MECA 953 - Robotique

MMT5

2020

6. Modèle cinématique

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

POLYTECH ANNECY-CHAMBÉRY

SYMME

Modèle cinématique direct

Le MGD est définit par la relation : $x_j = f_j(q_i) \left| \begin{array}{l} \text{i=1 à m axes} \\ \text{j=1 à } D_r \end{array} \right.$

Le modèle cinématique différentiel décrit les variations infinitésimales dX des coordonnées opérationnelles en fonction des variations infinitésimales des coordonnées articulaires dq :

$$dX = J \cdot dQ$$

Le modèle cinématique variationnel décrit, au premier ordre, les petites variations de position et d'orientation de l'organe terminal δX en fonction des petites variations des variables articulaires δQ :

$$\delta X \simeq J \cdot \delta Q$$

Modèle cinématique direct

Dans les cas de robots séries (en chaîne simple), le MGD est formé de fonctions linéaires, sinus et cosinus. Il est donc dérivable. Le modèle cinématique correspond à une relation **linéaire** entre $\dot{\boldsymbol{x}}$ et $\dot{\boldsymbol{q}}$. Le modèle cinématique direct décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles $\dot{X}$ en fonction des vitesses articulaires $\dot{Q}$:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{D_r} \end{bmatrix} \text{ et } \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{aligned} \dot{x}_i &= \tfrac{dx_i}{dt} \\ \dot{q}_j &= \tfrac{dq_j}{dt} \end{aligned}$$

Modèle cinématique direct

$$\dot{X} = J \cdot \dot{Q}$$

J est la matrice jacobienne (exprimée dans $(\mathcal{R}_0)$). Elle est obtenue en dérivant le MGD en utilisant les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial q_j}$.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_{D_r}} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial q_m} \end{bmatrix}$$

Rappel : Matrice Jacobienne

Si $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ où $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{x}$ sont des vecteurs à n dimensions et $f(\boldsymbol{x})$ un groupe de n fonctions différentes.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{matrix} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{matrix}$$

alors

$$J((x_1, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Rappel : Matrice Jacobienne

Le Jacobien permet donc de déterminer la pente (la variation) du vecteur $\boldsymbol{y}$ en fonction d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ donné, étant donné les équations f.

D'un point de vue de cinématique inverse, le Jacobien met en relation la variation des positions et orientations en fonction de la variation des variables des articulations.
La matrice jacobienne est un outil puissant, elle sert notamment à :

- Déterminer des algorithmes pour le modèle géométrique inverse (le cas présent)
- Trouver les singularités
- Analyser la redondance
- Décrire la relation entre les forces appliquées à l'effecteur et les forces résultantes au niveau des articulations pour des efforts statiques
- Dériver les équations dynamiques du mouvement
- Développer des stratégies de contrôle dans l'espace opérationnel

Méthodes de détermination du Modèle Cinématique Direct

Matrice Jacobienne analytique

La jacobienne analytique est généralement calculée en utilisant une représentation explicite de l'orientation comme les angles d'Euler ou les angles de cardan. Par exemple, pour un robot 6 axes, 6 ddl et une orientation définie par les angles de cardan, la relation s'écrit :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial x}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{dt} \qquad (\text{avec} : \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{dt})$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{dt}$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{dt}$$

$$\vdots$$

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \gamma}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{dt}$$

Méthodes de détermination du Modèle Cinématique Direct

Matrice Jacobienne analytique

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_{D_r}} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial q_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Méthodes de détermination du Modèle Cinématique Direct

Matrice Jacobienne analytique – Exemple SCARA

La matrice jacobienne peut s'obtenir en différentiant le modèle géométrique représentée par : $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{q})$

Le MGD donne
$$\left| \begin{array}{l} x = r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ z = r_3 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = -r_1 \sin(q_1) - r_2 \sin(q_1 + q_2)$$
$$\frac{\partial x}{\partial q_2} = -r_2 \sin(q_1 + q_2)$$
$$\frac{\partial x}{\partial q_3} = 0$$
$$\frac{\partial x}{\partial q_4} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = r_1 \cos(q_1) + r_2 \cos(q_1 + q_2)$$
$$\frac{\partial y}{\partial q_2} = r_2 \cos(q_1 + q_2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial q_4} = \dot{q}_4$$

Méthodes de détermination du Modèle Cinématique Direct

Matrice Jacobiene analytique – Exemple SCARA

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1\ s_1 - r_2\ s_{12} & -r_2\ s_{12} & 0 & 0 \\ r_1\ c_1 + r_2\ c_{12} & r_2\ c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = -\dot{q}_1 \cdot (r_1\ s_1 + r_2\ s_{12}) - \dot{q}_2 \cdot r_2\ s_{12}$$
$$\dot{y} = \dot{q}_1 \cdot (r_1\ c_1 + r_2\ c_{12}) + \dot{q}_2 \cdot (r_2\ c_{12})$$
$$\dot{z} = \dot{q}_3$$
$$\dot{\theta} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_4$$