Springer-Lehrbuch

Peter Bundschuh

Einführung in die Zahlentheorie

Sechste, überarbeitete und aktualisierte Auflage

Springer

Prof. Dr. Peter Bundschuh
Universität Köln
Mathematisches Institut
Weyertal 86–90
50931 Köln

ISBN 978-3-540-76490-8 e-ISBN 978-3-540-76491-5

DOI 10.1007/978-3-540-76491-5

Springer-Lehrbuch ISSN 0937-7433

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 11-01

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines Springer TEX-Makropakets
Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Umschlaggestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort zur Erstauflage

Untersuchungen verschiedener Eigenschaften natürlicher Zahlen gehörten historisch zu den ältesten Beschäftigungen mit mathematischen Problemen überhaupt. So entstanden bereits im griechischen Altertum Mathematikbücher wie EUKLIDS *Elemente* und DIOPHANTS *Arithmetika*, die sich teilweise oder ausschließlich mit der systematischen Behandlung ganzzahliger Fragestellungen befaßten. Mit dem ausgehenden Altertum schwand jedoch weitgehend das Interesse an der Mathematik insgesamt und wirklich starke, neue Impulse erhielt die Lehre von den ganzen Zahlen erst wieder im 17. und 18. Jahrhundert, vor allem durch FERMAT und EULER. Während die Nachwelt FERMATS Ergebnisse noch mühsam seiner reichen Korrespondenz mit gebildeten Zeitgenossen entnehmen mußte, publizierte EULER seine Resultate zumeist in Zeitschriftenserien der Akademien, die einige große europäische Höfe eingerichtet hatten.

Die ersten umfassenden und systematischen Darstellungen dessen, was zu ihrer Zeit zum gesicherten Wissen in der Lehre von den ganzen Zahlen gehörte, gaben dann um die Wende zum 19. Jahrhundert nahezu zeitgleich LEGENDRE mit seinem *Essai sur la Théorie des Nombres* (1798) und GAUSS mit seinen *Disquisitiones Arithmeticae* (1801). Vor allem das epochemachende Werk von GAUSS mit seiner Fülle von neuen und tiefliegenden Entdeckungen brachte die Zahlen*theorie* als selbständige Teildisziplin der Gesamtmathematik erst eigentlich auf den Weg.

In den seither verflossenen fast zweihundert Jahren hat sich die Zahlentheorie gewaltig weiterentwickelt und in verschiedene Richtungen verzweigt. Dementsprechend ist eine umfangreiche zahlentheoretische Literatur entstanden, vom einführenden Lehrbuch bis hin zur speziellen Monographie.

Diese Situation nötigt jedem neu hinzukommenden Autor eine Rechtfertigung für sein Tun ab. So habe ich mir als Ziel gesetzt, die wichtigsten Grundlagen der Zahlentheorie in einer Weise zu präsentieren, die die historische Entwicklung in stärkerem Maße als üblich berücksichtigt. Daneben wollte ich aufzeigen, wie sich bei der Behandlung mancher spezieller Probleme neue Teilgebiete der Zahlentheorie herausgebildet und selbständig weiter entfaltet haben. Davon, daß dieser Prozeß bisweilen in intensiver Wechselwirkung mit anderen mathematischen Disziplinen ablief, zeugen etwa analytische Zahlentheorie und Funktionentheorie. Eine weitere Aufgabe der vorliegenden Darstellung ist die Heranführung des

Lesers an das Studium vertiefender Literatur, die in den Text eingearbeitet und am Ende des Buches zusammengestellt ist.

Behandelt wird in den ersten fünf Kapiteln etwa der Stoff einer einsemestrigen vierstündigen Einführungsvorlesung in die Zahlentheorie. Dabei ergeben sich schon an sehr frühen Stellen neue Probleme, die in späteren Kapiteln wieder aufgegriffen und vertieft werden. So werden z.B. bereits im ersten Kapitel über Teilbarkeit arithmetische bzw. Primzahlfragen angeschnitten, die im fünften und sechsten bzw. siebten fortgeführt werden.

Besonders in den beiden letztgenannten Kapiteln über Transzendenz bzw. Primzahlen soll der Leser beispielhaft lernen, wie die Zahlentheorie sich zur Lösung ihrer Probleme bisweilen anderer mathematischer Disziplinen bedient. Beide Kapitel belegen eindrucksvoll die Leistungsfähigkeit funktionentheoretischer Methoden im Einsatz bei zahlentheoretischen Fragestellungen, wobei im sechsten außerdem einige Sätze aus der Algebra zum benötigten Instrumentarium gehören.

Das Inhaltsverzeichnis gestattet einen sehr detaillierten Überblick über den behandelten Stoff. Dabei wird der eine Kenner dies, der andere jenes vermissen, etwa die Theorie der quadratischen Formen oder die Geometrie der Zahlen, um nur zwei Unterlassungen zu nennen, die in ihrer Gesamtheit von der auferlegten Beschränkung des Buchumfangs herrühren. Aus demselben Grund sind außer kleineren Dingen, die gelegentlich "dem Leser zur Übung überlassen" werden, auch keine Aufgaben eingearbeitet. In dieser Hinsicht muß der interessierte Leser auf einige im Literaturverzeichnis zusammengestellte Bücher verwiesen werden.

Was die Ausführlichkeit der Darstellung angeht, wird sie dem Kenner zu groß sein, während sie dem Anfänger in gewissen Passagen zu knapp erscheinen mag. Generell sollte das Buch, abgesehen von Kap. 1, §§ 5, 6, Kap. 6, §§ 4, 5 und Kap. 7, § 3, jedem interessierten Leser zugänglich sein, der in gymnasialer Oberstufe, universitären Anfängerkursen oder im Selbststudium die Sprache der modernen Mathematik erlernt und eine gewisse Übung im Umgang mit mathematischen Sachverhalten und Schlußweisen erlangt hat.

Ein Zitat 3.4.2 verweist auf Abschnitt 2 im Paragraphen 4 des Kapitels 3, Satz 3.4.2A auf den dort zu findenden Satz A. Innerhalb eines Kapitels bleibt bei Zitaten die Nummer dieses Kapitels weg, im gleichen Paragraphen eines Kapitels auch noch die Paragraphennummer; so wird mit Satz 2A bzw. Lemma 2 der Satz A bzw. das Lemma in Abschnitt 2 desselben Kapitels und Paragraphen zitiert. Schließlich deutet das Zeichen □ das Ende eines Beweises an.

Aus der Reihe der konstruktiven Kritiker, die manche Verbesserung oder Ergänzung angeregt haben, sei Herr Dozent Dr. A. T. Pethö besonders hervorgehoben. Nicht zuletzt hat er sich, ebenso wie Herr Dr. S. Eckmann, der Mühe

unterzogen, die erste Fassung des Manuskripts gewissenhaft durchzusehen; die endgültige Version wurde von Herrn cand. math. T. Töpfer vollständig geprüft. Allen drei Herren möchte ich für ihre Mithilfe bestens danken. Frau E. Stiehl–Schöndorfer besorgte das Schreibmaschinenmanuskript, Frau E. Lorenz nahm die Erfassung in TEX vor; beiden Damen gilt mein herzlicher Dank für ihre sorgfältige Arbeit. Schließlich habe ich dem Springer-Verlag für sein Entgegenkommen zu danken.

Köln, im Juli 1987 P. Bundschuh

Vorwort zur zweiten Auflage

Die vorliegende zweite Auflage der "Einführung in die Zahlentheorie" stellt eine korrigierte und, wo nötig, auf den neuesten Stand gebrachte Fassung der 1988 erschienenen Erstauflage dar. Auch das Literaturverzeichnis wurde — dem Geschmack des Verfassers gemäß — aktualisiert, wobei erneut keinerlei Vollständigkeit angestrebt werden konnte.

Danken möchte ich dem Verlag für sein freundliches Angebot, diese Zweitauflage meiner "Zahlentheorie" in seine Reihe "Springer-Lehrbuch" aufzunehmen. Schließlich habe ich Herrn Dipl.–Math. R. Müller für die Besorgung der reproduktionsfähigen TEX–Vorlage der Zweitauflage ebenso zu danken wie meinem Sohn Ralf, ohne dessen stete Bereitschaft zur Computerunterstützung manche Tabelle nicht so zügig entstanden wäre.

Köln, im Dezember 1991 P. Bundschuh

Vorwort zur dritten Auflage

Gegenüber der zweiten Auflage mußte diese dritte erneut aktualisiert werden, nicht zuletzt wegen des inzwischen gelungenen Beweises der Fermatschen Vermutung. Auch waren einige weitere kleine Inkorrektheiten oder Druckfehler zu beseitigen, auf die ich zum Teil von Lesern der früheren Auflagen hingewiesen wurde, denen ich für ihre Kritik deshalb dankbar bin. Für die technische Herstellung des überarbeiteten Textes danke ich Frau E. Stiehl-Schöndorfer und Herrn Dipl.-Math. B. Greuel sehr herzlich.

Köln, im Juni 1996 P. Bundschuh

Vorwort zur vierten bis sechsten Auflage

Auch für diese Neuauflagen waren einige Passagen dem aktuellen Stand der Forschung anzupassen, etwa dort, wo Rekorde rasch fallen, wie bei den MERSENNEschen Primzahlen oder bei der Dezimalbruchentwicklung so prominenter Zahlen wie π. Wieder habe ich einer Reihe von Lesern – meine Diktion schließt Leserinnen stets mit ein – für Verbesserungsvorschläge sehr zu danken ebenso wie Frau STIEHL-SCHÖNDORFER und den Herren Dipl.-Math. B. GREUEL und Dr. M. WELTER für ihre Mithilfe bei den jeweiligen Überarbeitungen.

Köln, Juni 1998, März 2002, August 2007 P. Bundschuh

Inhaltsverzeichnis