

**MECA 953 - Robotique**

**MMT5**

**3. Pose, Rotations,  
Matrices homogènes**

2020

# Outils mathématiques

- Produit scalaire
- Produit vectoriel
- atan2

La fonction  $\text{atan}(\theta)$ , où  $\theta = y/x$ , renvoie un angle dans la plage de  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Elle ne fait pas la différence entre des directions diamétralement opposées.

La fonction  $\text{atan2}$  à deux arguments est définie pour tout  $(x,y) \neq 0$  et donne un unique angle  $\theta$  sur  $]-\pi, \pi]$  tel que :

$$\text{atan2}(y, x) = 2\text{atan}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

$$\text{avec } \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La fonction utilise le signe de x et y pour choisir le quadrant approprié pour l'angle  $\theta$

# POSE

Pose = Position + Orientation

6DLL

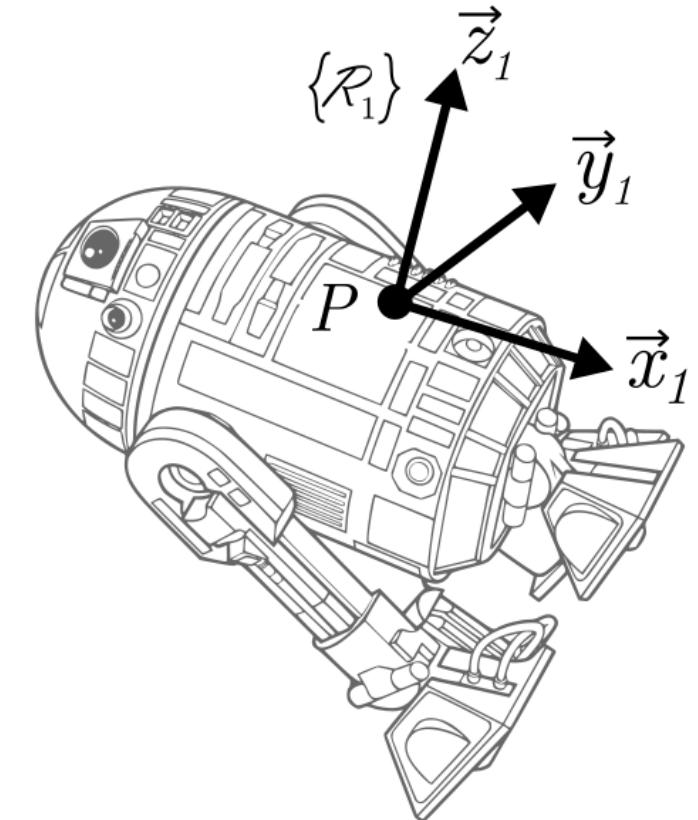
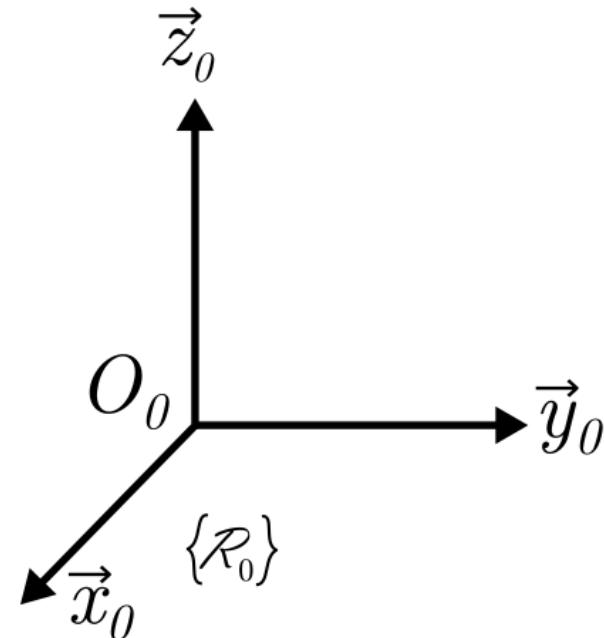
3DLL

3DLL

par rapport à un référentiel (*i.e.* le repère)

$\{\mathcal{R}_0\} = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  : repère fixe

$\{\mathcal{R}_1\} = (P, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  : repère (1) associé au solide

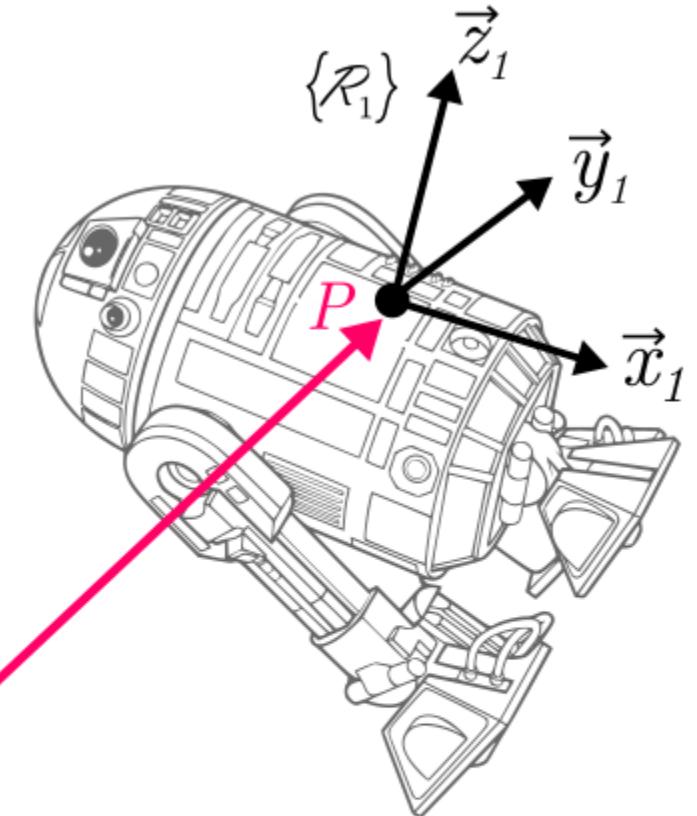
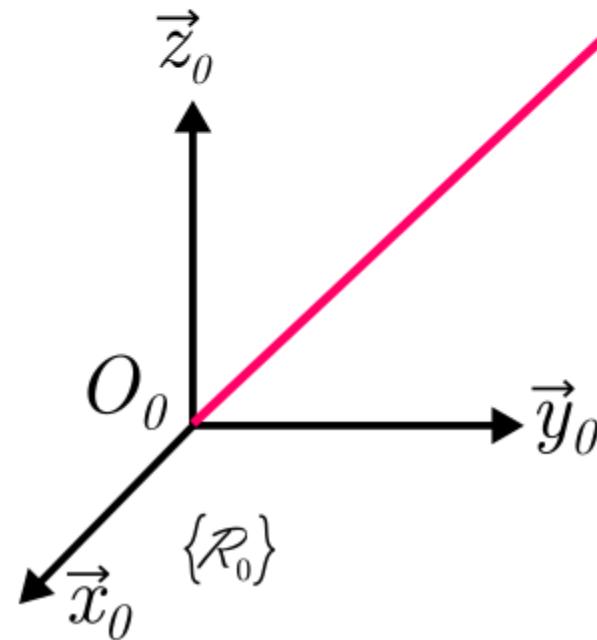


# POSITION

La position est définie par les coordonnées du point  $P$  dans le repère  $(\theta)$

$$\vec{O_0P} = P_x \cdot \vec{x}_0 + P_y \cdot \vec{y}_0 + P_z \cdot \vec{z}_0$$

$${}^0P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}_0 \quad \text{exprimée donc dans le repère } (\theta)$$



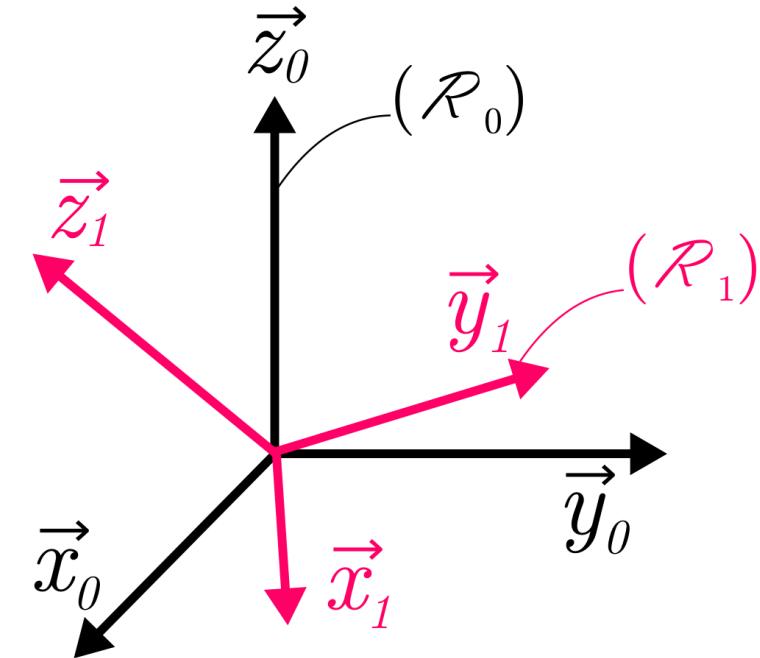
## ORIENTATION (détérminée par une matrice)

Pour définir l'orientation de (1) par rapport à (0), on utilise la **matrice de changement de base**, ou **matrice de passage** de  $\{R_0\}$  à  $\{R_1\}$  notée  ${}^0R_1$  :

$${}^0R_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \vec{x}_0 \\ \leftarrow \vec{y}_0 \\ \leftarrow \vec{z}_0 \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $\vec{x}_1 \quad \vec{y}_1 \quad \vec{z}_1$

avec  $\begin{cases} \vec{x}_1 = r_{11} \cdot \vec{x}_0 + r_{21} \cdot \vec{y}_0 + r_{31} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 = r_{11} \end{cases}$



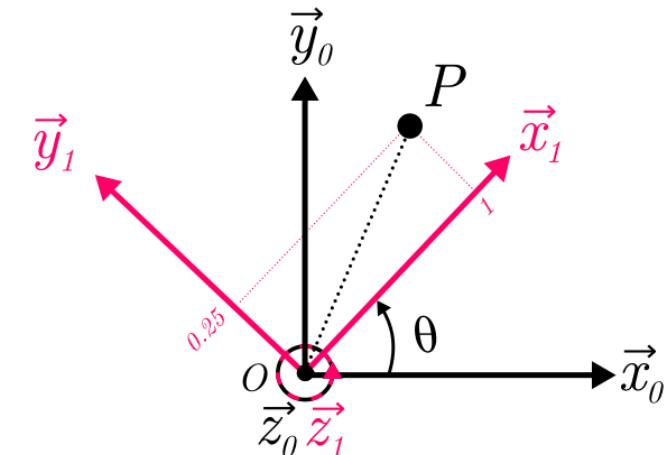
Matrice de rotation : également appelée **matrice des cosinus directeurs**.  
 (Chaque élément de la matrice est nommé cosinus directeur)

## Changement de base d'un vecteur

La matrice de passage permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur dans le repère  $\{\mathcal{R}_0\}$  à partir de ses coordonnées données dans le repère  $\{\mathcal{R}_1\}$ .

Soit un vecteur  $\vec{p}$  avec

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix}_{(0)} \quad \text{ses coordonnées exprimées dans le repère (0)} \\ {}^1\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{bmatrix}_{(1)} \quad \text{ses coordonnées exprimées dans le repère (1)} \end{aligned}$$



si les origines des deux repères  $\{\mathcal{R}_0\}$  et  $\{\mathcal{R}_1\}$  sont confondues (rotation pure entre les repères)

$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\mathbf{p}$$

et inversement :

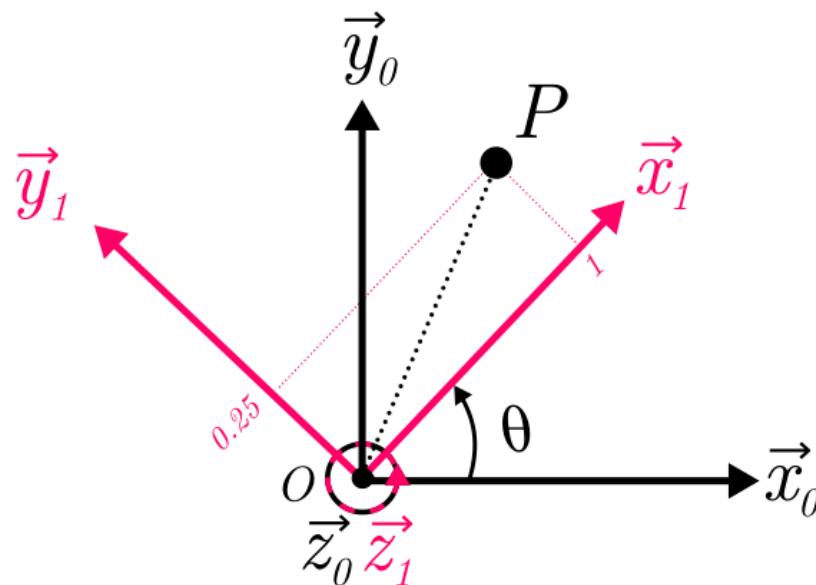
$${}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{p}$$

# Changement de base d'un vecteur

**Exemple : Coordonnées d'un vecteur dans 2 bases différentes**

Soit le point  $P$  dont les coordonnées sont connues dans le repère  $\{\mathcal{R}_1\}$  par :  ${}^1\mathbf{p} = (1, 0.25, 0)^T$ .

On cherche à déterminer les coordonnées de ce même point dans le repère  $\{\mathcal{R}_0\}$  sachant que le repère  $\{\mathcal{R}_1\}$  est défini par une rotation de  $\{\mathcal{R}_0\}$  autour de  $z_0$  par un angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



Les coordonnées des vecteurs de base de  $\{\mathcal{R}_1\}$  dans  $\{\mathcal{R}_0\}$  sont :

$$x_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}_{(0)}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}_{(0)}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(0)}$$

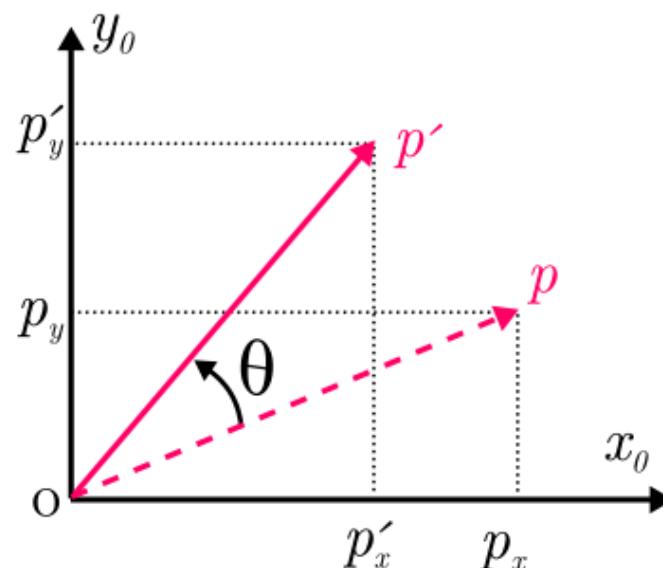
La matrice de passage de  $\{\mathcal{R}_0\}$  à  $\{\mathcal{R}_1\}$  s'écrit alors :  ${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les coordonnées du point  $P$  dans  $\{\mathcal{R}_0\}$  sont :  ${}^0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.53 \\ 0.88 \\ 0 \end{bmatrix}_{(0)}$

## Rotation d'un vecteur

L'interprétation d'une matrice de rotation peut donner naissance à plusieurs ambiguïtés. La modification des coordonnées d'un vecteur peut correspondre à une rotation de ce vecteur, ou à une rotation du repère.

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix}_{(0)} && \text{ses coordonnées exprimées dans le repère (0)} \\ \text{Soit un vecteur } \vec{p} \text{ avec} & & & \\ {}^0\mathbf{p}' &= \begin{bmatrix} {}^0p'_x \\ {}^0p'_y \\ {}^0p'_z \end{bmatrix}_{(0)} && \text{les coordonnées de ce vecteur ayant subit une rotation d'angle } \theta, \end{aligned}$$



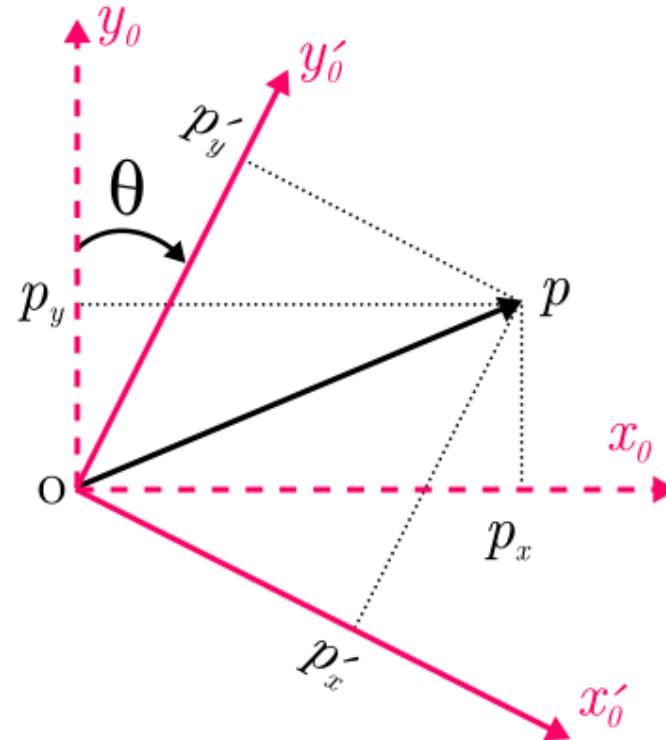
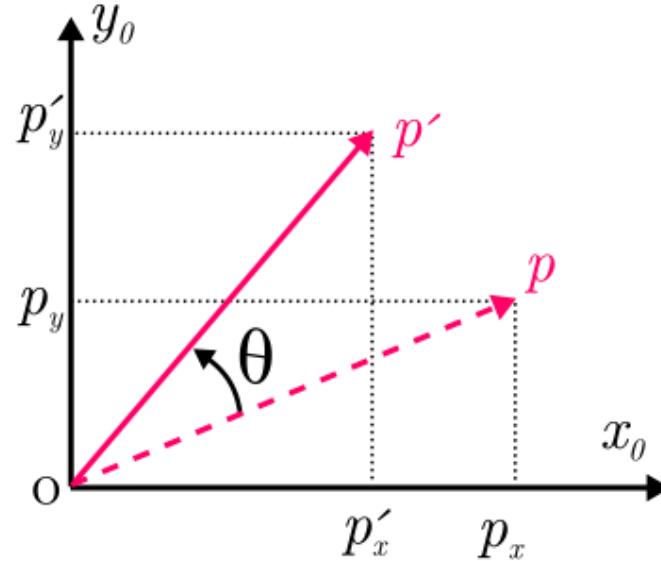
et inversement :

$${}^0\mathbf{p}' = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^0\mathbf{p}$$

$${}^0\mathbf{p} = ({}^0\mathbf{R}_1)^T \cdot {}^0\mathbf{p}'$$

# Ambiguïtés de la représentation matricielle

L'interprétation d'une matrice de rotation peut donner naissance à plusieurs ambiguïtés. La modification des coordonnées d'un vecteur peut correspondre à une rotation de ce vecteur, ou à une rotation du repère.



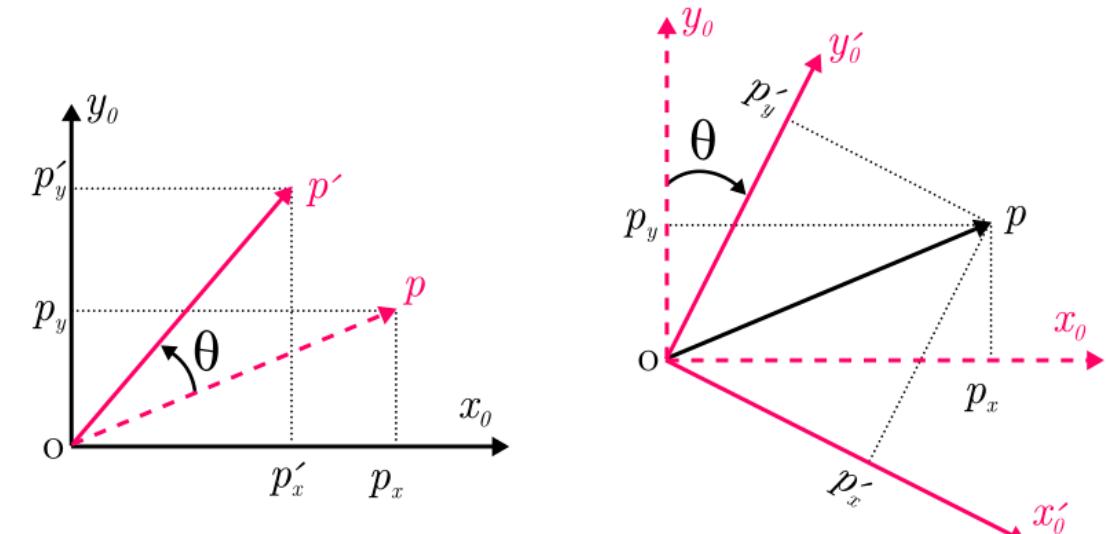
$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}_{(0)} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}_{(0)}$$

Rotation d'un vecteur en 2D et Changement de base d'un vecteur

## Ambiguïtés de la représentation matricielle

Il faut bien noter que dans cette formulation, les deux vecteurs  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p}'$ , ainsi que la matrice de rotation  ${}^0\mathbf{R}_1$  doivent être exprimés dans une même base, pour faire le calcul.

Il faut aussi bien comprendre qu'une rotation d'un vecteur selon un angle  $\theta$  est exactement identique à effectuer une rotation du repère selon un angle  $-\theta$ . En effet, soit le repère est fixe et le vecteur tourne de  $\theta$ , soit le vecteur est fixe et le repère de tourne d'un angle de  $-\theta$ , le résultat de l'un par rapport à l'autre est strictement identique.



Rotation d'un vecteur en 2D et Changement de base d'un vecteur

## Matrice de rotation / de changement de base

En résumé, la matrice de rotation  ${}^i\mathbf{R}_j$  de  $(\mathcal{R}_i)$  à  $(\mathcal{R}_j)$  :

- permet d'exprimer l'orientation du repère  $(\mathcal{R}_j)$  par rapport au repère  $(\mathcal{R}_i)$ .
- permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur dans le repère  $(\mathcal{R}_i)$  à partir de ses coordonnées données dans le repère  $(\mathcal{R}_j)$ .
- est un opérateur qui permet la rotation d'un vecteur dans le même système de coordonnée.

L'angle de la rotation est :

- **positif** dans le cas d'une rotation dans le **sens trigonométrique** (*i.e* anti-horaire) .
- **négatif** dans le cas d'une rotation dans le **sens horaire** .

# Matrice de rotation / de changement de base

## Propriétés

**Propriété 1 :** La matrice de rotation est orthogonale.

La transposée de la matrice de rotation est égale à son inverse :

$$({}^0\boldsymbol{R}_1)^{-1} = ({}^0\boldsymbol{R}_1)^T$$

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{12}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1$$

$$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$$

# Matrice de rotation / de changement de base

## Propriétés

**Propriété 2 :** Rotation inverse.

Produit scalaire des lignes 2 à 2 et des colonnes = 0. (par exemple :  $r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1$ )

Les lignes (resp. colonnes) représentent des vecteurs perpendiculaires 2 à 2 (produit scalaire nul) :  
 $(\vec{x}_0 \perp \vec{y}_0, \vec{x}_0 \perp \vec{z}_0, \vec{y}_0 \perp \vec{z}_0, \vec{x}_1 \perp \vec{y}_1, \dots)$

$${}^1\boldsymbol{R_0} = ({}^0\boldsymbol{R_1})^{-1} = ({}^0\boldsymbol{R_1})^T$$

**Propriété 3 :** Matrice identité

$${}^0\boldsymbol{R_1} \cdot ({}^0\boldsymbol{R_1})^T = I$$

(avec  $I$  la matrice (3x3) identité)

# Matrice de rotation / de changement de base

## Propriétés

**Propriété 4 :** Déterminant

$$\det {}^0 \boldsymbol{R}_1 = \det {}^1 \boldsymbol{R}_0 = 1$$

**Propriété 5 :** La composition des rotations est réalisée par multiplication de matrices de rotations

$${}^0 \boldsymbol{R}_k = {}^0 \boldsymbol{R}_1 \cdot {}^1 \boldsymbol{R}_2 \cdots {}^{k-2} \boldsymbol{R}_{k-1} \cdot {}^{k-1} \boldsymbol{R}_k$$

**Propriété 6 :** La composition des rotations n'est pas commutative

$${}^0 \boldsymbol{R}_1 \cdot {}^1 \boldsymbol{R}_2 \neq {}^1 \boldsymbol{R}_2 \cdot {}^0 \boldsymbol{R}_1$$

# Matrice de rotation / de changement de base

## Matrice de rotation élémentaires

Les *rotations élémentaires* sont réalisées autour d'un axe du repère. Les rotations sont positives si elles sont effectuées dans le sens trigonométrique autour de l'axe.

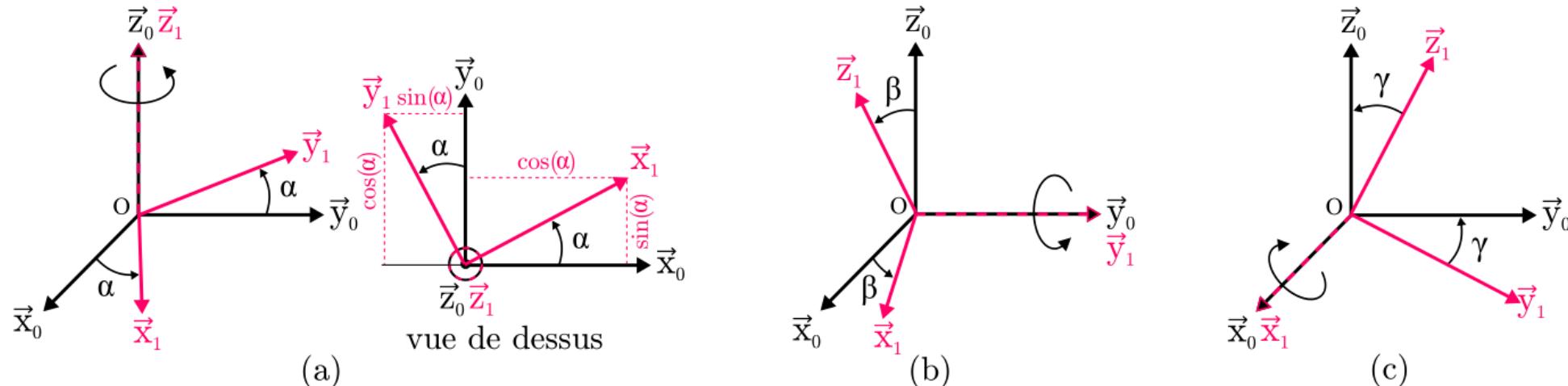


FIGURE 20 – (a)  $\mathbf{R}_z(\alpha)$  : Rotation autour de l'axe  $z$ . (b)  $\mathbf{R}_y(\beta)$  : Rotation autour de l'axe  $y$ . (c)  $\mathbf{R}_x(\gamma)$  : Rotation autour de l'axe  $x$ .

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

# Matrice de rotation / de changement de base

## Composition de matrices de rotation

Soit 3 repères  $\{\mathcal{R}_0\} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ,  $\{\mathcal{R}_1\} = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,  $\{\mathcal{R}_2\} = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  ayant la même origine  $O$ . Le vecteur  $\mathbf{p}$  décrivant la position d'un point dans l'espace peut être exprimée respectivement dans chaque repère par  ${}^0\mathbf{p}$ ,  ${}^1\mathbf{p}$ ,  ${}^2\mathbf{p}$ .

on a donc :

$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p}$$

et

$${}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}$$

mais aussi :

$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}$$

donc on a :

$${}^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2$$

Remarque :  ${}^0\mathbf{R}_1$  et  ${}^0\mathbf{R}_2$  représentent des rotations par rapport au repère  $\{\mathcal{R}_0\}$  alors que  ${}^1\mathbf{R}_2$  représente une rotation par rapport au repère  $\{\mathcal{R}_1\}$ .

On peut interpréter la rotation globale comme une succession de rotation en 2 étapes :

- Une rotation qui emmène  $\{\mathcal{R}_0\}$  en  $\{\mathcal{R}_1\}$ ;
- puis une rotation qui emmène  $\{\mathcal{R}_1\}$  en  $\{\mathcal{R}_2\}$ .

# Matrice de rotation / de changement de base

## Exemple : ordre de multiplication des matrices de rotation

Supposons que la matrice de rotation  $R$  représente une rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $y$  suivie d'une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$

Calculez  $R$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\beta c_\alpha & -c_\beta s_\alpha & s_\beta \\ s_\alpha & c_\beta & 0 \\ -s_\beta c_\alpha & s_\beta s_\alpha & c_\beta \end{bmatrix}$$

Supposons maintenant que la matrice de rotation  $R'$  représente une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$  suivie d'une rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $y$

Calculez  $R'$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que  $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}'$

# Matrice de rotation / de changement de base

## Rotation par repère fixe / repère courant

Deux cas se présentent pour combiner deux rotations :

- soit on effectue la seconde rotation par rapport au repère résultant de la première rotation, appelé **repère courant**. Dans ce cas, la composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations :

$${}^0\boldsymbol{R}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{R}_2$$

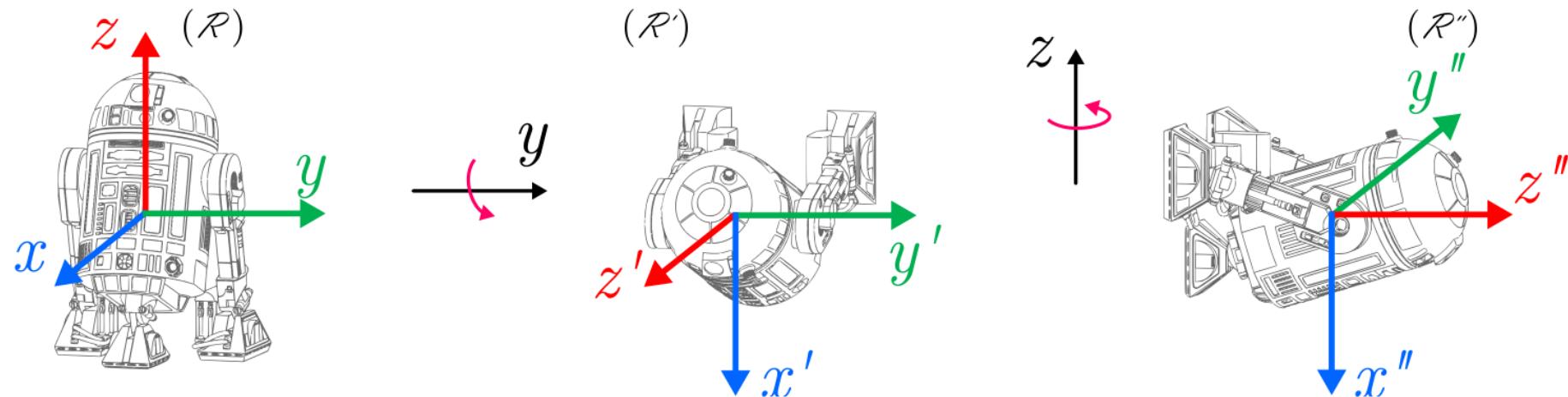
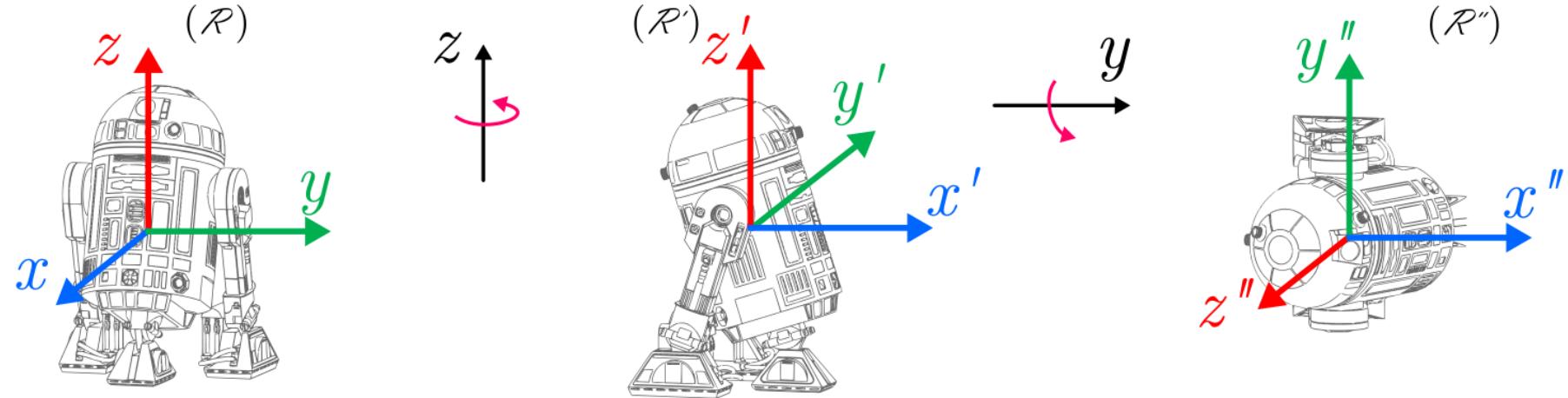
- soit on effectue les deux rotations par rapport à un unique repère, le **repère fixe**. Dans ce cas, la composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations :

$${}^0\boldsymbol{R}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{R}_2$$

*Remarque :* Dans le cas d'une combinaison de rotations par repère fixe, la deuxième rotation est réalisée par rapport au repère fixe. C'est déroutant et inapproprié d'utiliser la notation  ${}^1\boldsymbol{R}_2$  pour la décrire. Dans ce cas on précise explicitement le repère fixe dans lequel cette rotation est définie.

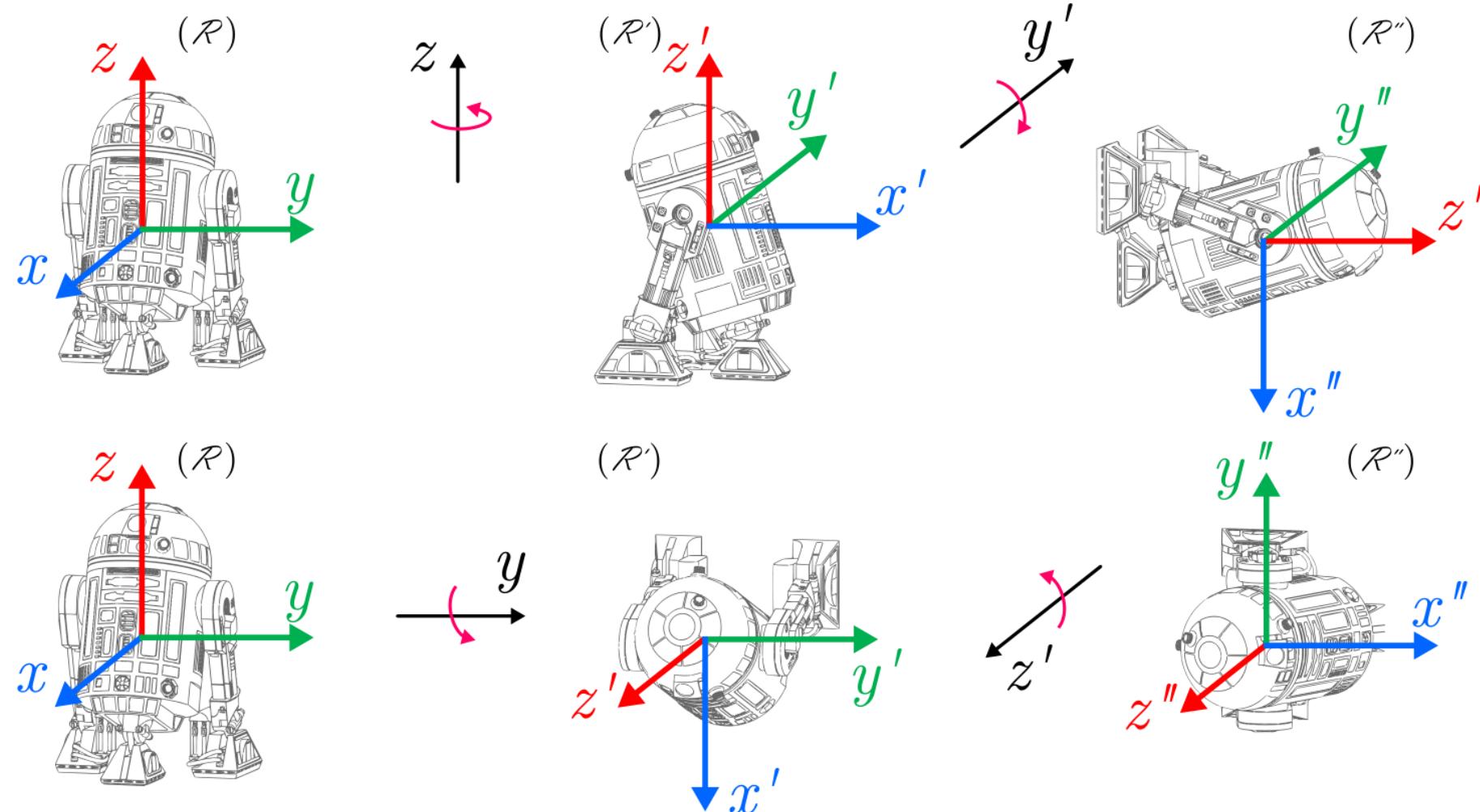
# Matrice de rotation / de changement de base

Rotations successives d'un objet autour des axes du repère fixe



# Matrice de rotation / de changement de base

Rotations successives d'un objet autour des axes du repère courant



# Matrice de rotation / de changement de base

## Remarques

Les matrices de rotation donnent une description *redondante* de l'orientation d'un corps. En effet, la matrice de rotation  $R$  est constituée de 9 éléments liés par seulement 6 relations indépendantes (contraintes d'orthogonalité et normalité) :

$$\begin{array}{ll} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 & r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{32} = 0 & r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1 \\ r_{12}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1 \end{array}$$

Par conséquent, 3 paramètres linéairement indépendants sont suffisants pour décrire l'orientation d'un corps. Ces trois rotations peuvent alors être définies de différentes manières (à condition que deux rotations consécutives ne soient pas autour du même axe) :

# Matrice de rotation / de changement de base

## Remarques

Pour exprimer de cette manière l'orientation d'un solide, ou de l'organe terminal d'un robot, on peut choisir, parmi diverses possibilités que l'on trouve sur la plupart des robots industriels comme par exemple :

- Angles d'Euler
- Angles nautique appelés aussi Angles de Cardan ou de Bryant (Roll Pitch Yaw)
- Quaternions

## Angles d'Euler ZYZ

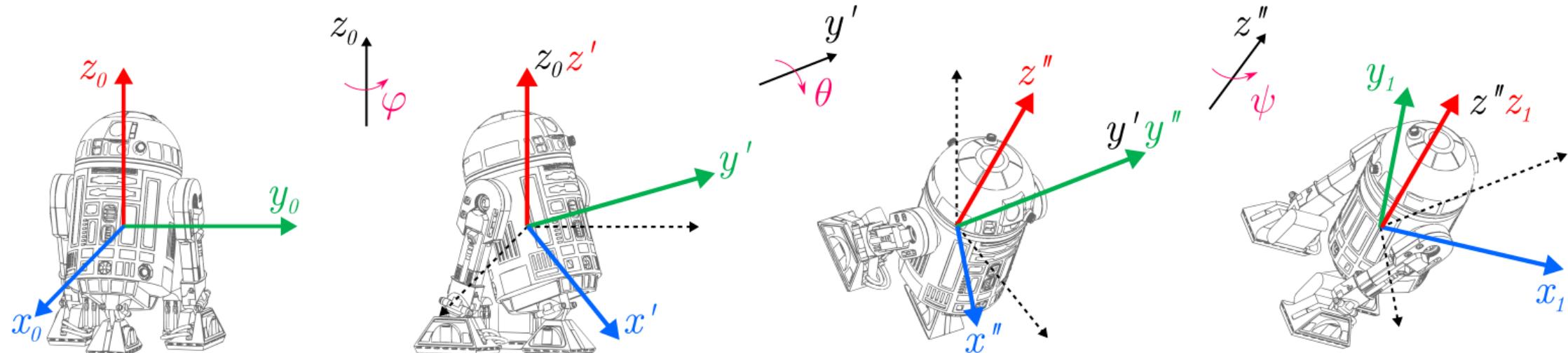
Succession de 3 rotations élémentaires appelées *précession*, *nutation* et *rotation propre*.

Chaque nouvelle rotation étant effectuée par rapport à un repère ayant tourné.

12 ordres de rotation possibles : xyx, xyz, xzx, xzy, yxy, yxz, yzx, yzy, zxy, zxz, zyx, **zyz**

Les deuxième et troisième rotations sont réalisées autour d'axes issus de la rotation précédente.

- $R_z(\varphi)$  : la précession  $\varphi$ , autour de l'axe  $z_0$ , fait passer de  $\{\mathcal{R}_0\}$  à  $(\mathcal{R}')$  (avec  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ),
- $R_{y'}(\theta)$  : la nutation  $\theta$ , autour de l'axe  $x'$ , fait passer de  $(\mathcal{R}')$  à  $(\mathcal{R}'')$  (avec  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ),
- $R_{z''}(\psi)$  : la rotation propre  $\psi$ , autour de  $z''$ , fait passer de  $(\mathcal{R}'')$  à  $\{\mathcal{R}_1\}$  (avec  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ ).



## Angles d'Euler ZYZ

La matrice de rotation équivalente à une orientation donnée par les angles d'Euler (**rotation par repère courant**, ici dans le cas ZYZ) est obtenue par **post-multiplication** des matrices de rotation élémentaires :

$$\mathbf{R}_{\text{ZYZ}} = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_{y'}(\theta) \mathbf{R}_{z''}(\psi)$$

$$\mathbf{R}_{\text{ZYZ}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\text{ZYZ}} = \begin{bmatrix} C_\varphi C_\theta C_\psi - S_\varphi S_\psi & -C_\varphi C_\theta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\theta \\ S_\varphi C_\theta C_\psi + C_\varphi S_\psi & -S_\varphi C_\theta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix}$$

## Angles d'Euler ZYZ

Réiproquement, on peut obtenir les angles d'Euler à partir des cosinus directeurs (les composantes de la matrice  $\mathbf{R}$ )

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Pour la convention ZYZ on a :

- une résolution inverse est indéterminée quand  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .
- Si  $r_{33} \neq \pm 1$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \theta = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{array} \right. \quad \text{si } \theta \in [0, \pi]$$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \theta = \text{atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \text{atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{array} \right. \quad \text{si } \theta \in [-\pi, 0]$$

## Angles d'Euler ZYZ

Quelques exemples de robots industriels et leur convention :

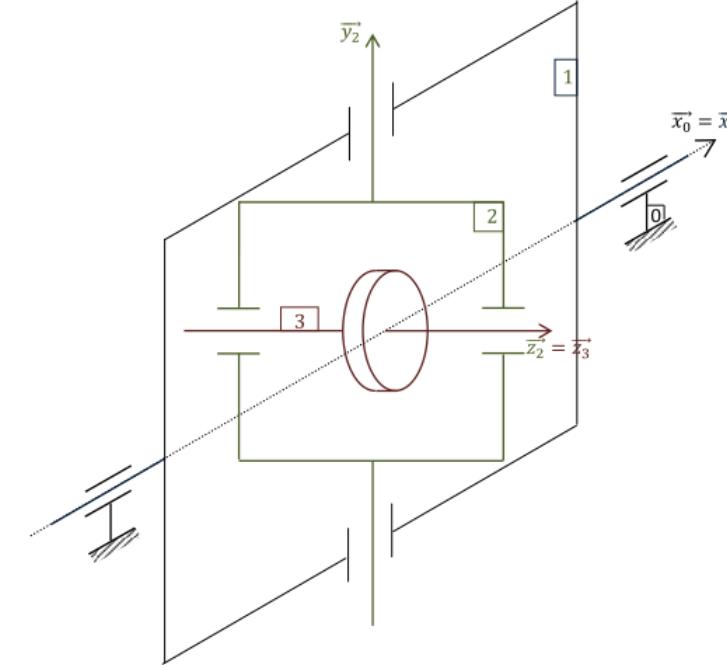
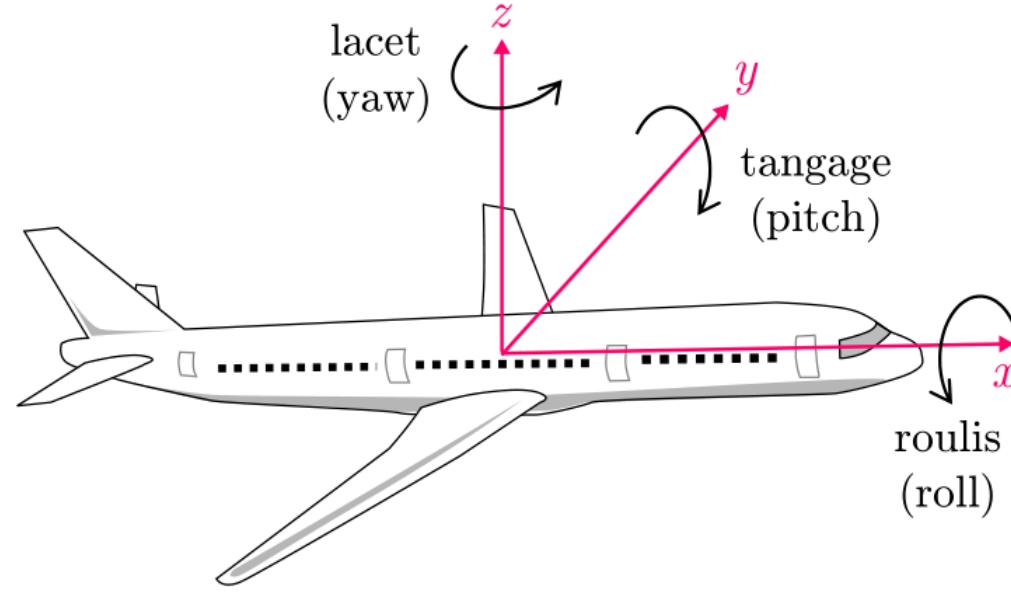
- robots Kawasaki, Adept et Stäubli : zyz
- robots Bosch : yxz
- robots FANUC et KUKA : convention xyz
- robots ABB : convention xyz
- logiciels CATIA et SolidWorks : convention zxz

Les angles d'Euler possède toujours une **singularité** quand la première et la dernière rotation ont lieu selon la même direction (*blocage de Cardan* ou *gimbal lock*).

Par exemple, cela se voit :

- sur la convention ZYZ quand sur Y,  $\theta = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ ,
- sur la convention YXZ lorsque sur X,  $\theta = 90^\circ$ .

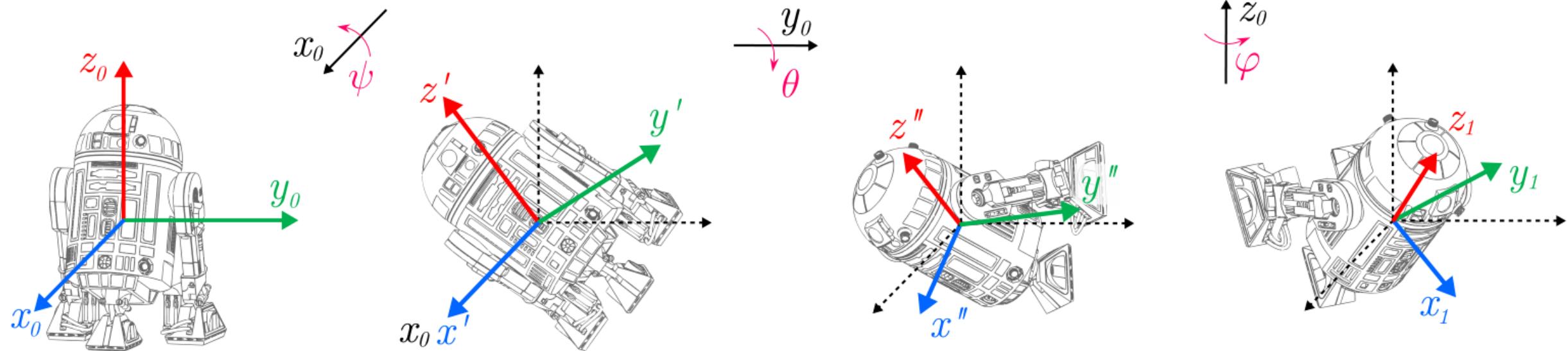
# Angles de Cardan / Tait-Bryant / RPY / Nautiques



Très utilisés en aéronautique et navigation les angles *Roll-Pitch-Yaw* (Roulis-Tangage-Lacet) sont en fait une version des rotations avec les angles d'Euler **ZYX** s'effectuant autour d'**axes fixes**

## Angles de Cardan / Tait-Bryant / RPY / Nautiques

- Roll (roulis)  $\psi$ , autour de l'axe  $x_0$ , fait passer de  $\{\mathcal{R}_0\}$  à  $(\mathcal{R}')$  (avec  $-\pi \leqslant \psi \leqslant \pi$ ),
- Pitch (tangage)  $\theta$ , autour de l'axe  $y_0$ , fait passer de  $(\mathcal{R}')$  à  $(\mathcal{R}'')$  (avec  $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ ),
- Yaw (lacet)  $\varphi$ , autour de l'axe  $z_0$ , fait passer de  $(\mathcal{R}'')$  à  $\{\mathcal{R}_1\}$  (avec  $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ ).



## Angles de Cardan / Tait-Bryant / RPY / Nautiques

Attention à l'ordre car les rotations s'effectuent en **repère fixe** ! La matrice de rotation équivalente à une orientation donnée par les RPY est obtenue par **pré-multiplication** des matrices de rotation élémentaires :

$$\mathbf{R}_{XYZ} = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\psi)$$

$$\mathbf{R}_{XYZ} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{XYZ} = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

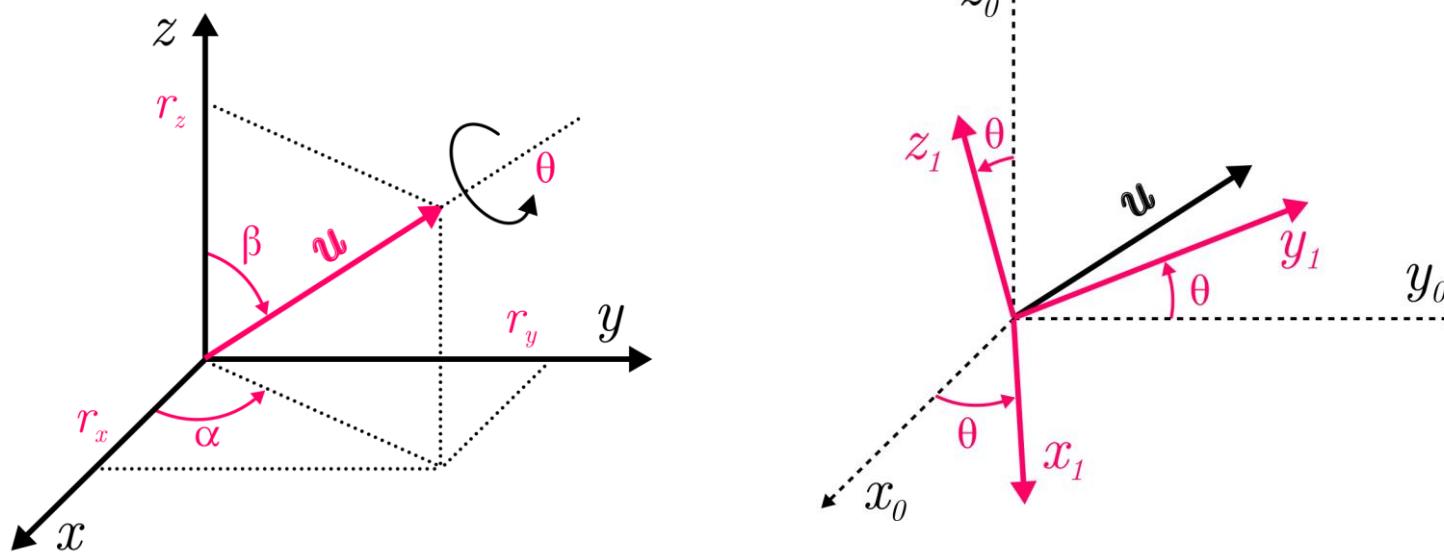
## Angles de Cardan / Tait-Bryant / RPY / Nautiques

Réiproquement, connaissant la matrice des cosinus directeurs  $\mathbf{R}_{XYZ}$ , il est possible de calculer les angles de cardan :

si  $r_{11} \neq 0$  ( $\theta$  et  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ ) et  $r_{33} \neq 0$  ( $\theta$  et  $\psi \neq \frac{\pi}{2}$ )

$$\left| \begin{array}{l} \varphi = \arctan 2(r_{21}, r_{11}) \\ \theta = \arctan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi = \arctan 2(r_{32}, r_{33}) \end{array} \right.$$

## Orientation déterminée par un vecteur et un angle



On peut décrire l'orientation d'un repère par rapport à un autre grâce à une seule rotation d'angle  $\theta$  autour d'un vecteur unitaire,  $\vec{u}$  qui n'est pas nécessairement un axe d'un repère.

La matrice de rotation est issue de la formule de Rodrigues :

$$R(\theta, \vec{u}) = \mathbf{I} \cos \theta + \sin \theta \cdot \mathbf{S}_{(\vec{u})} + (1 - \cos \theta) \cdot \vec{u} \cdot \vec{u}^T$$

## Orientation déterminée par un vecteur et un angle

On trouve aussi la relation sous cette forme matricielle :

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{bmatrix}$$

où sous une forme compacte :

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_x^2(1 - c_\theta + c_\theta) & u_x u_y(1 - c_\theta) - u_z s_\theta & u_x u_z(1 - c_\theta) + u_y s_\theta \\ u_x u_y(1 - c_\theta) + u_z s_\theta & u_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & u_y u_z(1 - c_\theta) - u_x s_\theta \\ u_x u_z(1 - c_\theta) - u_y s_\theta & u_y u_z(1 - c_\theta) + u_x s_\theta & u_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix}$$

## Orientation déterminée par un vecteur et un angle

*Remarque :* Si  $\mathbf{u}$  est un axe de rotation de  $\{\mathcal{R}_1\}$  par rapport à  $\{\mathcal{R}_0\}$  alors :  ${}^0\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{u} = {}^0\mathbf{u}$  (vecteur invariant de la rotation)  
autrement dit,  $\mathbf{u}$  est un vecteur propre de la matrice de rotation.

*Rappel :* Les vecteurs propres d'une matrice sont les vecteurs dont la direction reste inchangée après multiplication par la matrice. Ils sont associés aux à une valeur propre.

$$R(-\theta, -\mathbf{u}) = R(\theta, \mathbf{u})$$

- Une rotation d'un angle  $-\theta$  autour de l'axe  $r$  ne peut pas être distinguée d'une rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $r$ .
- La représentation angle/axe n'est pas unique !

## Orientation déterminée par les quaternions

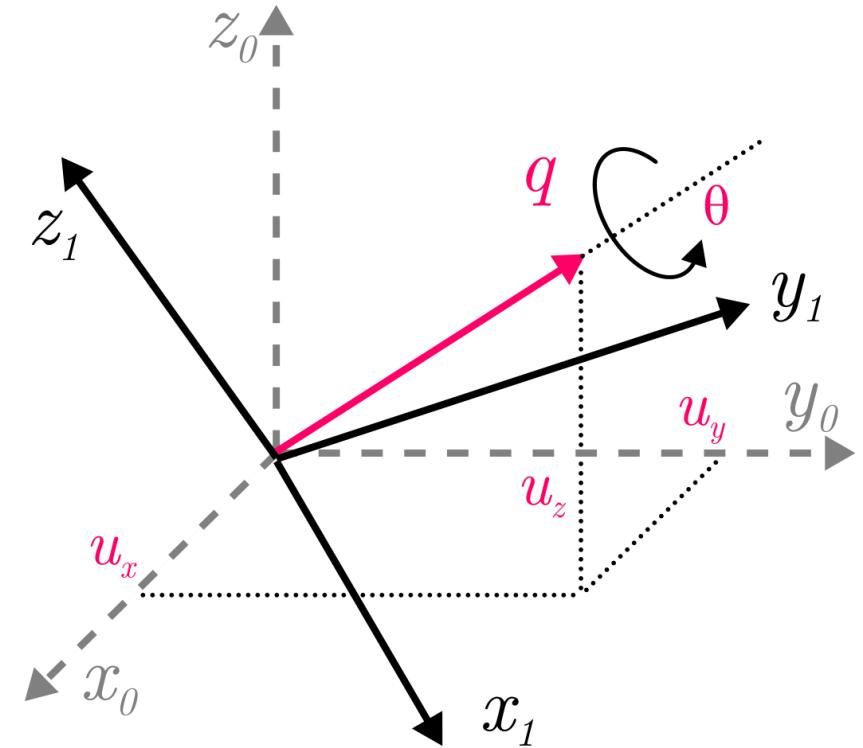
Un quaternion est un vecteur  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$  composé de quatre paramètres qui décrivent une **rotation unique** d'angle  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) autour d'un axe de vecteur unitaire  $\vec{u}$ .

Le premier paramètre est un nombre réel les trois autres sont les composantes de  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ .

$$\begin{cases} q_1 = \cos(\theta/2) \\ q_2 = u_x \sin(\theta/2) \\ q_3 = u_y \sin(\theta/2) \\ q_4 = u_z \sin(\theta/2) \end{cases}$$

### Propriétés

$$\begin{cases} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \\ \cos(\theta) = 2q_1^2 - 1 \end{cases}$$



## Orientation déterminée par les quaternions

La matrice de rotation correspondante est définie par :

$${}^0\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} 2(q_1^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & 2(q_1^2 + q_3^2) - 1 & 2(q_3q_4 - q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & 2(q_1^2 + q_4^2) - 1 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} q_1 = \frac{\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}}{2} \\ q_2 = sgn(r_{32} - r_{23}) \frac{\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{33}}}{2} \\ q_3 = sgn(r_{13} - r_{31}) \frac{\sqrt{1-r_{11}+r_{22}-r_{33}}}{2} \\ q_4 = sgn(r_{21} - r_{12}) \frac{\sqrt{1-r_{11}-r_{22}+r_{33}}}{2} \end{array} \right.$$

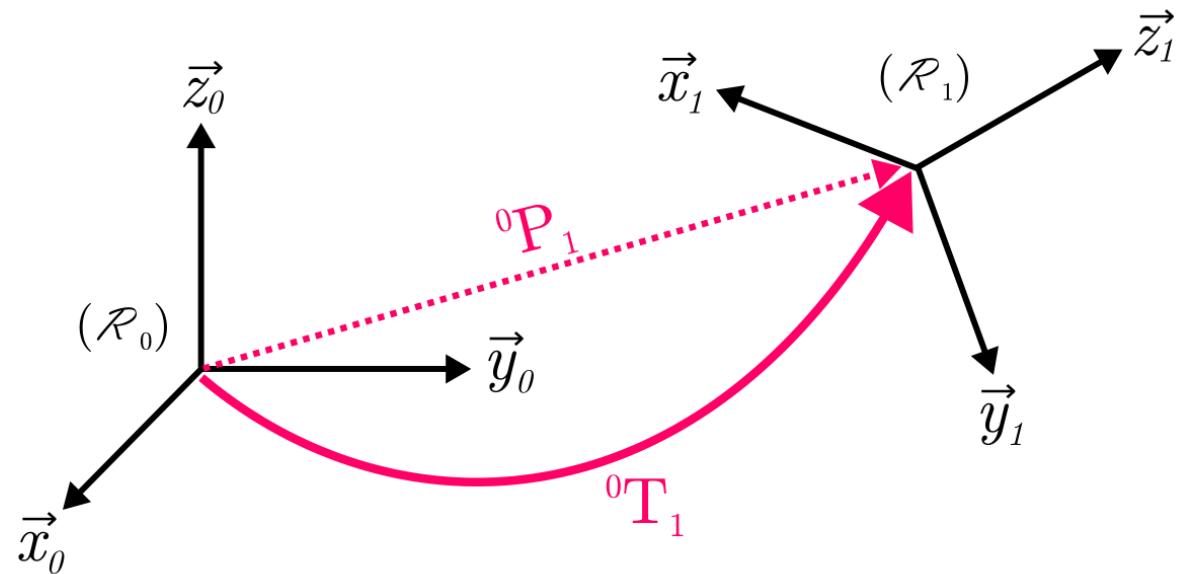
*Remarques :* Les quaternions sont rarement utilisés comme moyen de communication entre l'usager et le contrôleur du robot, car ils ne sont pas très intuitifs. Cependant ils restent des outils puissants car ils évitent le phénomène de *Gimbal Lock*.

# Matrice de passage homogène

Les **matrices de passage homogènes (4X4)** permettent de décrire le passage d'un repère à un autre.

Elles condensent l'écriture de la position et l'orientation.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0P_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**R** matrice (3x3) des rotations donnant l'orientation du solide dans un repère fixe  $\{\mathcal{R}_0\}$ .

**P** matrice (3x1) des translations donnant la position du solide dans un repère fixe  $\{\mathcal{R}_0\}$ .

## Matrice de passage homogène

Remarque : Les coordonnées homogènes d'un vecteur de l'espace sont de la forme :  $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ .

On trouvera aussi souvent les notations suivantes pour les cosinus directeurs  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{a}$  et le vecteur de translation  $\mathbf{P}$  tel que :

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matrice Rot.} & \text{Vecteur Trans.} \\ \text{Trans. Persp.} & \text{Scaling Factor} \end{bmatrix}$$

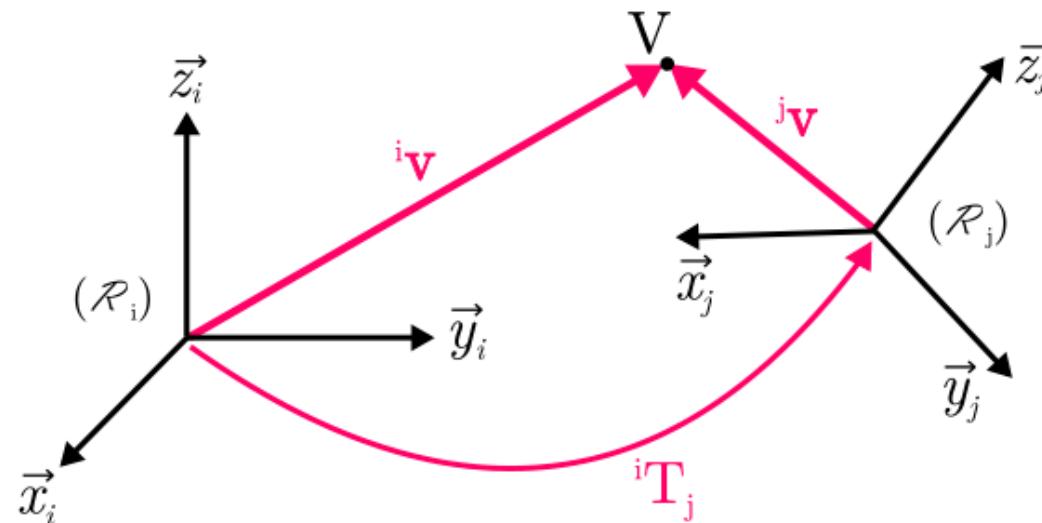
# Matrice de passage homogène

Expression d'un vecteur dans différents repères

Soit un vecteur  $\tilde{v}$  avec

$$\begin{aligned} {}^i\tilde{v} &= \begin{bmatrix} {}^iV_x \\ {}^iV_y \\ {}^iV_z \\ 1 \end{bmatrix}_{(i)} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (i)} \\ {}^j\tilde{v} &= \begin{bmatrix} {}^jV_x \\ {}^jV_y \\ {}^jV_z \\ 1 \end{bmatrix}_{(j)} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (j)} \end{aligned}$$

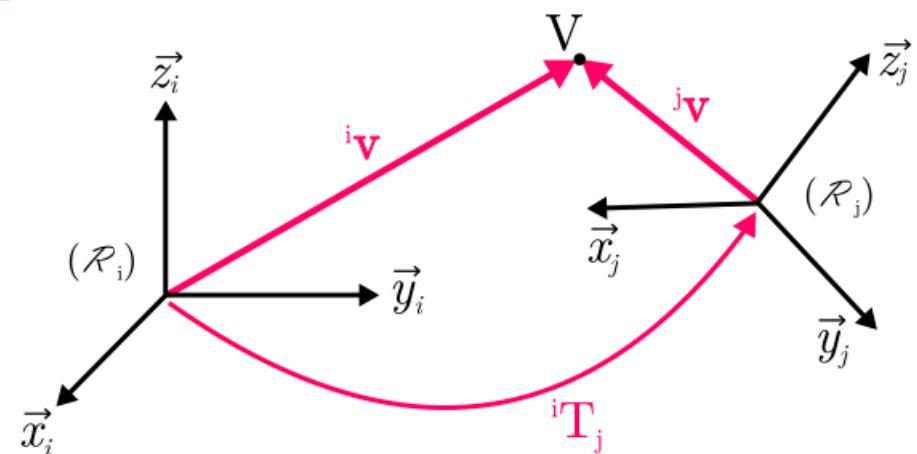
$${}^i\tilde{v} = {}^iT_j \cdot {}^j\tilde{v}$$



## Matrice de passage homogène

En résumé, La matrice de transformation  ${}^i\mathbf{T}_j$  de  $\{\mathcal{R}_i\}$  à  $\{\mathcal{R}_j\}$  :

- représente la transformation du repère  $\{\mathcal{R}_i\}$  vers le repère  $\{\mathcal{R}_j\}$
- peut être interprétée comme la représentation du repère  $\{\mathcal{R}_j\}$  exprimée dans le repère  $\{\mathcal{R}_i\}$
- permet de calculer les coordonnées d'un vecteur dans le repère  $\{\mathcal{R}_i\}$  à partir de ses coordonnées dans le repère  $\{\mathcal{R}_j\}$ .



# Matrice de passage homogène

## Propriétés des matrices de passage homogènes

La propriété de l'orthogonalité ne s'applique pas donc en général :

$$\mathbf{T}^{-1} \neq \mathbf{T}^T$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

# Matrice de passage homogène

## Composition des transformations

Soit deux transformations représentées par leurs matrices homogènes :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1T_2 = \begin{bmatrix} {}^1R_2 & {}^1P_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ alors :}$$

$${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2 = \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 & {}^0R_1 {}^1P_2 + {}^0P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 {}^1T_2 \neq {}^1T_2 {}^0T_1$$

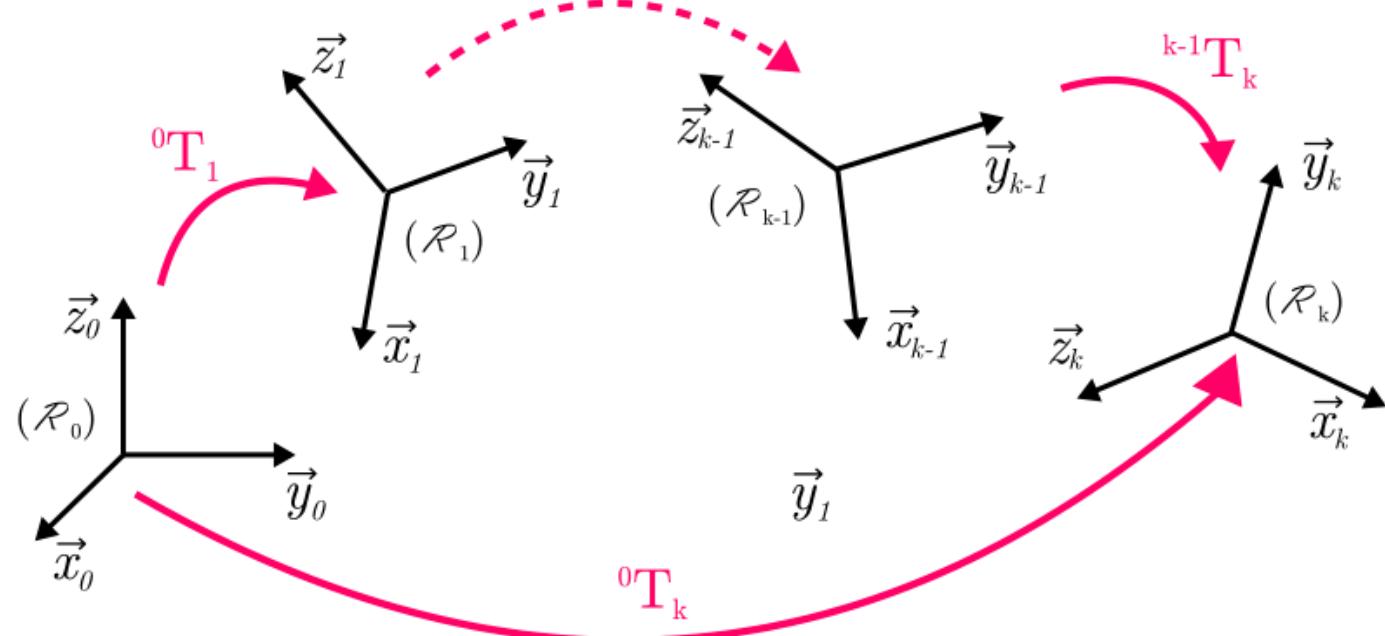
# Matrice de passage homogène

## Composition des transformations

$${}^0T_k = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{k-1}T_k$$

?

$${}^0T_k = {}^{k-1}T_k \dots {}^1T_2 {}^0T_1$$



- La **multiplication par la droite (postmultiplication)** de la transformation  ${}^iT_j$  indique que la transformation est définie par rapport au
- La **multiplication par la gauche ( premultiplication)** indique que la transformation est définie par rapport au