第一章 行列式（4）

determinant

三元一次方程组：我们已知的结论

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

§5 Cramer法则

当系数组成的三阶行列式不为零方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

二个变量，三个变量的线性方程组可以用这种方式解，那么n个变元可不可以？

重要内容：解 n 个变元的方程组

Cramer法则

§5 Cramer法则

定理： 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

§5 Cramer法则

则这个线性方程组有解，并且解是唯一的，解为：

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $\boldsymbol{D_j}$ 是将 $\boldsymbol{D}$ 中的第 $\boldsymbol{j}$ 列换成右端项 $\boldsymbol{b_1, b_2, \ldots, b_n}$ 所得的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

§5 Cramer法则

证明：唯一性，假如有一组解 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 满足方程，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k = b_j$$

对任意的 j 成立。我们有：

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} c_k & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} c_k & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} c_k & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

§5 Cramer法则

将此行列式的第 j 列分别减去第 $k(\neq j)$ 列的 c_k 倍，得

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j}c_j & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j}c_j & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j}c_j & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=c_jD$$

也就是说

$$c_j=\frac{D_j}{D},\quad j=1,2,\ldots,n$$

解的存在性，将 $(n+1)$ 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} & b_j \end{vmatrix} = 0$$

按它的最后一行展开，并整理即得

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \frac{D_k}{D} = b_j$$

注意此式对任意的 j 成立，故原方程有解，$\dfrac{D_k}{D}$ 是一组解。

推论：如果**齐次**线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则这个线性方程组只有零解（平凡解）。

§5 Cramer法则

推论：如果齐次线性方程组有非零解（非平凡解），则 $D=0$。

推论：如果非齐次线性方程组无解或有无穷多解，则 $D=0$。

这是Cramer法则的两个逆否命题，以后常用

北京大学 PEKING UNIVERSITY

什么样的行列式容易计算?

三角化法:

对行列式通过变形化为上(下)三角行列式.

降阶法:

直接降阶: 按行列式中非零元素较少的行(列)展开.

间接降阶: 利用行列式性质, 使行列式的某行(列)具有较少的非零元, 再按其展开.

特殊行列式的计算

1. $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

PEKING UNIVERSITY

例子

$$\begin{vmatrix} 30 & 0 & 150 & 120 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$$

例子

$$\begin{vmatrix} \lambda & & & & & a_n \\ -1 & \lambda & & & & a_{n-1} \\ & -1 & \lambda & & & a_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & \lambda & a_2 \\ & & & & -1 & \lambda+a_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

第四次课作业

P29 11(6), 12(4)(6), 13(1)(3), 14(2)