Ringen en Lichamen - Opdracht 5

Luc Veldhuis - 2538227

November 2017

1. Factoriseer de volgende polynomen in irreducible factoren in de aangegeven ontbindingsringen:
   (a) $4x^7 + 6$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   $\mathbb{Q}$ is een lichaam, dus $\mathbb{Q}[x]$ is een Euclidisch domein en dus ook een ontbindingsring.
   We zien nu dat $2 \in \mathbb{Q}^*$, en we kunnen schrijven: $4x^7 + 6 = 2(2x^7 + 3)$.
   Neem $f(x) = 4x^7 + 6$.
   We weten ook dat $Frac(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, en als $\deg(f(x)) \geq 1$ en de ggd(coëfficienten van $f(x)) = 1$ voor $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, dan geldt dat als $f(x)$ irreducibel is in $\mathbb{Z}[x]$ dan is $f(x)$ ook irreducibel in $\mathbb{Q}[x]$.
   We zien dat $ggd(2, 3) = 1$ en $\deg(2x^7 + 3) = 7 \geq 1$.
   Dus we bekijken of $2x^7 + 3$ irreducibel is in $\mathbb{Z}[x]$.
   Neem nu het priemideaal $(3) \subseteq \mathbb{Z}[x]$. Dit is een priem ideaal, omdat 3 een priemelement is in $\mathbb{Z}$, en dus ook in $\mathbb{Z}[x]$.
   Nu geldt dat $2 \notin (3)$, $3 \in (3)$, maar $3 \notin (3^2) = (9)$.
   Volgens Eisenstein volgt nu dat $2x^7 + 3$ irreducibel is in $\mathbb{Z}[x]$ en dus ook in $\mathbb{Q}[x]$.
   Omdat $2x^7 + 3$ vermenigvuldigd is met de eenheid 2, en en irreducibel element keer een eenheid is nog steeds een irreducibel element is, geldt dat $4x^7 + 6$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreducibel is.

   (b) $4x^7 + 6$ in $\mathbb{Z}[x]$.
   We kunnen dit schrijven als $4x^7 + 6 = 2(2x^7 + 3)$. We zien dat 2 een irreducibel element is, want $\mathbb{Z}$ is een ontbindingsring, dus $\mathbb{Z}[x]$ is een ontbindingsring en 2 is een priemelement in $\mathbb{Z}$ en dus ook in $\mathbb{Z}[x]$, en in een ontbindingsring is elk priemelement een irreducibel element.
   We hebben hierboven laten zien dat $2x^7 + 3$ irreducibel is in $\mathbb{Z}[x]$. Dus de ontbinding van $4x^7 + 6$ in $\mathbb{Z}[x]$ in irreducibele elementen is $4x^7 + 6 = 2(2x^7 + 3)$.

   (c) $x^4 + 3x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   Neem $f(x) = x^4 + 3x + 1$.
   Stel we kunnen $f(x)$ ontbinden in iets van de vorm: $f(x) = g_1(x)g_2(x)$.
   We zien dat $\deg(f(x)) = 4$.
   Dan zijn er de volgende mogelijke ontbindingen in irreducibele factoren:
   $\deg(g_1(x)) = 0$ en $\deg(g_2(x)) = 4$.
   $\deg(g_1(x)) = 1$ en $\deg(g_2(x)) = 3$.
   $\deg(g_1(x)) = 2$ en $\deg(g_2(x)) = 2$.
   $\deg(g_1(x)) = 3$ en $\deg(g_2(x)) = 1$.
   $\deg(g_1(x)) = 4$ en $\deg(g_2(x)) = 0$.
   Omdat deze ring commutatief is, vallen de onderste 2 mogelijkheden samen met de eerste 2.
   Stel $\deg(g_1(x)) = 0$, dan is dit een constante term.
   Als $g_1(x) = 0$, dan is $f(x) = 0$ en dit is een tegenspaak.
   Als $g_1(x) = q$, dan is $q \in \mathbb{Q}^*$, en dan is dit een eenheid, die nooit een irreducibel element kan zijn.

Dus een polynoom van graad 0 valt af.

Stel $\deg(g_1(x)) = 1$, dan is dit hetzelfde als een lineaire factor uitdelen. Als dit kan, betekend dit dat de polynoom $f(x)$ een rationeel nulpunt heeft.
We zien dat als $f(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ dan geldt $ggd(1,3) = 1$ en $\deg(f(x)) = 4 \geq 1$.
Als $f(x)$ reducibel is in $\mathbb{Q}[x]$, dan is deze reducibel in $\mathbb{Z}[x]$.
Dus als de polynoom $f(x)$ een nulpunt heeft in $\mathbb{Q}[x]$, dan heeft hij ook een nulpunt in $\mathbb{Z}[x]$.
Dit nulpunt in $\mathbb{Z}[x]$ is van de vorm $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ met $ggd(r,s) = 1$ en $r|1$ en $s|1$.
Dus in $\mathbb{Z}[x]$ zijn de mogelijke oplossingen ± 1.
Maar dan zou moeten gelden dat $1^4 + 3 + 1 = 5 \neq 0$ of $(-1)^4 - 3 + 1 = -1 \neq 0$.
Dus een lineaire ontbinding bestaat niet in $\mathbb{Z}[x]$ en dus ook niet in $\mathbb{Q}[x]$.

Dan blijft over iets van de vorm $\deg(g_1(x)) = 2$ en $\deg(g_2(x)) = 2$.
Volgens hetzelfde argument als hierboven gebruikt bij lineare factoren, geldt dat als er een ontbinding bestaat in $\mathbb{Q}[x]$, ook een ontbinding vinden in $\mathbb{Z}[x]$. Dan geeft dit dat $g_1(x) = x^2 + ax + b$ en $g_2(x) = x^2 + cx + d$ in $\mathbb{Z}[x]$.
We nemen monische polynomen, omdat $f(x)$ ook monisch is.
Dit geeft $g_1(x)g_2(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd = x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd = x^4 + 3x + 1$.
Dus $a + c = 0$, $ac + b + d = 0$, $ad + bc = 3$, $bd = 1$.
Dit geeft $a = -c$ en $b = -d + c^2$.
Hieruit volgt dat $c(-2d + c^2) = 3$, $d(-d + c^2) = 1$.
In $\mathbb{Z}$ geldt dat $3 = 3 \cdot 1 = -3 \cdot -1 = 1 \cdot 3 = -1 \cdot -3$.
En er geldt $1 = 1 \cdot 1 = -1 \cdot -1$.
Dus nu hebben we als mogelijk waardes voor $d = \pm 1$ en voor $c = \pm 1, \pm 3$.
Invullen in $d(-d + c^2) = 1$ geeft (omdat er staat c^2 bekijken we alleen $c = 1$ of $c = 3$):

- $d = 1, c = 1$: $(-1 + 1^2) = 0 \neq 1$
- $d = -1, c = 1$: $-1(1 + 1) = -2 \neq 1$
- $d = 1, c = 3$: $-1 + 9 = 9 \neq 1$
- $d = -1, c = 3$: $-1(1 + 9) = -1 \neq 1$.

Dus het is niet mogelijk een ontbinding te vinden voor $f(x)$ in polynomen van graad 2 in $\mathbb{Z}[x]$ en dus ook niet in $\mathbb{Q}[x]$.
Omdat we nu alle mogelijke ontbindingen hebben uitgesloten, moet het wel zo zijn dat de polynoom $x^4 + 3x + 1$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[x]$.

(d) $yx^2 + (2y^2 + y + 1)x + 2y^2 + 2y$ in $\mathbb{Q}[x,y] = \mathbb{Q}[y][x]$.
Neem $f(x) = yx^2 + (2y^2 + y + 1)x + 2y^2 + 2y$.
In deze ring is $\deg_x(f(x)) = 2$.
Er zijn nu 2 opties, $f(x)$ bevat een lineaire factor, of $f(x)$ is irreducibel.
We gaan eerst proberen te factorizeren.
Als er een lineaire factor bestaat, dan bestaat er een nulpunt van $f(x)$, en dan geldt dat $\frac{r(y)}{s(y)} \in \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[y])$ met $r(y)|2y^2 + 2y$ en $s(y)|y$.
Ook vinden we de ontbinding $2y^2 + 2y = 2y(y + 1)$.
Factoren met graad 1 zijn irreducibel in $\mathbb{Q}[y]$, dus $y + 1, y \in \mathbb{Q}[y]$ zijn irreducibel.
$2 \in \mathbb{Q}^*$, dus deze kunnen we buiten beschouwing laten.
Omdat we in een ontbindingsring zitten, is dit een unieke factorizatie.
Dit geeft dat $r(y) = q$ of $r(y) = qy$ of $r(y) = q(y+1)$ of $r(y) = qy(y+1)$ met $q \in \mathbb{Q}^*$, want we mogen altijd vermenigvuldigen met een eenheid.
En we zien $s(y) = q$ of $s(y) = qy$ met $q \in \mathbb{Q}^*$.

Dit geeft $t(y) = \frac{r(y)}{s(y)} = q, qy, q(y+1), qy(y+1), \frac{q}{y}, \frac{q(y+1)}{y}$.
We gaan nu kijken of een van deze punten een nulpunt kan zijn.

- $t(y) = q$ geeft $f(q) = yq^2 + (2y^2 + y + 1)q + 2y^2 + 2y = (2q+2)y^2 + y(q + q^2 + 2) + q$. Dit geeft $q = 0$, maar dit kan niet, want $q \in \mathbb{Q}^*$. Dus $t(y) = q$ kan nooit een nulpunt zijn.
- $t(y) = qy$ geeft $f(qy) = y(qy)^2 + (2y^2 + y + 1)qy + 2y^2 + 2y = (q^2 + 2q)y^3 + (q+2)y^2 + (q+2)y$ geeft $q = -2$.
  Dan wordt $f(-2y) = 0$. Dus $t(y) = -2y$ is een nulpunt.
  Omdat we werken in een ontbindingsring, is dit genoeg om nu de unieke ontbinding te vinden. Dus we hoeven de andere mogelijkheden niet meer te controleren. Dus $t(y) = q(y+1)$ kan nooit een nulpunt zijn.

We hebben nu de linaire factor: $(x + 2y)$ gevonden om eruit te delen.
Dit geeft $yx^2 + (2y^2 + y + 1)x + 2y^2 + 2y = (x + 2y)(xy + y + 1)$.
Nu hebben we de polynoom $(xy + y + 1)$, maar deze hiervoor geldt $\deg_x(xy + y + 1) = 1$, dus deze is irreducibel in $\mathbb{Q}[y][x]$.
Ditzelfde geldt voor de polynoom $x + 2y$, want $\deg_x(x + 2y) = 1$.
Dus de ontbinding van $yx^2 + (2y^2 + y + 1)x + 2y^2 + 2y$ in $\mathbb{Q}[x, y]$ in irreducibele factoren is $(x + 2y)(xy + y + 1)$.