Dan $A_n \trianglelefteq S_n$, $n \geq 1$ en voor $n = 1$,
$A_1 = \{2\}$.
$S_n / A_n \cong \{\pm 1\}$ voor $n \geq 2$ (1e isomorfie stelling)
A_n is de alternerende groep op n elementen. S_n is de symmetrische groep op n elementen. $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$ als $n \geq 2$: $|\frac{S_n}{A_n}| = \frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$

Definitie

$\sigma \in S_n$ heet even als $\epsilon(\sigma) = 1$ en oneven als $\epsilon(\sigma) = -1$
Dus $A_n = \{$even permutaties$\}$ geeft $S_n \setminus A_n$ is de rest $= \{$oneven permutaties$\}$

Opmerking

$\epsilon(\tau\sigma\tau^{-1}) =^{homomorfisme} \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)^{-1} =^{abels} \epsilon(\sigma)$
Dus ϵ is constant op conjungatieklassen.

Uit §4.3

De conjungatieklassen van S_n:
$\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r$ met τ_i paarsgewijs disjunct en de lengte ≥ 1 met $n_i =$ lengte τ_i. Neem $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r$.
Dan is $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.
$n_1, n_2, \dots, n_r$ heet het cykeltype van σ.

Opmerking

De cykeltypen komen overeen met de partitie van n.

Voorbeeld

Neem $n = 4$:

Cykeltype	Voorbeeld	Mogelijkheden
4	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$\frac{4!}{4} = 6$
1,3	$(1)(2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4)$	$\binom{4}{3}\frac{3!}{3} = 8$
1,1,2	$(1)(2)(3\ 4) = (3\ 4)$	$\binom{4}{2}\frac{2!}{2} = 6$
2,2	$(1\ 2)(2\ 4)$	3
1,1,1,1	$(1)(2)(3)(4) = e$	1
		$4! = 24$

§3.5 S_n en A_n

Stelling

2 elementen in S_n zijn geconjungeerd $\Leftrightarrow$ ze hebben hetzelfde cykeltype. (σ en τ geconjungeerd $\Leftrightarrow \exists \rho$ met $\sigma = \rho\tau\rho^{-1}$)

Bewijs

$\Rightarrow$: Als $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r$ met τ_i paarsegewijs disjunct, $n_i =$ lengte τ_i en $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r$ en $\rho \in S_n$, dan is
$\rho\sigma\rho^{-1} = \rho\tau_1\tau_2 \dots \tau_r\rho = \rho\tau_1\rho^{-1}\rho\tau_2\rho^{-1} \dots \rho\tau_r\rho^{-1}$
En $\rho\tau_i\rho^{-1}$ is een cykel van lengte n_i en de $\rho\tau_i\rho^{-1}$ zijn paarsgewijs disjunct.
$\Leftarrow$: Stel $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r$ en $\sigma' = \tau_1'\tau_2' \dots \tau_r'$ hebben hetzelfde cykeltype. Dan is τ_i paarsgewijs disjunct met lengte$(\tau_1) \leq$ lengte$(\tau_2) \leq \dots$ enz...

§3.5 S_n en A_n

Voorbeeld

$n = 6$, $\sigma = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$, $\sigma^{-1} = (1\ 3\ 2\ 4\ 6)$
$\sigma = (6)(1\ 2\ 4\ 5\ 3)$
$\sigma' = (5)(1\ 3\ 2\ 4\ 6)$
Neem $\rho(1) = 1$, $\rho(2) = 3$, $\rho(3) = 6$, $\rho(4) = 2$, $\rho(5) = 4$, $\rho(6) = 5$
Dus $\rho = (2\ 3\ 6\ 5\ 4)$ en $\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma^{-1}$

Gevolg

- Elke transpositie (= 2-cykels) heeft teken -1 (want $(a\ b)$ is geconjungeerd met $(1\ 2)$ en het teken is constant op conjungatie klassen)
- Een m-cykel heeft teken $(-1)^{m-1}$ want $(a_1\ a_2\ \ldots a_m) = (a_1\ a_2)(a_2\ \ldots a_m) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\ldots(a_{m-1}\ a_m)$ dit zijn $m-1$ 2-cykels en ϵ is een homomorfisme.

Pas op!

m is even $\Leftrightarrow$ m-cykel is oneven (en omgekeerd)

Voorbeeld

Neem $n = 4$:

Cykeltype	Aantal	Teken in A_4
1,1,1,1	1	1
1,1,2	6	-1
1,3	8	1
4	6	-1
2,2	3	1

Stelling

$A_n \leqslant S_n$, A_n voortgebracht door alle 3-cykels

Bewijs

Een 3-cykel $(a\ b\ c) = (a\ b)(b\ c)$ is even en heeft teken 1, dus is in $A_n \Rightarrow \langle\text{3-cykels}\rangle \subseteq A_n$
Voor de andere inclusie: Neem $\sigma \in A_n$, σ is een product van een oneven aantal 2-cykels, want $\sigma \in A_n$, $\epsilon(\text{2-cykels}) = -1$.
Dus σ is een product van $(a\ b)(c\ d)$ met $a \neq b$ en $c \neq d$
Nu is voldoende: $(a\ b)(c\ d)$ als product van 3-cykels te schrijven.

- $\{a, b, c, d\}$ heeft 2 elementen. Dan $(a\ b) = (c\ d) = (d\ c)$ en $(a\ b)(c\ d) = e$
- $\{a, b, c, d\}$ heeft 3 elementen. Dan is het element van de vorm $(a'\ b')(b'\ c')$ met $a' \neq c'$ en dit is $(a'\ b'\ c')$
- $\{a, b, c, d\}$ heeft 4 elementen. Dan is $(a\ b)(b\ c)(b\ c)(c\ d) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)$

Dus $A_n \subseteq \langle\text{3-cykels}\rangle$. Dus $A_n = \langle\text{3-cykels}\rangle$. $\square$

Opmerking

Δ heet de discriminant.

Voorbeeld

$x^2 + bx + c$ heeft wortels $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_1 \vee x_2$

Dan is $(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}$