Analysis 1B

Luc Veldhuis

1 November 2016

Introduction

What will be treated

- Chapter 6 and 7
- Dictate differential equations
- Dictate ‘course doc’ (handy summary of the book)

Rieman integraal

P partitie van $[a, b]$ met $a_0 = x_0 < \cdots < x_n = b$
$P = \{x_k\}_{k=0}$
$|P| = max(\Delta x_k)$ where $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
Tussen een P en P' is P' fijner als $|P'| < |P|$. Q is een verfijning van P als geldt $P \not\subseteq Q$.
We hebben ook $P \not\subseteq P \cup P'$
$P' \not\subseteq P \cup P'$
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, begrensd.
$sup_{[a,b]} f(x) = M, inf_{[a,b]]} f(x) = m$.
$m_k = inf_{[k-1,k]} f(x)$ en $M_k = sup_{[k-1,k]} f(x)$.
Dus geldt $m \leq m_k \leq M_k \leq M$.

Rieman som

Als je m_k neemt, krijg je de ondersom:

$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$

Als je M_k neemt krijg je de bovensom:

$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k$

Riemansom:

$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$

$m\Delta x_k \leq m_k \Delta x \leq f(c_k)\Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \leq M \Delta x_k$ want delta is altijd positief en we hebben $m_k \leq f(c_k) \leq M_k$.

Rieman som

Sommeer:

$$\sum m\Delta x_k \leq \sum m_k \Delta x_k \leq \sum f(c_k)\Delta x_k \leq \sum M_k \Delta x_k \leq \sum M \Delta x_k$$
$$m \sum \Delta x_k \leq \sum m_k \Delta x_k \leq \sum f(c_k)\Delta x_k \leq \sum M_k \Delta x_k \leq M \sum \Delta x_k$$

En we weten $\sum \Delta x_k = b - a$ dus hieruit volgt:

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq S(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a)$$

We weten ook dat $P \not\subseteq Q \Rightarrow L(P,f) \leq L(Q,f)$ en ook $U(Q,f) \leq U(P,f)$ en $L(P,f) \leq U(Q,f)$ met P, Q willekeurig.

Bewijs $L(P, f) \leq U(Q, f)$

Kies een c in (x_{k-1}, x_k), en definieer:

$$\begin{aligned}
inf_{[x_{k-1},c]} f(x) &= r_1 \\
inf_{[c,x_k]} f(x) &= r_2 \\
sup_{[x_{k-1},c]} f(x) &= R_1 \\
sup_{[c,x_k]} f(x) &= R_2 \\
m_k &= min(r_1, r_2) \\
M_k &= max(R_1, R_2)
\end{aligned}$$

En we hebben voor $P \subseteq P \cup Q$ en $Q \subseteq P \cup Q$:

$$\begin{aligned}
L(P, f) &= \dots m_k \Delta x_k \dots = \\
&= \dots + m_k(x_k - c) + m_k(c - x_{k-1}) + \dots \\
&\leq \dots + r_1(x_k - c) + r_2(c - x_{k-1}) + \dots = L(Q, f)
\end{aligned}$$

Definieer inductief voor alle punten.

Bewijs $L(P, f) \leq U(Q, f)$

We kunnen nu ook laten zien dat:

$$
\begin{aligned}
m(b-a) \leq L(P, f) \leq L(P \cup Q, f) \\
\leq U(P \cup Q, f) \leq U(Q, f) \leq M(b-a)
\end{aligned}
$$

We kunnen nu definieren:

$$
\underline{\int_b^a} f = sup\ L(P, f)
$$

$$
\overline{\int_b^a} f = inf\ \ U(P, f)
$$

Dus geldt:

$$
L(P, f) \leq \underline{\int_b^a} f \leq \overline{\int_b^a} f \leq U(P, f)
$$

Rieman integreerbaar

Definitie

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd is Rieman integreerbaar als geldt:

$$\underline{\int_b^a} f = \overline{\int_b^a} f = \int_b^a f$$

Voorbeeld x^2

Voorbeeld

$$
\begin{aligned}
f(x) =& x^2 \text{ op } [0,2] \\
P =& \{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, 2\}, \Delta x_k = \frac{2}{n} \\
U(P,f) =& \sum_{k=1}^{n} (\frac{2k}{n})^2 * \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} \\
L(P,f) =& \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{2(k-1)}{n})^2 * \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \\
& \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} i^2 = \frac{8}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \\
& \frac{4}{3} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}
\end{aligned}
$$

Voorbeeld x^2

Voorbeeld

$$\frac{4}{3}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} =$$

$$L(P,f) \leq \underline{\int_0^2} f \leq \overline{\int_0^2} f \leq U(P,f)$$

$$= \frac{4}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

For $n \to \infty$ we get:

$$\frac{8}{3} \leq \underline{\int_0^2} f \leq \overline{\int_0^2} f \leq \frac{8}{3}$$

Door de insluit stelling volgt dat $\int_0^2 x^2 = \frac{8}{3}$.

Voorbeeld x^2

$$
\begin{aligned}
f :&[-2,3] \to \mathbb{R} \\
f(x) &= 0 \text{ for } x \in \mathbb{Q} \cap [-2,3] \\
f(x) &= 4 \text{ for } x \notin \mathbb{Q} \cap [-2,3] \\
m &= 0 \\
M &= 4 \\
U(P,f) &= \sum 4\Delta x_k = 4 * 5 = 20 \\
L(P,f) &= \sum 4\Delta x_k = 0 * 5 = 0 \\
\overline{\int_{3}^{-2}} f &= 20 \neq \underline{\int_{3}^{-2}} = 0
\end{aligned}
$$

Dus niet Rieman integreerbaar.

Integreerbare functies §6.2

Stelling

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Dan geldt: f is integreerbaar
$\leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists P_\epsilon$ zodanig dat $U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon$.

Stelling

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotoon.
Dan geldt: $f \in \mathbb{R}[a, b]$.

Bewijs monotone functies

Bewijs

f is monotoon dus stijgend.

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(x) \leq & f(b) \to \text{ begrensd} \\ P = & \{x_0, \dots, x_n\} \\ |P| = & \frac{b-a}{n} = \Delta x_k \\ U(P,f) - L(P,f) = & \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}) \frac{b-a}{n} \\ = & \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \\ = & \frac{C}{n} < \epsilon \end{aligned}$$

Voor $C = (b-a)(f(b) - f(a))$.