Groepen theorie

Luc Veldhuis

1 Mei 2017

§3.3 Isomorfiestellingen

Stelling

Zij $\phi : G \to H$ een homomorfisme. Dan is
$F : G/Ker(\phi) \to \phi(G) = Im(\phi)$ met $\overline{g} \mapsto \phi(\overline{g})$ een isomorfisme.
Ker(ϕ)$\trianglelefteq G$, dus $G/Ker(\phi)$ is een groep met $\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} = \overline{g_1 g_2}$

Bewijs

$\overline{g} = g \cdot Ker(\phi)$

- F is welgedefinieerd: De elementen in $\overline{g}$ zijn van de vorm $g \cdot k$ met $k \in Ker(\phi)$.
  Dan is $\phi(gk) = \phi(g)\phi(k) = \phi(g)e_H = \phi(g)$, omdat ϕ een homomorfisme is en $k \in Ker(\phi)$
- F is homomorfisme:
  $F(\overline{g_1} \cdot \overline{g_2}) = F(\overline{g_1 g_2}) = \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = F(\overline{g_1})F(\overline{g_2})$

Bewijs (vervolg)

- F is bijectief: Bewijs surjectief en injectief :
  Bewijs surjectief: Het beeld van
  $F = \{F(\overline{g}) | \overline{g} \in G/Ker(\phi)\} = \{\phi(g) | g \in G\} = Im(\phi) = \phi(G)$
  Bewijs injectief: Stel $F(\overline{g_1}) = F(\overline{g_2})$ met $\overline{g_1}, \overline{g_2} \in G/Ker(\phi)$
  $F(\overline{g_1}) = F(\overline{g_2}) \Leftrightarrow^{homomorfisme} F(\overline{g_1} \cdot \overline{g_2}^{-1}) = F(\overline{g_1 g_2^{-1}}) = e_H$
  $\Leftrightarrow \phi(g_1 g_2^{-1}) = e_H \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in Ker(\phi)$
  Nu volgt uit de definitie van een nevenlklasse dat: $\overline{g_1} = \overline{g_2}$ in $G/Ker(\phi)$

Voorbeeld

$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a = \pm 1, b \in \mathbb{Z}\} \leqslant GL_2(\mathbb{Q})$

$\phi : G \to \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ met $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, \overline{b})$. Zodat $\{\pm 1\}$ een groep onder vermenigvuldiging en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ een groep onder optelling. Want: $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$ $(a, \overline{b})(c, \overline{d}) = (ac, \overline{b} + \overline{d})$ in $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en met de operatie tussen elementen hieruit gedefinieerd met multiplicatie op de 1e coordinaat en de optelling op de 2e coordinaat.

Voorbeeld (vervolg)

Het neutraal element van $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is $(1, \overline{0})$

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G | \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (a, \overline{b}) = (1, \overline{0}) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G | b \text{ even } \right\}$$

$Im(\phi) = \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Geven alle 4 de elementen in $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Uit de eerste isometrie stelling volgt nu:

$G/Ker(\phi) \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Voorbeeld

$\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ met $z \mapsto |z|$ is een homomorfisme, want $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$

- $Im(\phi) = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R}^* | x > 0\}$
- $Ker(\phi) = \{z \in \mathbb{C}^* || z| = 1\}$

Uit de eerste isometriestelling volgt nu $\mathbb{C}^*/Ker(\phi) \cong \mathbb{R}_{>0}$

Commutator ondergroep

Definitie

G een groep. Voor $x, y \in G$ heet $[x, y] =^{def} x^{-1}y^{-1}xy$ de **commutator** van x en y want $xy = yx[x, y]$

Definitie

$[G, G] = \{[x, g] | x, g \in G\}$ heet de **commutatorondergroep** van G

Dan is $[G, G] \trianglelefteq G$, want $g[x, y]g^{-1} = g[x, y]g^{-1}e = g[x, y]g^{-1}[x, y]^{-1}[x, y] = [g, [x, y]][x, y] \in [G, G]$ omdat $[g, [x, y]], [x, y] \in [G, G]$

Opmerking

Je gebruikt dat: $g\langle S\rangle g^{-1} = \langle gSg^{-1}\rangle \subseteq \langle S\rangle$ omdat $gSg^{-1} \in \langle S\rangle$ met $S = \{[x, y] | x, y \in G\}$

Commutator ondergroep

Stelling

De quotiëntgroep $G/[G,G]$ is abels.
Zelfs geldt dat: Als $N \trianglelefteq G$, dan G/N abels $\Leftrightarrow [G,G] \leqslant N$
Dus $G/[G,G]$ is de 'grootste abelse quotiënt' van G.

Bewijs

Te bewijzen: Als $N \trianglelefteq G$, dan G/N abels $\Leftrightarrow [G,G] \leqslant N$
Er geldt $[G,G]$ is abels $\Leftrightarrow \overline{y} \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
$\Leftrightarrow \overline{e} = \overline{x}^{-1} \cdot \overline{y}^{-1} \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x^{-1}y^{-1}xy} = \overline{[x,y]} \forall x, y \in G$
$\Leftrightarrow [x,y] \in N \ \forall x, y \in G \Leftrightarrow [G,G] \leqslant N$
Gebruik: $\langle A \rangle \leqslant H \Leftrightarrow A \subseteq H$ $\square$

Commutator ondergroep

Opmerking

- G abels $\Leftrightarrow [G, G] = \{e\}$
- G abels $\Leftrightarrow Z(G) = G$

Voorbeeld

$G = D_{10} = \{e, r, \ldots, r^4, s, sr, \ldots, sr^4\}$
G is niet abels $\Rightarrow [G, G] \neq \{e\}$
$[r, s] = r^{-1}s^{-1}rs = r^{-2} = r^3 \in [G, G]$
Dus $\langle r^3 \rangle \leqslant [G, G]$
$|\langle r^3 \rangle| = |r^3| = 5$ want $|r^m| = \frac{|r|}{ggd(m,|r|)}$
Dus $\langle r^3 \rangle = \langle r \rangle \leqslant [G, G] \leqslant G$, met $|r| = 5$ en $|G| = 10$

Commutator ondergroep

Voorbeeld (vervolg)

Uit Lagrange volgt nu:

$$\left.\begin{array}{l} |[G,G]| \mid G \\ \langle r\rangle \mid |[G,G]| \end{array}\right\} \text{dus } |[G,G]| = 5 \vee |[G,G]| = 10$$

We weten ook $\langle r\rangle \trianglelefteq G$, want $|G : \langle r\rangle| = \frac{|G|}{|\langle r\rangle|} = \frac{10}{5} = 2$ en $G/\langle r\rangle$ is een groep met 2 elementen ($\{\overline{e}, \overline{s}\}$) en die is abels.

Uit de stelling volgt nu $[G,G] \leqslant \langle r\rangle$

Dus $[G,G] = \langle r\rangle$