Linear Algebrea - Opdracht 5

Luc Veldhuis

Maart 2017

1. Zij $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Bepaal een matrix B en C, zodat $B^2 = A$ en $C^3 = A$.

We zien direct dat $A = A^*$, want $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{-1} \\ \overline{-1} & \overline{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$. Dan weten we nu uit de spectraal stelling dat er een unitaire matrix U bestaat zodat $U^{-1}AU = D$ met D een diagonaal matrix. Om de unitaire matrix U te construeren gebruiken we dat we uit de eigenvectoren van A een orthogonale basis kunnen maken.
We zoeken eerst de eigenwaardes met behulp van de karakteristieke vergelijking:
det $(A - \lambda I_2) = 0$. Dit geeft $(3 - \lambda)^2 - (-1)(-1) = 0$
$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$
$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$
Dit geeft eigenwaardes: $\lambda_1 = 4$ en $\lambda_2 = 2$
We berekenen de eigenvector voor λ_1:
$(A - 4I_2)v_1 = \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0$
Dit geeft $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
We berekenen de eigenvector voor λ_2:
$(A - 2I_2)v_2 = \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0$
Dit geeft $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
We zien ook dat $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 = 0$ dus $v_1 \perp v_2$.
Dit betekend dat $\{v_1, v_2\}$ een orthogonale basis is, maar we willen een orthonormale basis. Dus we berekenen: $b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$ en $b_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2$
Dit geeft $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Nu kunnen we U construeren:
$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
We kunnen A nu uitdrukken in U en de diagonaal matrix. De diagonaal matrix heeft de eigenwaardes van A op de diagonaal.
$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$A = UDU^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
We proberen nu een B kunnen vinden, zodat $B^2 = A$. Hiervoor nemen we $B = U\sqrt{D}U^{-1}$, waarbij $\sqrt{D}$ een matrix met de wortel van de waardes op dezelfde plek uit D. Omdat D een diagonaal matrix is, en $\sqrt{D}$ dus ook, geldt $\sqrt{D}\sqrt{D} = D$. We weten nu $B^2 = U\sqrt{D}U^{-1}U\sqrt{D}U^{-1} =$

$U\sqrt{D}I\sqrt{D}U^{-1} = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^{-1} = UDU^{-1} = A$
Dit geeft: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Op dezelfde manier construeren we $C = U\sqrt[3]{D}U^{-1}$. Want $C^3 = U\sqrt[3]{D}U^{-1}U\sqrt[3]{D}U^{-1}U\sqrt[3]{D}U^{-1} = U\sqrt[3]{D}I\sqrt[3]{D}I\sqrt[3]{D}U^{-1} = U\sqrt[3]{D}\sqrt[3]{D}\sqrt[3]{D}U^{-1} = UDU^{-1} = A$. Dit geeft $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Zij V een unitaire vectorruimte en $T : V \to V$ een zelfgeadjungeerde lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:
   (a) alle eigenwaarden van T zijn reëel en positief.
   (b) $\langle Tv, v\rangle$ is reëel en positief voor iedere $v \neq 0$ in V.

   We bewijzen eerst dat $\langle Tv, v\rangle$ reëel is voor iedere $v \neq 0 \in V$.
   Er is gegeven dat T zelfgeadjungeerd is, dus $T = T^*$. Dan geldt $\langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \overline{\langle Tv, v\rangle}$. Dit kan alleen als $\langle Tv, v\rangle$ reëel is.
   Bewijs dat alle eigenwaarden van T reëel zijn.
   Neem $v \neq 0 \in V$ een eigenvector en laat $Tv = \lambda v$. Dan geldt $\langle Tv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$. Omdat $v \neq 0$ geldt $0 \neq \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$. $\langle Tv, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$ is reëel, dus $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Nu het bewijs voor $b \Rightarrow a$:
   We hebben nu dat $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ en $\langle Tv, v\rangle > 0$ $\forall v \in V$ met $v \neq 0$. Dus dan geldt dit ook voor een v waarvoor geldt dat $Tv = \lambda v$. Dan hebben we $\langle Tv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle > 0$. Uit de definitie van een inwendig product (dictaat bladzijde 10) halen we dat moet gelden $\langle v, v\rangle > 0$ als $v \neq 0$. Dus $\lambda\langle v, v\rangle > 0 \in \mathbb{R}$ is alleen waar als ook $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$.
   Alle eigenwaarden van T zijn nu reëel en positief.

   Bewijs voor $a \Rightarrow b$
   Neem aan dat alle eigenwaarden van T positief zijn voor iedere $v \neq 0$. Omdat T zelfgeadjungeerd is, volgt uit de spectraal stelling dat er een orthogonale basis B bestaat uit de eigenvectoren van T. Dit betekent dat $v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b_i, v\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i$, met $b_i \in B$. Omdat elke b_i nu een eigenvector is, en T een lineaire afbeelding, geldt dat $Tv = T\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b_i, v\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b_i, v\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} Tb_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b_i, v\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \lambda_i b_i$ met λ_i de bijbehorende eigenwaarde voor b_i.
   Dus $\langle Tv, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \lambda_i b_i, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \lambda_i v, b_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \langle b_i, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \overline{\langle v, bi\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\langle v, b_i\rangle|^2 \frac{1}{\langle b_i, b_i\rangle}$. We weten weer uit de definitie van inwendig product dat $\langle b_i, b_i\rangle > 0$. Ook weten we dat $|\langle v, b_i\rangle|^2 > 0$ en we hebben aangenomen dat $\lambda_i > 0$ $\forall i \in I$. Dus $\lambda_i |\langle v, b_i\rangle|^2 \frac{1}{\langle b_i, b_i\rangle} > 0$ $\forall i \in I$. En dus ook $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\langle v, b_i\rangle|^2 \frac{1}{\langle b_i, b_i\rangle} = \langle Tv, v\rangle > 0$