Analysis 2A

Luc Veldhuis

1 Maart 2016

Lineare en metrische stuctuur op $\mathbb{R}^n$

Analyse I

- $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - Continuïteit
  - Differentieerbaarheid
  - Integralen

Analyse II

- $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  Van deze afbeeldingen:
  - Continuïteit
  - Differentieerbaarheid
  - Integralen

Lineare en metrische stuctuur op $\mathbb{R}^n$

Twee definities van $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ als verzameling

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$ voor $i = 1 \ldots n$

$\mathbb{R}^n$ als vectorruimte over $\mathbb{R}$

$(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$
$\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n)$
$e_i = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$ waarbij 1 op de i-de plaats staat.
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ is een basis voor $\mathbb{R}^n$
$(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$

Lineare en metrische stuctuur op $\mathbb{R}^n$

Voorbeeld

Lineare deelruimtes in $\mathbb{R}^3$ beschouwen we de verzameling van oplossingen van:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \end{cases}$$

Lineair onafhankelijk

De vectoren $(3, -2, 1)$ en $(1, 1, -1)$ zijn lineair onafhankelijk.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ zijn lineair onafhankelijk dan en slechts dan als uit $av + bw = 0$ met $a, b \in \mathbb{R}^n$ volgt dat $a = b = 0$

Voorbeeld

Vind oplossing voor:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \end{cases}$$

Kies $z = 1$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 & = 0 \\ x + y - 1 & = 0 \end{cases}$$

Dit geeft $x = \frac{1}{5}$ en $y = \frac{4}{5}$

Lineare en metrische stuctuur op $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ als metrische ruimte

De metrische structuur is nodig om de lengte en hoeken te meten.
Inproduct op $\mathbb{R}^n$: $\bullet\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$(v, w) \mapsto v \bullet w$
Eigenschappen voor $v, w \in \mathbb{R}^n$ en $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$:

- $v \bullet w = w \bullet v$ (symmetrisch)
- $v \bullet v > 0$ voor alle $v \neq 0$ (positief definiet)
- $(a_1 v_1 + a_2 v_2) \bullet w = a_1 v_1 \bullet w_1 + a_2 v_2 \bullet w_2$

Euclidisch inproduct

$$(v_1, \ldots, v_n) \bullet (w_1, \ldots, w_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Inproduct nu norm: $||v|| = \sqrt{v \bullet v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i w_i}$

Lineare en metrische stuctuur op $\mathbb{R}^n$

Cauchy-Schwartz ongelijkheid

$|v \bullet w| \leq ||v|| \; ||w||$
Met $|v \bullet w|$ in $\mathbb{R}^n$ en $||v|| \; ||w||$ vermeningvuldiging in $\mathbb{R}$
$|v \bullet w| = ||v|| \; ||w|| \cos(\theta)$
Hierin is θ:

$$\theta := \frac{v \bullet w}{||v|| \; ||w||}$$

Orthonormale basis

$\{e_1, \dots, e_n\}$ is een orthonormale basis. Dat wil zeggen, $e_i \bullet e_j = \delta_{ij}$

$$v \bullet w = (\sum_{i=1}^{n} v_i e_i) \bullet (\sum_{j=1}^{n} w_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$