Analysis 2A

Luc Veldhuis

7 Februari 2016

Functie-rijen

Kosmala §8.1 8.2

Herhaling convergentie

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rij reeële getallen
$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ dan en slechts dan $\forall\epsilon > 0 \exists n^* \in N$ zodat
$|a_N - L| < \epsilon$ voor alle $n \geq n^*$

Functie rij

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$D \subseteq \mathbb{R},\ f_n : D \to \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$
Fix $x_0 \in D : \{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij reeele getallen

Functie-rijen

Definitie

Een functie-rij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ convergeert puntsgewijs naar een functie $f : D \to \mathbb{R}$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ voor alle $x_0 \in D$

Gevolg

Als we de definitie van convergentie voor $\mathbb{R}$-rijen toepassen: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert puntsgewijs naar de functie f dan en slechts dan als $\forall x_0 \in D$ en $\forall \epsilon > 0$ bestaat er $n^* \in \mathbb{N}$ zodat $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \ \forall n \geq n^*$.

Opmerking

f heet de puntgewijze limiet van $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ op D.

Functie-rijen

Voorbeeld

$D = [0, 1]$
$f_n(x) = x^n$
We beschouwen de rij van getallen $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$
$x_0 = 1$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = 1$
$0 \leq x_0 < 1$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = 0$
Volgens de definitie hebben we hiermee bewezen dat de functie-rij $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ op het interval $[0, 1]$ puntsgewijs convergeert naar de functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$f(x) := 0$ voor $0 \leq x < 1$
$f(x) := 1$ voor $x = 1$

Functie-rijen

Boodschap van vandaag

Puntsgewijze limieten zijn niet echt goed. Eigenschappen van de functies in de rij worden niet altijd behouden. Bijvoorbeeld continuïteit in vorige voorbeeld.

Voorbeeld

$D = [0, 1]$
$f_n : D \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$ $\forall n \in N$
$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{x}{2} \dots\}$.
$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$
Puntsgewijze limiet: $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

Functie-rijen

Bewijs

We moeten bewijzen dat: $\forall x \in [0,1]$ en $\forall \epsilon > 0$ bestaat er een $n^* \in \mathbb{N}$ zodat $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ voor alle $n \geq n^*$
$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x}{n} - 0| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$ als $n \geq n^* = \frac{1}{\epsilon}$

Opmerking

Bij het vorige voorbeeld geldt:
Alle f_n en de puntsgewijze limiet f zijn continue, differentieerbaar, integreerbaar, begrensd op het gebied $[0,1]$. Bovendien geldt:
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 = \int_0^1 f(x)dx$
Let op: $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

Functie-rijen

Voorbeeld

$D = (0, 1)$
$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : D \to \mathbb{R},\ f_n(x) = nx^n$
De puntsgewijze limiet van $\{f_n\}$ op $(0, 1)$ is de functie $f(x) = 0$ voor alle $x \in (0, 1)$.
$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1}$
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
Maar $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0 \neq 1$

Gevolg

We hebben voorwaardes nodig om limiet en integraal om te kunnen wisselen.

Functie-rijen

Verschil voorbeelden

Vraag: wat is het verschil tussen $f_n = \frac{x}{n}$ en de andere voorbeelden?
Antwoord: Bij voorbeeld 2 is er sprake van **uniforme convergentie**.

Recap

Herinner: bij de functie-rij $f_n = \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$ hadden we $n^*(\epsilon)$ onafhankelijk van x.

Definitie uniforme convergentie

Een functie-rij $\{f_n\}_{n\to\infty}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, convergeert uniform naar $f : D \to \mathbb{R}$ dan en slechts dan als $\forall \epsilon > 0$, $\exists n^* \in \mathbb{N}$ zodat $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ voor alle $n \geq n^*$ en voor alle $x \in D$.

Functie-rijen

Niet uniform convergent

Te bewijzen bij niet uniform convergent:
$\exists \epsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ bestaat er een $x_n \in D$ zodat $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$

Voorbeeld

De functie-rij $f_n(x) = x^n$ is niet uniform convergent op $[0, 1]$

Bewijs

Neem $\epsilon = \frac{1}{4}$ voor $n \in \mathbb{N}$, zij $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

Dan geldt: $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |(\sqrt[n]{\frac{1}{2}})^n| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

Functie-rijen

Recap

$D \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$

- De functie-rij $\{f_n\}$ convergeert puntsgewijs naar $f : D \to \mathbb{R}$ als $\lim f_n(x) = f(x)$ voor alle $x \in D$.
- De functie-rij $\{f_n\}$ convergeert uniform naar $f : D \to \mathbb{R}$ als er voor elke $\epsilon > 0$ een $n^* \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ voor alle $n \geq n^*$ en voor alle $x \in D$
  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
  $-\epsilon < f_n(x) - f(x) < \epsilon$
  $f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$
  Voor $n \geq n^*$ ligt de grafiek van f_n in een ϵ strip rondom de grafiek van f.

Funtie-rijen

Hoe onderzoek ik de convergentie van een functierij?

Gegeven is: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ $f_n : D \to \mathbb{R}$
Eerste vraag:
Convergeert $\{f_n\}$ puntsgewijs op het gebied D?
Nee, bijvoorbeeld $f_n(x) = \cos(nx)$ op $[0, \pi]$
$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$ bestaat niet!

Voorbeeld

Kan wel:
$f_n(x) = \frac{1}{nx^2+1}$
Bewering: $\{f_n\}$ convergeert puntsgewijs naar
$f(x) = 1$ voor $x = 0$
$f(x) = 0$ voor $x \neq 0$

Functie-rijen

Bewijs

We moeten bewijzen: voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
We onderzoeken 2 gevallen:

1. $x = 0$, $f_n(x) = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$
2. $x \neq 0$. Kies $\epsilon > 0$, $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{nx^2+1}| < \epsilon$.
   Kies $n* = \frac{1}{\epsilon x^2}$. Dan geldt voor alle $n \geq n^*$: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Voorbeeld

Neem $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$
Deze functie-rij convergeert puntsgewijs naar $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Bewijs

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$
$0 \leq \frac{\sin(nx)}{n} \leq \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$. Squeeze theorom, hij gaat naar 0.

Vraag 2

Neem $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ en beschouw $\{f_n(x)\}_{n\to\infty}$ met puntsgewijze limiet f op D. Is de convergentie uniform?
Ja, neem $\epsilon = \frac{1}{n}$, dan hangt n niet van x af.

Opmerking

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ uniform convergent
$f_n'(x) = \cos(nx)$ niet eens puntsgewijs convergent!

Functie-rijen

Uniforme convergentie van $\frac{1}{nx^2+1}$

We onderzoeken nu de uniforme convergentie van $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$,
$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f_n(x) = \frac{1}{nx^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
We hebben gezien dat $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ puntsgewijs convergeert naar de functie:
$f(x) = 1$ voor $x = 0$
$f(x) = 0$ voor $x \neq 0$
Convergeert deze functie-rij uniform naar f? Nee! In dit geval is er geen sprake van uniforme convergentie, want er kan geen ϵ gevonden worden.

Stelling

Als $f_n(x)$ continue is, maar $f(x)$ niet continue, dan is de convergentie niet uniform.

Functie-rijen

Bewijs uniforme convergentie en maximum

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$
$f_n'(x) = \frac{(1+nx^2)-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$
$f_n'(x) = 0$, twee extrema, $x = \pm\frac{1}{n}$
$|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})| = |f_n(-\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
De functie-rij convergeert naar $f(x) = 0$ en de convergentie is uniform.
$\forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$