Complexe Analyse

Luc Veldhuis

6 Februari 2017

Complexe getallen

Definitie van $\mathbb{C}$

Het lichaam $\mathbb{C}$ van de complexe getallen is gedefinieerd als de verzameling $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ van 2 tuples (x, y), met additie en multiplicatie als volgt:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Stelling

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ is een lichaam

Bewijs

We zien dat
$(x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3) = (x_1 x_3 - y_1 y_3 + x_2 x_3 - y_2 y_3, x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_2 y_3 + y_2 x_3) = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3)$

Complexe getallen

Stelling/Definitie

- $i := (0,1)$ is een oplossing van $z^2 + 1 = 0$
- Met $1 := (1,0)$ kan elk complex getal geschreven worden als $z = (x,y) = x + yi$
- $Re(z) = x$ reëele deel van z, $Im(z) = y$ imaginaire deel van z

Blijkbaar geldt $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ en
$Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$.
Omdat $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ kunnen we ook **poolcoördinaten** gebruiken.
$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
$|z| = r$ is de **modulus** van z
$Arg(z) = \theta \in (-\pi, \pi]$ is het **argument** van z

Complexe getallen

Stelling/Definitie

- Er geldt $|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = (Re(z) + i\ Im(z))(Re(z) - i\ Im(z)) = z\bar{z}$
  $\bar{z}$ is de geconjungeerde van z
- $|\bar{z}| = |z|$, $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, driehoeksongelijkheid

Stelling

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $Arg(z_1 + z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) \mod 2\pi$ als $z_1, z_2 \neq 0$

Complexe getallen

Bewijs

Neem $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$, $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$
$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$
$= r_1 r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)))$
$= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

Opmerking

- Het is een meetkundig resultaat
- Als we definieren $\exp(i\theta) := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, dan geldt $\exp(i\theta_1)\exp(i\theta_2) = \exp(i(\theta_1 + \theta_2))$
  Inderdaad geldt dat $\exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$

Stelling

De vergelijking $z^n = 1$ heeft n oplossingen: $z_k = \exp(\frac{2\pi ik}{n})$

Analytische functies

Motivatie

Complexe analyse draait om het bestuderen van de functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die op een 'complexe' manier afleidbaar zijn.
Omdat $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ is elke afbeelding $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door 2 reëelwaardige functies u, v.
$f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy) = Re(f) + i\ Im(f)$

Voorbeeld

- $f(z) = z^2$
  $f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$
  Dus $u(x+iy) = x^2 - y^2$ en $v(x+iy) = 2xy$
- $f(z) = z + \bar{z}$
  $f(x+iy) = (x+iy) + (x-iy) = 2x,\ u = 2Re(z),\ v = 0.$

Analytische functies

Stelling

Omdat $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ een welbekende topologie heeft, weten we al wat limieten zijn:
$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \{z_n \to_{n\to\infty} z_0 \Leftarrow f(z_n) \to_{n\to\infty} w_0\}$
$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n \geq N$: $|z_n - z_0| < \epsilon$
Maakt gebruik van complexe modulus.

Stelling

Als $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$ en $z_0 = z_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$ dan geldt:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \to z_0} u(z) = u_0 \\ \lim_{z \to z_0} v(z) = v_0 \end{cases}$$

Analytische functies

Definition

Een rij $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van complexe getallen convergeert tegen ∞, $z_n \to_{n\to\infty} \infty$ als $\forall R > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n \geq N$: $|z_n| > R$

Opmerking

- We kunnen oneindig zien als in een stereografische projectie
- $z_n \to_{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \to_{n\to\infty} 0$

Stelling

Het geldt dat:

- $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = 0$