Analysis 2A

Luc Veldhuis

21 Maart 2016

Richtingsafgeleiden

Functie door een punt

We kunnen al: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (kromme in $\mathbb{R}^m$) differentiëren.
Nu gaan we kijken naar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Neem nu $a \in \mathbb{R}^n$, en $v \in \mathbb{R}^n$ een 'richting' (vector $\neq 0$)
Dan krijgen we een lijn $l_v(t) = vt + a$
$F \circ l_v$ is een kromme in $\mathbb{R}^m$ die op $Im(F)$ ligt en door $F(a)$ gaat.
$\mathbb{R} \to^{l_v} \mathbb{R}^n \to^F \mathbb{R}^m$
$t \mapsto l_v(t) \mapsto F(l_v(t))$
Noem $F(l_v(t)) = \gamma_v$
$Im(F) = \{y \in \mathbb{R}^m | \exists x \in \mathbb{R}^n, F(x) = y\}$

Definition

De **richtingsafgeleide** van F in a in de richting van v is de snelheid van F in $t = 0$
$D_v F(a) = \gamma_v'(0)$

Richtingsafgeleiden

Afgeleide

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Gevolg

$\gamma_v(0) = F(l_v(0)) = F(a)$
$DvF(a) = \gamma_v'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma_v(h)-\gamma_v(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+hv)-F(a)}{h}$
$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ met 1 op de i-de plek
$D_{e_i}F(a) = D_iF(a)$ heet de i-de partiële afgeleide van F in a met $1 \leq i \leq n$.
Als $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ coordinaten zijn op $\mathbb{R}^n$ dan is de notatie:
$D_{e_i}D_iF(a) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$

Richtingsafgeleiden

Voorbeeld

Voor $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ zijn de partiële afgeleiden van $F(a)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(a) \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(a)$$

Hoe berekenen we de afgeleide?

$$D_{e_i}F(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+he_i)-F(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(a_1,a_2,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n)-F(a_1,\ldots,a_n)}{h}$$

Alleen x_i wordt als variabele behandeld, alle andere variabelen behandelen we als parameters (constant!)

Richtingsafgeleiden

Voorbeeld

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$F(x_1, x_2) = (x_1 x_2, e^{x_1} \sin(x_2))$
$D_1 F(x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = (x_2, e^{x_1} \sin(x_2))$
$D_1 F(x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (x_1, e^{x_1} \cos(x_2))$

Richtingsafgeleide van andere vector

Neem $c \in \mathbb{R}$ en $v \in \mathbb{R}^n$ met $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dan geldt:
$D_{cv} F(a) = c D_v F(a)$
Ook zouden we graag willen dat:
$\{D_v F(a)\}_{v \in \mathbb{R}^n} := \mathcal{L}_a$ een n-lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^m$ wordt. We zoeken een raakruimte in $F(a)$ aan het $Im(F)$.
$F(a) + \mathcal{L}_a$ is de kandidaat voor de raakruimte vaan $Im(F)$ in $F(a)$ (analoog voor de raaklijn aan een kromme)

Richtingsafgeleiden

Functie voor richtingsafgeleide van een vector in een punt

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$v \mapsto DvF(a)$

Vraag

Stel voor dat F in $a \in \mathbb{R}^n$ richtingsafgeleiden heeft voor alle $v \in \mathbb{R}^n$, noemen we dan F differentieerbaar in a?
Nee! Hij moet ook continue zijn.

Richtingsafgeleiden

Voorbeeld

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Deze functie is niet continue in $(0,0)$ en toch heeft f alle richtingsafgeleiden in $(0,0)$.

We berekenen de richtingsafgeleiden in $(0,0)$.

$v \neq (0,0) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2a^2b}{h^2a^4+b^2} = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ \frac{2a^2}{b} & b \neq 0 \end{cases}$$

Differentiaal

Definitie Differentiaal ('lineaire benadering')

Neem $F \subseteq D\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $a \in D$ inwendig punt van D ($\exists r > 0$ zodandig dat $B_r(a) \subseteq D$)
F is differentieerbaar in $a \Leftrightarrow$ er bestaat een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ met $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{F(a+h)-F(a)-L(h)}{||h||} = 0$
$L = dF_a$ heet het differentiaal van F in a.
$\mathcal{L}in(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \xleftrightarrow{1-1} Mat(m \times m, \mathbb{R})$
$dF_a \leftrightarrow F'(a)$ (afgeleide van F in a)
$dF_a(h) = F'(a)h \; \forall h \in \mathbb{R}^n$

Differentiaal

Voorbeeld

- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ constant. $F(x) = b \; \forall x \in \mathbb{R}^n$. Dan is F overal differentieerbaar en $dF_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is de triviale oplossing. $dF_x(h) = (0, \dots, 0) \; \forall h \in \mathbb{R}^n$
- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaire afbeelding. Dan is F overal differentieerbaar met $dF_x = F$ en $dF_x(h) = F(h) \; \forall h \in \mathbb{R}^n$

Stelling 2.1

Relatie tussen richtingsafgeleide en differentiaal:
Als F differentieerbaar is in a, dan heeft F alle richtingsafgeleiden. ($D_vF(a)$ bestaat voor alle $v \in \mathbb{R}^n$ en $D_vF(a) = dF_a(v)$)

Opmerkingen

- Differentieerbaarheid impliceert continuïteit
- $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & (x, y) = (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ heeft alle richtingsafgeleiden in $(0, 0)$ maar is niet differentieerbaar.