Kapitel 7. Primzahlen

Dieses Schlußkapitel handelt nochmals, nun sehr ausführlich, von den multiplikativen Bausteinen der natürlichen Zahlen, den Primzahlen. Der EUKLIDsche Satz über die Unendlichkeit der Primzahlmenge, für den in den Kapiteln 1 und 2 fünf Beweise gegeben wurden, legt zahlreiche Fragen nahe, von denen hier einige besprochen werden sollen.

So geht es in § 1 zunächst um die Darstellbarkeit von Primzahlen als Werte gewisser Funktionen. Des weiteren wird die Problematik der großen bzw. kleinen Lücken in der Primzahlfolge behandelt.

Die Frage nach der Größenordnung von $\pi(x)$, der Anzahl aller Primzahlen unterhalb x, auf die schon in 1.4.5 und in § 1 erste Antworten gefunden wurden, rückt in den §§ 2 und 3 immer mehr in den Mittelpunkt.

In § 2 werden hauptsächlich die Sätze von TCHEBYCHEF diskutiert, die bereits die richtige Größenordnung von $\pi(x)$ erkennen lassen. Während hier jedoch sehr einfache Hilfsmittel ausreichen, stützt sich der in § 3 gegebene analytische Beweis des Primzahlsatzes von HADAMARD und DE LA VALLEE POUSSIN, der die Asymptotik $\pi(x) \sim x/\log x$ beinhaltet, wesentlich auf funktionentheoretische Sätze, insbesondere auf eine detaillierte Untersuchung der von RIEMANN eingeführten Zetafunktion.

§ 1. Elementare Ergebnisse

1. Darstellung von Primzahlen durch Polynome. GOLDBACH bemerkte in einem Brief vom 18. November 1752 an EULER, daß ein Polynom nicht nur Primzahlen darstellen kann. Diese Aussage wird im folgenden Satz präzisiert, dessen Beweis einer Idee EULERs (1760) folgt.

Satz. *Ein Polynom in einer Unbestimmten mit komplexen Koeffizienten, dessen Werte an allen genügend großen ganzzahligen Stellen Primzahlen sind, ist konstant.*

Beweis. Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ und $f(n) \in \mathbb{P}$ für alle $n \geq n_0$ bei geeignetem ganzem n_0. Dies zieht ersichtlich $f \in \mathbb{Q}[X]$ nach sich und deswegen gibt es ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit $\gamma f \in \mathbb{Z}[X]$. Ist p_0 die Primzahl $f(n_0)$, wendet man die TAYLOR–Formel 2.4.4(1) an und substituiert dort n_0 bzw. $\gamma t p_0$, $t \in \mathbb{N}_0$, für X bzw. Y, so erhält man

$$f(n_0 + \gamma t p_0) = f(n_0) + t p_0 \sum_{\lambda \geq 1} \frac{1}{\lambda!} \gamma f^{(\lambda)}(n_0)(\gamma t p_0)^{\lambda - 1},$$

wobei alle $\frac{1}{\lambda!}\gamma f^{(\lambda)}(n_0)$ ganz sind. So geht $p_0 = f(n_0)$ in allen Primzahlen $f(n_0 + \gamma t p_0)$, $t \in \mathbb{N}_0$, auf, weshalb $f(n_0 + \gamma t p_0) = f(n_0)$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ sein muß. Dies impliziert die Konstanz von f. □

Bemerkungen. 1) Während es also keine nichtkonstanten komplexen Polynome gibt, die *an allen* genügend großen ganzzahligen Stellen Primzahlen als Werte annehmen, hat man immer wieder versucht, wenigstens nichtkonstante Polynome zu finden, die *an vielen sukzessiven* ganzzahligen Stellen Primzahlwerte haben. So hat EULER 1772 angemerkt, daß $X^2 - X + 41$ an allen Stellen $1, 2, \dots, 40$ Primzahlwerte hat. LEGENDRE (*Théorie des Nombres*, 1798, No. 255) notierte, daß $X^2 + X + 41$ an den Stellen $0, \dots, 39$ (nach EULERs Resultat also sogar an $-40, -39, \dots, 0, \dots, 39$) Primzahlwerte annimmt. Ersetzt man in LEGENDREs Polynom X durch $X - 40$, so gewinnt man $X^2 - 79X + 1601$ als Polynom, das an den Stellen $0, 1, \dots, 79$ Primzahlwerte hat.

Übrigens steht hinter der EULERschen Bemerkung der 1913 von G. RABINOWITSCH entdeckte

Satz. *Für negative ganze, quadratfreie* $d \equiv 1 \pmod 4$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das Polynom* $X^2 - X + \frac{1}{4}(1 + |d|)$ *hat an allen Stellen* $1, 2, \dots, \frac{1}{4}(|d| - 3)$ *Primzahlwerte.*

(ii) *Der Ganzheitsring des imaginär–quadratischen Zahlkörpers* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ *ist faktoriell.*

Wie in der Bemerkung zu 1.6.9 festgestellt, ist der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ Hauptidealring, also nach Satz 1.5.5C faktoriell und so liefert die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) des zitierten Satzes genau das obige EULERsche Polynom mit vielen Primzahlwerten.

2) Man kann sich natürlich auch fragen, ob nichtkonstante ganzzahlige Polynome die Eigenschaft haben können, daß sie wenigstens *an unendlich vielen* ganzzahligen Stellen Primzahlen als Werte annehmen. Über den gegenwärtigen Stand dieses Problems wurde bereits in 3.2.10 berichtet.

3) In Ergänzung zu dem oben bewiesenen Satz sei noch erwähnt, daß es MATIJASEVIC im Zusammenhang mit seiner negativen Lösung des zehnten HILBERT–Problems (vgl. 6.2.5) gelungen ist, ein ganzzahliges Polynom in *mehreren* Unbestimmten so zu konstruieren, daß dieses sämtliche Primzahlen, aber keine anderen natürlichen Zahlen als Werte annimmt, wenn die Komponenten der Argumentstellen unabhängig voneinander alle nichtnegativen ganzen Zahlen durchlaufen. *Ein* derartiges Polynom (in 26 Unbestimmten) findet der Leser explizit auf Seite 331 des in 3.2.13 zitierten Sammelwerks *Mathematical developments arising from Hilbert problems*.

4) R.C. BUCK (Amer. Math. Monthly *53*, 265 (1946)) hat gezeigt, daß man das Wort *Polynom* im Satz durch *rationale Funktion* ersetzen kann.

2. Exponentielle Folgen von Primzahlen. W.H. MILLS (Bull. Amer. Math. Soc. *53*, 604 (1947)) hat mit der Entdeckung des folgenden Resultats zahlreiche weitere Untersuchungen angeregt, die sich mit der Frage der Darstellung unendlich vieler (oder aller) Primzahlen durch möglichst "einfache" Formeln beschäftigen: *Es gibt eine reelle Zahl $u > 1$, so daß $[u^{3^n}]$ für alle natürlichen n Primzahl ist.*

Obwohl der Beweis dieses MILLSschen Satzes elementar ist, hat er den Nachteil, von dem tiefliegenden, mit analytischen Methoden bewiesenen Satz von A.E. INGHAM (Quart. J. Math. Oxford (2) *8*, 255–266 (1937))

$$(1) \qquad p_{k+1} - p_k = O(p_k^{5/8}) \qquad (k \to \infty)$$

über die Größenordnung der Differenz sukzessiver Primzahlen abzuhängen. Dabei bedeutet hier und im folgenden stets p_k die k–te Primzahl, wenn man der Größe nach ordnet, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ usw.

Das nachfolgend zitierte Ergebnis von E.M. WRIGHT (Amer. Math. Monthly *58*, 616–618 (1951)) hängt weder von (1) noch von einer der neueren Verschärfungen von (1) ab, sondern lediglich von der elementar beweisbaren Abschätzung

$$(2) \qquad p_{k+1} - p_k < p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

dafür wächst aber die nur Primzahlen darstellende Folge mit zunehmendem n sehr viel schneller als im MILLSschen Beispiel: *Zu jeder Primzahl p existiert ein reelles $u \in]p, p+1[$, so daß alle Zahlen $[w_n]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ Primzahlen sind; dabei ist $w_0 := u$ und $w_{n+1} := 2^{w_n}$ für alle nichtnegativen ganzen n gesetzt.*

Die Richtigkeit von (2) folgt aus dem sogenannten BERTRAND*schen Postulat: Für jedes reelle $x \geq 1$ existiert eine Primzahl im Intervall $]x, 2x]$.* Dies hat 1852 P.L. TCHEBYCHEF (Oeuvres I, 49–70) mit elementaren Mitteln gezeigt, die denjenigen eng verwandt sind, die in § 2 zum Zuge kommen. Die (heute leicht irreführende) Bezeichnung des "Postulats" rührt daher, daß J. BERTRAND (J. Ecole Roy. Polytechn. *17*, 129 (1845)) festgestellt hat, für jedes $n = 7, \ldots, 6 \cdot 10^6$ existiere mindestens eine Primzahl zwischen $\frac{1}{2}n$ und $n-2$ und daraufhin vermutete, das sei wohl immer so.

Bemerkung. Als Beispiel einer Formel, die *alle* Primzahlen darstellt, sei ein Resultat von W. SIERPINSKI (C. R. Acad. Sci. Paris *235*, 1078–1079 (1952)) zitiert. Diesem werde vorausgeschickt, daß $p_k \leq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, wie (2) sofort induktiv lehrt. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 1} p_k 10^{-2^k}$; ihr Wert sei a. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$p_k = [10^{2^k} a] - 10^{2^{k-1}}[10^{2^{k-1}} a]. \tag{3}$$

Man muß allerdings vor einer Überschätzung der Bedeutung derartiger Versuche warnen: Um viele Primzahlen aus (3) zu berechnen, muß man genügend viele Dezimalstellen von a kennen und dazu benötigt man wiederum die Kenntnis vieler Primzahlen, wie man aus der Reihendarstellung von a sieht.

3. Große Lücken. In 2 wurden mehrfach obere Abschätzungen für die Differenz sukzessiver Primzahlen referiert (vgl. 2(1), 3(2)). Eine Aussage in entgegengesetzter Richtung macht folgender

Satz. *Die Folge der Differenzen sukzessiver Primzahlen ist nicht beschränkt.*

Beweis. Ist $J \in \mathbb{N}$ beliebig, so betrachte man die J Zahlen $z_j := (J+1)! + j$ für $j = 2, \ldots, J+1$. Offenbar ist j echter Teiler von z_j für die genannten j und so hat man J aufeinanderfolgende zusammengesetzte natürliche Zahlen konstruiert. □

Bemerkung. Die längste derzeit explizit bekannte Primzahllücke schließt an die Primzahl 218 209 405 436 543 an, wonach genau 906 zusammengesetzte Zahlen folgen (vgl. T.R. NICELY, Math. Comp. *68*, 1311–1315 (1999)). Der Beweis des obigen Satzes garantiert eine derartig große Lücke erst oberhalb 10^{2290}.

4. Sieb des Eratosthenes, Primzahltafeln. Bevor in 6 das Problem besonders *kleiner* Lücken in der Primzahlfolge diskutiert wird, soll hier ein *Verfahren zur Bestimmung aller Primzahlen p mit $\sqrt{x} < p \leq x$* beschrieben werden, *wenn man sämtliche $p \leq \sqrt{x}$ bereits kennt.* Dieses Verfahren nützt die folgende einfache Tatsache aus.

Proposition. *Für reelles $x > 1$ und ganze n mit $\sqrt{x} < n \leq x$ gilt: n ist Primzahl genau dann, wenn jede n teilende Primzahl größer als $\sqrt{x}$ ist.*

Beweis. Für alle Primzahlen p mit $p|n$ sei $p > \sqrt{x}$; dies gilt insbesondere für $p(n)$, die kleinste n teilende Primzahl (man beachte $n \geq 2$).Also ist $p(n) > \sqrt{x} \geq \sqrt{n}$ und nach Proposition 1.1.4 ist n Primzahl. Die Umkehrung ist trivial. □

Das in Aussicht gestellte Verfahren werde nun an einem Beispiel ($x = 270$) erläutert. Man schreibt alle natürlichen $n \leq x$ ($= 270$) in einem rechteckigen Schema (mit $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ Spalten) hin und macht die $\sqrt{x}$ (< 17) nicht übersteigenden Primzahlen $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$ kenntlich (hier durch Fettdruck). Sodann markiert man deren im Schema vorkommenden Vielfachen (hier durch Unterstreichen). Dabei sind zur Ersparnis der Schreibarbeit von vornherein die Vielfachen von 2, 3 oder 5 weggelassen, was damit gleichbedeutend ist, daß man nur die zu 30 teilerfremden n ins Schema aufnimmt; dies führt anstelle von 30 zu $\varphi(30) = 8$ Spalten. Nach der vorangestellten Proposition sind die nicht unterstrichenen n zwischen $\sqrt{x}$ und x genau die Primzahlen dieses Intervalls.

1	**7**	**11**	**13**	17	19	23	29
31	37	41	43	47	$\underline{49}$	53	59
61	67	71	73	$\underline{\underline{77}}$	79	83	89
$\underline{\underline{91}}$	97	101	103	107	109	113	$\underline{119}$
$\underline{121}$	127	131	$\underline{133}$	137	139	$\underline{\underline{143}}$	149
151	157	$\underline{161}$	163	167	$\underline{169}$	173	179
181	$\underline{187}$	191	193	197	199	$\underline{203}$	$\underline{209}$
211	$\underline{217}$	$\underline{221}$	223	227	229	233	239
241	$\underline{247}$	251	$\underline{253}$	257	$\underline{259}$	263	269

Den hier beschriebenen Algorithmus bezeichnet man als *Sieb des* ERATOSTHENES. ERATOSTHENES VON KYRENE (3. Jahrhundert v.Chr.) hat auf dem Höhepunkt seines Schaffens wie DIOPHANT (vgl. 1.3.1) in Alexandria gelebt. Sein Verfahren wurde durch die *Introductio Arithmetica* des NIKOMACHOS VON GERASA (um 100 n. Chr.) überliefert.

Das Sieb des ERATOSTHENES ist für numerische Zwecke gut geeignet. Insbesondere dient es zur Erstellung (nicht zu umfangreicher) *Primzahltafeln.* So schreibt man aus dem soeben vorgeführten Beispiel die folgende kleine Tafel zusammen (π ist die in 1.1.4 definierte Anzahlfunktion).

x	$\pi(x)$	x	$\pi(x)$	x	$\pi(x)$	x	$\pi(x)$	x	$\pi(x)$	x	$\pi(x)$
2		31		73		127		179		233	
3		37		79		131		181		239	
5		41		83		137		191		241	
7		43		89		139		193		251	
11	5	47	15	97	25	149	35	197	45	257	55
13		53		101		151		199		263	
17		59		103		157		211		269	
19		61		107		163		223			
23		67		109		167		227			
29	10	71	20	113	30	173	40	229	50		

Die historische Entwicklung der Primzahltafeln sei in groben Zügen durch eine kleine Aufstellung nachgezeichnet:

L. Fibonacci (1202)	$p < 10^2$
F. van Schooten (1657)	$p < 10^4$
J.G. Krüger (1746), J.H. Lambert (1770)	$p < 10^5$
G. Vega (1796)	$p < 4 \cdot 10^5$
L. Chernac (1811)	$p < 10^6$
J.C. Burckhardt (1814/7)	$p < 3 \cdot 10^6$
Z. Dase (1862)	$6 \cdot 10^6 < p < 9 \cdot 10^6$
J. Glaisher (1879/83)	$3 \cdot 10^6 < p < 6 \cdot 10^6$
D.N. Lehmer (1909/14)	$p < 10^7$

Die letztgenannte Primzahltafel von Lehmer (*List of Prime Numbers from* 1 *to* 10,006,721, Carnegie Inst. Washington, Publ. No. 165, 1914) wurde 1956 neu aufgelegt und dürfte noch immer die weitverbreitetste sein, wenngleich man im Zeitalter der immer schnelleren Computer Vertafelungen der Primzahlen bis in die Größenordnung 10^9 vorgenommen hat.

Wenn man eine Tafel aller Primzahlen bis N hat, kann man $\pi(x)$ für alle $x \leq N$ unmittelbar durch Auszählen ermitteln. Tatsächlich hat Gauss genau auf diesem Wege aus den Tafeln von Lambert und Vega die (richtige) Vermutung über das Verhalten von $\pi(x)$ bei $x \to \infty$ herauspräpariert (vgl. 2.1). In seiner Besprechung der neu erschienenen Primzahltafeln von Chernac äußerte er sich dann auch begeistert (Werke II, 181–182)

"... Wie schätzbar ein solches der Arithmetik gemachtes Geschenk sei, beurtheilt ein Jeder leicht, der viel mit grössern Zahlenrechnungen zu thun hat. Der Verf. verdient doppelten Dank, sowohl für seine höchst mühsame Arbeit selbst,..., als für den gewiss sehr erheblichen auf den Druck gemachten Aufwand, wofür sich sonst schwerlich ein Verleger gefunden haben möchte. ... Die erste Million ist nun für Jedermanns Gebrauch da; und wer Gelegenheit und Eifer für diesen Gegenstand hat, möge daher seine Mühe auf das Weitere richten."

Auf Möglichkeiten, $\pi(x)$ *exakt* bis weit hinein in Bereiche zu berechnen, in denen längst nicht mehr alle Primzahlen bekannt sind, wird in 5 kurz eingegangen.

5. Anzahlfunktion. Ist wieder $x > 1$ reell (wie in 4), so überstehen genau die $1+\pi(x)-\pi(\sqrt{x})$ Zahlen 1 und die Primzahlen p mit $\sqrt{x} < p \le x$ den Siebprozeß nach ERATOSTHENES: Aus der Menge aller natürlichen $n \le x$ sind ja genau die Primzahlen $p \le \sqrt{x}$ und deren Vielfache ausgesiebt worden.

Definiert man für beliebige reelle y

$$P(y) := \prod_{p \le y} p \tag{1}$$

sowie

$$Q(x,y) := \#\{n \in \mathbb{N} : n \le x,\ (n, P(y)) = 1\}, \tag{2}$$

so ist die Gleichung

$$1 + \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) = Q(x, \sqrt{x}) \tag{3}$$

unmittelbar einsichtig. $Q(x,y)$ wird nun für die weiteren Betrachtungen geeignet umgeformt, indem man sich der in Satz 1.4.9(iii) notierten Eigenschaft der MÖBIUS–Funktion μ bedient. So ergibt sich

$$Q(x,y) = \sum_{\substack{n \le x \\ (n,P(y))=1}} 1 = \sum_{n \le x} \sum_{d|(n,P(y))} \mu(d). \tag{4}$$

Die letzte Summationsbedingung $d|(\ldots)$ ist nach Definition des ggT äquivalent zu den beiden Bedingungen $d|n$, $d|P(y)$, so daß man weiter die Formel

$$Q(x,y) = \sum_{d|P(y)} \mu(d) \sum_{\substack{n \le x \\ d|n}} 1 = \sum_{d|P(y)} \mu(d)[\frac{x}{d}] \tag{5}$$

hat, wegen (3) insbesondere

$$\pi(x) = \pi(\sqrt{x}) - 1 + \sum_{d|P(\sqrt{x})} \mu(d)[\frac{x}{d}]. \tag{6}$$

Nach 1.4.9 ist $\mu(d)$ in (5) und (6) nur der Werte 1 und -1 fähig, da $P(y)$ quadratfrei ist. Die Anzahl der $d \in \mathbb{N}$ mit $d|P(y)$, also der Summanden rechts in (5), ist $2^{\pi(y)}$. Sind nämlich $p_1, \ldots, p_{\pi(y)}$ genau die y nicht übersteigenden Primzahlen, so sind daraus genau $2^{\pi(y)}$ verschiedene quadratfreie $d \in \mathbb{N}$ multiplikativ zu bilden.

Formel (6) erlaubt nun die *exakte* Berechnung von $\pi(x)$, wenn alle $\sqrt{x}$ nicht übersteigenden Primzahlen bekannt sind (vgl. Ende von 4). Diese prinzipielle Möglichkeit zur Ermittlung von $\pi(x)$ ist in der Praxis natürlich stark limitiert durch die mit x rasch anwachsende Anzahl der rechts in (6) zu berücksichtigenden Summanden. Mit verfeinerten Siebtechniken haben verschiedene Autoren zu (6) analoge Formeln für $\pi(x)$ ersonnen, bei denen der genannte Nachteil von (6) sukzessive reduziert wurde. Zu erwähnen sind hier vor allem E.D.F. Meissel (Math. Ann. *2*, 636–642 (1870)), D.H. Lehmer (Illinois J. Math. *3*, 381–388 (1959)) sowie J.C. Lagarias, V.S. Miller und A.M. Odlyzko (Math. Comp. *44*, 537–560 (1985)).

Die Werte für $\pi(10^8)$ und $\pi(10^9)$ in der nachfolgenden Tabelle stammen von Meissel, der letztere allerdings um 56 nach oben korrigiert von Lehmer, dessen Berechnung von $\pi(10^{10})$ um 1 nach unten korrigiert werden mußte. Für $i = 11, 12, 13$ wurde $\pi(10^i)$ von J. Bohman (mittels Lehmers Methode) im Jahre 1972 angegeben, für $i = 14, 15, 16$ von Lagarias, Miller und Odlyzko.

i	$\pi(10^i)$
1	4
2	25
3	168
4	1 229
5	9 592
6	78 498
7	664 579
8	5 761 455
9	50 847 534

i	$\pi(10^i)$
10	455 052 511
11	4 118 054 813
12	37 607 912 018
13	346 065 536 839
14	3 204 941 750 802
15	29 844 570 422 669
16	279 238 341 033 925
17	2 623 557 157 654 233
18	24 739 954 287 740 860

Bemerkung. In Bemerkung 3 zu 1.4.5 wurde in quantitativer Weise gezeigt, daß es nicht zu wenig Primzahlen gibt. In entgegengesetzter Richtung kann unter Ausnützung der Darstellung (5) der in (2) definierten Funktion $Q(x, y)$ bewiesen werden, daß *fast keine* natürliche Zahl Primzahl ist in folgendem Sinne: *Bei* $x \to \infty$ *gilt* $\pi(x) = O(\frac{x}{\log \log x})$. Euler (Opera Omnia Ser. 1, XIV, 216–244) hat 1737 festgestellt, daß es "unendlich viel weniger Primzahlen als ganze Zahlen" gibt; seine Begründung bewies die Behauptung jedoch nicht in dem soeben präzisierten Sinne.

6. Primzahlzwillinge. Ist p_k, wie nach 2(1) vereinbart, die k–te Primzahl und wird $d_k := p_{k+1} - p_k$ gesetzt, so zeigt Satz 3 die Unbeschränktheit der Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Andererseits ist $d_k = 1$ genau für $k = 1$, also $d_k \geq 2$ für $k \geq 2$. Jedes Paar (p_k, p_{k+1}) mit $d_k = 2$ heißt ein *Primzahlzwilling.* Beispiele hierfür sind (3,5), (5,7), (11,13), (17,19).

Analog dazu, wie man seit Jahrhunderten möglichst große Primzahlen explizit zu finden sucht (vgl. 3.2.12), ist man auch an möglichst großen Primzahlzwillingen interessiert. Genannt seien hier die Paare $(n-1, n+1)$ mit $n = 10^9+8$, $10^{12}+62$, $76 \cdot 3^{139}$, $156 \cdot 5^{202}$, $297 \cdot 2^{546}$, $318\,032\,361 \cdot 2^{107001}$, wobei die letzte Zahl bereits 32 220 Dezimalstellen hat.

Als Anzahlfunktion wird man hier, ähnlich wie $\pi(x)$ bei den Primzahlen, zu untersuchen haben

$$\pi_2(x) := \#\{n \in \mathbb{N} : n, n+2 \in \mathbb{P},\ n+2 \leq x\}. \tag{1}$$

Definiert man mit der Bezeichnung 5(1) jetzt analog zu 5(2)

$$Q_2(x,y) := \#\{n \in \mathbb{N} : n \leq x,\ (n(n+2), P(y)) = 1\}, \tag{2}$$

so überlegt man sich leicht, daß für $x \geq 9$ die Gleichung

$$\pi_2(x) - \pi_2(\sqrt{x}+2) = Q_2(x-2, \sqrt{x}) \tag{3}$$

gilt, die man als Analogon zu 5(3) zu betrachten hat. Die Auswertung von $Q_2(x-2, \sqrt{x})$ ist allerdings nicht einfach zu handhaben, weshalb (3) für die *exakte* Berechnung von $\pi_2(x)$ ungeeignet ist. In dieser Hinsicht bleibt man bei den Primzahlzwillingen auf die grobe Methode des Abzählens angewiesen, die zur folgenden Tabelle führt:

i	$\pi_2(10^i)$
1	2
2	8
3	35
4	205
5	1 224
6	8 169

i	$\pi_2(10^i)$
7	58 980
8	440 312
9	3 424 506
10	27 412 679
11	224 376 048
12	1 870 585 220

Die vorstehende Tabelle stützt die *Vermutung, daß es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.* Die Frage nach dem Analogon zum EUKLIDschen Satz 1.1.4 ist demnach noch offen.

Im folgenden soll kurz über einige Resultate in dieser Richtung referiert werden. Dazu werde zuerst angemerkt, daß hinter Gleichung (3) offenbar wie in 4 und 5 die Siebmethode von ERATOSTHENES steht: Aus der Folge aller Produkte $n(n+2)$ mit $n+2 \leq x$ siebt man diejenigen aus, die Vielfache einer Primzahl $p \leq \sqrt{x}$ sind.

V. BRUN hat ab 1915 in einer Reihe von Arbeiten eine neuartige Siebmethode entwickelt, mit deren Hilfe er die Anzahlfunktion (2) wesentlich subtiler abschätzen konnte, als dies via der Analoga zu 5(4) und 5(5) möglich war. Die interessantesten Sätze von BRUN über Primzahlzwillinge sind diese:

a) *Die Reihe $\sum_p^* p^{-1}$ über alle Primzahlen p, für die auch $p+2$ Primzahl ist, konvergiert.* Falls es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, sind sie jedenfalls sehr viel seltener als die Primzahlen, deren Reziprokensumme $\sum_p p^{-1}$ nach Bemerkung 4 zu 1.4.5 divergiert.

b) *Es gibt unendlich viele natürliche n mit $\Omega(n) \leq 9$ und $\Omega(n+2) \leq 9$.* Dabei ist die (streng additive) zahlentheoretische Funktion Ω wie folgt erkärt: Ist $\nu_p(n)$ die Vielfachheit von p in n, so ist $\Omega(n) := \sum_p \nu_p(n)$.

Klar ist, daß die obige Vermutung bewiesen wäre, wenn man $\Omega(n), \Omega(n+2) \leq 9$ in b) durch $\Omega(n), \Omega(n+2) < 2$ ersetzen könnte. In dieser Richtung wurde 1973 tatsächlich die vorletzte Stufe erreicht, als CHEN (Sci. Sinica *16*, 157–176 (1973)) mit neueren Siebmethoden zeigte: *Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $\Omega(p+2) \leq 2$.*

Bemerkungen. 1) Das Problem der Primzahlzwillinge gehört zu einem allgemeineren Problemkreis, den man mit Siebmethoden wirkungsvoll angreifen kann: Seien $a, k, \ell \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $2|ab$, $(a,b) = 1$, $(k,\ell) = 1$. Was läßt sich aussagen über die Anzahl der Primzahlen $p \equiv \ell \pmod{k}$, für die $ap+b$ ebenfalls Primzahl ist? Der Fall $a = k = \ell = 1$, $b = 2$ ist das oben diskutierte Problem der Primzahlzwillinge; auf den Fall $a = 2$, $b = 1$, $k = 4$, $\ell = 3$ beziehen sich die Voraussetzungen über p in Korollar 3.2.12.

2) Über Siebmethoden und ihre Anwendungen kann sich der Leser orientieren in Kapitel IV des Buches von H. HALBERSTAM und K.F. ROTH (*Sequences* I, Clarendon, Oxford, 1966), ferner in den Büchern von HALBERSTAM und RICHERT (*Sieve Methods*, Academic Press, London etc., 1974) bzw. von W. SCHWARZ *Einführung in Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim etc., 1974).

7. Die Goldbach–Probleme. GOLDBACH schrieb in einem Brief vom 7. Juni 1742 an EULER, scheinbar sei jede ganze Zahl größer als Eins ein *aggregatum trium numerorum primorum*. In seiner Antwort vom 30. Juni ging EULER auf diese Passage ein, indem er es als sicher erachtete, daß jeder *numerus par summa duorum primorum* sei. Seit man die Eins nicht mehr zu den Primzahlen rechnet, formuliert man zwei GOLDBACH–Probleme:

a) *Jede gerade Zahl größer als Zwei ist als Summe zweier Primzahlen darstellbar.*

b) *Jede ungerade Zahl größer als Fünf ist als Summe dreier Primzahlen darstellbar.*

Klar ist, daß b) von a) impliziert wird. Ist nämlich $n \geq 7$ ungerade, so ist $n - 3 \geq 4$ gerade und nach a) hat man $n = 3 + p + p'$ mit Primzahlen p, p'.

Noch im Jahre 1900 beurteilte HILBERT in seinem bereits in 3.2.13 und 6.5.1 zitierten Pariser Vortrag die Aussichten, bei den GOLDBACH–Problemen [und bei dem in 6 behandelten Problem der Primzahlzwillinge] in nächster Zeit voranzukommen, offenbar nicht zu optimistisch: " ... wird man vielleicht dereinst in die Lage kommen, an die strenge Beantwortung des Problems von GOLDBACH zu gehen, ... [ferner an die bekannte Frage, ob es unendlich viele Primzahlenpaare mit der Differenz 2 gibt ...]"

Um 1920 gab es dann erste wesentliche Fortschritte bei beiden GOLDBACH–Problemen. BRUN konnte mit seiner schon in 6 erwähnten Siebmethode zeigen, daß es zu jedem genügend großen geraden n ein natürliches q mit $q < n$ gibt, so daß $\Omega(q), \Omega(n-q) \leq 9$ gilt. Verbesserte Siebmethoden ergaben durch CHEN (Kexue Tongbao *17*, 385–386 (1966)) folgendes bisher beste Ergebnis zu a): *Zu jedem genügend großen geraden n gibt es eine Primzahl $p < n$ mit $\Omega(n-p) \leq 2$.*

Als derzeit weitreichendstes numerisches Resultat zu a) sei dasjenige von T. OLIVEIRA E SILVA (http://listserv.nodak.edu/...) von 2005 erwähnt, nachdem jede gerade Zahl n mit $4 \leq n \leq 3 \cdot 10^{17}$ Summe zweier Primzahlen ist.

Während Problem a) noch offen ist, wurde b) prinzipiell gelöst. Einen ersten entscheidenden Schritt machten dabei HARDY und LITTLEWOOD (Acta Math. *44*, 1–70 (1923)), die mit einer analytischen Methode zeigten, daß jede große ungerade Zahl Summe dreier Primzahlen ist, vorausgesetzt allerdings, eine Verallgemeinerung der in 3.12 zu diskutierenden unbewiesenen RIEMANNschen Vermutung ist richtig. Daß grundsätzlich ein gangbarer Weg zur Behandlung von b) gefunden war, erwies sich bald als wichtiger als die Einschränkung des erzielten Resultats durch die unbewiesene Voraussetzung. I.M. VINOGRADOV (Dokl. Akad. Nauk SSSR *15*, 291–294 (1937)) gelang es nämlich, durch Verfeinerung der analytischen Techniken das HARDY–LITTLEWOOD–Resultat von der unbewiesenen Annahme zu befreien. VINOGRADOV zeigte, daß jede ungerade Zahl größer als $3^{3^{15}}$ Summe dreier Primzahlen ist. Diese Schranke konnte inzwischen von CHEN und T. WANG (Acta Math. Sinica *32*, 702–718 (1989)) auf $\exp(\exp(11,503)) =: E$ gesenkt werden, eine Zahl, die im Dezimalsystem immer noch etwa 43000 Ziffern hat. Um b) vollständig zu beweisen, bleiben "lediglich" noch die ungeraden n mit $3 \cdot 10^{17} < n \le E$ zu kontrollieren.

Bemerkung. Eine Darstellung des CHENschen Satzes findet sich in Kapitel 11 des in Bemerkung 2 zu 6 zitierten Buchs von HALBERSTAM und RICHERT. Mit den von HARDY, LITTLEWOOD und VINOGRADOV angewandten Methoden kann man sich sehr gut vertraut machen durch das Studium des Buchs von VAUGHAN [30]. Die wichtigsten Originalarbeiten zu den GOLDBACH–Problemen sind in Buchform zusammengefaßt durch Y. WANG (*Goldbach Conjecture*, World Scientific, Singapore, 1984), aufgeteilt nach *elementaren* (hierzu rechnet man weite Teile der Siebtheorie) und *analytischen* Methoden. Zu dieser in der Zahlentheorie üblich gewordenen Einteilung der Methoden werden in 3.9 einige grundsätzliche Worte zu sagen sein.

§ 2. Anzahlfunktion: Tchebychefs Sätze

1. Vermutungen von Legendre und Gauss. Bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts kannte man über das asymptotische Verhalten der Anzahlfunktion π lediglich die beiden qualitativen Aussagen $\pi(x) \to \infty$ bzw. $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$ bei $x \to \infty$ von EUKLID bzw. EULER. Quantitative Verfeinerungen lagen nicht vor.

Erst das gewissenhafte Auszählen immer umfangreicherer Primzahltafeln (vgl. 1.4) führte unabhängig voneinander LEGENDRE und GAUSS zu Vermutungen, die beide nach geeigneter Interpretation zur asymptotischen Gleichheit (vgl. 1.4.12)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty) \tag{1}$$

äquivalent sind.

LEGENDRE (Théorie des Nombres, 1798, No. 394–401) verglich die aus den Tafeln von VEGA, CHERNAC und BURCKHARDT ermittelten Werte von $\pi(x)$ für $x \le 10^6$ mit der Funktion

$$\lambda(x) := \frac{x}{\log x - 1,08366} \tag{2}$$

und fand im betrachteten Bereich sehr gute Übereinstimmung. In No. 395 a.a.O. sagte er ganz deutlich, es bliebe nur noch übrig, das allgemeine Gesetz zu beweisen.

GAUSS hat seine Anmerkungen über die Approximation von $\pi(x)$ durch eine "einfache" Funktion in einem Brief vom 24. Dezember 1849 an J.F. ENCKE mitgeteilt (Werke II, 444–447). Wie aus diesem Brief hervorgeht, datiert seine erste Beschäftigung mit dem Problem mindestens bis 1793 zurück (er war damals sechzehn Jahre alt):

“Die gütige Mitteilung Ihrer Bemerkungen über die Frequenz der Primzahlen ist mir in mehr als einer Beziehung interessant gewesen. Sie haben mir meine eigenen Beschäftigungen mit demselben Gegenstande in Erinnerung gebracht, deren erste Anfänge in eine sehr entfernte Zeit fallen, ins Jahr 1792 oder 1793, wo ich mir die LAMBERT'schen Supplemente zu den Logarithmentafeln angeschafft hatte. Es war noch ehe ich mit feineren Untersuchungen aus der höheren Arithmetik mich befaßt hatte eines meiner ersten Geschäfte, meine Aufmerksamkeit auf die abnehmende Frequenz der Primzahlen zu richten, zu welchem Zweck ich dieselben in einzelnen Chiliaden*) abzählte, und die Resultate auf einem der angehefteten weissen Blätter verzeichnete.**) Ich erkannte bald, dass unter allen Schwankungen diese Frequenz durchschnittlich nahe dem Logarithmen verkehrt proportional sei, so dass die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze n nahe durch das Integral

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

ausgedrückt werde, wenn der hyperbolische Logarithm. verstanden werde. In späterer Zeit, als mir die in VEGA's Tafeln (von 1796) abgedruckte Liste bis 400031 bekannt wurde, dehnte ich meine Abzählung weiter aus, was jenes Verhältnis bestätigte. Eine grosse Freude machte mir 1811 die Erscheinung von CHERNAC's cribrum, und ich habe (da ich zu einer anhaltenden Abzählung der Reihe nach keine Geduld hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt, um bald hie bald dort eine Chiliade abzuzählen; ich liess jedoch zuletzt es ganz liegen, ohne mit der Million ganz fertig zu werden. Erst später benutzte ich GOLDSCHMIDT's Arbeitsamkeit, theils die noch gebliebenen Lücken in der ersten Million auszufüllen, theils nach BURCKARDT's Tafeln die Abzählung weiter fortzusetzen. So sind (nun schon seit vielen Jahren) die drei ersten Millionen abgezählt, und mit dem Integralwerth verglichen ...”, worüber nun eine kleine Tabelle folgt. Offenbar von ENCKE auf die LEGENDREsche Annäherung (2) an $\pi(x)$ aufmerksam gemacht, fährt GAUSS dann fort:

“Dass LEGENDRE sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt hat, war mir nicht bekannt, auf Veranlassung Ihres Briefes habe ich in seiner *Théorie des Nombres* nachgesehen, und in der zweiten Ausgabe einige darauf bezügliche Seiten gefunden, die ich früher übersehen (oder seitdem vergessen) haben muss. LEGENDRE gebraucht die Formel

$$\frac{n}{\log n - A}$$

*) Folge von tausend sukzessiven Zahlen

**) Direkt vor dem Brief an ENCKE abgedruckt (Werke II, 435–443) wo A eine Constante sein soll, für welche er 1,08366 setzt."

Der Brief endet mit einer vergleichenden Betrachtung seiner eigenen Approximation

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{li} x := \int_0^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x > 1)$$

an $\pi(x)$ mit der LEGENDREschen aus (2). Dabei hat man das Integral rechts in (3) im Sinne des CAUCHYschen Hauptwerts $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x)\frac{dt}{\log t}$ zu verstehen. Die in (3) definierte Funktion li heißt *Integrallogarithmus.*

Mittels partieller Integration kann nun die asymptotische Gleichheit

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{li} x \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty)$$

leicht bestätigt werden. Es ist nämlich

$$\operatorname{li} x - \operatorname{li} 2 = \int_2^x 1 \cdot \frac{1}{\log t} dt = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}$$

und daraus

$$|\operatorname{li} x - \frac{x}{\log x}| \leq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} + O(\sqrt{x}) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

was zu (4) führt.

Wenn (1) bewiesen ist, ist $\pi(x) \sim \lambda(x)$ bzw. wegen (4) auch $\pi(x) \sim \operatorname{li} x$ gezeigt; in dem hier präzisierten Sinne sind dann die Vermutungen von LEGENDRE bzw. GAUSS bestätigt, daß λ bzw. li die Funktion π gut annähern.

Wie bereits in 1.4.14 erwähnt, ist die Aussage (1) nichts anderes als der *Primzahlsatz*, der zuerst 1896 gezeigt werden konnte und für den in § 3 ein Beweis geführt wird. Einige Dinge, die dort benötigt werden, die aber auch von selbständigem Interesse sind, werden im laufenden Paragraphen bereitgestellt. Dessen Hauptergebnisse gehen auf die beiden wichtigen Arbeiten von TCHEBYCHEF (Oeuvres I, 27–48 bzw. 49–70) *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers* bzw. *Mémoire sur les nombres premiers* aus den Jahren 1851/4 zurück. TCHEBYCHEF konnte zwar die Asymptotik (1) noch nicht beweisen; immerhin konnte er aber zeigen, daß $\frac{x}{\log x}$ die "richtige" Größenordnung für $\pi(x)$ ist (vgl. 3).

2. Legendres Identität. *Für jede Primzahl p und für jede natürliche Zahl n ist die Vielfachheit von p in $n!$ gleich*

$$\text{(1)} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j}\right].$$

Bemerkung. Man beachte hier, daß $[np^{-j}]$ Null ist genau dann, wenn $p^j > n$ oder gleichbedeutend $j > (\log n)/(\log p)$ gilt. Den Ausdruck (1) für $\nu_p(n!)$ hat LEGENDRE in der Einleitung zu seiner *Théorie des Nombres* angegeben.

Beweis. Offenbar ist für $j \in \mathbb{N}_0$

$$A_p(n,j) := \#\{k \in \mathbb{N} : k \leq n,\ \nu_p(k) = j\} = \Big[\frac{n}{p^j}\Big] - \Big[\frac{n}{p^{j+1}}\Big]$$

und damit wegen der strengen Additivität von ν_p (vgl. Bemerkung zu 1.4.2)

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \nu_p(k) = \sum_{j=1}^{\infty} j A_p(n,j) = \sum_{j=1}^{\infty} j\Big[\frac{n}{p^j}\Big] - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)\Big[\frac{n}{p^j}\Big],$$

was (1) impliziert. □

3. Obere Abschätzung. Nun wird die in der Bemerkung zu 1.5 erwähnte, mit dem Sieb des ERATOSTHENES erzielbare Aussage $\pi(x) = O(\frac{x}{\log\log x})$ erheblich verbessert.

Satz. *Für alle reellen $x > 1$ gilt*

$$\pi(x) < 8 \log 2 \frac{x}{\log x}\,. \tag{1}$$

Beweis. Bei natürlichem n gilt $\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 1$ für alle Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$ und also

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

Logarithmieren liefert für $n = 2, 3, \ldots$

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{2n \log 2}{\log n}\,. \tag{2}$$

Ist $k \geq 3$ und wendet man (2) für $n = 2^i$ $(i = 2, \ldots, k-1)$ an, so erhält man durch Addition

$$\pi(2^k) \leq \pi(4) + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{2^{i+1}}{i} < \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{i+1}}{i} < \frac{2^{k+2}}{k}\,,$$

wobei man die Ungleichung rechts (für $k \geq 3$) induktiv bestätigt. Indem man $k = 1, 2$ direkt betrachtet, gewinnt man

$$\pi(2^k) < \frac{2^{k+2}}{k} \tag{3}$$

für alle natürlichen k. Jedem reellen $x > 1$ ordnet man nun in eindeutiger Weise $k \in \mathbb{N}$ zu gemäß $2^{k-1} < x \leq 2^k$ und erhält dann mittels (3) und der Monotonie von π

$$\pi(x) \leq \pi(2^k) < \frac{2^{k+2}}{k} < (8 \log 2) \frac{x}{\log x} . \qquad \square$$

Bemerkungen. 1) Mit der in 1.6 erwähnten Siebmethode von Brun kann man ebenfalls $\pi(x) = O(x/\log x)$ erhalten. Über die Primzahlzwillinge liefert Bruns Methode $\pi_2(x) = O(x/\log^2 x)$, woraus leicht das in 1.6 unter a) zitierte Resultat folgt.

2) Mit ähnlich elementaren Schlußweisen wie zu (1) kann man in entgegengesetzter Richtung zu

$$\pi(x) \geq \frac{1}{2} \log 2 \frac{x}{\log x} \tag{4}$$

für alle reellen $x \geq 2$ gelangen. Dies verschärft die in Bemerkung 3 zu 1.4.5 gefundene untere Abschätzung für $\pi(x)$ deutlich.

4. Partielle Summation. In 5 und 6 ebenso wie in den Abschnitten 2, 3, 9, 12 von § 3 wird benötigt das folgende

Lemma über partielle Summation. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge reeller Zahlen und $A(t)$ die Summe über diejenigen a_n, deren Indizes n der Bedingung $t_n \leq t$ genügen. Ist dann $g : [t_1, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so gilt für alle reellen $x \geq t_1$*

$$\sum_{\substack{n \\ t_n \leq x}} a_n g(t_n) = A(x) g(x) - \int_{t_1}^{x} A(t) g'(t) dt.$$

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$ gemäß $t_N \leq x < t_{N+1}$ gewählt; dann gilt wegen $A(t) = A(t_n)$ für $t_n \leq t < t_{n+1}$ und wegen $A(t_n) - A(t_{n-1}) = a_n$ für $n \geq 2$ sowie $A(t_1) = a_1$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{x} A(t)g'(t)dt &= (\sum_{n=1}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} + \int_{t_N}^{x})A(t)g'(t)dt \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} A(t_n)(g(t_{n+1}) - g(t_n)) + A(t_N)(g(x) - g(t_N)) \\ &= \sum_{n=2}^{N} A(t_{n-1})g(t_n) - \sum_{n=1}^{N} A(t_n)g(t_n) + A(x)g(x) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} a_n g(t_n) + A(x)g(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Als Spezialfall des Lemmas erweist sich die EULER*sche Summenformel* in ihrer einfachsten Form. Seine Summenformel gab EULER (Opera Omnia Ser. 1, XIV, 42–72) im Jahre 1732 ohne Beweis an; 1735 lieferte er einen Beweis nach (Opera Omnia Ser. 1, XIV, 108–123).

Ist $x \geq 1$ reell, so wendet man das Lemma über partielle Summation an mit $a_n := 1$, $t_n := n$ für alle natürlichen n. Man erhält für stetig differenzierbare $g := [1, \infty) \to \mathbb{C}$ mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} g(n) &= [x]g(x) - \int_1^x [t]g'(t)dt \\ &= [x]g(x) - \int_1^x (t - \frac{1}{2})g'(t)dt + \int_1^x (t - [t] - \frac{1}{2})g'(t)dt \\ &= \int_1^x g(t)dt + \frac{1}{2}g(1) + ([x] + \frac{1}{2} - x)g(x) + \int_1^x (t - [t] - \frac{1}{2})g'(t)dt.\end{aligned}$$

Schreibt man N für ganzzahliges x, so nimmt die EULERsche Summenformel die geläufigere Form

$$\sum_{n=1}^{N} g(n) = \int_1^N g(t)dt + \frac{1}{2}(g(1) + g(N)) + \int_1^N (t - [t] - \frac{1}{2})g'(t)dt \tag{1}$$

an. Insbesondere für $g = \log$ erhält man daraus

$$\begin{aligned}\log N! &= \int_1^N \log t\, dt + \frac{1}{2}\log N + \int_1^N (t - [t] - \frac{1}{2})t^{-1}dt \\ &= N\log N - N + \frac{1}{2}\log N + O(1)\end{aligned} \tag{2}$$

bei $N \to \infty$. Dabei ist beachtet, daß für große n gilt

$$\int_n^{n+1} (t - [t] - \frac{1}{2})t^{-1} dt = 1 - (n + \frac{1}{2}) \log(1 + \frac{1}{n}) = -\frac{1}{12} n^{-2} + O(n^{-3}).$$

Der erhaltene Ausdruck für $\log N!$ ist im wesentlichen die wohlbekannte STIRLING–*Formel*.

5. Zwei asymptotische Ergebnisse von Mertens. Hier werden nach dem Vorgang von MERTENS (J. Reine Angew. Math. *78*, 46–62 (1874)) zwei Summen über Primzahlen ausgewertet. Durch Kombination beider Resultate wird dann in 6 ein weiterer Satz von TCHEBYCHEF gewonnen, für den dieser in der ersten am Ende von 1 genannten Arbeit einen deutlich komplizierteren Beweis geliefert hat.

Proposition A. *Bei* $x \to \infty$ *gilt* $\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$.

Beweis. Nach der LEGENDRE–Identität 2 ist für ganzes $N \geq 0$

$$\begin{aligned} \log N! &= \sum_{p \le N} \nu_p(N!) \log p \\ &= \sum_{p \le N} (\log p) \sum_{j \ge 1} [N p^{-j}] \qquad (1) \\ &= N \sum_{p \le N} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \le N} (\frac{N}{p} - [\frac{N}{p}]) \log p + \sum_{p \le N} (\log p) \sum_{j \ge 2} [N p^{-j}]. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Summanden der $\Sigma_2(N)$ genannten zweiten Summe ganz rechts in (1) ist $\pi(N)$, nach Satz 3 also höchstens $\frac{6N}{\log N}$ bei $N > 1$; da jeder einzelne Summand nichtnegativ und durch $\log N$ beschränkt ist, hat man $0 \le \Sigma_2(N) \le 6N$ für $N \geq 1$. Für die mit $\Sigma_3(N)$ bezeichnete letzte Doppelsumme in (1) gilt offenbar

$$0 \le \Sigma_3(N) \le N \sum_{p \le N} \frac{\log p}{p(p-1)} < N \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} =: cN,$$

da die auftretende unendliche Reihe konvergiert.

Benutzt man andererseits in (1) zur Auswertung von $\log N!$ die Formel 4(2), so erhält man nach Division durch N die Asymptotik $\log N + O(1) = \sum_{p \le N} (\log p)/p$.

Für jedes große *reelle* x ist damit

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log[x]+O(1)=\log x+\log(1-\frac{\{x\}}{x})+O(1)$$
$$=\log x+O(1)+O(\frac{1}{x}),$$

woraus die Behauptung folgt; man beachte $\{x\}=x-[x]$. □

Proposition B. *Es gibt eine reelle Konstante B, so daß für $x\to\infty$ gilt*

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+B+O(\frac{1}{\log x}).$$

Beweis. Nach dem Lemma 4 über partielle Summation, angewandt mit $t_n:=p_n$, $a_n:=(\log p_n)/p_n$, $g(t):=1/\log t$, ist

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\,\frac{1}{\log p}=\frac{A(x)}{\log x}+\int_2^x\frac{A(t)}{t\log^2 t}dt. \tag{2}$$

Nach Proposition A ist hier $A(t)=\log t+a(t)$, wobei $a(t)$ beschränkt bleibt. Trägt man dies rechts in (2) ein, so entsteht

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\int_2^x\frac{dt}{t\log t}+1+\int_2^\infty\frac{a(t)}{t\log^2 t}\,dt+\frac{a(x)}{\log x}-\int_x^\infty\frac{a(t)}{t\log^2 t}\,dt;$$

die beiden letzten Summanden rechts sind $O(\frac{1}{\log x})$. □

Bemerkung. Proposition B stellt eine deutliche Verbesserung einer Aussage in Bemerkung 4 zu 1.4.5 dar. Als Übung leite man aus Proposition B die Asymptotik

$$\prod_{p\le x}(1-\frac{1}{p})\sim\frac{C}{\log x}\qquad(x\to\infty)$$

mit einer Konstanten $C\in\mathbb{R}_+$ her. Übrigens ist $C=e^{-\gamma}$, wobei γ die in 5.1.11 erwähnte EULERsche Konstante bedeutet.

6. Letzte Vorstufe des Primzahlsatzes. Die Abschätzungen 3(1) und 3(4) ergänzend konnte TCHEBYCHEF mit seinen Methoden in Richtung auf den Primzahlsatz 1(1) noch zeigen:

Satz. *Wenn $\pi(x)(\log x)/x$ bei $x \to \infty$ konvergiert, dann ist der Grenzwert Eins.*

Beweis. Es existiere der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x}$ und er sei gleich C; das bedeutet $\pi(x) = \frac{x}{\log x}(C + \varepsilon(x))$ mit einer Funktion $\varepsilon(x)$, die bei $x \to \infty$ gegen Null konvergiert. Unter Beachtung dieser Gleichheit gibt das Lemma 4 über partielle Summation, angewandt mit $t_n := p_n$, $a_n := 1$, $g(t) := 1/t$

$$\begin{aligned}\Sigma(x) : = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p\leq x} 1 \cdot \frac{1}{p} &= \frac{\pi(x)}{x} + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{C+\varepsilon(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{C+\varepsilon(t)}{t \log t} dt = (C + \delta(x)) \log\log x\end{aligned}$$

mit einer Funktion $\delta(x)$, die bei $x \to \infty$ gegen Null strebt. Nach Proposition 5B ist $\Sigma(x) = \log\log x + O(1)$ und so folgt aus der zuletzt erhaltenen Gleichungskette $C = 1$. □

Bemerkung. In den Ungleichungen 3(4) bzw. 3(1) kann man die Faktoren $\frac{1}{2}\log 2$ bzw. $8\log 2$ bei $\frac{x}{\log x}$ noch verbessern, vor allem dann, wenn man mit Abschätzungen für $\pi(x)$ zufrieden ist, die nur für alle genügend großen x gelten. Tchebychef selbst hatte 0,92129... bzw. 1,10555... als Faktoren. Mit Tchebychefs Originalmethode, aber viel größerem numerischem Aufwand konnte Sylvester (Collected Mathematical Papers III, 530–545; IV, 687–731) beide Faktoren noch weiter auf 0,95695... bzw. 1,04423... verschärfen. Seine zweite Arbeit erschien 1892, vier Jahre vor dem Beweis des Primzahlsatzes. Interessant ist das Ende seiner ersten Arbeit (1881), wo er über den (vermuteten) Primzahlsatz sagt: "... we shall probably have to wait until some one is born into the world as far surpassing Tchebycheff in insight and penetration as Tchebycheff has proved himself superior in these qualities to the ordinary run of mankind."

§ 3. Der Primzahlsatz

1. Riemanns Anstoß. Nachdem die elementaren Tchebychefschen Methoden weitgehend ausgenützt waren, stagnierte das Problem der asymptotischen Bestimmung von $\pi(x)$ bis in die 1890er Jahre. Wichtige Fortschritte der Funktionentheorie ließen damals die bereits in 1.4.14 zitierte Riemannsche Abhandlung *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* aus dem Jahre 1859 erst richtig zugänglich und fruchtbar werden.

In dieser seiner einzigen, zu Lebzeiten publizierten zahlentheoretischen Arbeit hatte Riemann auf nur neun Druckseiten in äußerst komprimierter Form über ausgiebige Untersuchungen referiert, eigentlich mehr ein Programm entworfen, dessen Ideen die Nachwelt zu verstehen und auszuarbeiten hatte. Was er dort wirklich *bewies*, war, daß die zunächst nur in der Halbebene Re $s > 1$ durch die Reihe $\sum n^{-s}$ definierte Funktion $\zeta(s)$ (vgl. 1.4.4(3)) nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar ist, daß diese Fortsetzung lediglich an der Stelle 1 einen Pol besitzt (einfach und mit Residuum 1) und daß sie einer gewissen Funktionalgleichung genügt (vgl. 10).

Außerdem folgten vier *Behauptungen* über die Nullstellenverteilung der Zetafunktion, eine über die Produktzerlegung der ganzen Funktion $(s-1)\zeta(s)$ und als einzige zahlentheoretische Behauptung die sogenannte Primzahlformel. Bei dieser wird die endliche Summe $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j}\pi(x^{1/j})$ im wesentlichen durch li x und die Werte li x^ρ exakt ausgedrückt, wenn ρ alle Nullstellen der Zetafunktion durchläuft und li den durch 2.1(3) eingeführten Integrallogarithmus bezeichnet.

Wichtiger als die Primzahlformel selbst, für deren Richtigkeit RIEMANN nur heuristische Gründe angegeben hatte, war seine Idee, durch Anwendung der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen auf das Studium einer ganz bestimmten Funktion, hier der Zetafunktion, zahlentheoretische Sätze zu gewinnen. Diese Idee erwies sich als umso fruchtbarer, je weiter sich die Funktionentheorie entwickelt hatte.

So konnte J. HADAMARD 1893, gestützt auf seine Untersuchungen über die Produktentwicklung ganzer Funktionen endlicher Wachstumsordnung (vgl. Bemerkung zu 6.5.8), einer Verfeinerung des WEIERSTRASSschen Produktsatzes, drei der oben genannten RIEMANNschen Behauptungen beweisen. Ebenfalls von der HADAMARDschen Produktentwicklung von $(s-1)\zeta(s)$ ausgehend konnte H. VON MANGOLDT 1895 die RIEMANNsche Primzahlformel zeigen, aus der der Primzahlsatz jedoch nicht abgeleitet werden konnte. Im Jahre 1905 erbrachte VON MANGOLDT noch den Beweis einer weiteren der sechs RIEMANNschen Behauptungen, von denen heute noch eine offen ist (vgl. 12).

In diese Jahre stürmischer Entwicklung, angeregt durch RIEMANNs genialen Anstoß und die Schaffung geeigneter Hilfsmittel in der Funktionentheorie, fielen auch die beiden ersten Beweise für den

Primzahlsatz. *Bei $x \to \infty$ gilt $\pi(x) \sim x/(\log x)$.*

Diese Beweise fanden unabhängig voneinander und nahezu zeitgleich HADAMARD (Oeuvres I, 189–210) und C. DE LA VALLEE POUSSIN (Ann. Soc. Sci. Bruxelles *20*, 183–256, 281–397 (1896)). Beide verwendeten entscheidend die Tatsache, daß ζ in der Halbebene Re $s \geq 1$ nicht verschwindet (vgl. unten Satz 4). Auch der hier in 2 bis 8 zu führende Beweis des Primzahlsatzes nützt dies (in 6) aus.

2. Konvergenz einer Folge und Primzahlsatz. Nachstehend wird der Primzahlsatz auf ein der hier anzuwendenden Methode leichter zugängliches Problem verlagert.

Proposition. *Die Konvergenz der Folge*

$$\Big(\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}-\log n\Big)_{n=1,2,\ldots} \tag{1}$$

impliziert den Primzahlsatz.

Beweis. Setzt man $A(x) := \sum_{p\le x}(\log p)/p$ für reelles positives x und konvergiert die Folge (1) gegen c, so hat man wegen $\log([x]/x) = \log(1-\{x\}/x) = O(\frac{1}{x})$ bei $x\to\infty$

$$A(x)-\log x-c = A([x])-\log[x]-c+O(x^{-1}) = o(1).$$

Daher strebt die Funktion $A(x)-\log x$ der reellen Variablen x bei $x\to\infty$ gegen c. Mit geeigneter Funktion $\varepsilon : \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, die $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$ genügt, ist also für $x\in\mathbb{R}_+$ nach der Voraussetzung in der Proposition

$$A(x) = \log x + c + \varepsilon(x).$$

Nach dem Lemma 2.4 über partielle Summation ist dann

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\,\frac{p}{\log p}\\ &= A(x)\frac{x}{\log x}+\int_2^x A(t)\frac{1-\log t}{\log^2 t}\,dt \qquad (2)\\ &= \int_2^x\frac{dt}{\log t}+2+\frac{2c}{\log 2}+\frac{\varepsilon(x)x}{\log x}+\int_2^x\varepsilon(t)\frac{1-\log t}{\log^2 t}\,dt.\end{aligned}$$

Wird nun $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ beliebig vorgegeben, so ist $|\varepsilon(t)|\le\varepsilon$ für alle t oberhalb eines $x_0(\varepsilon)$, das o.B.d.A. schon größer als e sein möge; das letzte Integral in (2) ist absolut beschränkt durch

$$\Big|\int_2^{x_0(\varepsilon)}\varepsilon(t)\frac{1-\log t}{\log^2 t}dt\Big| + \varepsilon\Big(\frac{x}{\log x}-\frac{2}{\log 2}\Big).$$

Aus (2) folgt damit $\pi(x) = \mathrm{li}\,x + o(x/\log x)$ und hieraus mit 2.1(4) der Primzahlsatz. □

Bemerkung. Umgekehrt kann auch aus dem Primzahlsatz die Konvergenz der Folge (1) hergeleitet werden.

3. Die Reste der Zetareihe. In 1.4.4(3) wurde die RIEMANNsche Zetafunktion ζ in $\sigma := \operatorname{Re} s > 1$ definiert durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{1}$$

Die in 4 und 6 über die "Reste" $\sum_{n \geq N} n^{-s}$ dieser Reihe benötigte Information ist enthalten im folgenden

Lemma. *Für jedes natürliche N gilt in $\sigma > 1$*

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{s-1} N^{1-s} + s \int_N^{\infty} (1 - \{t\}) t^{-s-1} dt. \tag{2}$$

Dabei ist das Integral in $\sigma > 0$ holomorph.

Beweis. Für reelles $x \geq N$ ist nach dem Lemma 2.4 über partielle Summation

$$\sum_{N \leq n \leq x} n^{-s} = ([x] - N + 1)x^{-s} + s \int_N^x ([t] - N + 1) t^{-s-1} dt.$$

In der Halbebene $\sigma > 1$ folgt daraus bei $x \to \infty$

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} = s \int_N^{\infty} (t - N + 1 - \{t\}) t^{-s-1} dt$$

und die Ausführung des Integrals liefert (2).

Daß das in $\sigma > 0$ absolut konvergente Integral

$$J(s) := \int_N^{\infty} (1 - \{t\}) t^{-s-1} dt \tag{3}$$

dort eine holomorphe Funktion definiert ($N \geq 1$ sei eine feste *reelle* Zahl), kann man allgemeinen funktionentheoretischen Sätzen über die Holomorphie sogenannter Parameterintegrale entnehmen, soll hier jedoch *ad hoc* gezeigt werden.

Dazu beachtet man die für reelle $t \geq 1$ und komplexe $h \neq 0$ gültige Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{h}(t^{-h}-1)+\log t| &= |\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}h^{\ell-1}\log^{\ell} t| \\
&\leq |h|(\log t)^2\sum_{\ell\geq 0}\frac{1}{\ell!}(|h|\log t)^{\ell} \qquad (4)\\
&= |h|t^{|h|}\log^2 t.
\end{aligned}
$$

Führt man jetzt noch das ebenfalls in $\sigma > 0$ absolut konvergente Integral

$$
K(s) := -\int_N^{\infty}(1-\{t\})(\log t)t^{-s-1}dt \tag{5}
$$

ein, so folgt mit (3) und (4) für komplexe $h \neq 0$ und s mit $\operatorname{Re} s > 0$, $\operatorname{Re}(s+h) > 0$

$$
\begin{aligned}
|\frac{J(s+h)-J(s)}{h}-K(s)| &= |\int_N^{\infty}(1-\{t\})\big(\frac{1}{h}(t^{-h}-1)+\log t\big)t^{-s-1}dt| \\
&\leq |h|\int_N^{\infty}t^{-\sigma-1+|h|}\log^2 t\,dt \\
&\leq |h|\int_N^{\infty}t^{-1-(\sigma/2)}\log^2 t\,dt.
\end{aligned}
$$

Denn bei festem s mit $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ darf im Sinne des geplanten Grenzübergangs $h \to 0$ von vornherein $|h| \leq \frac{1}{2}\sigma$ vorausgesetzt werden. Damit ist die Holomorphie von J in $\sigma > 0$ gezeigt einschließlich der in dieser Halbebene gültigen (erwarteten) Gleichung $J' = K$. □

4. Fortsetzung und Nullstellenfreiheit der Riemannschen Zetafunktion. Diesbezüglich entnimmt man die für den Beweis des Primzahlsatzes benötigten Informationen folgendem

Satz. *Die in $\sigma > 1$ durch die Reihe 3(1) definierte* RIEMANN*sche Zetafunktion läßt sich in die Halbebene $\sigma > 0$ meromorph fortsetzen. Diese Fortsetzung ist dort holomorph bis auf einen einfachen Pol an der Stelle 1 mit dem Residuum 1; außerdem ist sie in $\sigma \geq 1$ nullstellenfrei.*

Beweis. Alle Aussagen, die sich auf die Halbebene $\sigma > 1$ beziehen, wurden schon in 1.4.4 bereitgestellt. Nach Lemma 3 gilt in $\sigma > 1$

$$
\zeta(s) = \frac{1}{s-1}+s\int_1^{\infty}(1-\{t\})t^{-s-1}dt\,, \tag{1}
$$

wobei das Integral rechts in $\sigma > 0$ holomorph ist. Damit ist jetzt nur noch $\zeta(1+it) \neq 0$ für alle reellen $t \neq 0$ zu zeigen.

Wäre $1+iT$ mit $T \in \mathbb{R}^\times$ eine Nullstelle von ζ, so würde die TAYLOR-Entwicklung von $\zeta(s+iT)$ um $s=1$ beginnen mit

$$(2) \qquad \zeta(s+iT) = (s-1)\zeta'(1+iT) + \dots ,$$

während nach (1) die LAURENT–Entwicklung von $\zeta(s)$ um $s=1$ mit

$$(3) \qquad \zeta(s) = (s-1)^{-1} + \dots$$

anfängt. Die durch

$$(4) \qquad Z(s) := \zeta(s)^3 \zeta(s+iT)^4 \zeta(s+2iT)$$

definierte Funktion Z ist in $\sigma > 1$ holomorph, in $\sigma > 0$ meromorph und hat wegen (2) und (3) an der Stelle $s=1$ eine Nullstelle, weswegen

$$(5) \qquad \log|Z(\sigma)| \to -\infty \qquad \text{bei } \sigma \to 1$$

gilt.

Aus der EULERschen Produktdarstellung 1.4.4(4) von ζ folgt durch Logarithmieren

$$(6) \qquad \log\zeta(s) = \sum_p -\log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j} p^{-js} =: \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$$

in $\sigma > 1$, wobei log den Hauptwert des komplexen Logarithmus bedeutet. Da die a_n offenbar nichtnegative rationale Zahlen sind, ist mit $t := \operatorname{Im} s$

$$(7) \qquad \log|\zeta(s)| = \operatorname{Re} \log\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-\sigma} \cos(t \log n),$$

wobei log links und in der Summe rechts wieder den reellen Logarithmus bedeutet. Für $\sigma > 1$ ist wegen (4) und (7)

$$\begin{aligned} \log|Z(\sigma)| &= 3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+iT)| + \log|\zeta(\sigma+2iT)| \\ &= \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-\sigma}(3 + 4\cos(T\log n) + \cos(2T\log n)) \geq 0, \end{aligned}$$

was (5) widerspricht. Dabei folgt die untere Abschätzung der Summe aus $a_n n^{-\sigma} \geq 0$ und der für alle reellen τ gültigen Ungleichung

$$3 + 4\cos\tau + \cos 2\tau = 2(1+\cos\tau)^2 \geq 0. \qquad \square$$

5. Über gewisse Dirichlet–Reihen. Ist $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen, so nennt man bei komplexem s Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \tag{1}$$

DIRICHLET–*Reihen*. Solche Reihen sind bereits in 1.4.4(1) und 1.4.4(3) aufgetreten, ebenso wie zuletzt in 3 und 4. In 6 wird über DIRICHLET–Reihen folgendes einfache Ergebnis gebraucht.

Lemma. *Gilt bei beliebigem reellem $\varepsilon > 0$ für die Koeffizienten a_n der* DIRICHLET*–Reihe (1) die Bedingung $a_n = O(n^\varepsilon)$ bei $n \to \infty$, so konvergiert diese Reihe mindestens in $\sigma > 1$ absolut und kompakt gleichmäßig, definiert dort also eine holomorphe Funktion.*

Beweis. Man fixiere ein reelles $\sigma_0 > 1$ beliebig. Sodann wähle man ε reell mit $0 < \varepsilon < \sigma_0 - 1$ beliebig und hat nach Voraussetzung $|a_n| \le c(\varepsilon)n^\varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}| \le c(\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma-\varepsilon)} \le c(\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma_0-\varepsilon)}$$

für alle komplexen s mit Re $s = \sigma \ge \sigma_0$. Die Reihe ganz rechts konvergiert wegen $\sigma_0 - \varepsilon > 1$ und das WEIERSTRASSsche Majoranten–Kriterium liefert die Behauptung. □

Bemerkung. Über die Theorie der DIRICHLET–Reihen gibt etwa das Buch von G.H. HARDY und M. RIESZ (*The general theory of Dirichlet's series*, University Press, Cambridge, 1952) detaillierte Auskünfte.

6. Die Existenz des Grenzwerts. Nach Proposition 2 ist der Primzahlsatz bewiesen, sobald das folgende Ergebnis gezeigt ist.

Satz. *Die Folge $(\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p} - \log n)_{n=1,2,\ldots}$ konvergiert.*

Beweis. Wird $a_n := \sum_{p\le n}(\log p)/p$ für natürliche n gesetzt, so gilt $a_n = \log n + O(1)$ nach Proposition 2.5A, erst recht also $a_n = O(n^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Lemma 5 definiert die in $\sigma > 1$ absolut konvergente Reihe $\sum a_n n^{-s}$ dort eine holomorphe Funktion $f(s)$. Für diese gilt in $\sigma > 1$, wenn man die Summationsreihenfolge mit Rücksicht auf die vorliegende absolute Konvergenz vertauscht,

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}n^{-s} = \sum_p \frac{\log p}{p}\sum_{n=p}^{\infty} n^{-s}. \tag{1}$$

Die letzte innere Summe wird mittels Lemma 3 weiter bearbeitet:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{\infty} n^{-s} &= \frac{1}{s-1}p^{1-s} + s\int_p^{\infty}(1-\{t\})t^{-s-1}\,dt \\
&= \frac{p}{s-1}\Big(\frac{1}{p^s-1} - \frac{1}{p^s(p^s-1)} + \frac{s(s-1)}{p}\int_p^{\infty}(1-\{t\})t^{-s-1}\,dt\Big).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Für jede Primzahl p ist die Funktion

$$
g_p(s) := \frac{1}{p^s(1-p^s)} + \frac{s(s-1)}{p}\int_p^{\infty}(1-\{t\})t^{-s-1}\,dt \tag{3}
$$

in der Halbebene $\sigma > 0$ holomorph; weiter gilt dort die Abschätzung

$$
|g_p(s)| \le \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma-1)} + \frac{|s|(|s|+1)}{\sigma p^{\sigma+1}}. \tag{4}
$$

Nach (1), (2), (3) ist in $\sigma > 1$

$$
f(s) = \sum_p \frac{\log p}{p}\,\frac{p}{s-1}\Big(\frac{1}{p^s-1} + g_p(s)\Big) = \frac{1}{s-1}\Big(\sum_p \frac{\log p}{p^s-1} + \sum_p g_p(s)\log p\Big),
$$

wobei die letzte Reihe rechts wegen (4) eine in $\sigma > \frac{1}{2}$ holomorphe Funktion h definiert. Mit dieser hat man also

$$
f(s) = \frac{1}{s-1}\Big(\sum_p \frac{\log p}{p^s-1} + h(s)\Big). \tag{5}
$$

Durch Differentiation der linken Hälfte von 4(6) erhält man in $\sigma > 1$

$$
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s-1};
$$

dies in (5) eingetragen führt zu der in $\sigma > 1$ gültigen Formel

$$
f(s) = \frac{1}{s-1}\Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + h(s)\Big), \tag{6}
$$

deren rechte Seite nach Satz 4 und den vor (5) über h festgestellten Holomorphieverhältnissen jedenfalls in $\sigma \ge 1$ holomorph ist bis auf einen doppelten Pol an der Stelle 1. Der Hauptteil der LAURENT–Entwicklung von f um 1 ist wegen

(6) und Satz 4 gleich $(s-1)^{-2} + C(s-1)^{-1}$ mit einer gewissen reellen Konstanten C. Mit diesem C definiert man nun die jedenfalls in $\sigma \geq 1$ holomorphe Funktion

$$F(s) := f(s) + \zeta'(s) - C\zeta(s).$$

Diese neue Funktion F besitzt nach (1), 3(1) und der aus 3(1) folgenden Formel $\zeta'(s) = -\sum(\log n)n^{-s}$ in $\sigma > 1$ die folgende Darstellung als DIRICHLET–Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \log n - C)n^{-s},$$

deren Koeffizienten

$$(7) \qquad f_n := a_n - \log n - C = \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} - \log n - C$$

nach Proposition 2.5A beschränkt sind. Der in 8 folgende Konvergenzsatz beinhaltet dann insbesondere, daß die Reihe

$$(8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-1} \quad \text{konvergiert,}$$

woraus in 7 gefolgert wird, daß $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Nullfolge ist. Das letztere ist nach (7) gleichbedeutend mit

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p} - \log n\Big) = C. \qquad \square$$

7. Anwendung des Cauchy–Kriteriums. Mit diesem wird hier gezeigt, daß *die durch* 6(7) *definierte Folge* (f_n) wegen 6(8) *gegen Null konvergiert.*

Wegen 6(8) gibt es zunächst zu beliebigem reellem $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$ ein $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$, so daß für alle ganzen $N > N_0$ die beiden Ungleichungen

$$(1) \qquad \sum_{N \leq n \leq N(1+\varepsilon)} f_n n^{-1} < \varepsilon^2 \quad \text{und} \quad \sum_{N(1-\varepsilon)\leq n \leq N} f_n n^{-1} > -\varepsilon^2$$

gelten. Für die ganzen n mit $N \leq n \leq N(1+\varepsilon)$ ist wegen 6(7)

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p} - \log n - C \geq \sum_{p \leq N}\frac{\log p}{p} - \log N - C + \log\frac{N}{n} \\ &\geq f_N - \log(1+\varepsilon) > f_N - \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach der ersten Ungleichung (1) folgt hieraus

$$(2) \qquad (f_N - \varepsilon) \sum_{N \le n \le N(1+\varepsilon)} \frac{1}{n} < \varepsilon^2.$$

Da die Summe links in (2) nicht kleiner als $\frac{1+[N(1+\varepsilon)]-N}{N(1+\varepsilon)} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ist, folgt $f_N - \varepsilon < \varepsilon(1+\varepsilon)$, also $f_N < \varepsilon(2+\varepsilon) \le \frac{5}{2}\varepsilon$, wenn nur $N > N_0$ gilt.

Andererseits gilt für die ganzen n mit $N(1-\varepsilon) \le n \le N$ wegen 6(7)

$$f_n \le \sum_{p \le N} \frac{\log p}{p} - \log N - C + \log \frac{N}{n} \le f_N - \log(1-\varepsilon) < f_N + 2\varepsilon,$$

letzteres mit Rücksicht auf $\varepsilon \le \frac{1}{2}$. Nach der zweiten Ungleichung (1) erhält man daraus

$$(3) \qquad (f_N + 2\varepsilon) \sum_{N(1-\varepsilon) \le n \le N} \frac{1}{n} > -\varepsilon^2.$$

Hier ist die Summe nicht kleiner als $\frac{N-[N(1-\varepsilon)]}{N} \ge \varepsilon$. Aus (3) folgt damit $f_N + 2\varepsilon > -\varepsilon$, also $f_N > -3\varepsilon$, falls nur $N > N_0$ gilt. Insgesamt hat man $|f_N| < 3\varepsilon$ für diese N und so ist (f_N) als Nullfolge erkannt.

8. Konvergenzsatz. *Sei $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen und die in $\sigma > 1$ durch die* DIRICHLET*–Reihe*

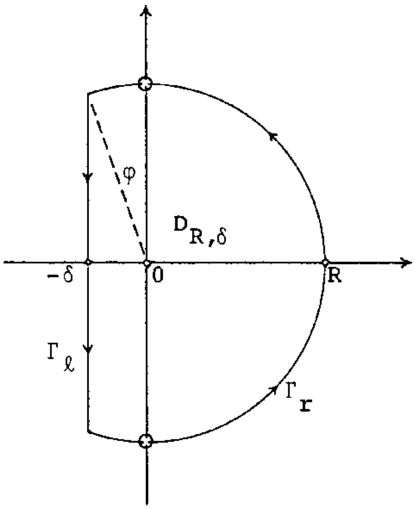
$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-s}$$

definierte Funktion F sei in $\sigma \ge 1$ holomorph. Dann konvergiert die Reihe (1) in $\sigma \ge 1$ gegen $F(s)$.

Beweis. Man fixiere $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\sigma_0 := \text{Re } s_0 \ge 1$. Dann ist $F(s+s_0)$ jedenfalls in $\sigma := \text{Re } s \ge 0$ nach Voraussetzung holomorph. Ist jetzt $R \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt, so kann man ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\delta \le \text{Min}(1, R/\sqrt{2})$ finden derart, daß das Kreissegment

$$D_{R,\delta} := \{s \in \mathbb{C} : |s| \le R,\ \text{Re } s \ge -\delta\}$$

ganz dem Holomorphiegebiet von $F(s+s_0)$ angehört. Bezeichnet Γ den einmal in positivem Sinne durchlaufenen Rand von $D_{R,\delta}$ und Γ_r (bzw. Γ_ℓ) den in der rechten (bzw. linken) Halbebene $\sigma > 0$ (bzw. $\sigma \le 0$) gelegenen Teil von Γ, so gilt nach der CAUCHYschen Integralformel



$$2\pi i F(s_0) = \int_\Gamma F(s+s_0) N^s (s^{-1} + sR^{-2}) ds. \tag{2}$$

Dabei bedeutet N hier und im folgenden eine beliebige natürliche Zahl. Für $s \in \Gamma_r$ ist $\mathrm{Re}(s+s_0) > 1$, also hat man dort

$$F(s+s_0) = (\sum_{n \le N} + \sum_{n > N}) f_n n^{-s-s_0} =: Q_N(s+s_0) + R_N(s+s_0). \tag{3}$$

Da $Q_N(s+s_0)$ in der ganzen s–Ebene holomorph ist, hat man

$$\begin{aligned} 2\pi i Q_N(s_0) &= \int_{|s|=R} Q_N(s+s_0) N^s (s^{-1} + sR^{-2}) ds \\ &= \int_{\Gamma_r} Q_N(s+s_0) N^s (s^{-1} + sR^{-2}) ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_r} Q_N(s_0 - s) N^{-s} (s^{-1} + sR^{-2}) ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Subtrahiert man (4) von (2), so entsteht unter Beachtung von (3)

$$2\pi i (F(s_0) - Q_N(s_0)) =$$

$$(5) \qquad = \int_{\Gamma_r} (R_N(s+s_0)N^s - Q_N(s_0-s)N^{-s})(s^{-1}+sR^{-2})ds$$
$$+ \int_{\Gamma_\ell} F(s+s_0)N^s(s^{-1}+sR^{-2})ds.$$

Kann man jetzt zeigen, daß hier die rechte Seite für genügend große N beliebig klein wird, so bedeutet dies die Konvergenz der Partialsummen $Q_N(s_0) = \sum_{n\le N} f_n n^{-s_0}$ der Reihe $\sum_n f_n n^{-s_0}$ gegen $F(s_0)$, womit dann der Satz bewiesen ist.

Um die Kleinheit der rechten Seite in (5) einzusehen, werden einige Abschätzungen benötigt. Zunächst ist

$$(6) \qquad \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} = \frac{2}{R}\cos(\arg s) = \frac{2 \operatorname{Re} s}{R^2} \qquad \text{auf } |s| = R.$$

Auf der in Γ_ℓ enthaltenen Strecke $s = -\delta + it$, $t \in \mathbb{R}$, $|t| \le (R^2-\delta^2)^{1/2}$ ist

$$(7) \qquad |\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}| \le \frac{1}{(\delta^2+t^2)^{1/2}} + \frac{(\delta^2+t^2)^{1/2}}{R^2} = \frac{R^2+\delta^2+t^2}{R^2(\delta^2+t^2)^{1/2}} \le \frac{2}{\delta}.$$

Bezeichnet $c \in \mathbb{R}_+$ eine obere Schranke für alle $|f_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, so gilt für $s \in \Gamma_r$ erstens

$$(8) \qquad \frac{1}{c}|R_N(s+s_0)| \le \sum_{n>N} n^{-\sigma-1} < \int_N^\infty t^{-\sigma-1}dt = \frac{1}{\sigma N^\sigma}$$

und zweitens

$$(9) \qquad \frac{1}{c}|Q_N(s_0-s)| \le \sum_{n\le N} n^{\sigma-1} \le N^\sigma(\frac{1}{N}+\frac{1}{\sigma}).$$

Dabei ist beachtet, daß man für $\sigma \ge 1$ die Abschätzung

$$\sum_{n\le N} n^{\sigma-1} = N^{\sigma-1} + \sum_{n=1}^{N-1} n^{\sigma-1} < N^{\sigma-1} + \int_0^N t^{\sigma-1}dt = N^\sigma(\frac{1}{N}+\frac{1}{\sigma})$$

hat, während man in $0 < \sigma < 1$ sogar mit

$$\sum_{n\le N} n^{\sigma-1} < \int_0^N t^{\sigma-1}dt = \frac{1}{\sigma}N^\sigma$$

auskommt.

Wegen (6), (8), (9) ist für $s \in \Gamma_r$

$$|(R_N(s+s_0)N^s - Q_N(s_0-s)N^{-s})(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})| \le c\big(\frac{2}{\sigma}+\frac{1}{N}\big)\frac{2\sigma}{R^2} = c\big(4+\frac{2\sigma}{N}\big)\frac{1}{R^2}$$

und so gilt für das erste Integral rechts in (5)

$$|\int_{\Gamma_r}(\ldots)(\ldots)ds| \le 2\pi c\big(\frac{2}{R}+\frac{1}{N}\big). \tag{10}$$

Das zweite Integral rechts in (5) muß man sehr genau untersuchen. Zunächst werde $M := \mathrm{Max}\{|F(s+s_0)| : s \in D_{R,\delta}\}$ gesetzt; offenbar hängt M alleine von R und δ ab. Auf dem Teil von Γ_ℓ mit Re $s = -\delta$ berücksichtigt man $|N^s| = N^{-\delta}$ im Integranden; die Länge dieses Teils des Integrationswegs ist $2(R^2-\delta^2)^{1/2} < 2R$ und so liefert dieser wegen (7) höchstens den Beitrag

$$MN^{-\delta}\frac{2}{\delta}2R \tag{11}$$

zum Absolutbetrag des zweiten Integrals in (5). Der Beitrag des in $-\delta <$ Re $s \le 0$ verlaufenden Teils des Integrationswegs ist wegen (6), wenn φ den in der Figur definierten Winkel bedeutet,

$$\Big(\int_{\pi/2}^{\pi/2+\varphi} + \int_{3\pi/2-\varphi}^{3\pi/2}\Big)F(Re^{i\tau}+s_0)N^{R\cos\tau+iR\sin\tau}\frac{2\cos\tau}{R}iRe^{i\tau}d\tau.$$

Der Absolutbetrag hiervon ist höchstens

$$\begin{aligned}
&2M\Big(\int_{\pi/2}^{\pi/2+\varphi} + \int_{3\pi/2-\varphi}^{3\pi/2}\Big)(-\cos\tau)N^{R\cos\tau}d\tau \\
&= 4M\int_{\pi/2}^{\pi/2+\varphi}(-\cos\tau)N^{R\cos\tau}d\tau = 4M\int_0^{\sin\varphi}\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}N^{-Rx}dx \\
&\le 4M\int_0^{\sin\varphi}N^{-Rx}dx < \frac{4M}{R\log N},
\end{aligned} \tag{12}$$

falls nur $N > 1$ ist. Hierbei hat man die vorletzte Ungleichung, da $\sin\varphi = \frac{\delta}{R} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ nach der Wahl von δ gilt und daher $x(1-x^2)^{-1/2} \le 1$ für alle reellen $x \in [0, \sin\varphi]$ zutrifft.

Aus (11) und (12) entnimmt man die Abschätzung

$$|\int_{\Gamma_\ell}F(s+s_0)N^s(s^{-1}+sR^{-2})ds| \le \frac{4MR}{\delta N^\delta} + \frac{4M}{R\log N}.$$

Dies mit (10) kombiniert ergibt wegen (5)

$$|F(s_0) - Q_N(s_0)| \le c\Big(\frac{2}{R} + \frac{1}{N}\Big) + \frac{2MR}{\pi\delta N^\delta} + \frac{2M}{\pi R \log N}\,. \tag{13}$$

Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig vorgegeben, so fixiert man etwa $R := \frac{1}{\varepsilon}$ und wählt anschließend δ (alleine abhängig von ε), so daß es alle von ihm zu Anfang des Beweises verlangten Eigenschaften hat. Wie nach (10) festgestellt, hängt dann auch M lediglich von ε ab. Wegen (13) hat man somit für alle ganzen $N > N_0(\varepsilon) := \mathrm{Max}\big(1, \varepsilon^{-1}, (\frac{2M}{\pi\delta\varepsilon^2})^{1/\delta}, \exp(\frac{2M}{\pi})\big)$ die Ungleichung

$$|F(s_0) - Q_N(s_0)| < 3c\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (3c+2)\varepsilon,$$

was den Konvergenzsatz beweist. □

9. Mittelwert der Möbius–Funktion. Im folgenden Satz wird eine weitere Anwendung des Konvergenzsatzes 8 gegeben.

Satz. *Bezeichnet μ die* MÖBIUS*–Funktion aus 1.4.9, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)} \tag{1}$$

in der Halbebene $\sigma \ge 1$. Insbesondere ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0. \tag{2}$$

Beweis. Da μ nach Satz 1.4.9(i), (ii) multiplikativ und beschränkt ist, gilt nach Satz 1.4.4, Satz 1.4.9(ii) und 1.4.4(4) in $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \prod_p \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu(p^\nu) p^{-\nu s} = \prod_p (1 - p^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)}\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{\zeta}$ ist nach Satz 4 in $\sigma \ge 1$ holomorph; nach Satz 8 konvergiert also $\sum \mu(n) n^{-s}$ in $\sigma \ge 1$ gegen $1/\zeta(s)$. □

Ist f eine zahlentheoretische Funktion und existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)$, so heißt dieser Grenzwert der *Mittelwert* von f. Daß z.B. die EULERsche Funktion φ keinen Mittelwert besitzt, geht aus Satz 1.4.12 hervor.

Korollar. *Bei $x \to \infty$ gilt $\sum_{n\leq x} \mu(x) = o(x)$ und daher besitzt die* MÖBIUS*sche Funktion μ den Mittelwert Null.*

Beweis. Lemma 2.4 über partielle Summation liefert mit $A(t) := \sum\limits_{n\leq t} \mu(n)n^{-1}$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \mu(n) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n} n = A(x) - \frac{1}{x}\int_1^x A(t)dt.$$

Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig vorgegeben, so ist $|A(t)| \leq \varepsilon$ für alle reellen $t \geq x_0(\varepsilon)$ nach dem vorstehenden Satz, also hat man für alle $x \geq \mathrm{Max}(x_0(\varepsilon), \frac{1}{\varepsilon}\int_1^{x_0(\varepsilon)} |A(t)|dt)$ die Abschätzung

$$|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \mu(n)| \leq \varepsilon + \frac{1}{x}\int_1^{x_0(\varepsilon)} |A(t)|dt + \frac{1}{x}\varepsilon(x - x_0(\varepsilon)) \leq 3\varepsilon. \qquad \square$$

Bemerkungen. 1) Die im Korollar untersuchte Summe wurde bereits in Bemerkung 4 zu 1.4.9 erwähnt.

2) EULER betrachtete in § 277 seiner schon in 6.1.1 zitierten *Introductio in Analysin Infinitorum* – in moderner Terminologie – die Reihe $\sum \mu(n)n^{-1}$ und argumentierte heuristisch, sie sei gleich dem Produkt $\prod_p (1-p^{-1})$, also gleich $1/\zeta(1)$ und somit Null. Diese Schlußweise wurde später insoweit gerechtfertigt, als man immerhin sichern konnte: *Wenn* EULERs Reihe konvergiert, so hat sie den Wert Null. *Daß* sie tatsächlich konvergent ist, wurde erst 1897 durch VON MANGOLDT bewiesen, der sich dabei auf funktionentheoretische Untersuchungen der RIEMANNschen Zetafunktion stützte.

LANDAU entdeckte dann 1899, daß Gleichung (2) mittels *elementarer* Methoden aus dem Primzahlsatz ableitbar ist. Dies bedeutet: Wenn man den Primzahlsatz hat, so kann man daraus ohne Verwendung *analytischer*, d.h. funktionentheoretischer Methoden Gleichung (2) gewinnen. 1911 zeigte LANDAU ergänzend, daß auch umgekehrt der Primzahlsatz aus Gleichung (2) mit elementaren Methoden folgt.

Zwei Sätze, die in dem hier präzisierten Sinne auseinander elementar ableitbar sind, bezeichnet man in der Zahlentheorie als *elementar äquivalent*. Dementsprechend sind Gleichung (2) und der Primzahlsatz zueinander elementar äquivalent, unabhängig davon, wie jeder dieser beiden Sätze einzeln bewiesen werden kann.

10. Funktionalgleichung der Zetafunktion. Die Zetafunktion wurde in 1.4.4 durch die für $\sigma > 1$ konvergente Reihe $\sum n^{-s}$ definiert und in 4 mittels partieller Summation in die Halbebene $\sigma > 0$ meromorph fortgesetzt. Der Leser konnte sich davon überzeugen, daß beim oben gegebenen Beweis des Primzahlsatzes lediglich die Kenntnis der Zetafunktion in $\sigma \geq 1$ benötigt wurde.

In seiner in 1 genannten Arbeit hatte RIEMANN zwei Beweise angegeben für folgenden

Satz. *Die* RIEMANN*sche Zetafunktion läßt sich in die ganze komplexe Ebene meromorph fortsetzen und genügt dort der Funktionalgleichung*

$$\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-(1-s)/2} = \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}. \tag{1}$$

Bemerkungen. 1) Im Satz bedeutet Γ die in $\mathbb{C}$ meromorphe und nullstellenfreie Gammafunktion, die genau an den Stellen $0, -1, -2, \ldots$ Pole besitzt, die sämtliche einfach sind.

2) Die hier in der symmetrischen Form (1) angegebene Funktionalgleichung der RIEMANNschen Zetafunktion wird oft auch in der äquivalenten Gestalt

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

aufgeschrieben. Für diverse Beweise der Funktionalgleichung vergleiche man etwa die fünf einschlägigen Monographien über die RIEMANNsche Zetafunktion von E.C. TITCHMARSH (*The Theory of the Riemann Zeta–Function*, Clarendon Press, Oxford, 1951; 2nd Ed. 1986, revised by D.R. HEATH–BROWN; Reprint 1988), H.M. EDWARDS (*Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York–London, 1974), A. IVIC (*The Riemann Zeta–Function*, J. Wiley, New York etc., 1985), S.J. PATTERSON (*An introduction to the theory of the Riemann Zeta–Function*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988) und A.A. KARATSUBA, S.M. VORONIN (*The Riemann Zeta–Function*, W. de Gruyter, Berlin–New York, 1992).

11. Pole und Nullstellen der Zetafunktion. Hierüber gibt folgendes Ergebnis Auskunft, dessen Beweis sich wesentlich auf die Funktionalgleichung 10(1) stützt.

Satz.

(i) *Die* RIEMANN*sche Zetafunktion hat genau an der Stelle 1 einen Pol; dieser ist einfach und hat Residuum 1.*

(ii) *Außerhalb des Streifens* $0 < \sigma < 1$ *hat die Zetafunktion lediglich an* $-2, -4, -6, \ldots$ *Nullstellen, die sämtliche einfach sind.*

(iii) *Für jedes komplexe* s *mit* $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ *gilt: Ist eine der Zahlen* s, $\bar{s}$, $1-s$, $1-\bar{s}$ *Nullstelle der Zetafunktion, so trifft dies für sämtliche zu; auch die Nullstellenordnungen sind dann dieselben.*

Beweis. (i), (ii): Mit Rücksicht auf Satz 4 müssen nur noch die Teile der Behauptungen gezeigt werden, die sich auf die Halbebene $\sigma \leq 0$ beziehen.

In $\sigma > 0$ hat das Produkt $P(s) := \zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}$ nach Satz 4 und den in Bemerkung 1 zu 10 zitierten Eigenschaften der Gammafunktion genau an der Stelle $s = 1$ einen Pol, der überdies einfach ist. Wegen 10(1) ist dies gleichbedeutend damit, daß $P(s)$ in $\sigma < 1$ genau an der Stelle $s = 0$ einen Pol hat, der einfach ist. Dort hat aber der Faktor $\Gamma(\frac{s}{2})$ von $P(s)$ einen einfachen Pol, weshalb $\zeta(s)$ an 0 holomorph und von Null verschieden ist. So ist die Zetafunktion in $\sigma < 1$ polfrei.

Da $P(s)$ in $\sigma \geq 1$ nullstellenfrei ist, gilt dies wegen 10(1) auch in $\sigma \leq 0$. Insgesamt hat $P(s)$ in $\sigma \leq 0$ weder Nullstellen noch (wenn man von $s = 0$ absieht) Pole. Daher hat $\zeta(s)$ in $\sigma \leq 0$ (abgesehen von der bereits behandelten Stelle $s = 0$) genau dort Nullstellen, wo $\Gamma(\frac{s}{2})$ Pole hat, d.h. an $s = -2, -4, -6, \ldots$; Bemerkung 1 in 10 zieht die Einfachheit all dieser Nullstellen nach sich.

(iii): Die Symmetrie–Eigenschaften der Nullstellen im Streifen $0 < \sigma < 1$ ergeben sich folgendermaßen. In $\sigma > 1$ hat man

$$\zeta(\bar{s}) = \sum_{n \geq 1} n^{-\bar{s}} = \overline{\sum_{n \geq 1} n^{-s}} = \overline{\zeta(s)};$$

analytische Fortsetzung zeigt dann, daß $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ in ganz $\mathbb{C}$ zutrifft. Somit liegen die ζ–Nullstellen symmetrisch zur reellen Achse und die Ordnungen zweier konjugiert komplexer Nullstellen sind gleich. Aus 10(1) sieht man unmittelbar: Ist s eine in $0 < \sigma < 1$ gelegene ζ–Nullstelle, so hat $1 - s$ dieselbe Eigenschaft und die Nullstellenordnungen von s und $1 - s$ sind gleich. □

Daß die Zetafunktion im sogenannten *kritischen Streifen* $0 < \sigma < 1$ unendlich viele Nullstellen hat, die nach (iii) des Satzes symmetrisch sowohl zur Mittelgeraden $\sigma = \frac{1}{2}$ als auch zur reellen Achse verteilt sind, war eine der drei RIEMANNschen Behauptungen, die HADAMARD 1893 beweisen konnte (vgl. 1).

Über die vertikale Verteilung der ζ–Nullstellen im kritischen Streifen weiß man sehr gut Bescheid. Bezeichnet nämlich $N(T)$ für reelles $T \geq 0$ die gemäß Vielfachheiten genommene Anzahl dieser Nullstellen in $0 \leq \mathrm{Im}\, s \leq T$, so besagt eine durch VON MANGOLDT 1905 bewiesene Behauptung RIEMANNS

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \tag{1}$$

bei $T \to \infty$ (vgl. 1).

Über die horizontale Verteilung der ζ–Nullstellen des kritischen Streifens ist nicht so viel Genaues bekannt. Man kann bisher nicht die Existenz einer noch so kleinen reellen *Konstanten* $\eta \in]0, \frac{1}{2}]$ garantieren, so daß ζ in der Halbebene $\sigma > 1 - \eta$ nullstellenfrei ist (vgl. auch 12). Man kennt lediglich bei $|t| \to \infty$ gegen Null konvergente positive *Funktionen* $\eta(|t|)$, so daß $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ ist für $\sigma > 1 - \eta(|t|)$ und $|t|$ genügend groß. DE LA VALLEE POUSSIN hat dies 1899 für $\eta(\tau) = c(\log \tau)^{-1}$ bewiesen; das beste Resultat in dieser Richtung lautet derzeit $\eta(\tau) = c(\log \tau)^{-2/3}(\log\log \tau)^{-1/3}$ und wurde 1958 unabhängig voneinander (im wesentlichen) von N.M. KOROBOV und VINOGRADOV gefunden. Dabei bedeuten c jeweils absolute positive Konstanten.

12. Riemannsche Vermutung heißt die einzige der bisher noch offenen RIEMANNschen Behauptungen (vgl. 1): *Alle im Streifen* $0 < \sigma < 1$ *gelegenen Nullstellen der Zetafunktion liegen auf der Mittelgeraden* $\sigma = \frac{1}{2}$. Heute vermutet man zusätzlich, daß auch (vgl. Satz 11 (ii)) diese Nullstellen sämtliche einfach sind.

Andererseits seien von den theoretischen Resultaten, die für die Richtigkeit der RIEMANNschen Hypothese sprechen, lediglich zwei erwähnt. Zum einen gelang WEIL (Oeuvres Scientifiques/Collected Papers I, 277–279) für gewisse zu ζ analoge Funktionen der Beweis des Analogons zur RIEMANNschen Vermutung, ein Ergebnis, welches von P. DELIGNE (Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. *43*, 273–307 (1974)) noch weitgehend verallgemeinert werden konnte. Zum zweiten konnte gezeigt werden, daß ein gewisser Anteil der nach Maßgabe von 11(1) im kritischen Streifen enthaltenen ζ–Nullstellen tatsächlich auf $\sigma = \frac{1}{2}$ liegt. Bezeichnet nämlich $N_0(T)$ die gemäß Vielfachheiten gezählte Anzahl der ζ–Nullstellen auf der Strecke

$$\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \qquad 0 \leq \operatorname{Im} s \leq T, \tag{1}$$

so hat A. SELBERG 1942 die Existenz einer reellen Konstanten $c \in]0, 1[$ bewiesen, so daß $N_0(T) \geq cN(T)$ für alle genügend großen $T > 0$ gilt. Dasselbe Resultat mit $c = \frac{2}{5}$ konnte J.B. CONREY (Bull. Amer. Math. Soc *20*, 79–81 (1989)) sichern; genauer zeigte er, daß mindestens 40 Prozent der nichttrivialen ζ–Nullstellen auf $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen und überdies *einfach* sind.

Interessant ist noch folgender einfache Zusammenhang zwischen RIEMANNscher Vermutung und dem Verhalten der bereits in Bemerkung 4 zu 1.4.9 betrachteten Funktion $M(x) := \sum_{n \le x} \mu(n)$, die trivialerweise der Ungleichung

$$|M(x)| \le x \tag{2}$$

für alle reellen $x \ge 0$ genügt.

Satz.

(i) *Gilt $M(x) = O(x^\alpha)$ bei $x \to \infty$ mit reellem $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, so ist ζ in der Halbebene $\sigma > \alpha$ nullstellenfrei.*

(ii) *Aus der Voraussetzung $M(x) = O(x^{1/2})$ folgt die Richtigkeit der* RIEMANN*schen Vermutung und überdies die Einfachheit aller ζ–Nullstellen im kritischen Streifen.*

Beweis. Lemma 2.4 über partielle Summation liefert bei $\sigma > 1$

$$\sum_{n \le x} \mu(n) n^{-s} = M(x) x^{-s} + s \int_1^x M(t) t^{-s-1} dt,$$

woraus wegen (2) und 9(1) nach dem Grenzübergang $x \to \infty$ für $\sigma > 1$ folgt

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty M(t) t^{-s-1} dt. \tag{3}$$

(i): Wird nun $M(x) = O(x^\alpha)$ vorausgesetzt, so konvergiert das Integral rechts in (3) in der Halbebene $\sigma > \alpha$ absolut und definiert dort eine holomorphe Funktion, wie analoge Betrachtungen zu 3(3) erkennen lassen. Die in $\sigma > \alpha$ holomorphe rechte Seite von (3) stellt somit die analytische Fortsetzung von $\frac{1}{\zeta}$ in die genannte Halbebene dar, weshalb dort ζ selbst nullstellenfrei sein muß. (Insbesondere zeigt dies Argument, daß $M(x) = O(x^\alpha)$ bei $\alpha < \frac{1}{2}$ sicher falsch ist.)

(ii): Die jetzt wegen $|M(x)| \le c x^{1/2}$ in $\sigma > \frac{1}{2}$ gültige Gleichung (3) impliziert in dieser Halbebene die Abschätzung

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \le c \frac{|s|}{\sigma - \frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Ist s_0 eine k–fache Nullstelle von ζ, so gilt $\zeta(s) = a_k (s - s_0)^k + \dots$ (mit $a_k \in \mathbb{C}^\times$) für alle komplexen s nahe bei s_0. Ist insbesondere $s_0 = \frac{1}{2} + it_0$ mit reellem t_0 eine solche Nullstelle, so gilt für alle $s = \frac{1}{2} + \varepsilon + it_0$ mit kleinem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ wegen (4) die Abschätzung

$$1 \le c \frac{|\frac{1}{2} + \varepsilon + it_0|}{\varepsilon} |\zeta(\frac{1}{2} + \varepsilon + it_0)| \le c(1 + |t_0|) \frac{1}{\varepsilon} (1 + |a_k|) \varepsilon^k =: c_1 \varepsilon^{k-1},$$

was wegen der Kleinheit von ε sofort $k = 1$ impliziert. □

Bemerkungen. 1) Abschätzungen des Typs $M(x) = O(x^\alpha)$ mit $\alpha < 1$ sind bisher nicht bekannt (vgl. Korollar 9). Insbesondere macht Teil (ii) des Satzes das Interesse deutlich, welches die erst jüngst widerlegte MERTENSsche Vermutung gehabt hat (vgl. Bemerkung 4 zu 1.4.9).

2) RIEMANN selbst äußerte sich S. 139 a.a.O. zu seiner Behauptung so:

"... es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind.*) Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien."

3) HILBERT begann die Formulierung des achten Problems seiner schon in 3.2.13 und 6.5.1 genannten Sammlung unter der Überschrift *Primzahlprobleme* folgendermaßen:

"In der Theorie der Verteilung der Primzahlen sind in neuerer Zeit durch HADAMARD, DE LA VALLEE POUSSIN, VON MANGOLDT und andere wesentliche Fortschritte gemacht worden. Zur vollständigen Lösung der Probleme, die uns die Riemannsche Abhandlung ... gestellt hat, ist es jedoch noch nötig, die Richtigkeit der äußerst wichtigen Behauptung von RIEMANN *nachzuweisen, daß die Nullstellen der Funktion* $\zeta(s)$ *... sämtlich den reellen Bestandteil* $\frac{1}{2}$ *haben* – wenn man von den bekannten negativ ganzzahligen Nullstellen absieht... "

Gegen Ende seines achten Problems regte HILBERT das Studium der Zetafunktion algebraischer Zahlkörper an, was seither zwar intensiv betrieben wird, allerdings ohne daß hier die Analoga zur RIEMANNschen Vermutung hätten gezeigt werden können.

13. Schlußbemerkungen. Die ersten Beweise des Primzahlsatzes durch HADAMARD und DE LA VALLEE POUSSIN verliefen im wesentlichen so: Man stellt zunächst die (je nach Vorgang gewichtete) Summe

$$\sum_{n \le x} a_n \tag{1}$$

der Koeffizienten der in $\sigma > 1$ konvergenten DIRICHLET–Reihe $\sum a_n n^{-s}$ von $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ durch ein komplexes Integral längs der vertikalen Geraden $\mathrm{Re}\, s = \sigma_0$ mit $\sigma_0 > 1$ dar, in dessen Integrand der Quotient ζ'/ζ eingeht. Da ζ in $\sigma \ge 1$, ja sogar noch in einem gewissen Bereich $\sigma > 1 - \eta(|t|)$ (vgl. Ende von 11) nullstellenfrei ist, kann der Integrationsweg so weit nach links verlagert werden, daß man den Pol der ζ–Funktion an $s = 1$ zur asymptotischen Auswertung der

*) Er meint alle s mit $\zeta(\frac{1}{2} + is) = 0$, die nicht rein imaginär sind.

Koeffizientensumme (1) via Residuensatz ausnutzen kann. Diese Auswertung von (1) liefert den Primzahlsatz in der Form $\pi(x) \sim \mathrm{li}\ x$ (vgl. 2.1). Klar ist, daß man für die Wegverlagerung nach links genügend gute obere Abschätzungen für den Integranden, insbesondere für $|(\zeta'/\zeta)(\sigma + it)|$ in $1 - \eta(|t|) < \sigma \leq \sigma_0$ bei $|t| \to \infty$ benötigt.

Sowohl die Sicherung der Nullstellenfreiheit von ζ in $1 - \eta(|t|) < \sigma < 1$ bei genügend großem $|t|$ als auch die Gewinnung der erwähnten guten Schranken für $|\zeta'/\zeta|$ in diesem Bereich ist zwar mühevoll. Dafür hat dieser älteste Weg zum Primzahlsatz den Vorteil, sofort zu einer quantitativen Verfeinerung des Typs

$$\pi(x) = \mathrm{li}\ x + O(x \exp(-c \log^{\alpha} x)) \tag{2}$$

bei $x \to \infty$ mit positiver Konstanten c zu führen. Gestützt auf sein am Ende von 11 erwähntes Resultat über die Nullstellenfreiheit von ζ etwas links von $\sigma = 1$ hat De La Vallee Poussin 1899 die Asymptotik (2) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ bewiesen. (Das ebenfalls am Ende von 11 zitierte Ergebnis von Korobov und Vinogradov führt in (2) im wesentlichen zu $\alpha = \frac{3}{5}$ und damit zum derzeit besten Restglied im Primzahlsatz.)

Neue Wege zum Primzahlsatz haben um 1930 herum die Tauber–Sätze von S. Ikehara und N. Wiener eröffnet. Grundsätzlich gestatten Tauber–Sätze asymptotische Aussagen über (1), wenn man das asymptotische Verhalten bei $\sigma \to 1$ der in $\sigma > 1$ durch die Reihe $\sum a_n n^{-s}$ definierten Funktion genügend gut kennt und wenn die Reihen–Koeffizienten a_n geeignete Zusatzbedingungen erfüllen. Für die Beweise und Anwendungen der angesprochenen Tauber–Sätze in der Primzahltheorie wurde die aufwendige Abschätzung von $|\zeta'/\zeta|$ an ∞ ebenso überflüssig wie der Nachweis des Nichtverschwindens von ζ etwas links von $\sigma = 1$. Dafür hängen die Beweise dieser Tauber–Sätze von gewissen Resultaten über Fourier–Transformation ab, die ihrerseits keineswegs auf der Hand liegen.

Vor fast drei Jahrzehnten hat D.J. Newman (Amer. Math. Monthly *87*, 693–696 (1980)) einen dritten analytischen Weg zum Primzahlsatz gefunden, dem die Darstellung oben in 2 bis 8 gefolgt ist. Wie dort gesehen, kommt der Newmansche Ansatz einerseits mit Integration längs endlicher Wege (und der Tatsache $\zeta(s) \neq 0$ in $\sigma \geq 1$) aus, umgeht also Abschätzungen bei ∞; andererseits ist er frei von Sätzen der Fourier–Analysis. Newmans Konvergenzsatz 8 geht übrigens auf Ingham (Proc. London Math. Soc. (2) *38*, 458–480 (1935)) zurück, der allerdings Fourier–Theorie zum Beweis benützte, was komplizierter als die Methode komplexer Integration ist.

Rückblickend kann man sagen, daß die analytische Primzahltheorie in weitgehender Ausführung des Riemannschen Programms durch die großen Erfolge von

Hadamard, De La Vallee Poussin, Von Mangoldt und anderen um die Wende zum 20. Jahrhundert gewaltig vorangetrieben wurde. Diese Entwicklung wurde durch das Erscheinen von Landaus epochemachendem *Handbuch* [12] im Jahre 1909 noch verstärkt: die Ideen der analytischen Zahlentheorie begannen sich rasch auszubreiten und zogen viele bedeutende Ergebnisse nach sich.

Die Erfolge der analytischen Methoden führten andererseits gelegentlich auch zur Unterschätzung elementarer Methoden selbst durch einflußreiche Mathematiker. So äußerte sich etwa Hardy, dem die analytische Zahlentheorie starke Impulse verdankt, in seinem Vortrag über "Goldbach's Theorem" am 6. Oktober 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft in Kopenhagen folgendermaßen (Collected Papers I, 549–550):

"You may ask me what an 'elementary' method is, and I must explain precisely what I understand by this expression. I do not mean an easy or a trivial method; an elementary method may be quite desperately ingenious and subtle. I am using the word in a definite and technical sense, and in this I am only following the common usage of arithmeticians. I mean, by an elementary method, a method which makes no use of the notion of an analytic function...

...Let us turn back ... to its central theorem, the 'Primzahlsatz'*) or 'prime number theorem'... No elementary proof is known, and one may ask whether it is reasonable to expect one. Now we know that the theorem is roughly equivalent to a theorem about an analytic function, the theorem that Riemann's Zeta–function has no zeros on a certain line**). A proof of such a theorem, not fundamentally dependent upon the ideas of the theory of function, seems to me extraordinarily unlikely. It is rash to assert that a mathematical theorem *cannot* be proved in a particular way... If anyone produces an elementary proof of the prime number theorem, he will show that these views are wrong, that the subject does not hang together in the way we have supposed... "

Als dann doch im Jahre 1948, wenige Monate nach Hardys Tod, gleichzeitig Selberg (Ann. Math. (2) *50*, 305–313 (1949)) und P. Erdös (Proc. Nat. Acad. Sci. USA *35*, 374–384 (1949)) elementare Beweise des Primzahlsatzes fanden, wirkte dies wie eine Sensation: Seit Tchebychef hatte man sich ein Jahrhundert lang immer wieder vergeblich um einen derartigen Weg bemüht. "Dies zeigt", um mit Siegel zu sprechen, "daß man über die wirklichen Schwierigkeiten eines Problems nichts aussagen kann, bevor man es gelöst hat."

Die Erdös–Selbergsche Entdeckung verhalf in der Folgezeit den elementaren Methoden in der Zahlentheorie zu neuem Ansehen und gab ihnen den gebührenden Platz neben den analytischen zurück. Einen guten Eindruck von dieser

*) Man sieht auch bei Hardy den Einfluß von Landaus "Handbuch".

**) $\zeta(s) \neq 0$ auf $\mathrm{Re}\, s = 1$.

Entwicklung gewinnt der interessierte Leser etwa anhand des Buchs von A.O. GEL'FOND und YU.V. LINNIK (*Elementary Methods in the Analytic Theory of Numbers*, M.I.T. Press, Cambridge/Mass., 1966).