Analysis 2B

Luc Veldhuis

18 mei 2017

Integratie

Herhaling

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ meetbaar.
$\int_A 1 = \int \phi_A = V(A)$
Voorbeeld met $n = 2$.
$\int_A f =$ volume tussen A en graf$(f) = \int \int_A f(x,y)ddy$
Kan ook als: $\int \int \int_V 1\ dxdydz = \int \int_A (\int_0^{f(x,y)} dz)dxdy$
Met $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$
Er is niet 1 oplossing, kunt ook ander coordinaat stelsel proberen.

Coordinaat stelsels

Voor gebieden in $\mathbb{R}^3$:

- Cartesische (x, y, z)
- Bolcoordinaten (ρ, ϕ, θ)
- Cylinder coordinaten (r, θ, z)

Cartesische vs bolcoordinaten

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$$

$T : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ geeft afbeelding op
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

Integatie

Cartesische vs cylindercoordinaten

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Voorbeeld

$C =$ gebied boven de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$V(C) = ?$

Snijkromme van de bol en kegel:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(x^2 + y^2) = 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Dit is een cirkel met straal $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en middelpunt op hoogte $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Integatie

Voorbeeld (vervolg)

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$
In cylinder coordinaten geeft dit voor de kegel: $z = r$ en de bolschil: $r^2 + z^2 = 1$
$V(C) = \int\int_A (\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy =$
$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}} (\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$
Maar ook $A = T(B)$ met $B = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
$f \circ T(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sqrt{1 - r^2} - r$ geeft:
$V(C) = \int_0^{2\pi} \int^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1 - r^2} -) r \ dr d\theta$ **(1)**
Nu in bolcoordinaten:
$Q = \{(\rho, \phi, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ met
$det \ T' = \rho^2 \sin(\phi)$

Integatie

Voorbeeld (vervolg)

$V(C) = \int_C 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \; 1 \cdot \rho^2 \sin(\phi) \; d\rho \; d\phi \; d\theta =$
$2\pi \int^{\frac{2\pi}{4}} (\int_0^1 \rho^2 \sin(\phi) d\rho) d\phi$ **(2)**
Controleer dat **(1)**=**(2)**

Introductie lijnintegralen

$A \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : A \to \mathbb{R}$
$\int_A f =$ totale massa van A, f de massadichtheid ('mass density')
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een continue lijn.
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gedefinieerd is in $\gamma(r)\ \forall t \in [a, b]$
f is de lineaire massadichtheid.

Integatie

Lijnintegralen

$\int_C f = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$
met $C = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists t \in [a, b] \text{ met } x = \gamma(t)\} = Im(\gamma)$
Als $f(x) = 1$, dan is $\int_C f =$ lengte C.

Voorbeeld

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$
$C = Im(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1$
$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

Integatie

Uitleg

Waarom $\int (f \circ \gamma) \cdot \|\gamma'\| dt$?
Idee: benadering door 'stuksgewijs lineaire krommen'
$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ partitie van $[a, b]$
Γ stuksgewijs lineair $=$ Γ bestaat uit segmenten van $\gamma(x_{i-1})$ tot $\gamma(x_i)$.
Er geldt: $\delta = \max(x_i, x_{i-1})$, als $\delta \to 0$, dan $\Gamma \to C$
Als δ klein genoeg is, kunnen we aannemen dat:

- De lengte van de boog (bijna) gelijk is aan de lengte van het segment
- f (bijna) constant is tussen $\gamma(x_{i-1})$ en $\gamma(x_i)$

Integatie

Uitleg (vervolg)

Nu volgt:

$\int_C f \approx \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(x_{i-1}))\|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| \approx$

$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(x_{i-1}))\|\gamma(x_{i-1})\|(x_i - x_{i-1}) = R((f \circ \gamma), \|\gamma'\|, P)$ met

$\delta \to 0$ volgt $\int_a^b (f \circ \gamma)\|\gamma'\| dt$

Uit de definitie van een kromme: $\delta \to 0 \Rightarrow x_i \to x_{i-1}$, dus

$\|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| \approx \|\gamma(x_{i-1})\|(x_i - x_{i-1})$

Integatie

Parametrisatie

$C = Im(\beta)$ met $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ en $\beta(s) = (\cos(2s), \sin(2s))$
β is ook injectief in het inwendig van het domein en $Im(\beta) = C$.
$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ met $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$
β, γ allebei parametrisaties van C.
$C = Im(\gamma)$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ met $\phi[c, d] \to [a, b]$, $\phi'(t) > 0$
$\beta(s) = \gamma(\phi(s))$ is ook een parametrisatie.
Dan geldt $\int_c^d f(\beta(s))\|\beta'(s)\|ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$