Groepen theorie

Luc Veldhuis

15 Mei 2017

§4.1 Groepswerkingen

§4.1

Een groep G werkt (links) op een verzameling $A \neq \emptyset$ wil zeggen:
$G \times A \to A$ met $(g, a) \mapsto ga$
Er geldt $\forall g_1, g_2 \in G$ en $\forall a \in A$ dat:

- $g_1(g_2 a) = (g_1 g_2)a$
- $ea = a$

$\forall g \in G$ in $\sigma_g : A \to A$ is een element van S_A (permutaties van A) met inverse afbeelding $(\sigma g)^{-1} = \sigma_{g^{-1}}$ dan is $\psi : G \to S_A$ een homomorfisme met $\psi(g) = \sigma_g$
$\sigma_{g_1 g_2} = \psi(g_1 g_2) = \psi(g_1)\psi(g_2) = \sigma_{g_1}\sigma_{g_2}$ Controleer dit door $\sigma_{g_1 g_2}$ en $\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}$ te berekenen op alle $a \in A$ (opgave)

§4.1 Groepswerkingen

Stelling van Cagley

Als G een groep is met $|G| = n$, dan is G isomorf met een ondergroep van S_n.
Namelijk G werkt op $A = G$ via linksvermenigvuldiging:
$G \times A = A$ met $(g, a) \mapsto ga$ (product in G)
Dus we krijgen: $\psi : G \to S_A \cong S_n$ met $g \mapsto \sigma_g$ via het permuteren van elementen van G.
Maar ψ is injectief: als $g \in Ker(\psi)$, dan is $\sigma_g = id_A$. Dus $ga = \sigma_g(a) = id_A(a) = a, \forall a \in A$
Neem $a = e$: $g = ge = e \to g = e \Rightarrow Ker(\psi) = \{e\}$, dus injectief en ψ een homomorfisme.
Dus $\psi : G \to Im(\psi)$ is een isomorfisme. Het beeld van een homomorfisme is altijd een ondergroep, in dit geval van S_A

Voorbeeld

Voor $G = S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$
Nummer dit $1, 2, 3, 4, 5, 6$
Er geldt: $(1\ 2)$ werkt in G op $G = A$ via linkswerkingen als:

- $1 \to 2$ want $e \to (1\ 2)$ want $(1\ 2)e = (1\ 2)$
- $2 \to 1$ want $(1\ 2) \to e$ want $(1\ 2)(1\ 2) = e$
- $3 \to 6$ want $(1\ 3) \to (1\ 3\ 2)$
- $6 \to 3$ want $(1\ 3\ 2) \to (1\ 3)$
- $4 \to 5$ want $(2\ 3) \to (1\ 2\ 3)$
- $5 \to 4$ want $(1\ 2\ 3) \to (2\ 3)$

Dus het beeld van $(1\ 2) \in S_3$ is $(1\ 2)(3\ 6)(4\ 5) \in S_6$

§4.1 Groepswerkingen

Definitie

- De kern van de werking (Ker(ψ)) is $\{g \in G | ga = a \forall a \in A\}$
- $G_a = \{g \in G | ga = a\}$ voor een vaste $a \in A$ heet de **stabilisator** van a in G.
- $Ga = \{ga | g \in G\} \subseteq A$ heet de **baan** van a. De grootte van de baan heet de **lengte**.

Voorbeeld

G werkt op zichzelf via conjungatie $(g, a) \mapsto gag^{-1}$ (ga na)
De stabilisator van a is $C_G(a)$ centralizator van a.

Baan stabilisator stelling

- Als G op A werkt met $a, b \in A$ dan is $a \sim b \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists g \in G$ met $a = gb$ een equivalentie relatie op A. De equivalentie klasse van a is de baan Ga van a.
- Er is een bijectie $G/G_a \to Ga$ met $gG_a \mapsto Ga$

Opmerking

Stel G eindig, dan is $|Ga| = |G/G_a| = \frac{|G|}{|G_a|}$.
Dus $|G_a| \cdot |Ga| = |G|$

Voorbeeld

$G = S_4$ werkt op $A = \{$deelverzameling van $\{1, 2, 3, 4\}$ met 2 elementen$\}$
Bijvoorbeeld $\sigma\{1, 2\} = \{\sigma(1), \sigma(2)\}$
A heeft maar 1 baan (ga na), dus $G \cdot \{1, 2\} = A$ heeft $\binom{4}{2} = 6$ elementen. $|G_{\{1,2\}}| = \frac{|G|}{|G\{1,2\}|} = \frac{4!}{6} = 4$.
Hier is $G_{\{1,2\}}$ de stabilisator.
Dan is $G_{\{1,2\}} = \{e, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$

§4.2 Groepswerkingen

Stelling

Als G eindig is en $H \leqslant G$ met $|G : H|$ de kleinste priemdeler van $|G|$, dan is $H \trianglelefteq G$.

Opmerking (Stelling van Cauchy)

Als G eindig is met p een priemdeler van $|G|$ dan bevat G een element van orde p.

Bewijs

Laat G werken op $A \stackrel{\text{def}}{=} G/H$ via $(g, H) \mapsto g \times H$
Dat geeft het homomorfisme: $\psi : G \to S_A$. $|A| = p$ e $|S_A| = p!$
$Im(\psi)$ is een ondergroep van S_A, dus $|Im(\psi)| \,|\, |S_A| = p!$ (Lagrange)
Ook $G/Ker(\psi) \cong Im(\psi)$ (1e isomorfie stelling)
Dus $|Im(\psi)| \,|\, |G/Ker(\psi)| = \frac{|G|}{|Ker(\psi)|}$ en $|Ker(\psi)| \cdot |Im(\psi)| = |G|$ en $|Im(\psi)| \,|\, |G|$ hieruit volgt: $|Im(\psi)|$ deelt $ggd(p!, |G|)$. De priemgetallen $< p$ delen $|G|$ niet, want p is de kleinste priemdeler van $|G|$.
Dus $|Im(\psi)| = 1$ of $|Im(\psi)| = p$.
$Ker(\psi) \leqslant H$ want $gH = H$ als $g \in Ker(\psi)$
$H \neq G$ dus $Ker(\psi) \neq G \Rightarrow |Im(\psi)| \neq 1$ dus $|Im(\psi)| = p$ en $|Ker(\psi)| = \frac{|G|}{p} = |H| \Rightarrow Ker(\psi) = H$ en een kern is altijd een normaaldeler.

Voorbeeld

Als $|G| = 21 = 3 \cdot 7$ en $H \leqslant G$ met $|H| = 7$, dan geldt $H \trianglelefteq G$ ($|G : H| = 3$ is de kleinste priemdeler van $|G|$)

Definitie

G een groep. G werkt op zichzelf door middel van conjungatie.
$(g, a) \mapsto gag^{-1}$ met $g \in G$ en $a \in A$.
De baan van $a = \{gag^{-1} | g \in G\} =$ de conjungatie klasse van a.
De stabilisator van $a = \{g \in G | gag^{-1} = a\} = C_G(a)$
Nu geeft de baan-stabilisator formule: $|G| = |C_G(a)| \cdot |$conjungatie klasse van $a|$ want $|C_G(a)| = |G_a|$ en $|$conjungatie klasse van $a| = |Ga|$

Voorbeeld

$G = D_1 00$, een groep met 100 elementen, 50 rotaties en 50 spiegelingen.
Conjungatie klasse van sr^i bevat elke $r^j sr^i r^{-j} = sr^{i-2j} = sr^i \langle r^2 \rangle$ (25 elementen, want 50 is even aantal rotaties en $\langle r^2 \rangle$ oneven cykels)
$C_G(sr^i)$ bevat $\{e, sr^i, r^2 5, sr^{i+25}\}$ dat geeft minimaal 4 elementen
$|G| = 100$, $|C_G(a)| \geq 4$, $|Ga| \geq 25$ en $100 = 4 \cdot 25$
Dus $|C_G(a)| = 4$ en $|$conjungatie klasse$sr^i \langle r^2 \rangle| = 25$ voor $a = sr^i$

§4.3 De klassenformule

Voorbeeld

De conjungatieklasse in S_n $\Leftrightarrow$ partitie van n $\Leftrightarrow$ cykeltype.
Kies $n = 4$:

Cykeltype	Voorbeeld	Grootte conjungatieklasse
1,1,1,1	e	
1,1,2	$(1\ 2)$	
1,3	$(1\ 2\ 3)$	
4	$(1\ 2\ 3\ 4)$	
2,2	$(1\ 2)(3\ 4)$	3

$|C_{S_4}((1\ 2)(3\ 4))| = \frac{|S_4|}{|\text{conjungatie klasse}|} = \frac{4!}{3} = 8$
Zie: $(1\ 3\ 2\ 4) \in H$, $(1\ 3\ 2\ 4)^2 = (1\ 2)(3\ 4)$, ook $(1\ 2) \in H$
$\langle(1\ 3\ 2\ 4)\rangle \leqslant H$ met $|H| = 8$ en $\langle(1\ 3\ 2\ 4)\rangle = 4$