# Analysis 2B

Luc Veldhuis

14 mei 2017

# Integratie

## Herhaling

Herhaalde integralen in Cartesische coordinaten.
Stelling van Fubini

- Principe van Cavalieri
- Stelling over herhaalde integralen over gebiden van de vorm $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in A, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$ waarbij $A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar en $h_1 : A \to \mathbb{R}$ een continue functie

# Transformatie stelling

## Motivatie

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ (bovenste halve cirkel)

Oppervlakte geeft: $\int \int_S =^{herhaalt} \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy)\ dx$

Kan wel, maar kan makkelijker.

Neem transformatie: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met

$T(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$r \geq 0$ is de straal. Dan is $S = T(R)$ met $R = [0,1] \times [0, \pi]$

Neem $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

Dan $A = T(Q)$ met $Q = [1,2] \times [0, \pi]$

$T$ is differentieerbaar in alle punten met afgeleide:

$$T'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

# Transformatie stelling

**Opmerking**

$T$ is niet overal inverteerbaar, bijvoorbeeld op $R = [0,1] \times [0,\pi]$ het segment van $(0,0)$ tot $(0,\pi)$ wordt helemaal op $(0,0)$ afgebeeld.

**Voorbeeld**

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integreerbaar.
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Mapping: $R \to^T S \to^f \mathbb{R}$

# Transformatie stelling

## Probleem

Vraag: Kan ik $\int_{S=T(R)}$ uitrekenen als een integraal over $R$ van $f \circ T$?

Antwoord: Ja, onder 'geschikte voorwaarden' voor $T$ geldt:
$\int_S f = \int_R (f \circ T) \cdot |det T'|$

# Transformatie stelling

## Voorbeeld

Halve bol: met cavalieri $V = \frac{2}{3}\pi$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ de eenheidsschijf.

Met poolcoordinaten: $T(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$D = T(R)$ met $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$

$$T'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$|det T'| = r$

$f \circ T = \sqrt{1 - (r\cos(\theta))^2 - (r\sin(\theta))^2} = \sqrt{1 - r^2}$

$V = \int_D \int \sqrt{1 - x^2 - y^2} dA =^{Trans\ St.} \int_R \int r\sqrt{1 - r^2} =^{Herh.\ Integ.}$

$\int_0^1 (\int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - r^2} d\theta) dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2} dr =$

$2\pi[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = 2\pi\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

# Transformatie stelling

## Sperical Coordinates

$T : [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ met
$(\rho, \phi, \theta) \mapsto (\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))$ is een mapping voor 'sperical coordinates', bolcoordinaten.
Het volume tussen een bol en een kegel:
$V = T(\{(\rho, \phi, \theta) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\})$

## Voorbeeld

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(kegel)} \end{cases}$$

In bolcoordinaten:

$$\begin{cases} \rho = R \\ \phi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

# Substitutie stelling

## Idee

We weten uit de ketting regel dat:
$\int f(x)dx = \int f(u(s))u'(s)ds$ met $u'(s)ds = dx$ en $x = u(s)$
Dit geeft $\frac{dx}{ds} = u'(s)$
$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar geeft
$\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \equiv u'(x)$ voor $x$ en $x_0$ dichtbij.
Voor een lineaire transformatie:
$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $L(x) = \lambda x$

# Substitutie stelling

## Lineaire transformaties

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar.
$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaire afbeelding, inverteerbaar.
Kan een kubus in een parallellepipedum veranderen.
Het volume van dit parallellepipedum is de absolute waarde van de determinant van de geassocieerde matrix van de lineaire transformatie $L$.
Dus geldt $V(L(B)) = |det\ L| \cdot V(B)$

## Opgave 5.2

$A$ meetbaar dan en slechts dan als $\forall \epsilon > 0$, $\exists A_1, A_2$ meetbaar zodat $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ en $V(A_2 - A_1) \leq \epsilon$

# Substitutie stelling

## Voorbeeld

Starre bewegingen zijn volume behoudend. ('Rigid motions')
$t_a \circ \mu$, waarbij $t_a(x) = x + a$ en $|det\ \mu| = 1$, bijvoorbeeld
$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$