

Analysis 2A

Luc Veldhuis

14 Februari 2016

Uniforme convergentie

We gaan kijken naar de eigenschappen van:

- Continuïteit
- Integreerbaarheid
- Differentieerbaarheid

voor uniform convergente functie-rijen. Belangrijk voor termsgewijs differentiëren en integreren van macht reeksen.

Sneak preview

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R} \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rij van partiële sommen

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ In het bijzonder geïnteresseerd in functie-rijen

waarbij: f_n de vorm $f_n(x) = a_n(x-a)^n$, in andere woorden in functie reeksen van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$, de macht reeks.

Uniforme convergentie

Funtie reeksen

We kunnen van functie-rijen ook functie reeksen maken.

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

$\{F_n\}$ nieuwe functie-rij. We gaan e convergentie van deze functie-rij onderzoeken.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

'Som van functie reeks'

Stelling

Als $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een functie-rij is met $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue op D
 $\forall n \in \mathbb{N}$ en de rij convergeert uniform op D naar een functie
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dan is de limiet ook continue op D .

Uniforme limiet van continue functies is continue.

Uniforme convergentie

Idee van het bewijs

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Hiervoor hebben we de eigenschap van **uniforme convergentie** en **continuïteit van $f_n \forall n \in \mathbb{N}$** nodig.

Continuïteit

- Bij puntsgewijze convergentie kan continuïteit verloren gaan.
- Bij uniforme convergentie niet.

Bewijs

Aannames:

- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert uniform naar f op D
- f_n is continue op D voor alle $n \in \mathbb{N}$

Te bewijzen: f is continue op D , dat wil zeggen,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ voor alle $x_0 \in D$.

We moeten bewijzen $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ zodat als $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$, dan $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Zij $\epsilon > 0$. Dankzij de uniforme convergentie (1) vinden we n^* zodat $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ voor alle $n \geq n^*$ en alle $x \in D$. (*)

We beschouwen nu f_{n^*} . Uit de continuïteit (2) volgt dat f_{n^*} continue is in alle punten van D en uit de definitie van continuïteit in x_0 volgt $\exists \delta > 0$ zodat als $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$ dan is $|f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ (**)

Uniforme convergentie

Bewijs (vervolg)

Uit (*) en (**) volgt nu:

Voor alle $x_0 \in D$ als $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n^*(x) - f_n^*(x) - f_n^*(x_0) - f_n^*(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n^*(x)| + |f_n^*(x) - f_n^*(x_0)| + |f_n^*(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

Opmerking

$\{f_n\}$ rij van continue functies die puntsgewijs convergeert naar een continue limiet bewijst **geen** uniforme convergentie. Ook niet als $D = \mathbb{R}$.

Voorbeeld

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \text{ (continue)}$$

Maar er is geen sprake van uniforme convergentie.

Uniforme convergentie

Bewijs

Kies $\epsilon = \frac{1}{2}$, dan voor alle $n \in \mathbb{N}$ vinden we $x \in \mathbb{R}$ $x = \sqrt{n}$,
waarvoor geldt:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^2}{n}\right| = 1 > \frac{1}{2}$$

Integreerbaarheid

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, f_n continue op $[a, b]$

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert uniform op $[a, b]$ naar f

Dan is f integreerbaar en bovendien geldt

$$\int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Voorbeeld

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n + \cos(x)}{ne^x + \sin(x)}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos(x)}{ne^x + \sin(x)} = e^{-x}$ voor alle $x \in [0, 1]$ en de convergentie is uniform.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n + \cos(x)}{ne^x + \sin(x)} - \frac{1}{e^x} \right| = \frac{\cos(x) - e^{-x} \sin(x)}{ne^x + \sin(x)} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n + \cos(x)}{ne^x + \sin(x)} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}$$

Uniforme convergentie

Samenvatting

$\{f_n\}_n$ een functie-rij

- $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue op $D \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{f_n\}$ convergeert uniform naar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Dan is f continue op D . Als $D = [a, b]$ is f bovendien integreerbaar met $\int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx$

Differentieerbaarheid

Vraag: wordt differentieerbaarheid behouden onder uniforme convergentie? Nee!

Zelfs als f_n differentieerbaar is voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\{f_n\}$ convergeert uniform naar een differentieerbare functie kunnen we nog steeds niet altijd limiet en afgeleide wisselen. Hiervoor zijn uniforme convergentie en continuïteit van de afgeleiden nodig en dus continue differentieerbaarheid van de functie-rij.

Uniforme convergentie

Definitie

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heet continue differentieerbaar op D als

- f differentieerbaar is op D
- f' is continue op D

Voorbeeld

$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{nx^2+1}$ convergeert uniform naar $f(x) = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ dus is continue differentieerbaar. We hebben hier een rij differentieerbare functies die uniform convergeert (op \mathbb{R}) naar een differentieerbare functie.

$$f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{1+nx^2}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) = 1$ voor $x = 0$, 0 voor $x \neq 0$. Omdat g niet continue is, weten we dat $\{f'_n\}$ **niet** uniform convergeert.

Bovendien, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) \neq f'(x)$. Dus we hebben meer voorwaarden nodig voor differentieerbaarheid!

Stelling 8.3.5

$\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ rij continue differentieerbare functies. $\forall n \in \mathbb{N}$ voor $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ geldt

- f_n differentieerbaar en continue (is nodig)
- f'_n is continue

Zij $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$. Neem aan dat $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uniform convergeert naar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is f continue differentieerbaar op D met $f' = g$. (Continue door de aannames)

Bewijs

Omdat f'_n continue is op $[a, b]$, is f'_n ook integreerbaar $\forall n \in \mathbb{N}$. Uit de Hoofdstelling van de Integraal Calculus volgt:

$$\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a) \text{ voor alle } x \in [a, b]$$

Neem aan beide zijden $\lim_{n \rightarrow \infty}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

Wegens uniforme convergentie en continuïteit van afgeleides kunnen we limiet binnen afgeleide schrijven:

$$\int_a^x g(x) dx = f(x) - f(a)$$

Differentieer naar x geeft (mag wegens continuïteit):

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(x) dx = \frac{d}{dx} (f(x) - f(a))$$

$$g(x) = f'(x)$$

Dus f continue differentieerbaar.

Uniforme convergentie