



2023

## MECA953 / INFO990 - Robotique

MP5 / MMT5

**Bras Robots :**  
**2. Caractéristiques et architectures**

## De quoi se compose un robot ?

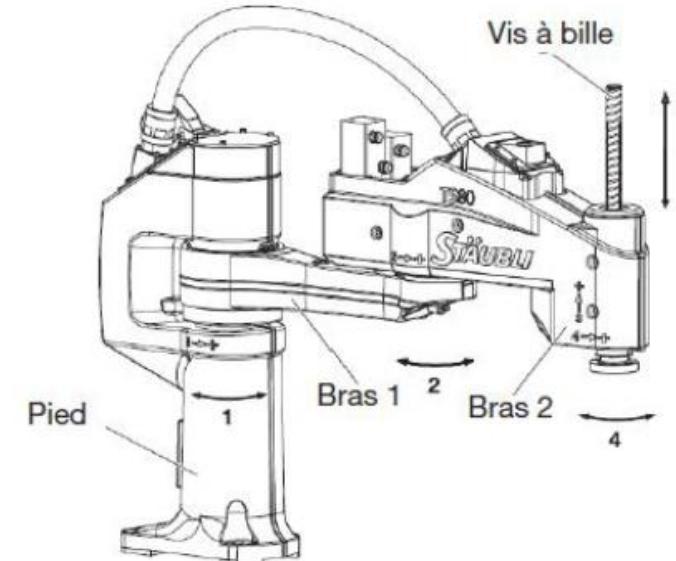
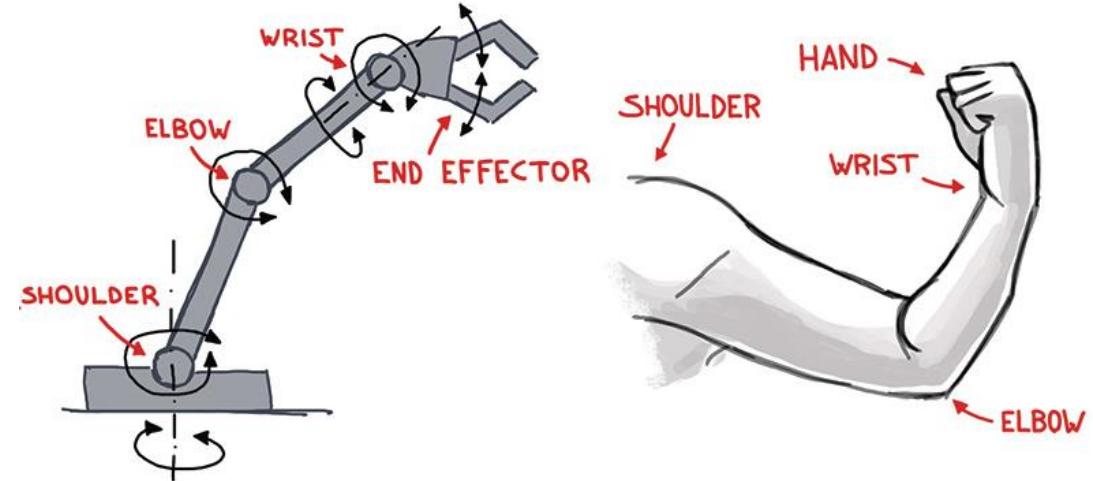
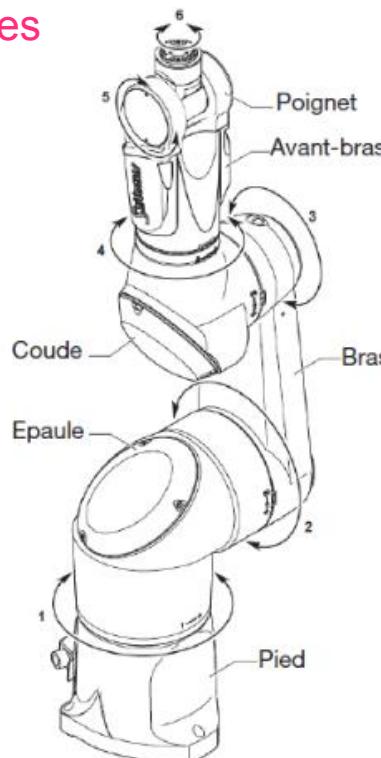


## Le bras robotisé

Elément mécanique principale en mouvement.

Se caractérise souvent par un système articulé semblable à un bras humain.

Bras poly articulé : 6 axes



SCARA : 4 axes

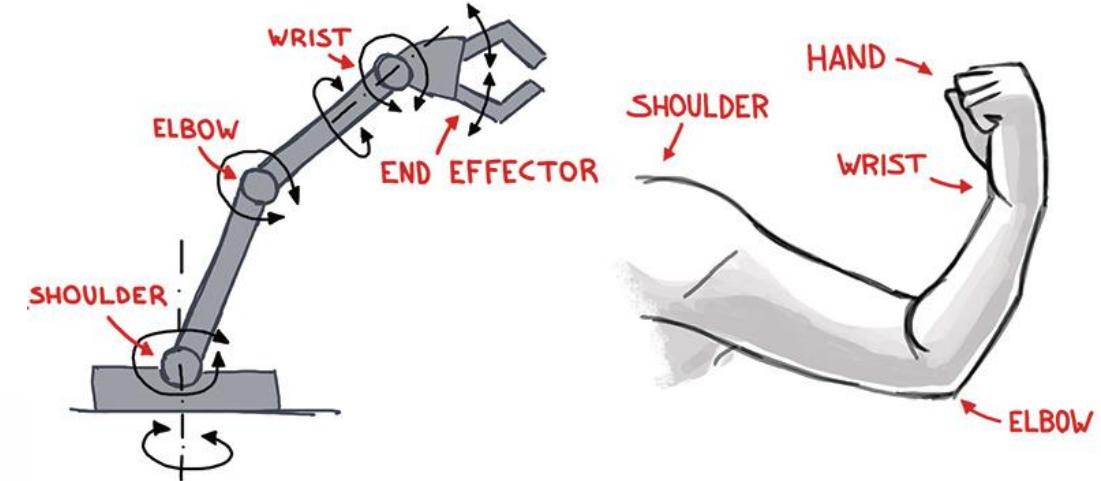
Selective Compliance  
Articulated Robot Arm

## Le bras robotisé

Elément mécanique principale en mouvement.

Se caractérise souvent par un système articulé semblable à un bras humain.

Bras poly articulé : 6 axes

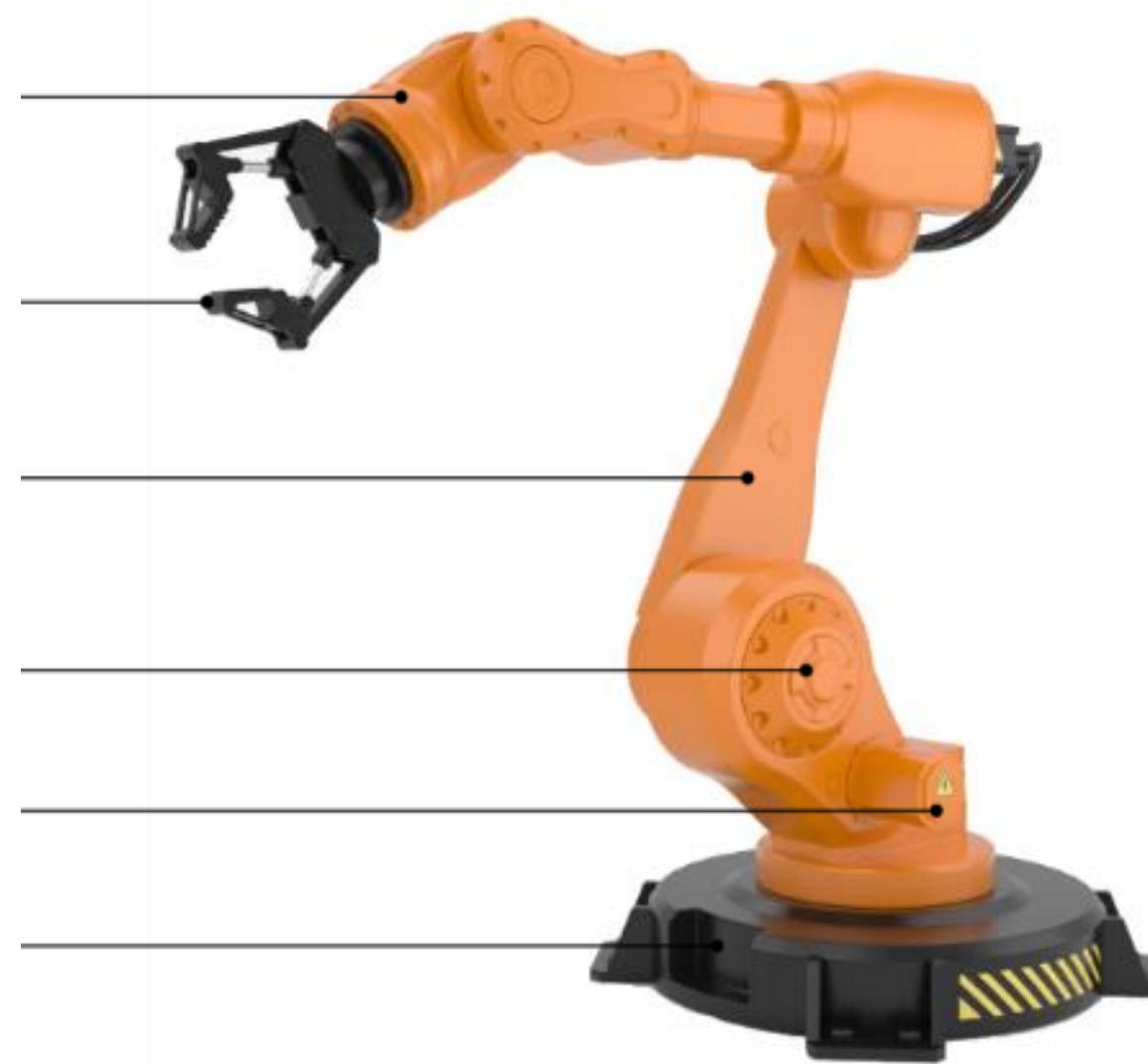


SCARA : 4 axes



# Quelques définitions

## Terminologie



# Le contrôleur

Le contrôleur, aussi appelé « baie robot », est le cerveau du robot – Il permet de contrôler le robot

- Intègre un calculateur pour le contrôle des mouvements et de la cellule ; il permet de transformer une valeur cartésienne en données codeur du moteur
- Intègre une partie « puissance » pour l'alimentation des moteurs du bras



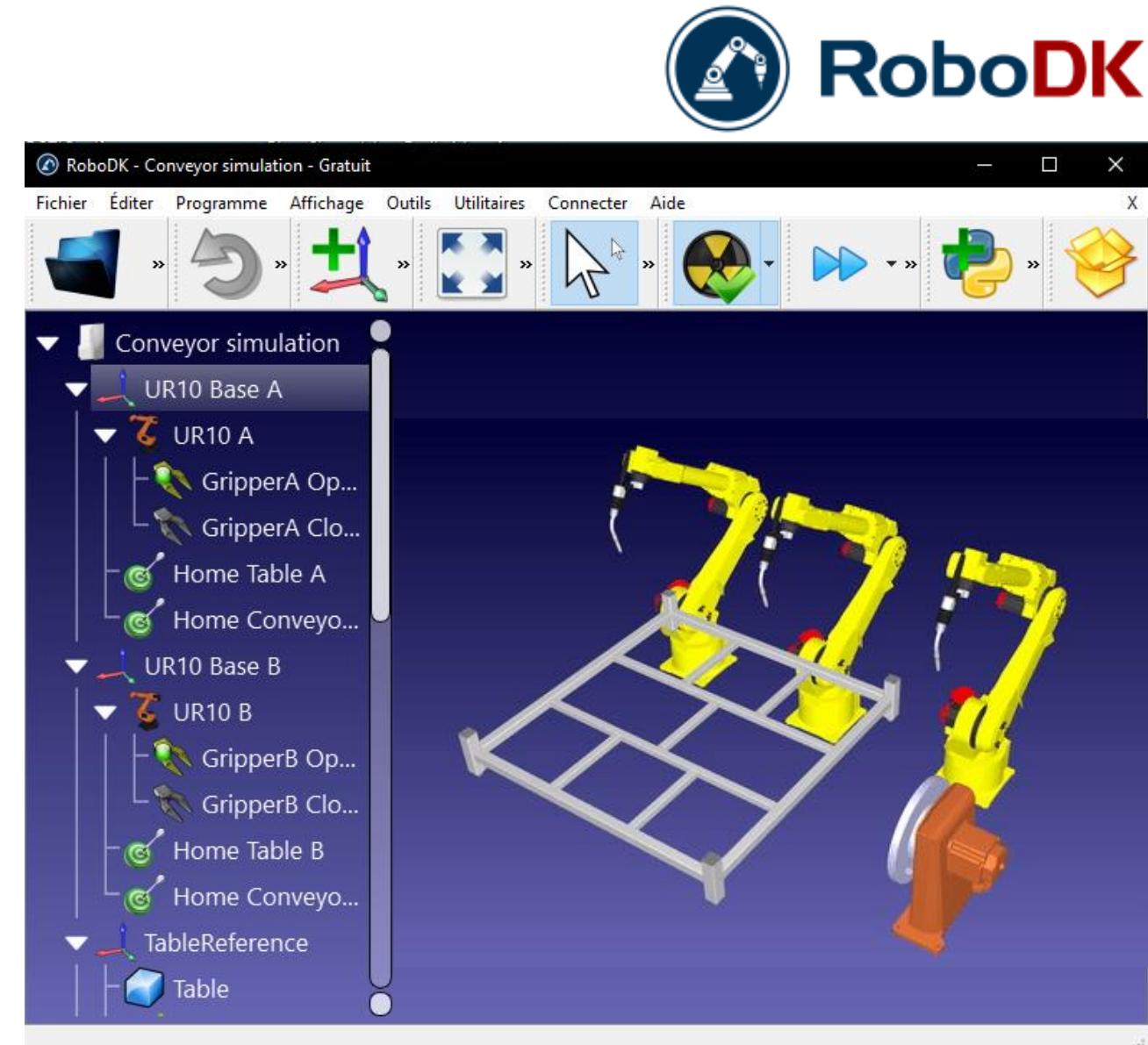
MODÈLE	CS8C M	CS8C		CS8C paint	CS8C HP	CS8 / CS8 EX
Classe de protection	IP20	IP20 (IP54 option)	IP20 (IP54 option)	IP54	IP54	IP54
Capacité mémoire	512 Mb RAM					
Sauvegarde	2 GB Nand Flash et ports USB					
Communication	Liaison série RS232/422, 2 ports Ethernet (Socket, FTP Serveur/Client)					
Entrées/Sorties (TOR)	1 ou 2 cartes 16E/16S digitales en option			1 ou 2 cartes 16E/16S digitales en option	Carte 16/16 et/ou 32/32 E/S digitales	

# La programmation

Il existe différents moyens de programmation :

## La programmation hors ligne

La programmation hors ligne se fait via un PC. Elle est utilisée principalement en phase d'avant projet pour validation de l'implantation



# La programmation

## La programmation manuelle

Le pupitre de programmation, appelé aussi « teach penant » est un panneau de commande déporté. Il est utilisé ponctuellement notamment pour la reprise de point au pied du robot. C'est l'interface homme-machine.



# Programming languages of industrial robot arms

- Almost every robot manufacturer has developed their own proprietary robot programming language → nothing was unified

Manufacturer	Language
KUKA	RAPID
FANUC	KRL
ABB	Karel
STÄUBLI	VAL3
UNIVERSAL ROBOTS	URscript

Images of various industrial robots (KUKA, FANUC, ABB, Stäubli, Universal Robots) are shown next to their respective programming language names.

RAPID

```

1 MODULE Module1
2   PROC Main()
3     IF DI_Sputstene = 1 THEN
4       Path_10;
5       Path_20;
6       Path_30;
7     ELSE
8       Break;
9       MoveAbsJ Home,v300,fine,efektor_4_1\WObj:=wobj0;
10      Reset DO_Zatvor;
11      Reset DO_Otvor;
12      Reset DO_10toc;
13      Reset DO_Otoc;
14      Reset DO_Vysun;
15      Reset DO_Zasun;
16    ENDIF
17  ENDPROC
18  PROC Path_10()

```

VAL3

```

begin
movej(above2,flange,mNomSpeed)

movel(p[0],flange,mNomSpeed)
movel(p[1],flange,mNomSpeed)
movej(above2,flange,mNomSpeed)

movej(above2,flange,mNomSpeed)
waitEndMove()
end

```

KRL

```

Editor
1 DEF RSI_Ethernet( )
2 ; -----
3 ;
4 ; RSI EXAMPLE: ETHERNET communication
5 ; Realtime UDP data exchange with server application
6 ;
7 ; -----
8 ;
9 ; Declaration of KRL variables
10 DECL INT ret ; Return value for RSI commands
11 DECL INT CONTID ; ContainerID
12 INI
13
14 ; Move to start position
15 PTP {A1 0.82, A2 -57.12, A3 94.15, A4 -178, A5 32.92,
16   A6 268.08}
17 ; Create RSI Context
18 ret = RSI_CREATE("RSI_Ethernet.rsi",CONTID,TRUE)
19 IF (ret <> RSIOK) THEN
20   HALT
21 ENDIF
22
23 ; Start RSI execution
24 ret = RSI_ON(#RELATIVE)
25 IF (ret <> RSIOK) THEN
26   HALT
27 ENDIF
28
29 ; Sensor guided movement
30 RSI_MOVECORR()
31 ; Turn off RSI
32 ret = RSI_OFF()
33 IF (ret <> RSIOK) THEN
34   HALT
35 ENDIF

```

# ROS::: Robot Operating System

- Almost every robot manufacturer has developed their own proprietary robot programming language → nothing was unified

Not an operating system !

Manufacturer	Language	Robot Image
KUKA	RAPID	
FANUC	KRL	
ABB	Karel	
STÄUBLI	VAL3	
UNIVERSAL ROBOTS	URscript	

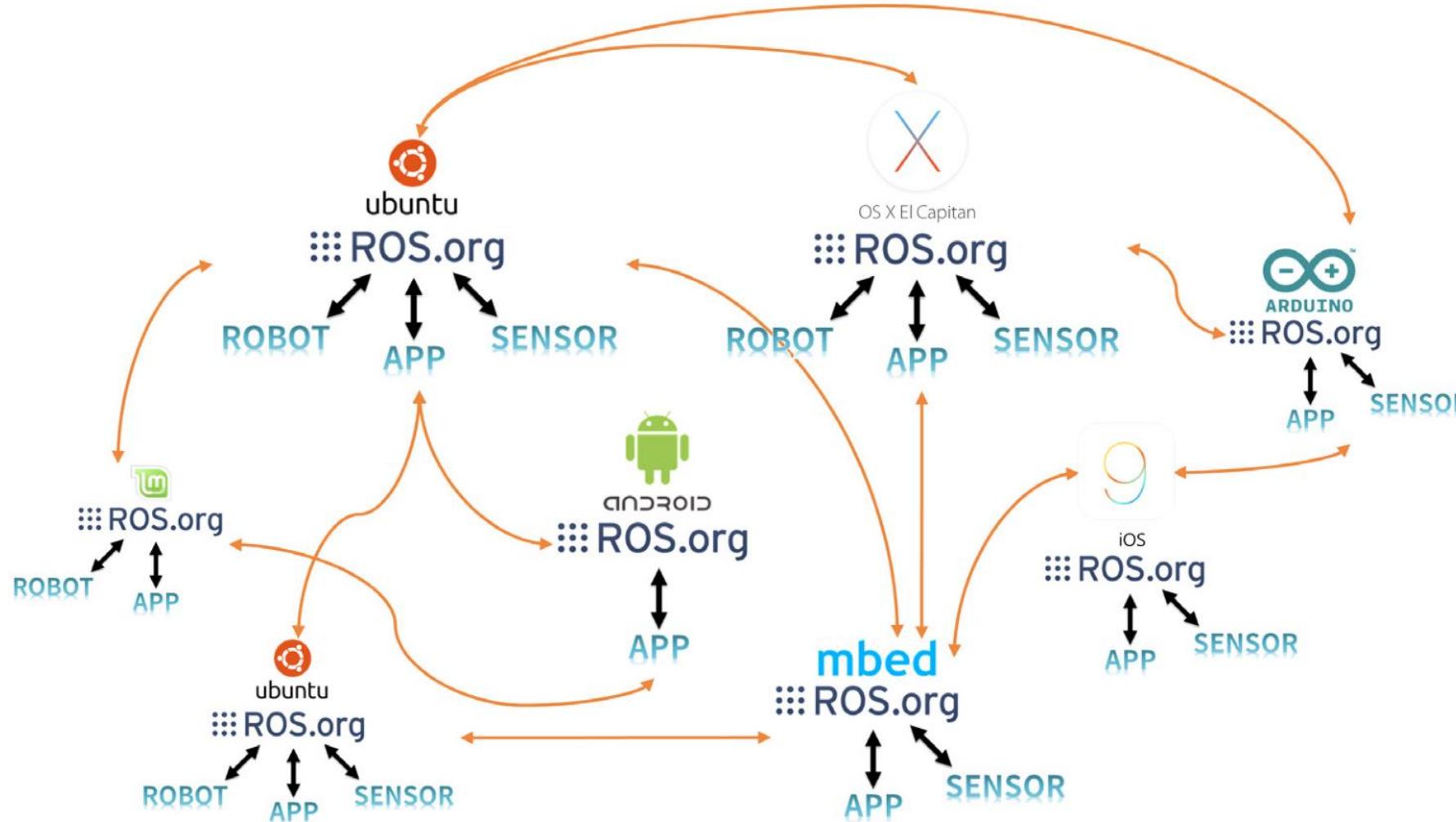
ROS

Standardisation of communications

Coders can develop applications in any environment without worrying about future connectivity with the rest of the system.



# ROS::: Robot Operating System



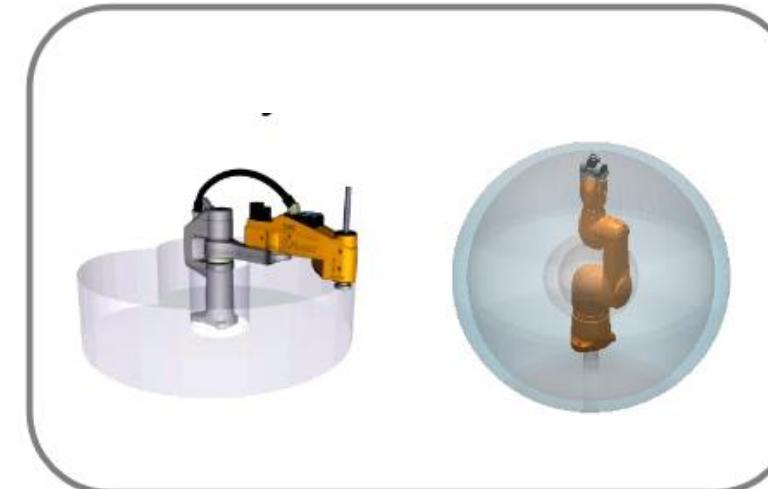
Communication between  
Heterogenous Devices

ROS can be run regardless  
of the type of operating  
system it is installed upon,  
and regardless of the  
programming language  
used.

## More info - source

ROS Robot Programming - From the basic concept to practical programming and robot application

## Caractéristiques à prendre en compte pour choisir un robot ?

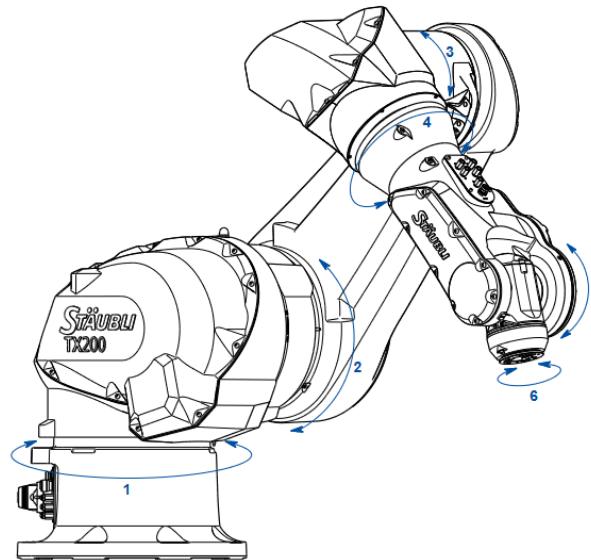


# Quelques définitions

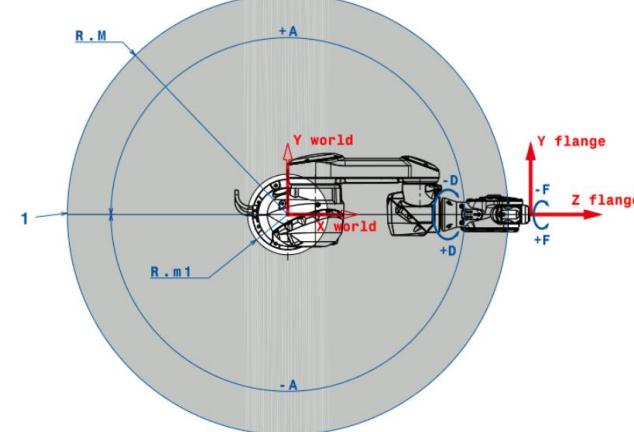
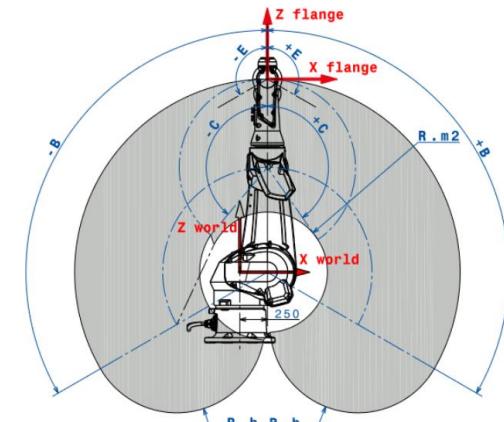
## Datasheet

MODEL	TX200	TX200L
Maximum load	130 kg, 286.6 lb (150 kg, 330 lb under conditions)	80 kg, 176.4 lb (100 kg, 220 lb under conditions)
Nominal load	100 kg, 220 lb	60 kg, 132.2 lb
Reach d'action (between axis 1 and 6)	2194 mm, 86.3 in	2594 mm, 102.1 in
Number of degrees of freedom	6	6
Repeatability – ISO 9283	$\pm 0.06$ mm	$\pm 0.1$ mm
Stäubli series controller	CS8C HP	CS8C HP
Weight	980 kg, 2160 lb	1000 kg, 2204 lb
MAXIMUM SPEED		
Axis 1	160°/s	160°/s
Axis 2	160°/s	160°/s
Axis 3	160°/s	160°/s
Axis 4	260°/s	260°/s
Axis 5	260°/s	260°/s
Axis 6	400°/s	400°/s
Maximum speed at load gravity center	12 m/s	14 m/s
Maximum inertia axis 5	45 kg.m <sup>2</sup>	40 kg.m <sup>2</sup>
Maximum inertia Axis 6	20 kg.m <sup>2</sup>	15 kg.m <sup>2</sup>
Brakes	All axes	
WORK ENVELOPPE		
Maximum reach between axis 1 and 5 (R.M)	2000 mm, 78.74 in	2400 mm, 94.49 in
Maximum reach between axis 2 and 5 (R.M)	1750 mm, 68.90 in	2150 mm, 84.65 in
Minimum reach between axis 1 and 5 (R.m1)	365 mm, 14.37 in	528 mm 20.79 in
Minimum reach between axis 2 and 5 (R.m2)	545 mm, 21.47 in	690 mm, 27.17 in
Minimum reach between axis 3 and 5 (R.b)	800 mm, 31.50 in	1200 mm, 47.24 in

Motion range



Work envelope



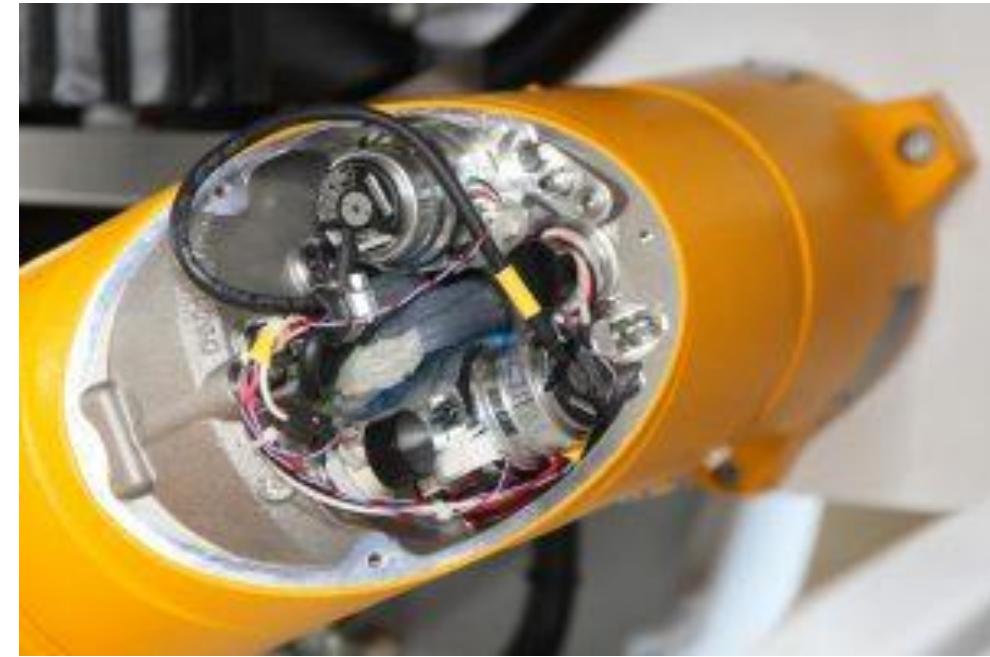
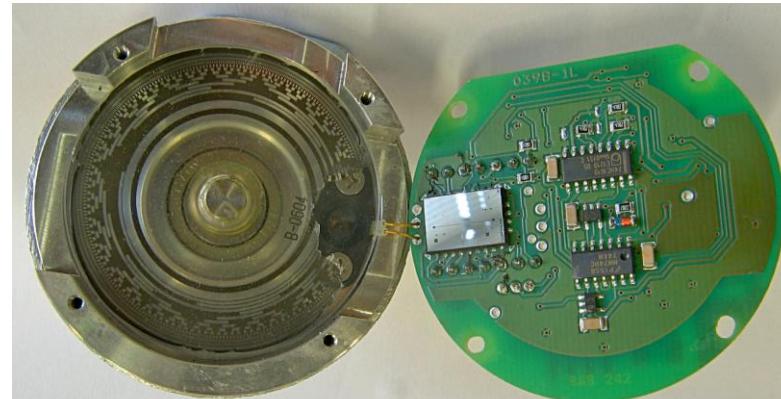
# Quelques définitions

## Résolution

Plus petit incrément de mouvement que le contrôleur peut mesurer.

*résolution =*

où n est le nombre de bits de précision de l'encodeur.



# Quelques définitions

## Justesse (accuracy)

Erreur entre la pose désirée et la pose atteinte par l'effecteur, lors d'un seul déplacement.

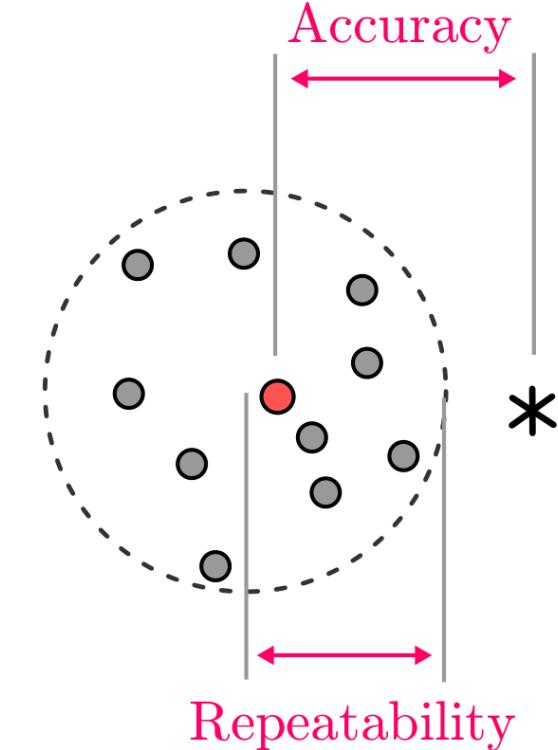
La justesse n'est pas constante sur l'espace de travail en raison de l'effet de la cinématique, de la géométrie, du jeu d'engrenage (backlash), de la flexion des liaisons sous la gravité et la charge.

## Répétabilité (repeatability)

Erreur maximale de positionnement répété de l'outil en tout point de son espace de travail.

= capacité d'un mécanisme à revenir plusieurs fois dans la même position dans des conditions identiques.

~ 0.03 à 0.1 mm pour les robots de faible et de moyenne envergures  
peut dépasser les 0.2 mm pour les gros porteurs



\* Desired position

● Obtained position

● Barycenter of obtained positions

## Quelques définitions

### Charge utile (payload)

Charge maximale que peut porter le robot sans dégrader la répétabilité. (< charge max)

### Charge nominale (rated load)

Masse maximale qui peut être transporté par l'interface mécanique sans dégradation d'aucune des performances annoncées.

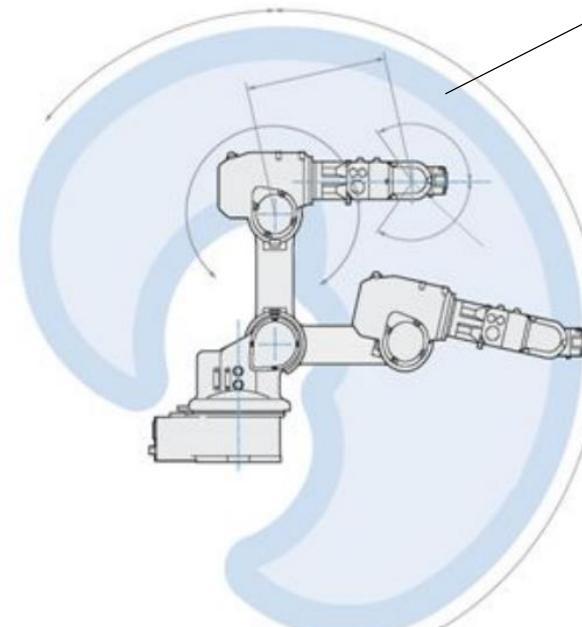
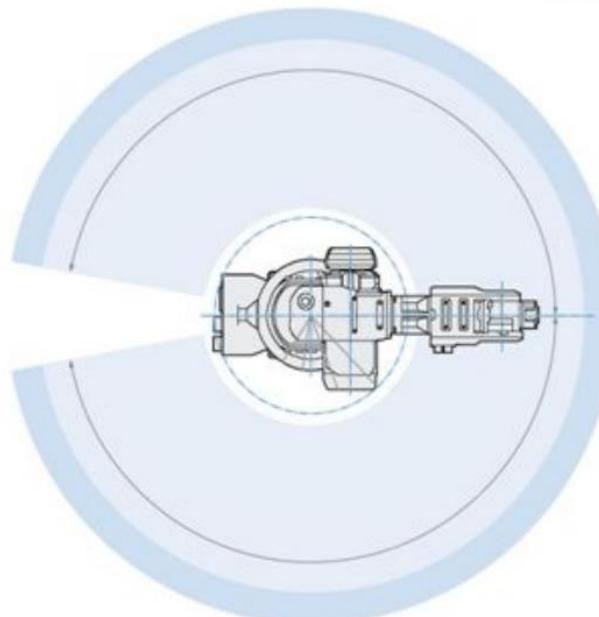


# Quelques définitions

## Volume de travail (workspace)

Ensemble des points atteignables par le préhenseur.

(dépend de la géométrie du robot, de la longueur des segments, des contraintes sur les angles/courses des articulations )



**Espace de travail maximal  
(reachable workspace)**  
avec une configuration possible à minima

**Espace de travail dextre  
(dextrous workspace)**  
avec toutes les orientations possibles du préhenseur.  
(i.e. points où le robot peut saisir un objet immobile et toujours déplacer ses articulations)

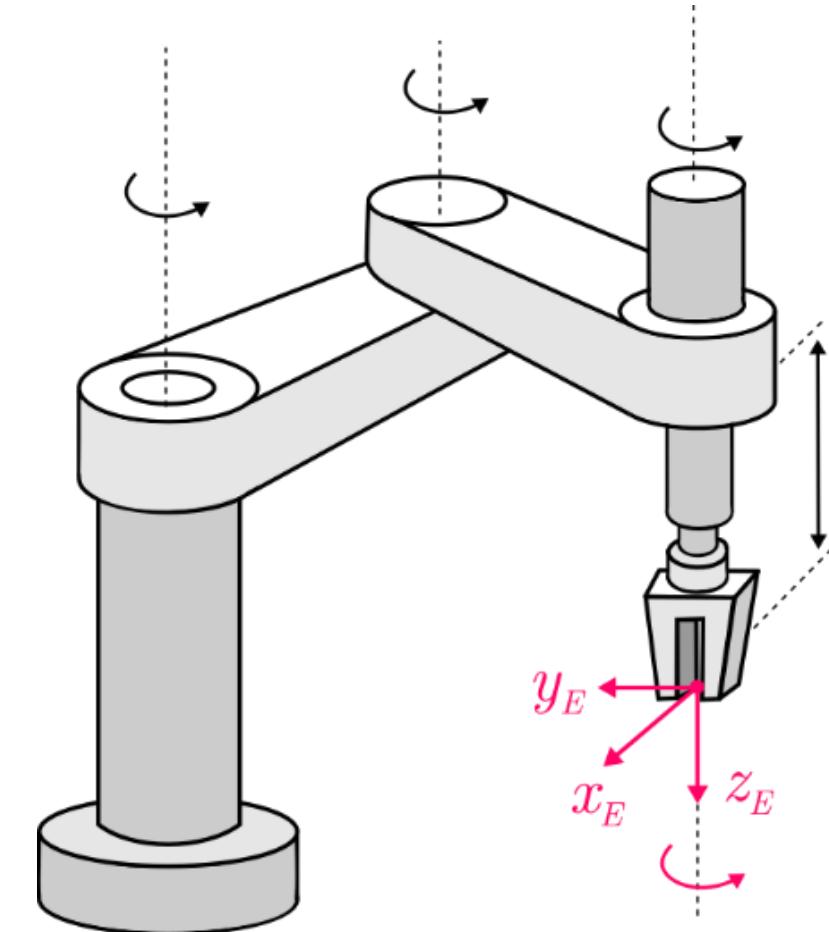
## Quelques définitions

### Degrés de Liberté d'un robot (DOF : Degrees of Freedom)

DOF = nombre de paramètres indépendants qui permettent de définir la pose de l'organe terminal  
(position et orientation)

- Pour les robots séries à structure ouverte il est égal au nombre d'articulations.
  - Pour tous les cas il se calcule avec la formule de Chebychev-Grübler-Kutzbach :
    - $N_L$  : nombre de segments (incluant la base)
    - $N_J$  : nombre d'articulations
    - $m$  : dimension de l'espace de travail  
( $m = 3$  pour un plan,  $m = 6$  dans l'espace 3D)
    - $f_i$  : degrés de liberté de l'articulation  $i$
- $$DOF = m(N_L - 1 - N_J) + \sum_{i=1}^{N_J} f_i$$

## Quelques définitions



# Quelques définitions

## Espace des Tâches

Espace dans lequel est définie la position et l'orientation de l'effecteur

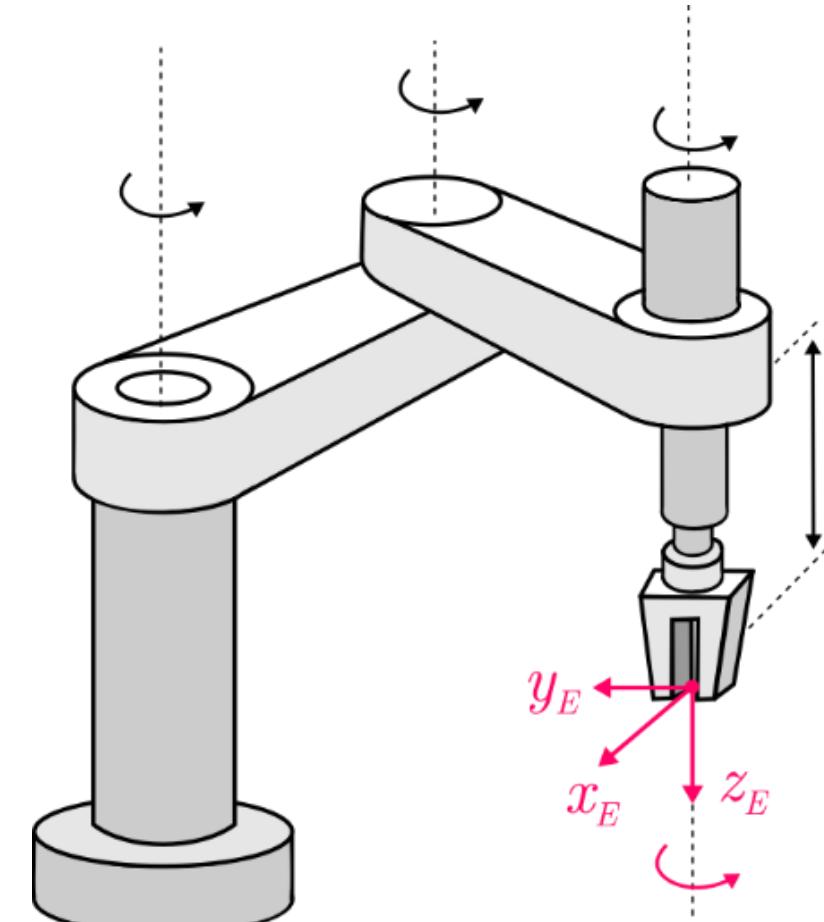
## Coordonnées opérationnelles

 $X_i$ 

## Espace Articulaire

Espace où sont définies la position et l'orientation des différentes liaisons.

## Variables articulaires

 $q_i$ 

# Quelques définitions

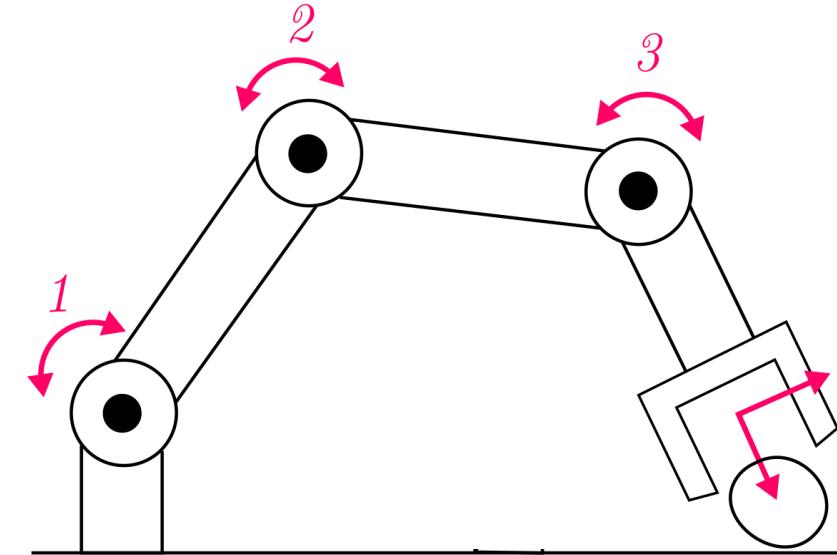
## Redondance

Un robot est redondant quand le DDL de l'organe terminal est inférieur au nombre de variables de l'espace articulaire.

(i.e. la dimension de l'espace opérationnel est inférieur à la dimension de l'espace articulaire).

C'est le cas notamment si sa structure présente une des propriétés suivantes :

- Plus de 6 articulations,
- Plus de trois articulations pivots d'axes concourants
- Plus de trois articulations pivots d'axes parallèles
- Plus de trois articulations prismatiques
- Deux axes d'articulations prismatiques parallèles,
- Deux axes d'articulations pivots confondus.



espace articulaire (dim=3)

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

espace opérationnel (dim=2)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

# Modes de déplacement des bras robots

## WORLD

C'est le référentiel robot.

Fixe, ce référentiel est prédéfini et ne peut donc être modifié.

## JOINT

Utilisé pour spécifier les mouvements des articulations du robot.

On déplace chaque articulation individuellement, une seule à la fois

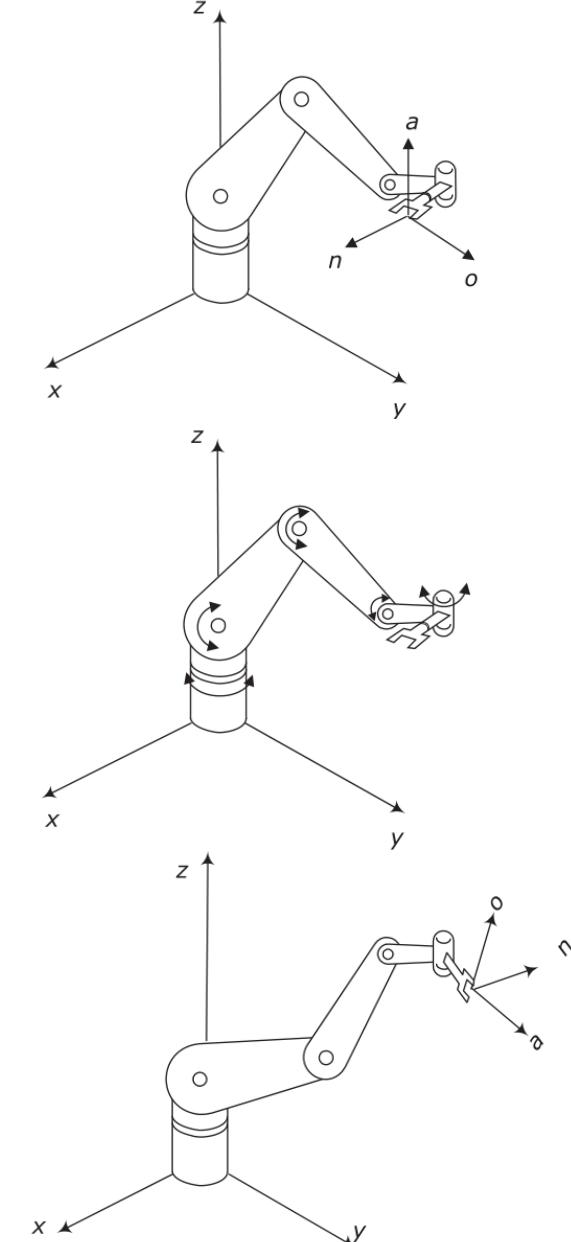
## TOOL

Contrairement au repère universel WORLD, le repère local de l'outil se déplace avec le robot

Origine =TCP (Point de Centre Outil)

## USER

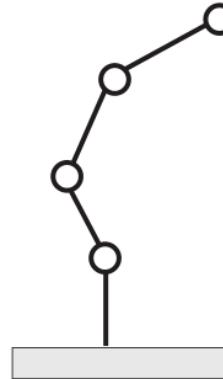
Peut être défini à n'importe quel endroit



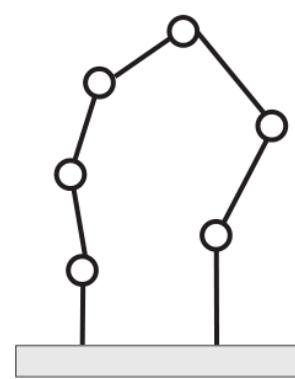
# Architectures

Les liaisons sont passives ou actives (motorisées).

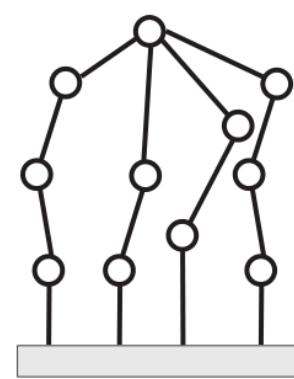
La chaîne peut être simple ou parallèle, ouverte (robot série), hybride ou fermée.



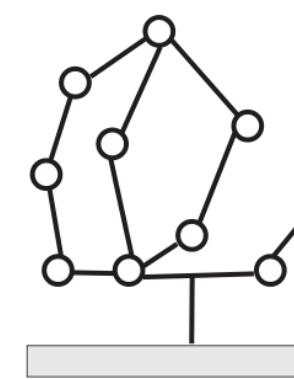
simple  
ouverte



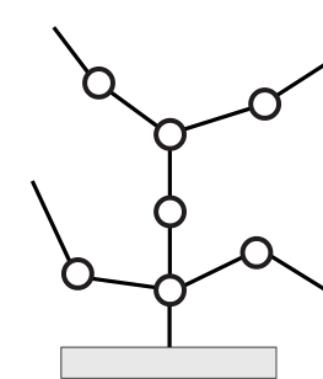
simple  
fermée



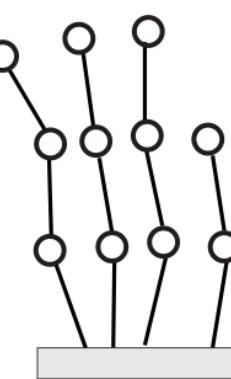
parallèle



hybride  
(ouverte)



Arborescent



Arborescent  
(main)

# Architectures

Architecture série		Architecture parallèle
Chaîne cinématique ouverte. Architecture constituée d'une alternance de corps et de liaisons.		Chaîne cinématique fermée. L'organe est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes.
		
+ Polyvalence + Espace de travail important + Modélisation simple		Transport de très lourdes charges Meilleure précision Bonnes performances dynamiques
- Rigidité moyenne - Charge généralement limitées		Espace de travail plus limité Modélisation et analyse complexes

# Pourquoi choisir un ROBOT ARTICULÉ ?

## Les critères de choix d'un robot ARTICULÉ

- Charge maximale (jusqu'à 2 tonnes)
- Rayon d'action
- Nombre d'axes élevés
- Collaboratif
  
- Application de peinture
- Flexibilité



# Dans quel cas choisir un robot SCARA ?

## Les critères de choix d'un robot SCARA

Répétabilité

Rayon d'action

Rapidité

Tâche d'assemblage

Tâche de manutention



# Pourquoi choisir un ROBOT CARTÉSIEN ?

## Les critères de choix d'un robot CARTÉSIEN

Charge maximale ( jusqu'à 500 Kg)

Rayon d'action

Auto-apprentissage

Précision

Programmation facile

Faible coût



# Pourquoi choisir un ROBOT PARALLÈLE ?

## Les critères de choix d'un robot PARALLÈLE

Grande vitesse

Précision

Tâches d'assemblage

Faible charge

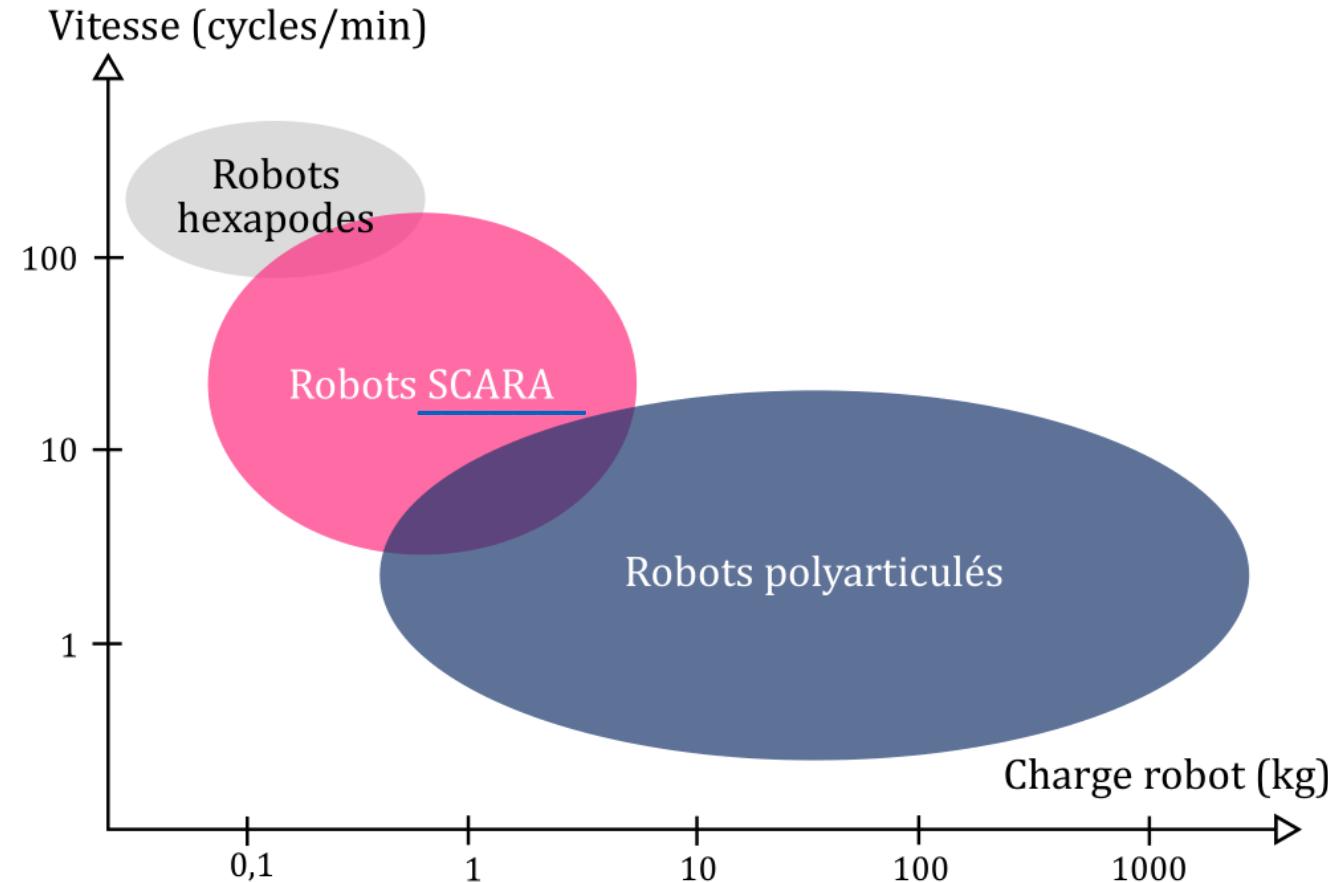
Industrie pharmaceutique

Industrie électronique

Industrie agroalimentaire



# Architectures



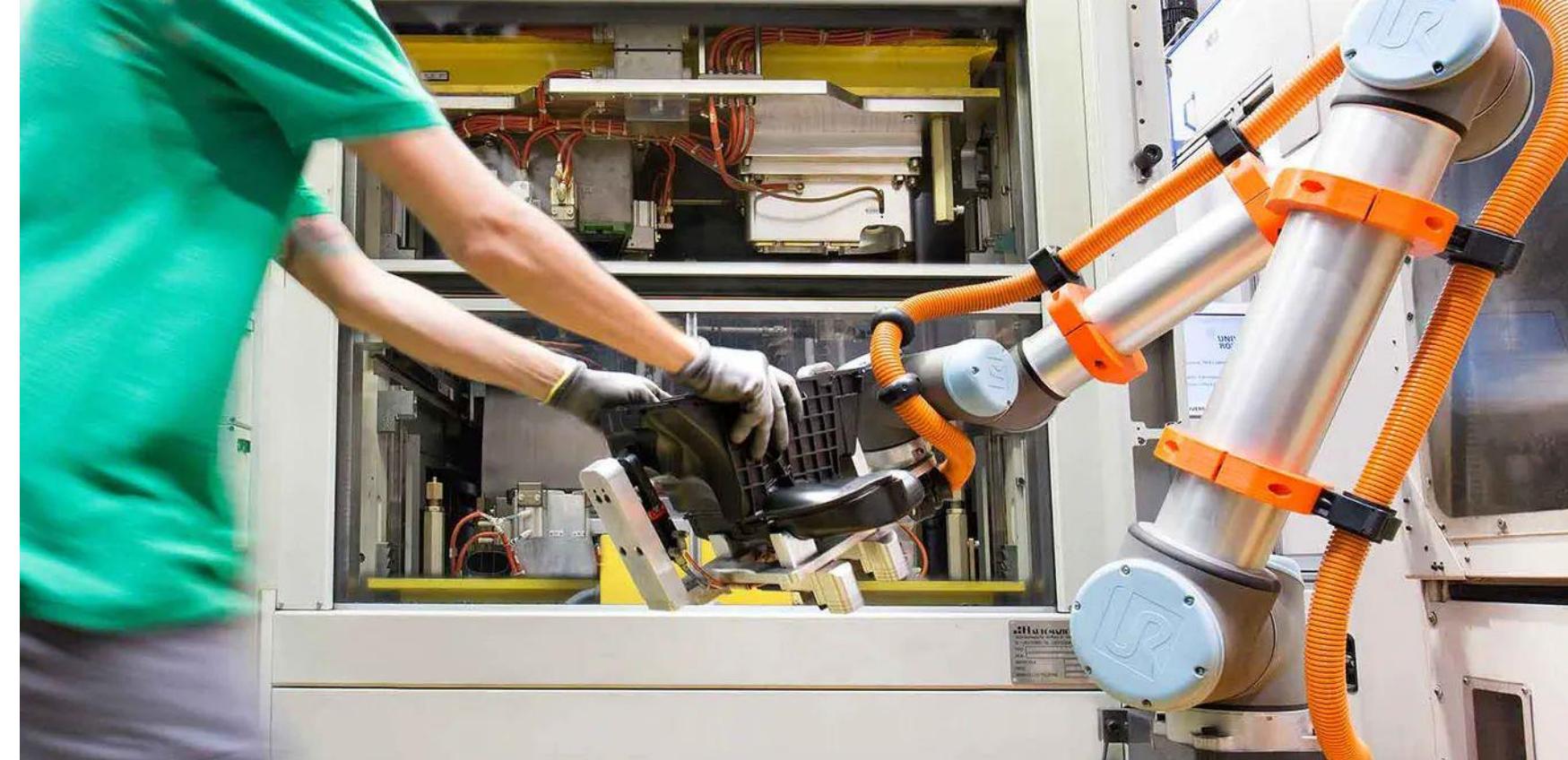
– Domaines d'applications des différentes architectures robotiques

## La tendance du marché : Les robots collaboratifs ?

Le cobot et l'opérateur peuvent travailler dans le même espace, sans barrière de sécurité

Grande vitesse  
Précision <  
Tâches d'assemblage  
Faible charge

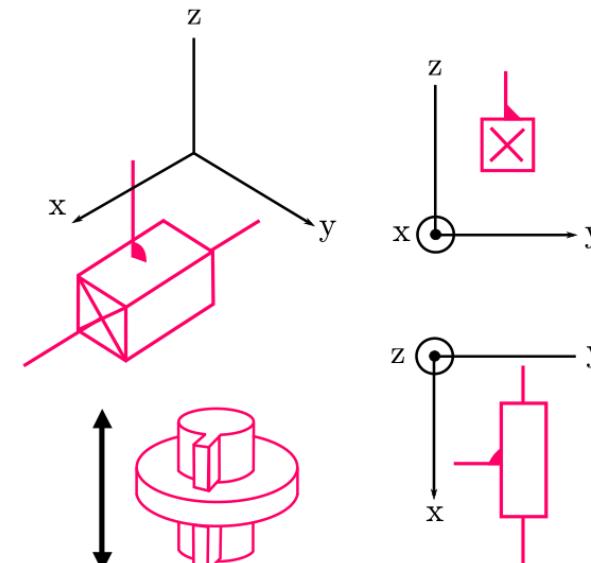
Industrie pharmaceutique  
Industrie électronique  
Industrie agroalimentaire



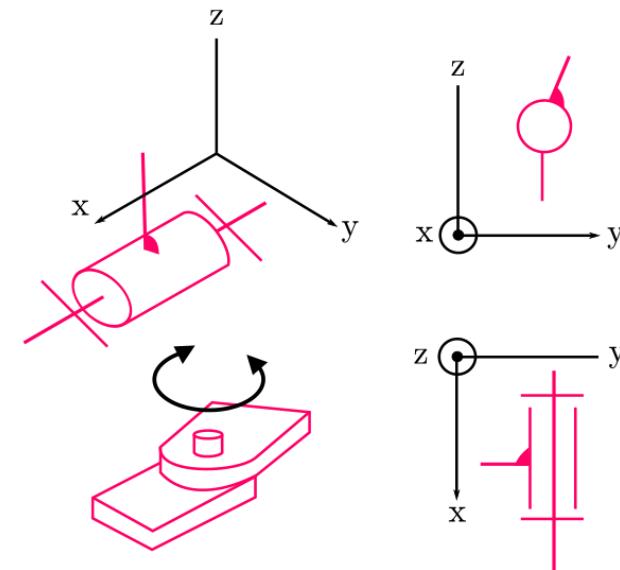
# Architectures

## Porteurs à chaîne cinématique ouverte (Robots série)

Les robots série possèdent généralement une architecture composée d'articulations dites simples de type liaisons **pivots/rotoïde: R** et liaisons **glissières/prismatique: P**



Prismatique P



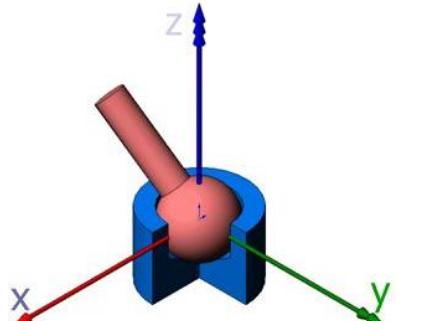
Rotoïde R

FIGURE 9 – Articulation prismatique **P** : 1 ddl en translation  $T_x$ . Articulation rotoïde **R** : 1 ddl en rotation  $R_x$ .

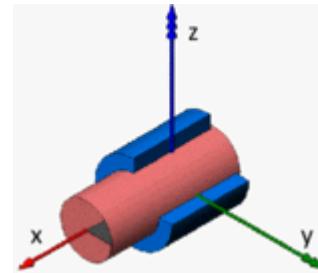
## Exercice

- **Modélisation:** le bras robotique est modélisé par une **chaîne cinématique** composée de solides liés entre eux par des liaisons.
- **Les liaisons mécaniques:**

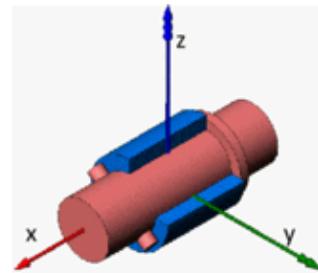
Sphérique



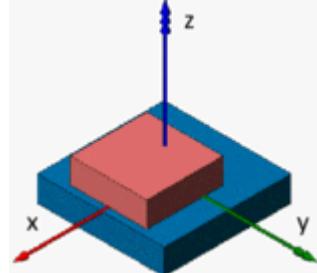
Pivot glissant



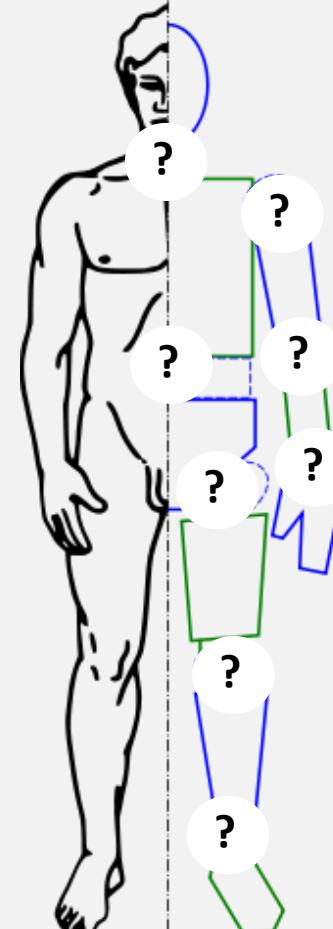
Pivot



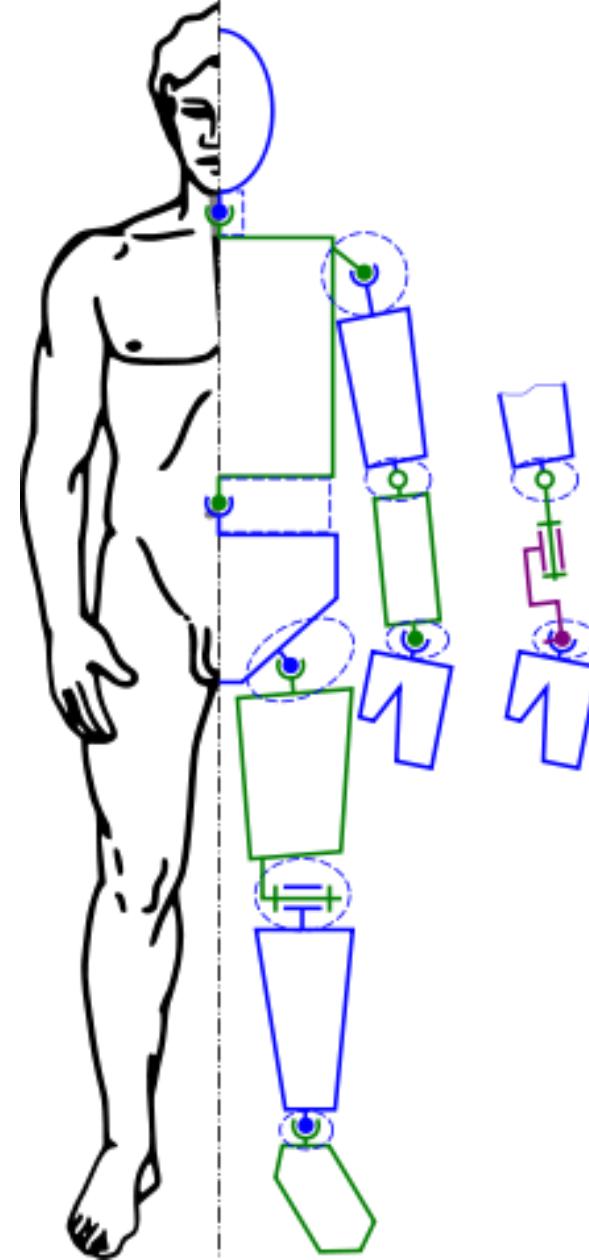
Appui plan



→ Quelles sont les liaisons mises en jeu sur le corps humain?



## Bras Robots : 2. Caractéristiques et architectures



# Architectures

## Porteurs à chaîne cinématique ouverte (Robots série)

Les trois premières articulations d'un robot sont généralement conçues pour effectuer les mouvements grossiers, et les articulations restantes servent à effectuer l'orientation.

- 3 premiers ddl du robot constituent la structure du **porteur**.
- les ddl restants forment le **poignet**.

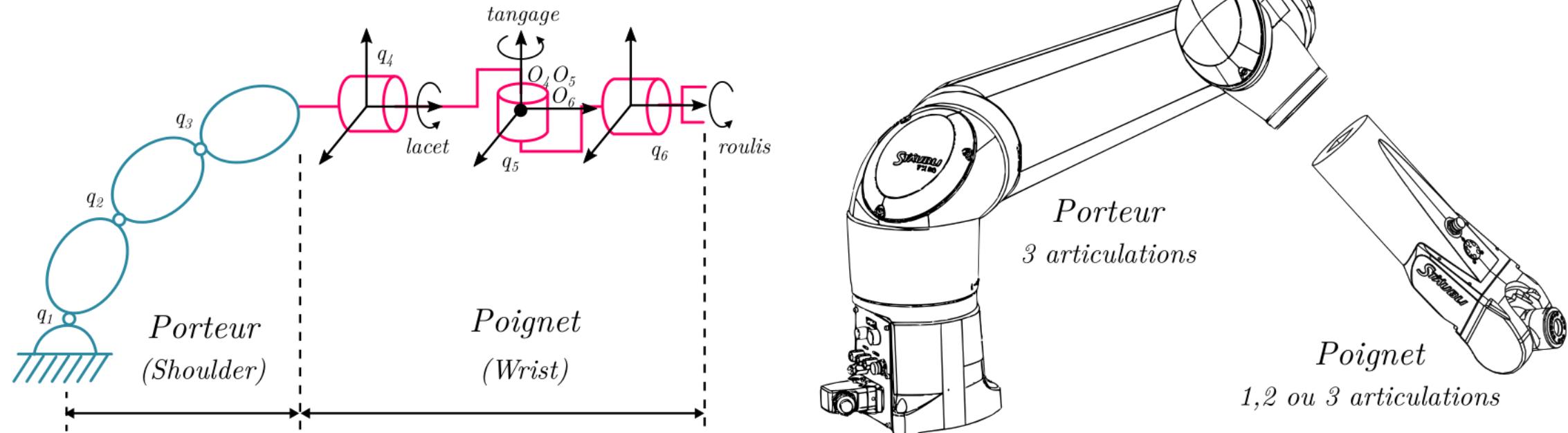


FIGURE 10 – Architecture classique d'un robot manipulateur à 6 DLL. (source : adaptée de [1])

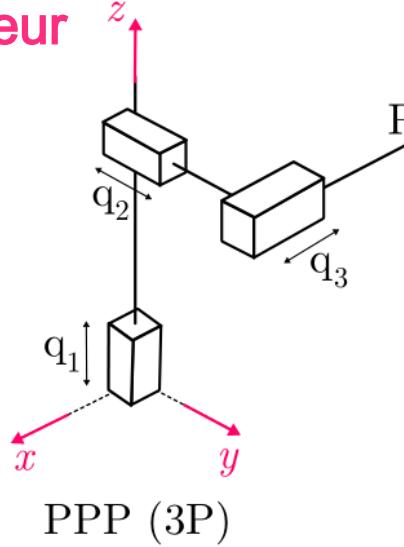
# Architectures

## Porteurs à chaîne cinématique ouverte (Robots série)

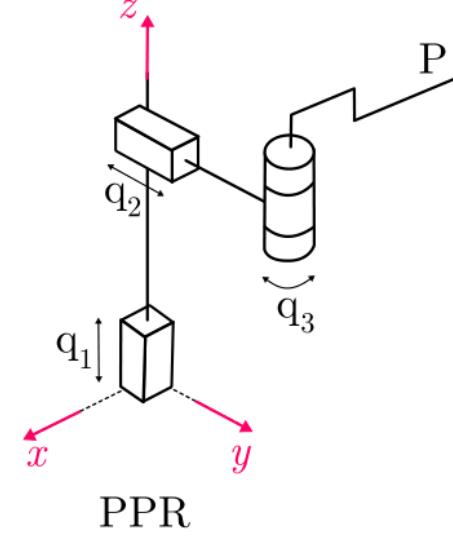
Les robots industriels peuvent généralement être classifiés en fonction de leur structure mécanique et du type des axes :

- structure **cartésienne** (ou robot portique) = **PPP** (~ 21% du parc des robots industriel)
- structure **cylindrique** = **RPP** (~ 7%),
- structure **SCARA** (bi-cylindrique) = **RRP** (~ 2%),
- structure **sphérique** = **RRP** (~ 13%),
- structure **anthropomorphique** = **RRR** (~ 67%)

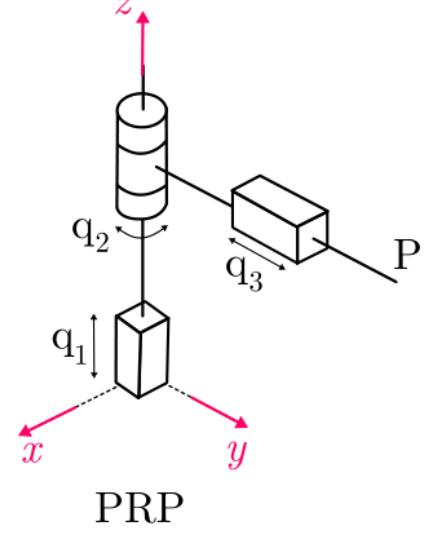
# Architectures

**Porteur**

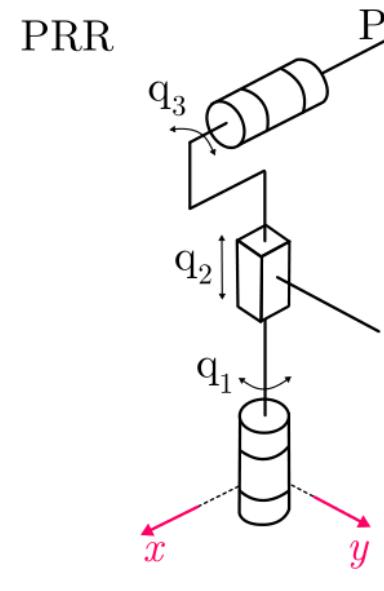
PPP (3P)



PPR

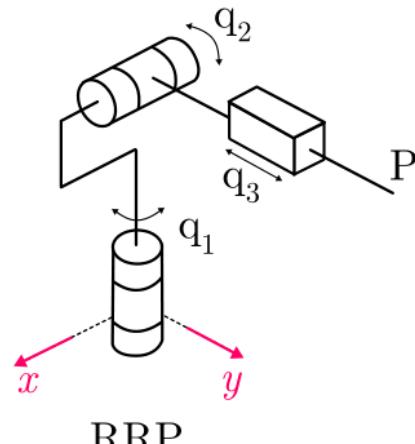


PRP

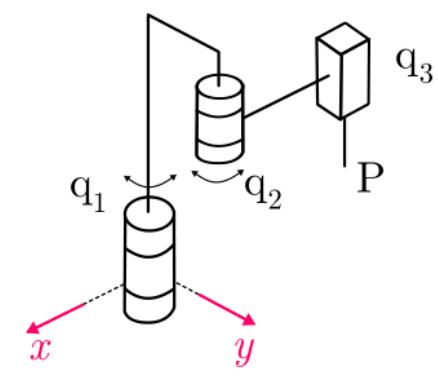


PRR

RPP

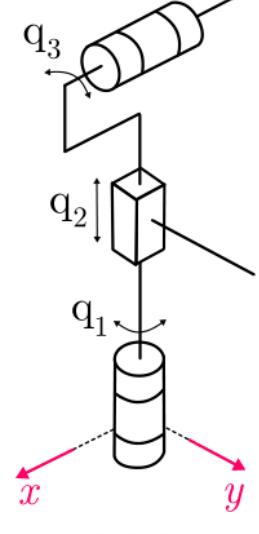


RRP



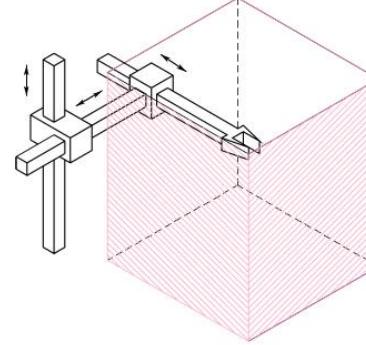
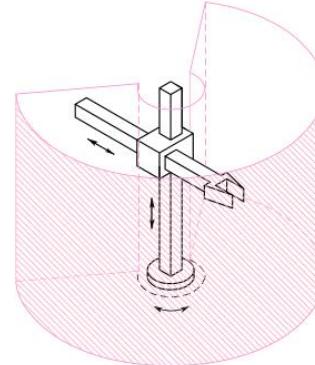
RRP

RRR

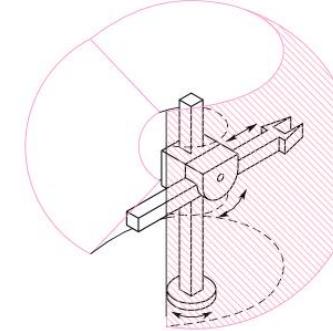
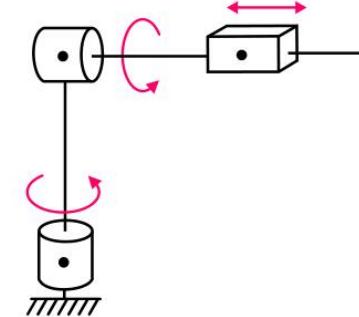
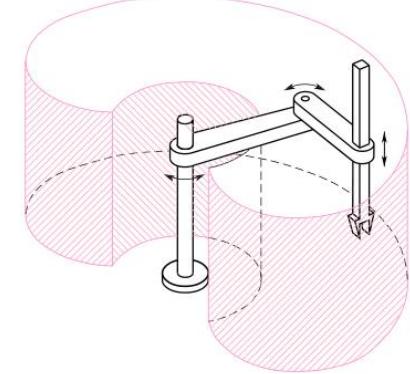
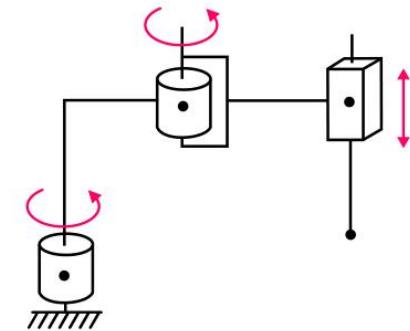


RPR

# Architectures

Principe	Workspace	Chaîne cinématique	Exemple
PPP			
Cartésien			
RPP ou PRP			
Cylindrique			

# Architectures

Principe	Workspace	Chaîne cinématique	Exemple
RPP ou PRP			
Sphérique RRP			
SCARA *			

# Architectures

---

Principe

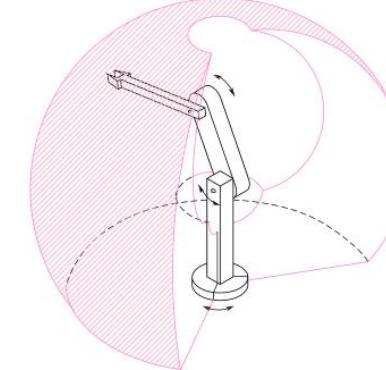
Workspace

Chaîne cinématique

Exemple

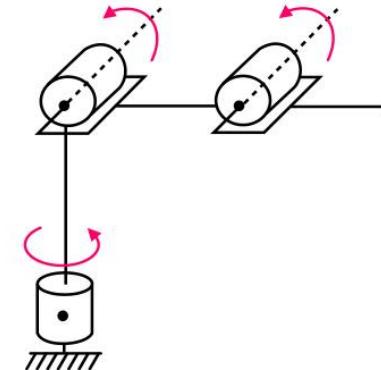
---

RRR



Anthropomorphe

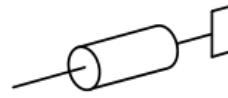
---



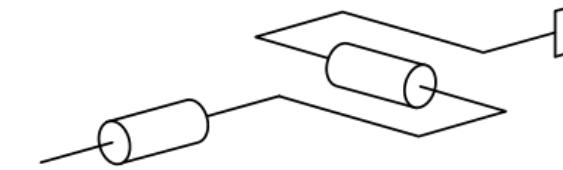
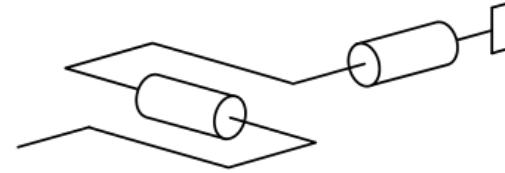
# Architectures

## Poignet

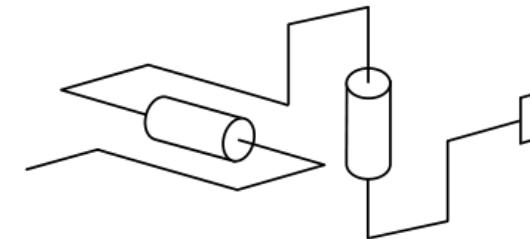
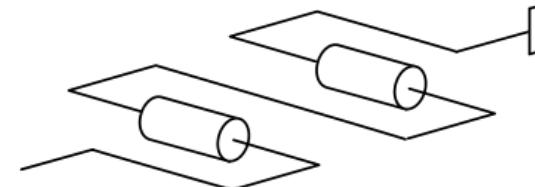
One-axis wrist



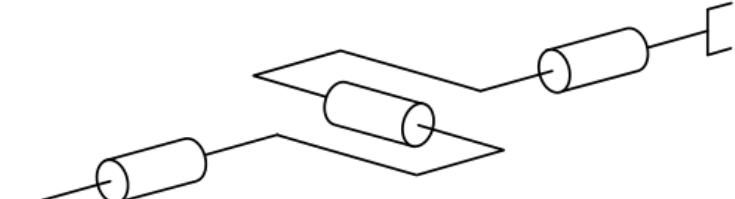
Two intersecting-axis wrist



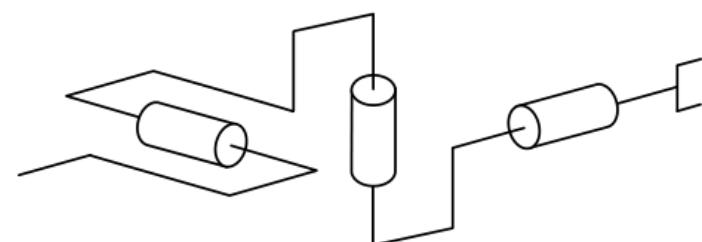
Two non intersecting-axis wrist



Three intersecting-axis wrist (spherical wrist)



Three non intersecting-axis wrist



# Préhenseurs

## OUTILS

Il existe différents types d'outils allant du plus simple :

- Vision
- Vision 2D ou 3D
- Reconnaissance des formes: tracking, contrôle de qualité
- Tracking convoyeur (droit ou circulaire)
- Capteurs d'efforts
- Compliance
- Modification / adaptation de trajectoire
- Gestion d'un 7ème axe
- Augmenter l'enveloppe de travail du robot
- Optimiser les process

Au plus complexe, nécessitant le développement d'un intégrateur.

## PREHENSEURS

Les préhenseurs sont la prolongation du robot pour la réalisation de sa tâche :

Quelques exemples de type de préhenseurs :

- Pince
- Ventouse



# Préhenseurs

## Pinces

- + + Pneumatique : L'intérêt du pneumatique réside dans sa rapidité.  
Les préhenseurs pneumatiques sont généralement quasiment 2 fois moins chers qu'en électrique
- - Pneumatique : Mais c'est du tout ou rien (ouvert ou fermé)

Force de préhension : 
$$F = \frac{m(a + g)}{\mu n}$$



# Comment choisir un préhenseurs ?

## Les critères liés aux procédés :

- Quelle est la tâche à réaliser (palettisation, picking, maintien ...) ?
- Quel est le type de support pour la prise et la dépose (stable, mobile) ?
- Quel est le temps de cycle désiré (temps d'ouverture, de fermeture, accélération) ?
- Quelle est la précision de positionnement désirée ?
- Quel est l'environnement dans lequel l'installation se trouve (corrosif, toxique, humide, poussiéreux, salle blanche) ?

## Les critères liés à l'objet à manipuler :

- La taille de la pièce permet de dimensionner la taille des pinces, la zone à libérer autour de la pièce, le couple sur le préhenseur et le robot
- La forme de la pièce ajoute des contraintes sur la prise et l'adaptabilité du préhenseur (présence de courbes, angles, surfaces planes, position du centre de gravité)
- Le poids de la pièce et du préhenseur doit être intégré à la charge totale du le-

vage. La force de serrage doit maintenir la pièce lors des accélérations et arrêts d'urgence

- L'état de surface de la pièce peut éliminer rapidement certaines techniques de préhension (salissure, fragilité, pièces esthétiques)

# Comment choisir un préhenseur ?

## Les critères au niveau de la cellule :

- Le temps de cycle
- Le taux de service
- La productivité moyenne de la cellule robotisée
- Le nombre de pièces géométriques différentes en production
- Le nombre de pièces géométriques à manipuler dans un cycle
- Le nombre de pièces ou de produits introduits à l'année
- Le nombre de cellules robotisées identiques

## Les critères au niveau du préhenseur :

- Le type de préhenseur possible (vide, pneumatique, électrique, magnétique)
- La flexibilité requise nécessitant un changeur d'outils ou un préhenseur adaptatif.
- La possibilité d'un préhenseur existant (sur étagère ou à adapter)
- La nécessité de concevoir un nouveau préhenseur (temps de conception et de mise au point)
- La séquence de manipulation des différentes pièces dans le cycle
- Le mode opératoire pour changer de pièce ou de produit

## Exercices

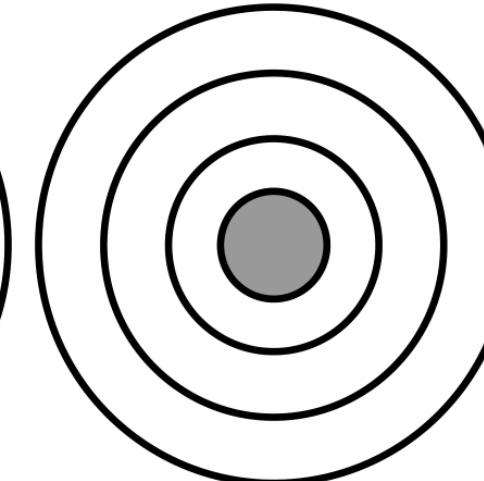
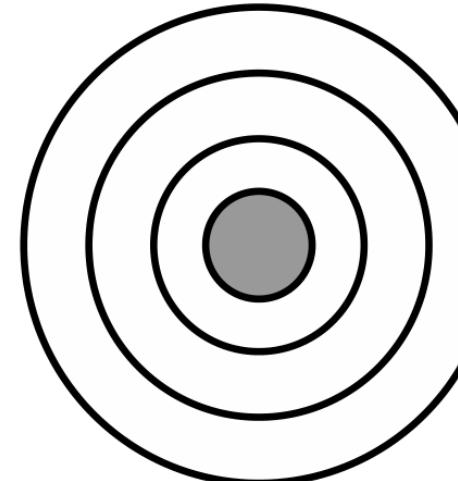
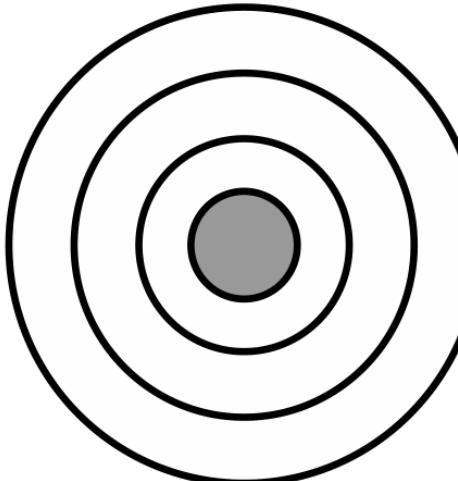
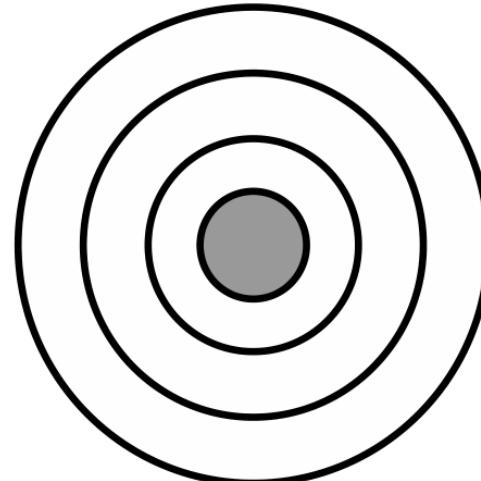
### Repeatability & Accuracy

Pourquoi la justesse n'est pas constante partout dans l'espace de travail?

Pour un robot, pourquoi la répétabilité est elle beaucoup plus importante que la justesse?

Sur 4 schémas, illustrez un système :

- non juste et non répétable
- juste, mais non répétable
- répétable, mais non juste
- juste et répétable



# Exercices

## Repeatability & Accuracy

Quel est l'ordre de grandeur de la répétabilité d'un bras robotisé?

# Exercices

## Datasheet

D'après la fiche technique du bras robot TX200 de Stäubli, déterminer :

- Le nombre d'axes
- La charge maximale transportable
- La répétabilité de positionnement
- Le poids
- Le rayon d'action
- La vitesse angulaire maximale des deux premiers axes
- Les butées mécaniques du poignet
- Modes de fixation
- Le volume de travail

# Exercices

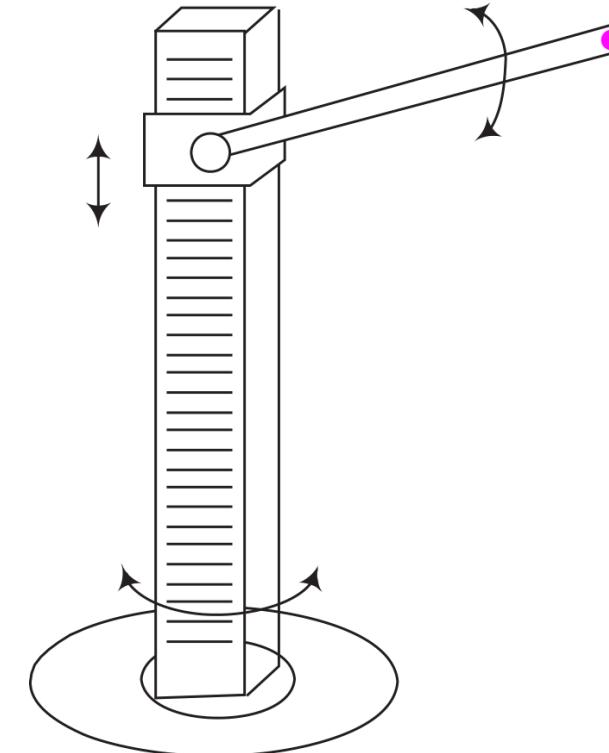
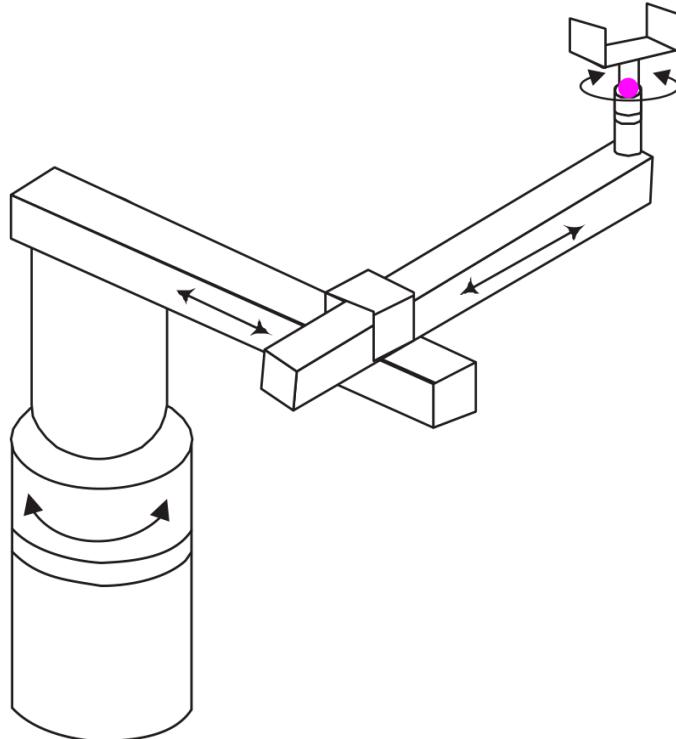
## Caractéristiques de robots

Sur une ligne montage de voiture, peut on utiliser un Kuka KR30 pour manipuler un châssis?

Donnez un modèle de robot KUKA, ABB et Kawasaki qui ont une charge de travail pouvant aller jusqu'à 15 Kg.

# Exercices

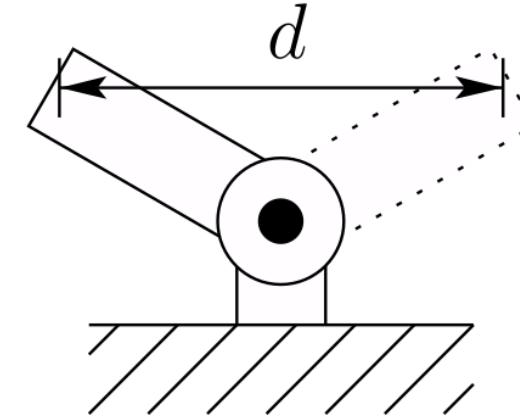
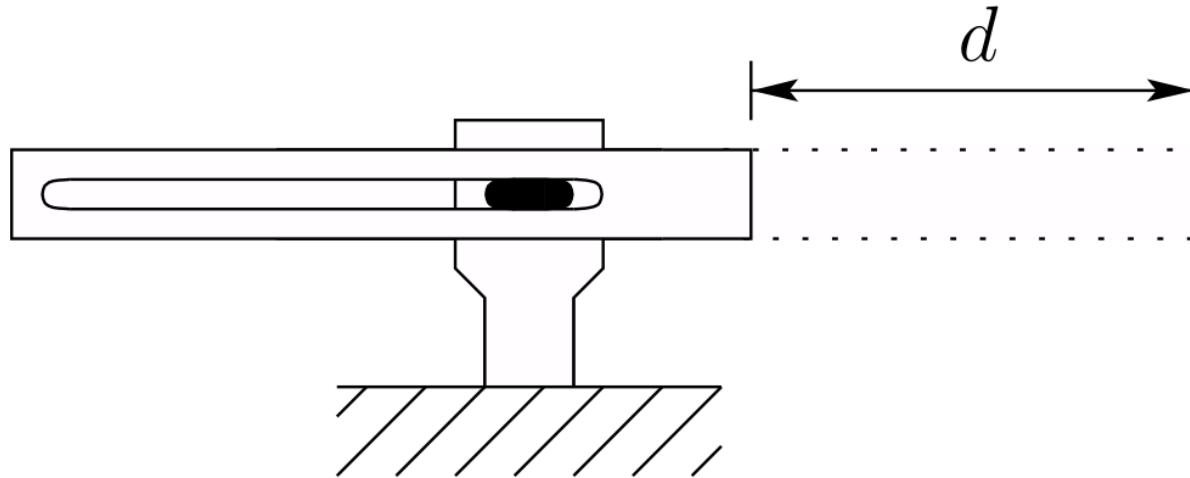
## Workspace



# Exercices

## Resolution

Pourquoi la résolution des axes linéaires est généralement plus élevée que celle des axes de révolution?

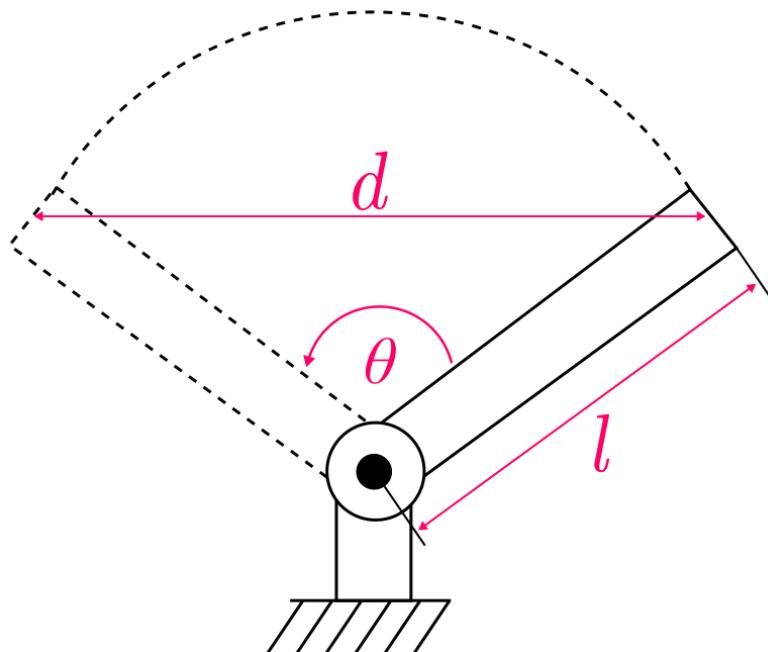


# Exercices

## Trigonométrie

montrer que la distance  $d$  est donnée par :  $d = l\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$

Avec un contrôleur 10 bits et avec  $l = 1m$ ,  $\theta = 90^\circ$ , quelle est la résolution d'un segment linéaire ? et d'un segment de rotation ?



# Exercices

## Architecture

Indiquer les robots à architecture parallèle

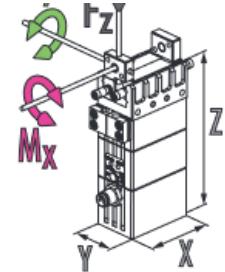
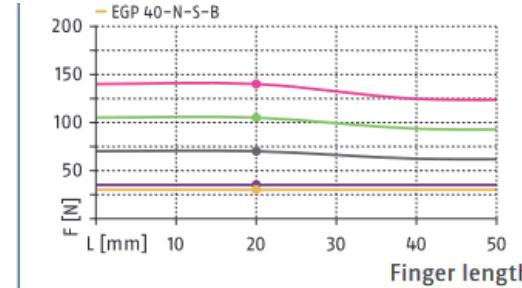


# Exercices

## Préhenseur

On monte en bout d'un bras, une pince parallèle Schunk modèle EGP 40-N-S-B, avec un coefficient de friction de 0.15

Peut-on soulever sans danger une pièce de 0.8 kg avec une accélération de  $12\text{m/s}^2$  ?



$M_x$  max. 1.5 Nm       $M_z$  max. 4 Nm  
 $M_y$  max. 2 Nm       $F_z$  max. 170 N

- ⓘ The indicated moments and forces are statical values, apply for each base jaw and should not appear simultaneously. Loads may additionally occur to the moment produced by the gripping force itself.

## Technical data

Characterization		EGP 40-N-N-B	EGP 40-N-S-B
ID		0310940	0310942
General operating data			
Stroke per jaw	[mm]	6	6
Min./max. gripping force	[N]	35/140	30/30
Recommended workpiece weight	[kg]	0.7	0.15
Max. permissible finger length	[mm]	50	50
Max. permissible mass per finger	[kg]	0.08	0.08
Repeat accuracy (gripping)	[mm]	0.02	0.02
Closing/opening time	[s]	0.2/0.2	0.06/0.06
Weight	[kg]	0.32	0.3
Min./max. ambient temperature	[°C]	5/55	5/55
IP protection class		30	30
Noise emission	[dB(A)]	<70	<70
Dimensions X x Y x Z	[mm]	40 x 26 x 88.4	40 x 26 x 88.4

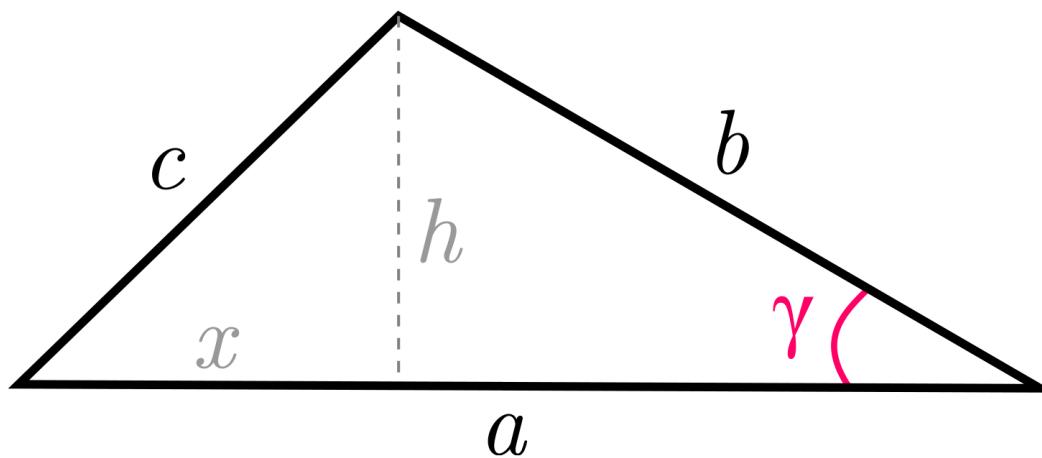
# Exercices

## Trigonométrie

Soit le triangle quelconque de cotés : a,b,c.

- 1) Exprimez x en fonction de a,b et  $\gamma$ .
- 2) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle de gauche (cxh), exprimez  $c^2$  en fonction de a, b et  $\gamma$ .

Comment s'appelle cette formule?



# Exercices

## Trigonométrie

En utilisant la loi des cosinus, exprimer l'angle  $\theta_2$  en fonction des coordonnées du point  $P(x,y)$ , de  $a_1$  et de  $a_2$ . En utilisant l'angle  $\beta$  et en l'exprimant en fonction des coordonnées du point  $P(px,py)$ , de  $a_1$  et de  $a_2$ , trouver l'angle  $\theta_1$ .

