Inlever opdracht 3

Luc Veldhuis

20 maart 2017

1. Zij $n \geq 2$ en $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, een groep onder optelling.
   (a) Bewijs dat voor elke $\overline{a}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de afbeelding $\phi_{\overline{a}} : G \to G$ met $\phi_{\overline{a}}(\overline{x}) = \overline{a} \cdot \overline{x}$ een homomorfisme is.
   De functie $\phi_{\overline{a}}$ is een homomorfisme als geldt dat $\phi_{\overline{a}}(\overline{xy}) = \phi(\overline{x})_{\overline{a}}\phi(\overline{y})_{\overline{a}}$ $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ met $n \geq 2$
   Omdat G een groep is onder optelling, betekend dit dat $\overline{xy} = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$. De laatste stap volgt uit definitie van additie op integers modulo n. Dit geeft: $\phi_{\overline{a}}(\overline{xy}) = \overline{a} \cdot \overline{xy} = \overline{a} \cdot (\overline{x+y}) = \overline{a \cdot (x+y)} = \overline{a \cdot x + a \cdot y} = \overline{a \cdot x} + \overline{a \cdot y} = \overline{a} \cdot \overline{x} + \overline{a} \cdot \overline{y} = \phi_{\overline{a}}(\overline{x})\phi_{\overline{a}}(\overline{y})$
   Dus $\phi_{\overline{a}}(\overline{xy}) = \phi_{\overline{a}}(\overline{x})\phi_{\overline{a}}(\overline{y})$ en dus is $\phi_{\overline{a}}$ een homomorfisme.

   (b) Toon aan dat $\phi_{\overline{a}} = \phi_{\overline{b}}$ dan en slechts dan als $\overline{a} = \overline{b}$.
   Bewijs '$\Leftarrow$':
   We hebben dat $\overline{a} = \overline{b}$. Dan hebben we voor elke $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dat $\phi_{\overline{a}}(\overline{x}) = \overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \phi_{\overline{b}}(\overline{x})$.
   Bewijs '$\Rightarrow$':
   We hebben dat $\phi_{\overline{a}}(\overline{x}) = \overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \phi_{\overline{b}}(\overline{x})$.
   Dus $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{x}$. Omdat dit moet gelden voor elke $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, geldt dit ook voor $\overline{1}$. Dit geeft

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{x} &= \overline{b} \cdot \overline{x} \\ \overline{a} \cdot \overline{1} &= \overline{b} \cdot \overline{1} \\ \overline{a \cdot 1} &= \overline{b \cdot 1} \\ \overline{a} &= \overline{b} \end{aligned}$$

   (c) Laat zien dat elk homomorfisme $\psi : G \to G$ gelijk is aan een $\phi_{\overline{a}}$. (Aanwijzing: waarom wordt ψ volkomen bepaald door $\psi(\overline{1})$?)
   We weten dat als ψ een homomorfisme is, moet gelden dat $\psi(\overline{0}) = \overline{0}$.
   We stellen nu dat $\psi(\overline{1}) = \overline{a}$
   Omdat G een groep is onder optelling, weten we dat $\overline{1} + \overline{1} = \overline{11} \in G$.
   We gaan inductie gebruiken om te bewijzen dat ψ gelijk is aan een $\phi_{\overline{a}}$.
   We willen eerst laten zien dat voor elke rest klasse $\overline{k}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{k} \geq \overline{1}$ we $\psi(\overline{k})$ kunnen schrijven als $\underbrace{\psi(\overline{1}) \ldots \psi(\overline{1})}_{k}$

Basis stap: $\psi(\overline{1}) = \psi(\overline{1})$
Inductie hypothese: $\psi(\overline{k}) = \underbrace{\psi(\overline{1})\dots\psi(\overline{1})}_{k}$

Bewijs: $\psi(\overline{k+1}) = \psi(\overline{k1}) = \psi(\overline{k})\psi(\overline{1}) = \underbrace{\psi(\overline{1})\dots\psi(\overline{1})}_{k}\psi(\overline{1}) = \underbrace{\psi(\overline{1})\dots\psi(\overline{1})}_{k+1}$

Ook willen we laten zien dat $\overline{b}\cdot\overline{c} = \underbrace{\overline{b}\dots\overline{b}}_{c}$

Basis stap: $\overline{b}\overline{1} = \overline{b}$
Inductie hypothese: $\overline{b}\cdot\overline{c} = \underbrace{\overline{b}\dots\overline{b}}_{c}$

Bewijs: $\overline{b}\cdot\overline{c+1} = \overline{b\cdot(c+1)} = \overline{b\cdot c + b\cdot 1} = (\overline{b\cdot c})(\overline{b\cdot 1}) = \underbrace{\overline{b}\dots\overline{b}}_{c}\overline{b} = \underbrace{\overline{b}\dots\overline{b}}_{c+1}$

Omdat we hebben aangenomen dat $\psi(\overline{1}) = \overline{a}$ krijgen we nu $\forall\overline{x} \in G$, $\overline{x} \geq \overline{1}$ dat $\psi(\overline{x}) = \underbrace{\psi(\overline{1})\dots\psi(\overline{1})}_{x} = \underbrace{\overline{a}\dots\overline{a}}_{x} = \overline{a}\cdot\overline{x} = \phi_{\overline{a}}(\overline{x})$.

Als $\overline{x} = \overline{0}$, dan geldt $\psi(\overline{0}) = \overline{0} = \phi_{\overline{a}}(\overline{0})$.
Dus als we $\overline{a} = \psi(\overline{1})$ kiezen, dan geldt dat $\phi_{\overline{a}}(\overline{x}) = \psi(\overline{x})\ \forall\overline{x} \in G$