Groepentheorie - Opdracht 6

Luc Veldhuis - 2538227

Mei 2017

Q1) Gegeven is dat

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } a = \pm 1, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

een ondergroep is van $GL_2(\mathbb{Q})$, de matrixgroep van inverteerbare 2×2-matrices met rationale coëfficiënten.

(a) Bewijs dat

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } b \in \mathbb{Q} \right\}$$

een normaaldeler is van G en dat $G/N \simeq \{-1, 1\}$. *Aanwijzing: pas de eerste isomorfie-stelling toe op een geschikt homomorfsme.*

We weten, omdat g een 2×2-matrix is en hij inverteerbaar is, dat $g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ met $\det g = a * 1 - b * 0 = a$.
De waardes van a zijn ± 1. Dit geeft $\frac{1}{1} = 1$ en $\frac{1}{-1} = -1$, dus $\frac{1}{a} = a$.
Ook geldt $a^2 = 1$, omdat $1^2 = 1$ en $(-1)^2 = 1$.
Dit geeft $g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
Er geldt dat N een normaaldeler is van G ($N \trianglelefteq G$) als er een homomorfisme $\phi : G \to \{\pm 1\}$ bestaat, zodat $Ker(\phi) = N$. Dan moeten we nog bewijzen dat $G/N \simeq \{-1, 1\}$.
Als we nu een homomorfie $\phi : G \to \{\pm 1\}$ kunnen vinden zodat:

- $Ker(\phi) = N$
- $Im(\phi) = \{\pm 1\}$

Dan volgt uit de eerste isomorfie stelling dat $G/N \simeq \{1, -1\}$.
We moeten wel nog laten zien dat $\{\pm 1\}$ een groep onder vermenigvuldiging is, maar we weten dat $\langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$ een groep is per definitie onder vermenigvuldiging met 1 het evenwichtselement. Dus aan deze voorwaarde is voldaan.
Kies $\phi(g) = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a$ met $g \in G$. Te laten zien: ϕ is een homomorfie.
Kies $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ willekeurig. (Dus $a, c = \pm 1$ en $b, d \in \mathbb{Q}$) Dan geldt ϕ is een homomorfie als $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.
Dit geeft $\phi(xy) = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = ac$
En ook $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = ac$
Dus ϕ is een homomorfisme.
Nu moeten we nog laten zien dat $Ker(\phi) = N$.

De kernel van een homomorfisme, zijn alle elementen die op het evenwichtselement afbeelden. Het evenwichtselement van $\{1,-1\}$ is 1. Dus $Ker(\phi) = \{g \in G | \phi(g) = 1\}$. Omdat $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a$, geldt $\phi(g) = 1$ als $a = 1$.

Hieruit volgt dat $Ker(\phi) = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ met $b \in \mathbb{Q}\}$ en dit is de definitie van N. Dus $Ker(\phi) = N$ en dus is N een normaaldeler. Nu moeten we alleen nog laten zien dat $Im(\phi) = \{1,-1\}$. We hebben net laten zien dat er elementen zijn die afbeelden op 1, namelijk alle elementen in $N \subseteq G$. Ook weten we dat $a = \{1,-1\}$, dus $Im(\phi) \subseteq \{1,-1\}$. Als we nu minimaal 1 element vinden wat afbeeld op -1 weten we dat $\{1,-1\} \subseteq Im(\phi)$ en dus $Im(\phi) = \{1,-1\}$.

Kies een element uit G van de vorm $g = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ met $b \in \mathbb{Q}$. Dan geeft dit $\phi(g) = -1$.

Dus $Im(\phi) = \{1,-1\}$.

Omdat nu aan alle voorwaardes van de eerste isomorfie stelling is voldaan, geldt dat $G/N \simeq \{1,-1\}$.

(b) Is $N = [G,G]$? Bewijs je antwoord.

We weten $[G,G] = \{[x,y] | x \in G, y \in G\}$ met $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Bereken nu de algemene vorm van $[x,y]$.

Kies $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ willekeurig.

We hebben in deel a al laten zien wat de de vorm is van de inverse van een matrix uit G, dus hier schrijven we dit direct op.

Dan geeft dit $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & -ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -cd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -cd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ac & -acd-ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acac & ac(ad+b)-acd-ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & cd-ab+ac(b-d) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Omdat $acac = a^2c^2 = 1$.

We weten $a,c \in \{1,-1\}$ en $b,d \in \mathbb{Q}$. Dus dit geeft $cd - ab + ac(b-d) \in \mathbb{Q}$, omdat $\mathbb{Q}$ gesloten is onder optelling, er er geldt $\forall k \in \mathbb{Q}$, $1k \in \mathbb{Q}$ en $-1k \in \mathbb{Q}$, omdat $-k$ de inverse is van k.

Nu moeten we alleen nog laten zien dat er $\forall k \in \mathbb{Q}$ een $a,c \in \{1,-1\}$ en $b,d \in \mathbb{Q}$ bestaan zodat $k = cd - ab + ac(b-d)$. Kies $b = \frac{-k}{2}$, $d = 0$, $a = 1$, $c = -1$. Dan geeft dit $cd - ab + ac(b-d) = -d - b + -b + d = -2b = -2\frac{-k}{2} = k$.

Hierdoor weten we dat $[G,G] = \left\{\begin{pmatrix} 1 & cd-ab+ac(b-d) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a,c \in \{1,-1\} \text{ en } b,d \in \mathbb{Q}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | k \in \mathbb{Q}\right\} = N$

Dus $[G,G] = N$.