

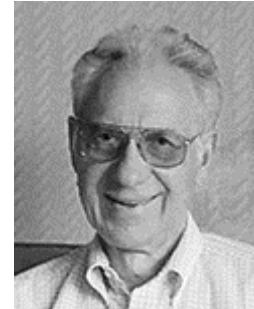
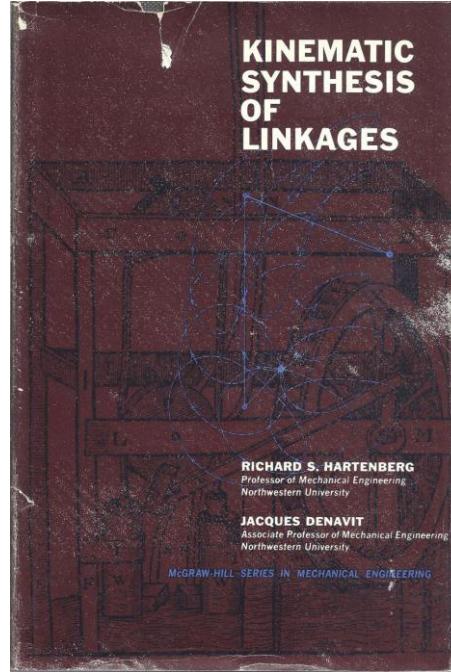
MECA 953 - Robotique

MMT5

2020

4. Modèle Géométrique Direct (MGD)

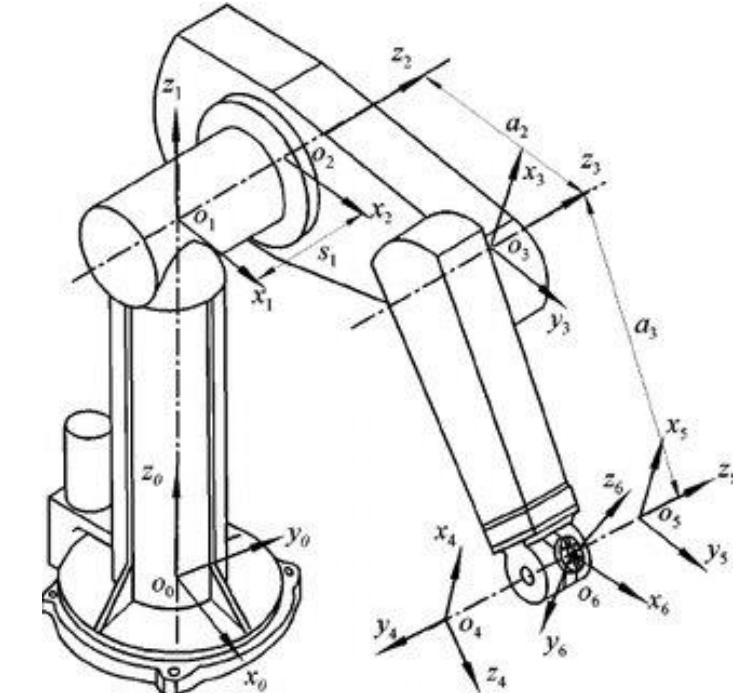
Convention Denavit Hartenberg (1955)



Jacques **DENAVIT**
(1930-2012)

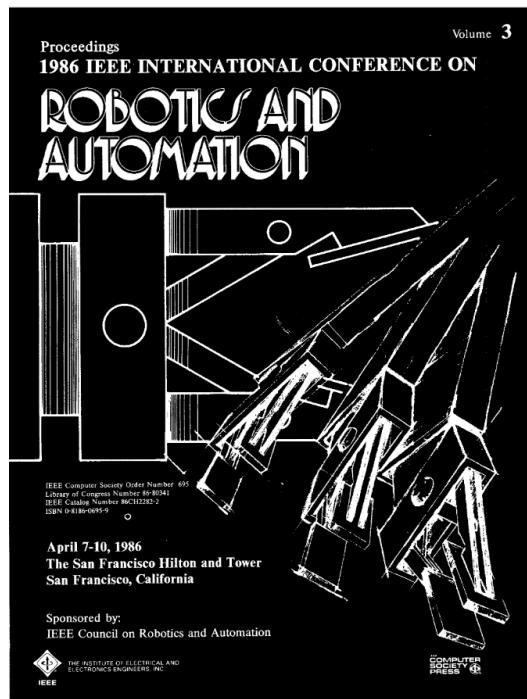


Richard Scheunemann **HARTENBERG**
(1907-1997)



Initialement introduite en 1955 par Jacques Denavit et Richard S. Hartenberg, la méthode DH permet de normaliser, simplifier et rationaliser la modélisation géométrique d'un robot.

Convention Denavit-Hartenberg modifiée: DH-KK (1986) (appelée aussi Khalil-Kleinfinger)



Wisama KHALIL

Jean-François KLEINFINGER

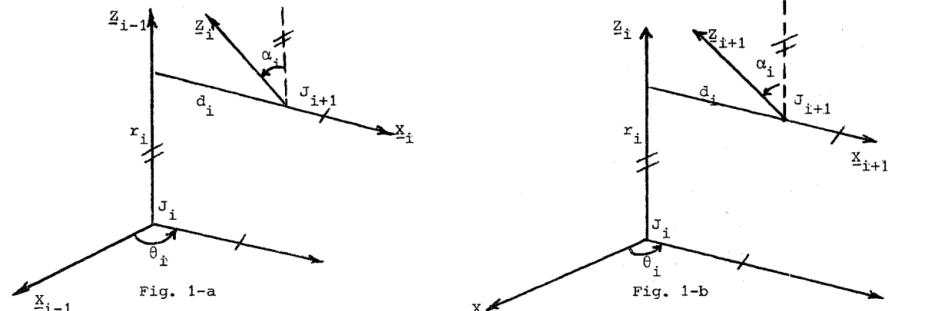


Figure 1. Denavit and Hartenberg Notation

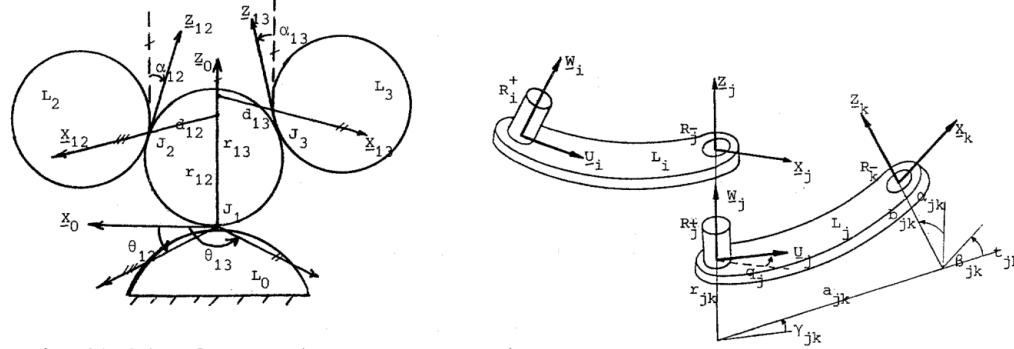


Figure 2. Ambiguities of D-H notation

La convention de Denavit-Hartenberg modifiée, appelée aussi convention de Khalil-Kleinfinger, est préconisée depuis 1986.
(parce qu'elle permet un allègement du formalisme dans les exposés, portant sur les méthodes numériques par récurrence de la dynamique des robots).

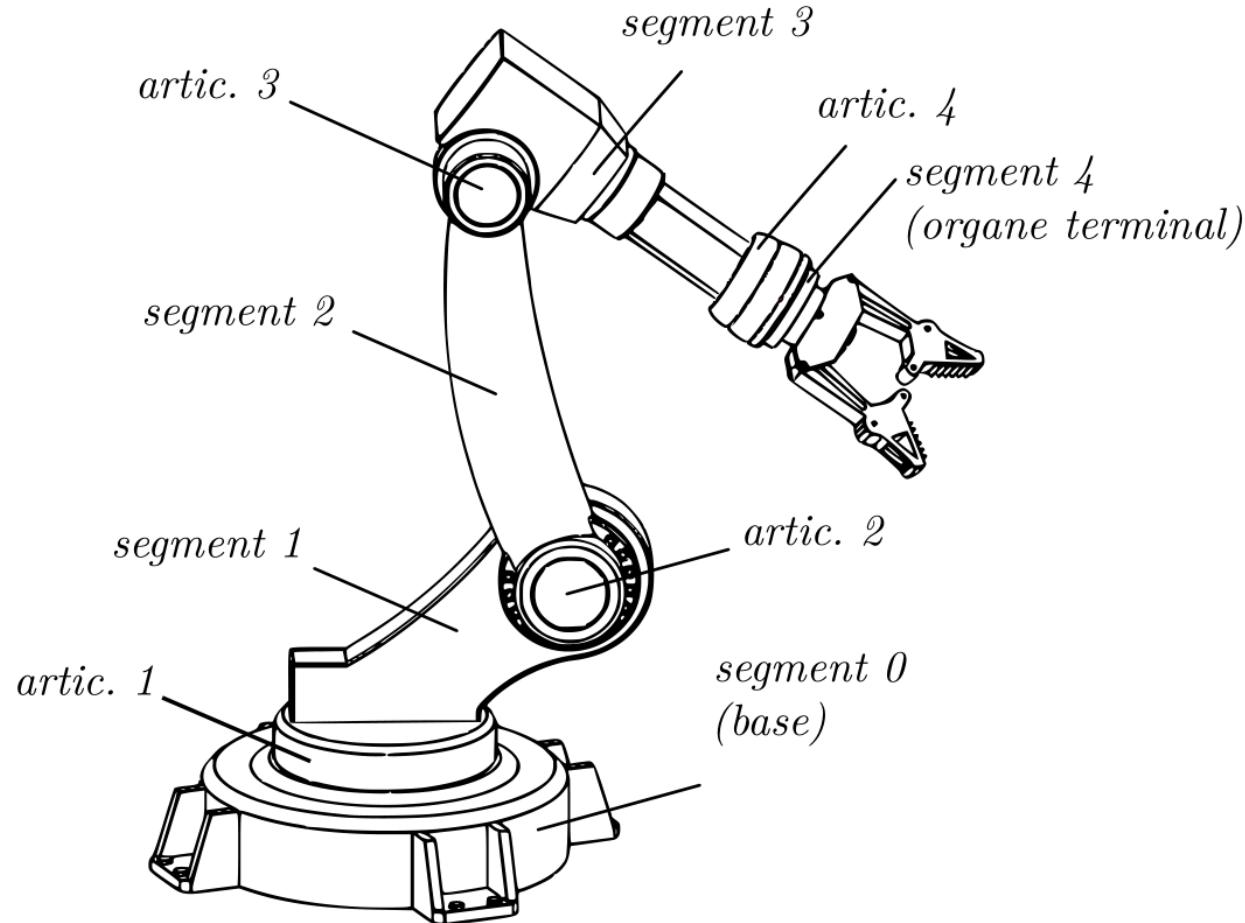
Règles de paramétrage

Règles de paramétrage

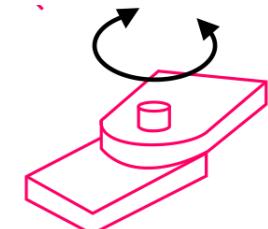
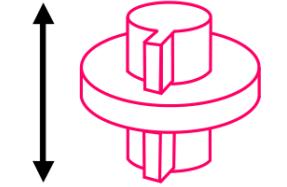
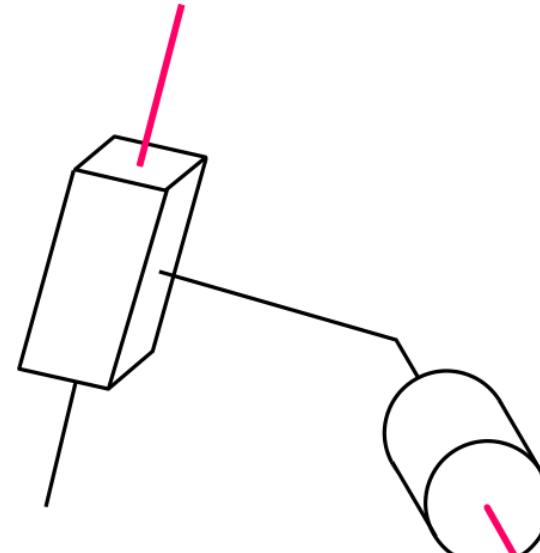
- Les segments sont numérotés dans l'ordre croissant, de la base (0) à l'effecteur (n).
- Le repère \mathcal{R}_i ($O_i, \vec{X}_i \vec{Y}_i \vec{Z}_i$) est associé au segment i .
- L'axe \vec{Z}_i correspond à l'axe de l'articulation i . (pivot ou glissière).
- L'axe \vec{X}_i correspond à la perpendiculaire commune entre \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} . ($\vec{X}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{Z}_{i+1}$).
- L'axe \vec{Y}_i est placé de façon à créer un repère orthogonal direct. ($\vec{Y}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{X}_i$).
- L'origine O_i est située à intersection de \vec{X}_i et \vec{Z}_i .

Règles de paramétrage

Numérotation des segments et liaisons & Définition des axes Z_i

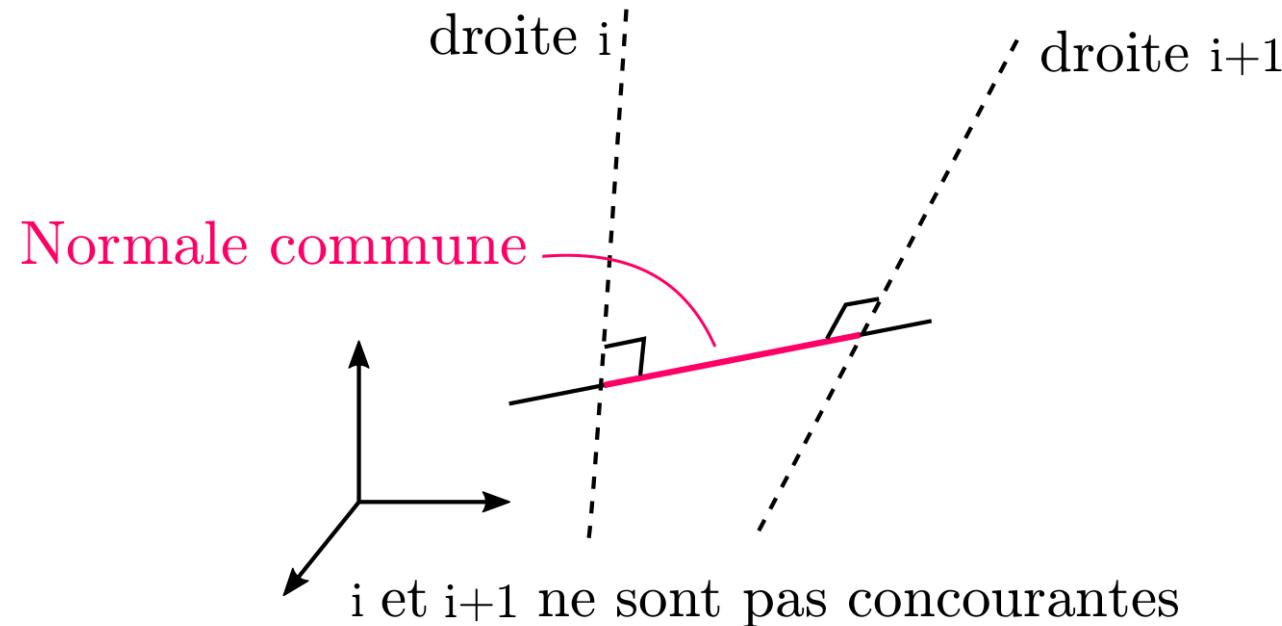


z prismatique



Règles de paramétrage

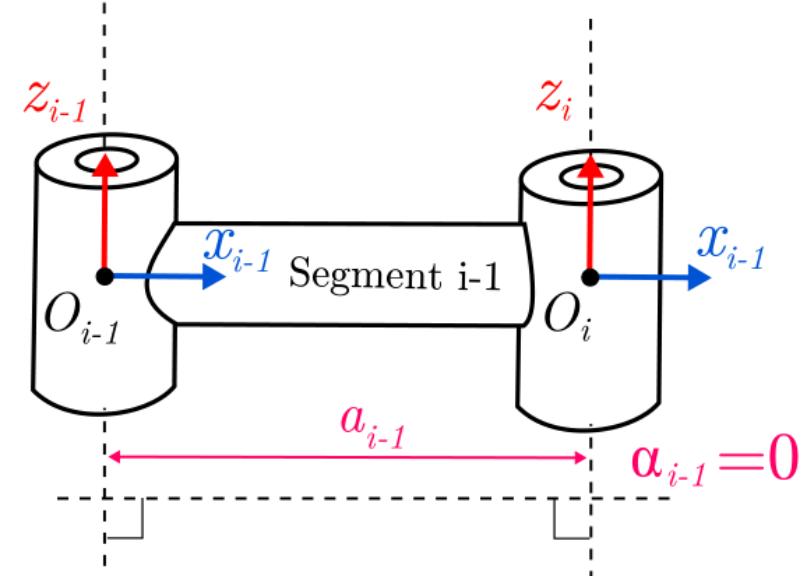
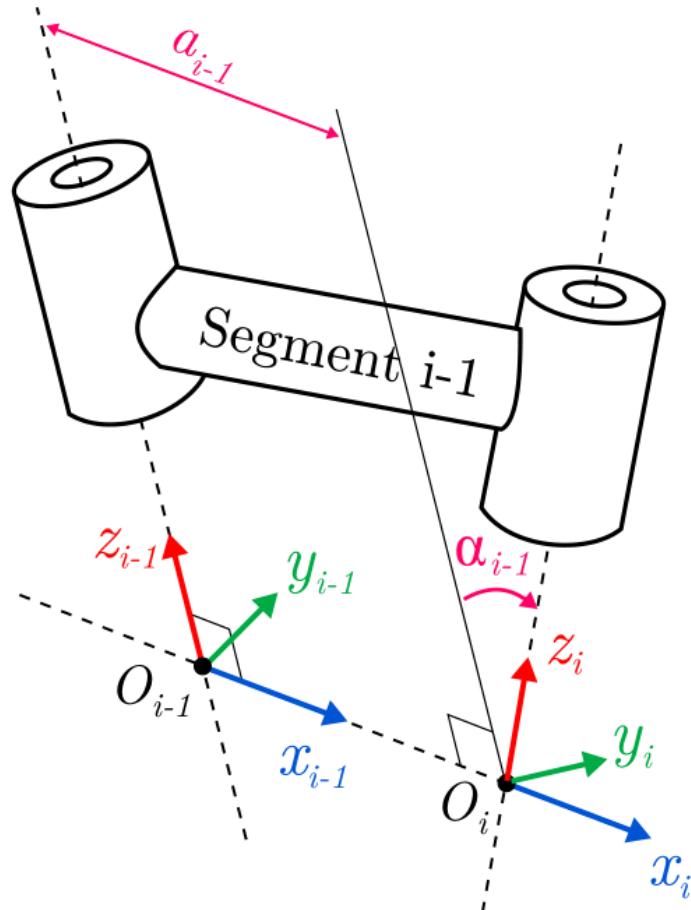
Numérotation des segments et liaisons & Définition des axes Z_i



La **normale commune** entre deux droites est la droite qui contient le segment de distance minimale entre les deux droites.

Règles de paramétrage

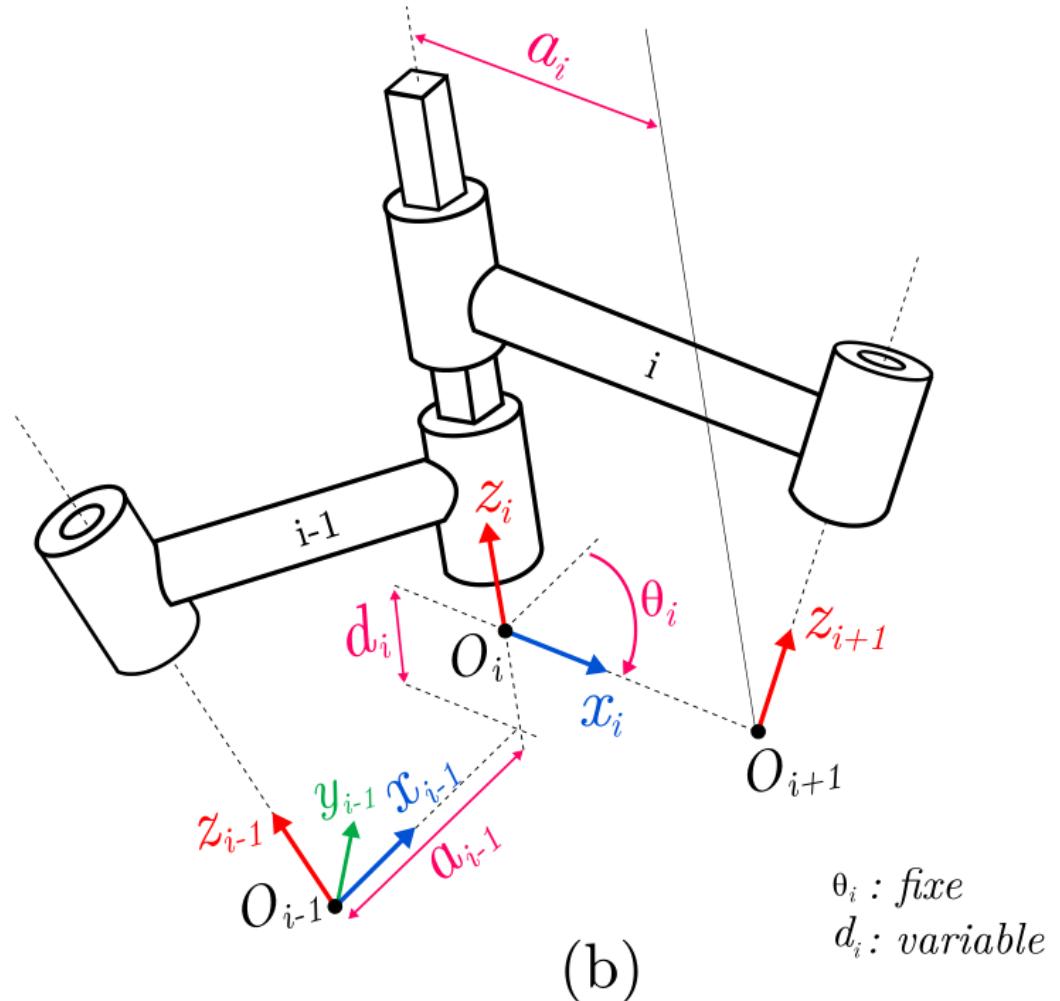
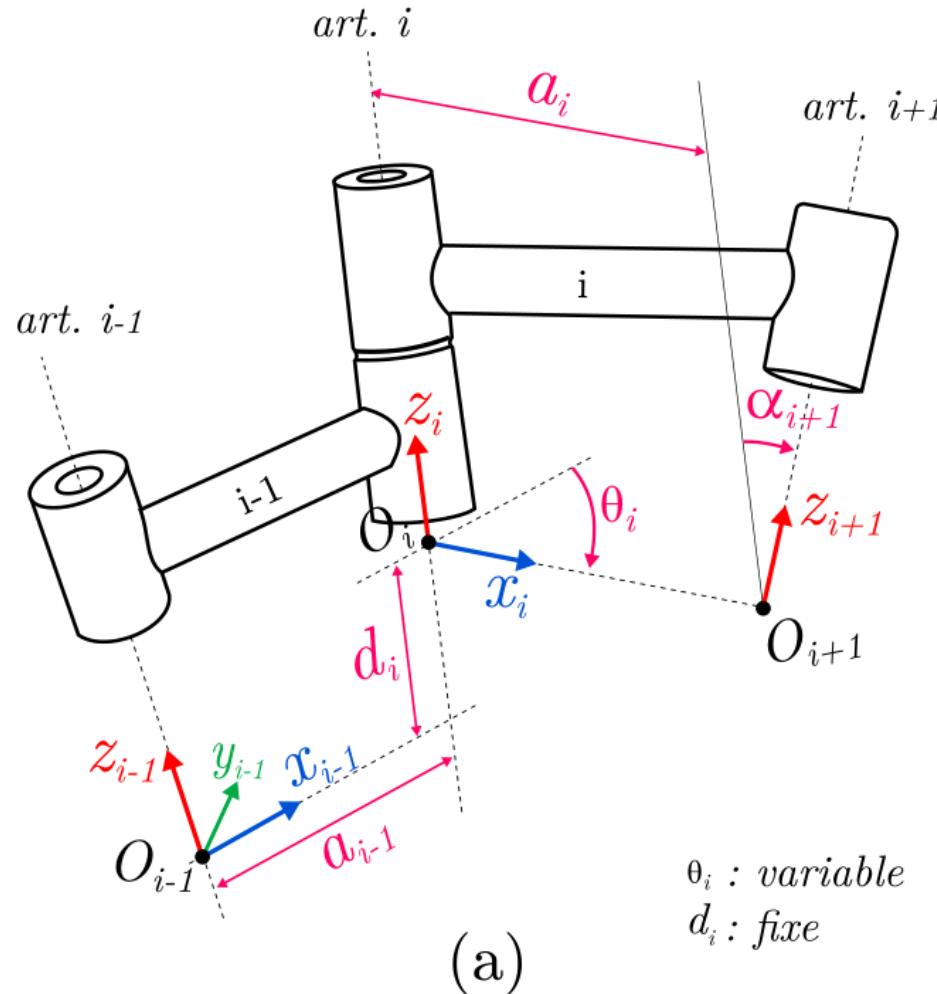
Paramétrage d'un segment (convention DH-KK)



(cas où axes i-1 et i parallèles)

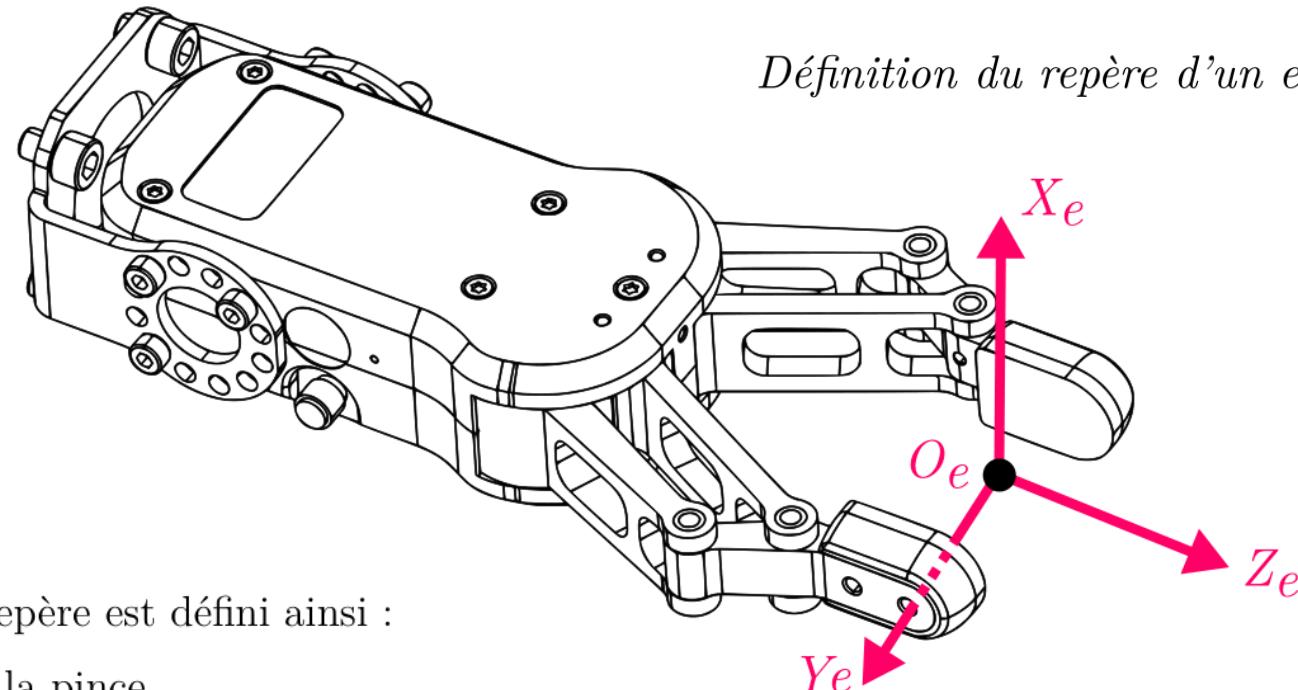
Règles de paramétrage

Paramétrage (a) d'une liaison pivot, (b) d'une liaison glissière. (convention DH-KK)



Règles de paramétrage

Effecteur pince



Définition du repère d'un effecteur de type pince.

Si l'effecteur est une **pince** le repère est défini ainsi :

- Origine O_e : au centre de la pince
- \vec{Z}_e : en direction de l'objet à attraper.
- \vec{Y}_e : orthogonal à \vec{Z}_e , dans le plan de glissement des becs de la pince.
- \vec{X}_e : orthogonal au deux autres axes pour avoir un repère orthogonal direct ($\vec{X}_e = \vec{Y}_e \wedge \vec{Z}_e$).

Convention DH modifiée (DH-KK)

Le passage de (\mathcal{R}_{i-1}) à (\mathcal{R}_i) s'exprime en fonction des quatre paramètres DH modifiés suivants : a_{i-1} (excentricité), α_{i-1} (torsion), d_i (longueur), θ_i (angle).

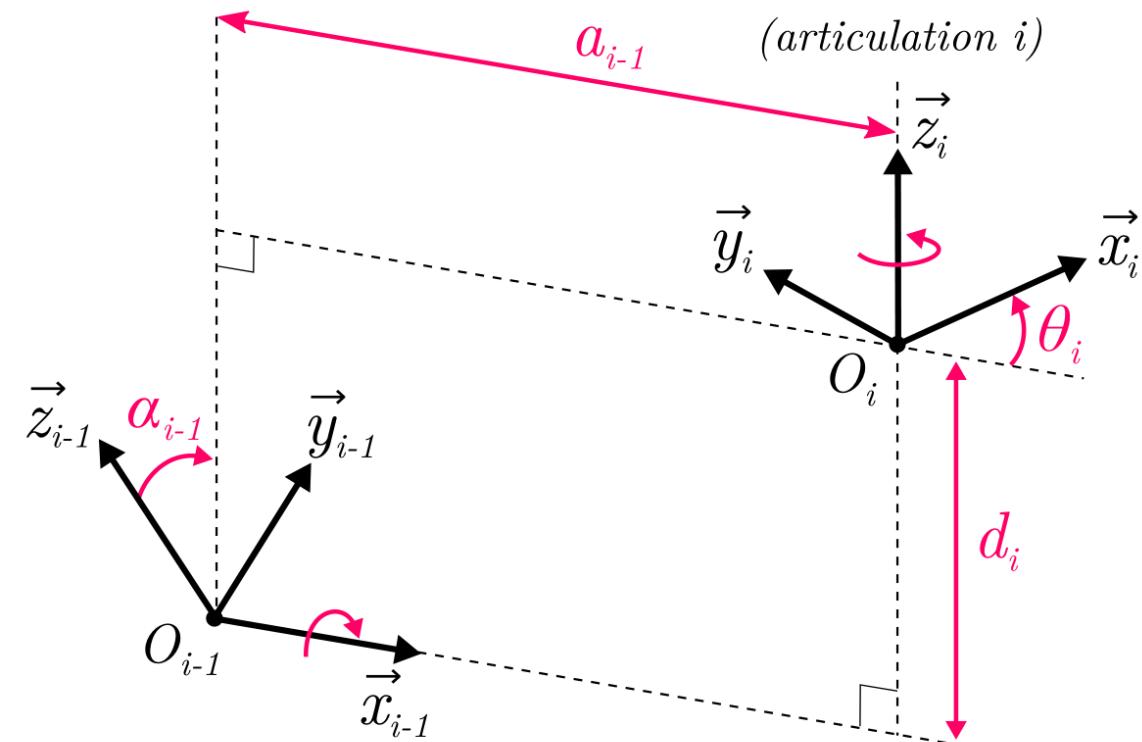
a_{i-1} : Distance de Z_{i-1} vers Z_i , le long de X_{i-1} .

α_{i-1} : Angle entre Z_{i-1} et Z_i , autour de l'axe X_{i-1} .

d_i : Distance de X_{i-1} vers X_i , le long de Z_i .

θ_i : Angle entre X_{i-1} et X_i , autour de l'axe Z_i .

Paramètres de la convention DH-KK.



Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramétrage

Symbol	Name	Description
a_{i-1}	Link Length	$Z_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } X_{i-1}]{\perp, \text{distance}} Z_i$
α_{i-1}	Twist Angle	$Z_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } X_{i-1}]{\curvearrowright, \text{rotation}} Z_i$
d_i	Joint Offset	$X_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } Z_i]{\perp, \text{distance}} X_i$
θ_i	Joint Angle	$X_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } Z_i]{\curvearrowright, \text{rotation}} X_i$

Paramètres de la convention DH-KK.

Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramétrage

Étape 1 **Identification des segments** : Chaque repère (\mathcal{R}_i) est lié au segment i
Identification des articulations de 1 à n : L'axe Z_i du repère (\mathcal{R}_i) coïncide avec l'articulation i . Le segment i possède 2 axes : Z_i et Z_{i+1} . L'axe Z_i est lié à l'articulation i et l'axe Z_{i+1} est lié à l'articulation $i + 1$.

Étape 2 **Choisir** Z_i le long de l'axe des articulations i .

Étape 3 **Identifier la normale commune entre** Z_i **et** Z_{i+1} . L'origine du repère O_i est située à l'intersection de la normale commune a_i et l'axe Z_i .

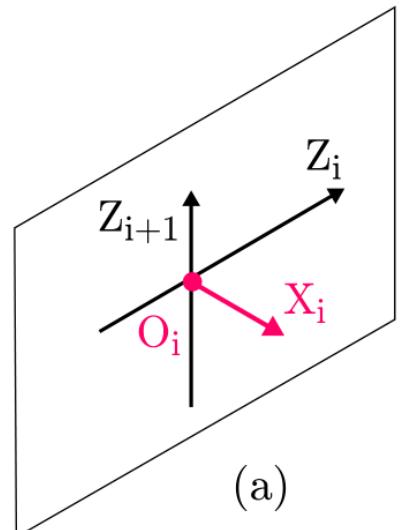
- Si Z_i et Z_{i+1} sont concourants, O_i est située au point d'intersection.
- Si Z_i et Z_{i+1} sont parallèles, le choix de l'origine Z_i est arbitraire (on choisit généralement une solution qui donne $d_i=0$).
- De même si il s'agit d'une articulation prismatique, la liberté est donnée quand à la position de l'origine du repère.

Convention DH modifiée (DH-KK)

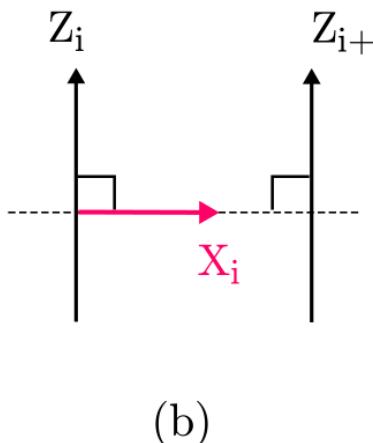
Algorithme de paramétrage

Étape 4 Choisir X_i le long de la normale commune a_i et dirigé de Z_i vers Z_{i+1} .

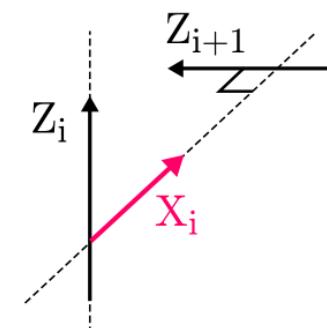
- Si Z_i et Z_{i+1} s'intersectent, X_i est perpendiculaire au plan contenant les deux axes et le choix de la direction de X_i est libre.
- Si Z_i et Z_{i+1} sont parallèles, X_i est choisi de tel sorte qu'il intersecte Z_{i-1} .



(a)



(b)



(c)

(a) \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} s'intersectent. (b,c) \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} sont parallèles.

Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramétrage

Étape 5 **Choisir** Y_i pour obtenir un trièdre direct avec Z_i et X_i soit $Y_i = Z_i \wedge X_i$. (Généralement on ne représente pas les axes Y_i pour ne pas encombrer le schéma)

Étape 6 **Attribution du repère de Base (\mathcal{R}_0)** : Le repère de base est lié au segment 0. Le repère est placé arbitrairement mais le choix le plus simple consiste à prendre (\mathcal{R}_0) confondu avec (\mathcal{R}_1) quand $q_1 = 0$. (On a alors $d_0=0$ et $\alpha_0=0$, $r_1=0$ si l'articulation est rotatoire et $\theta_1=0$ si l'articulation est prismatique)

Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramétrage

Étape 7 Assignation du repère de l'organe terminal n :

Si l'articulation n est rotatoire, la direction de x_n est choisie le long de x_{n-1} quand $\theta_n = 0$ et l'origine du repère n est choisie telle que $r_n = 0$.

Si l'articulation n est prismatique, la direction de x_n est choisie telle que $\theta_n = 0$ et l'origine du repère n est définie à l'intersection de x_{n-1} et z_n tel que $r_n = 0$.

Étape 8 Remplissage du tableau des paramètres

	segment i	σ_i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
0T_1	1					
1T_2	2					
\dots	\dots					
${}^{n-1}T_n$	n					

Convention DH modifiée (DH-KK)

Variables articulaires : q_i

Le nombre de variables articulaires est égale au nombre d'axes du robot. La variable articulaire q_i , associée à chaque articulation i , définit la position relative de l'actionneur (moteur au niveau de la liaison). q_i est soit θ_i , soit d_i , selon que cette articulation est respectivement de type rotatoire ou prismatique :

$$q_i = (1 - \sigma_i)\theta_i + \sigma_i d_i$$

articulation i	σ_i	q_i	constantes
ratoire	0	θ_i	$\alpha_{i-1}, a_{i-1}, d_i$
prismatique	1	d_i	$\alpha_{i-1}, a_{i-1}, \theta_i$

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

La matrice de transformation homogène (position et orientation) entre 2 repères adjacents $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$, $\{\mathcal{R}_i\}$ peut être décomposée en 4 transformations élémentaires :

$\mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1})$: Translation le long de \mathbf{X} d'une distance a .

$\mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1})$: Rotation autour de \mathbf{X} d'un angle α .

$\mathbf{Trans}_{z_i}(d_i)$: Translation le long de \mathbf{Z} d'une distance d .

$\mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$: Rotation autour de \mathbf{Z} d'un angle θ .

$$\mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1}) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Trans}_{z_i}(d_i) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

Le produit des matrices de passage successives donne l'expression de la matrice de transformation qui amène le repère $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$ au repère $\{\mathcal{R}_i\}$:

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1}) \cdot \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Trans}_{z_i}(d_i) \cdot \mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i & {}^{i-1}\mathbf{O}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

Transformation inverse

La transformation inverse ${}^i\mathbf{T}_{i-1}$ est donnée par :

$${}^i\mathbf{T}_{i-1} = \mathbf{Rot}_{z_i}(-\theta_i) \cdot \mathbf{Trans}_{z_i}(-d_i) \cdot \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(-\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(-a_{i-1})$$

$${}^i\mathbf{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T & -a_{i-1} C\theta_i \\ 0 & a_{i-1} S\theta_i \\ 0 & -d_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

Comparaisons des paramètres de Denavit-Hartenberg classiques et modifiés

La méthode de Denavit-hartenberg "originale" est bien adaptée pour des structures ouvertes simples, mais présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots à structures fermées ou arborescentes. La variante dite "modifiée" permet de définir les paramètres à partir de deux solides seulement (trois axes caractéristiques de liaison) au lieu de trois pour la convention DH classique.

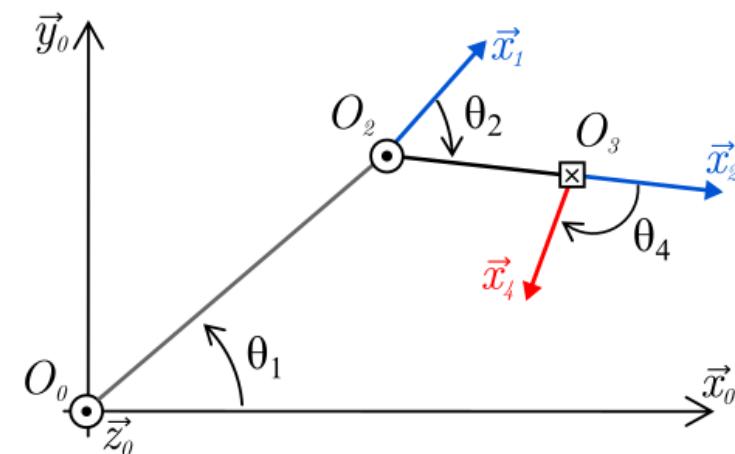
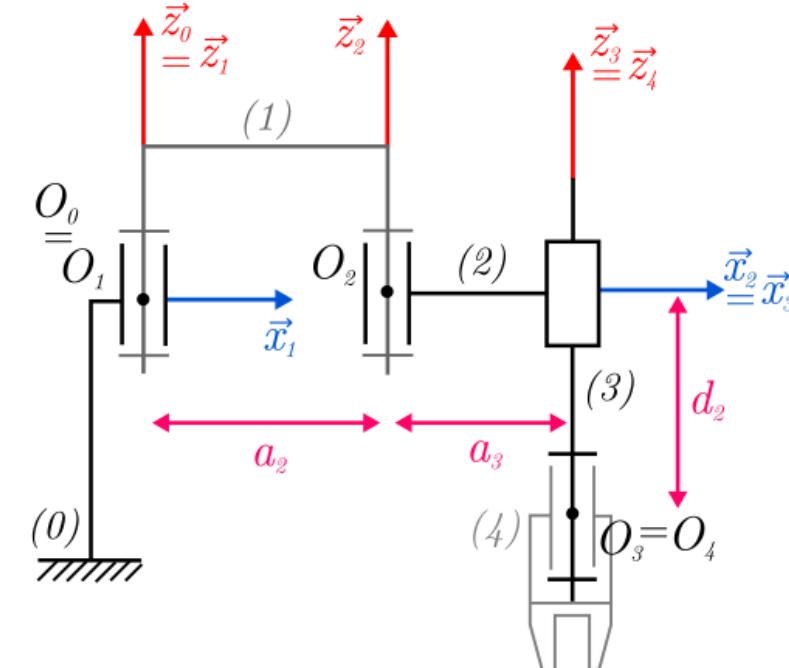
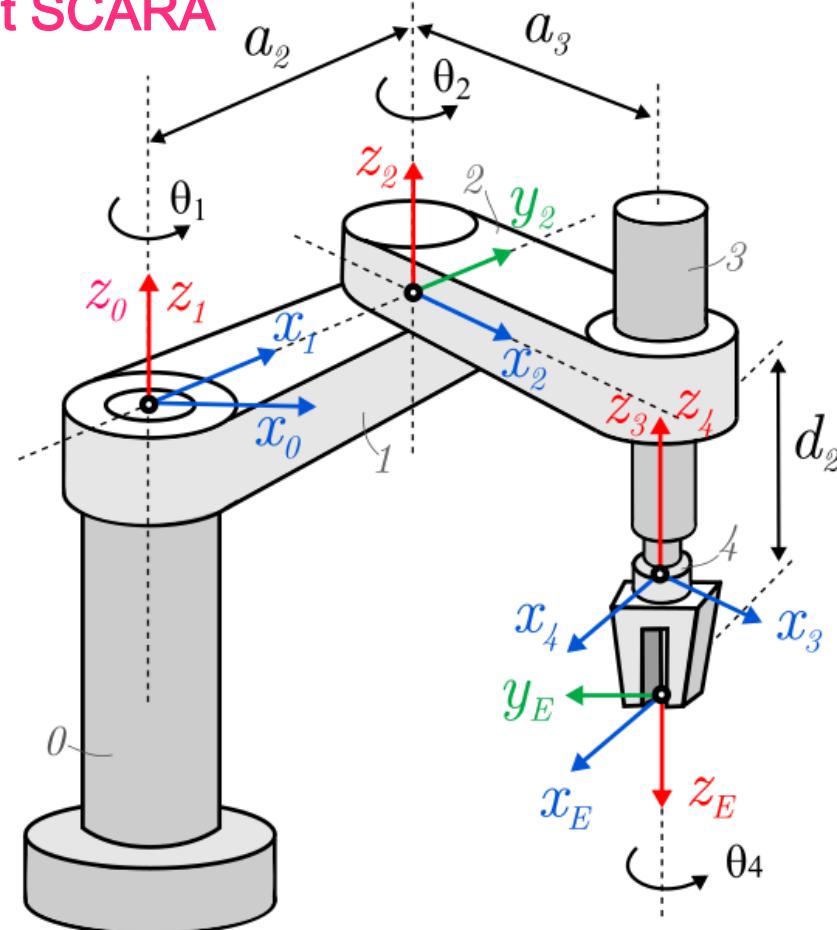
Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

Comparaisons des paramètres de Denavit-Hartenberg classiques et modifiés

Paramètres	Convention originale DH	Convention modifiée DH-KK
axe de liaison	z_{i-1} pour l'articulation i	z_i pour l'articulation i
longueur : a_i	distance de O_i à l'intersection de z_{i-1} et x_i , le long de x_i	distance de z_i à z_{i+1} , le long de x_i
torsion : α_i	angle de z_{i-1} à z_i , autour de x_i	angle de z_i à z_{i+1} , autour de x_i
longueur : d_i	distance de O_{i-1} à l'intersection de z_{i-1} et x_i , le long de z_{i-1}	distance de x_{i-1} à x_i , le long de z_i
angle : θ_i	angle de x_{i-1} à x_i , autour de z_{i-1}	angle de x_{i-1} à x_i , autour de z_i
$i-1T_i$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & d_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & d_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
iT_{i-1}	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -d_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -a_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -a_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i C\alpha_{i-1} & S\theta_i S\alpha_{i-1} & -a_{i-1} C\theta_i \\ -S\theta_i & C\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & a_{i-1} S\theta_i \\ 0 & -S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Paramétrage

Exemple Robot SCARA



Paramétrage

Exemple Robot SCARA

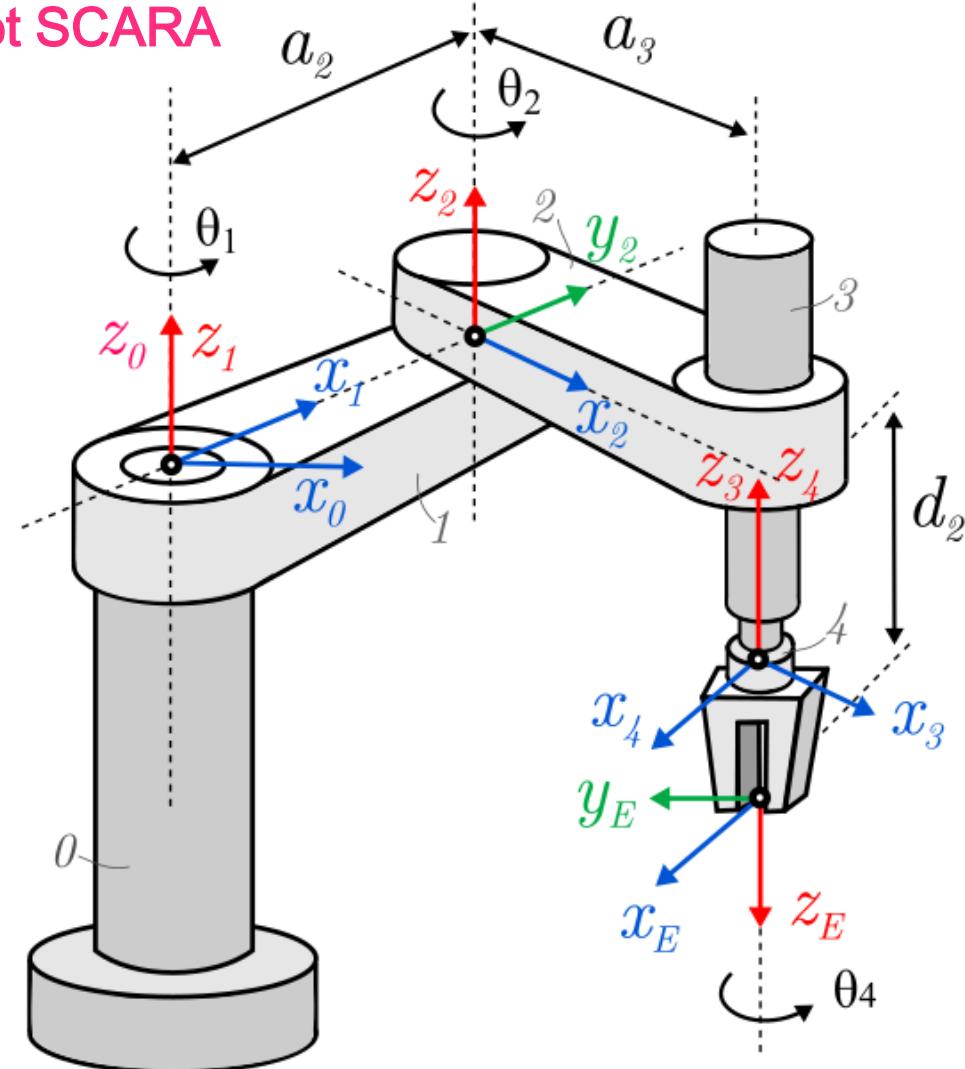


Tableau des paramètres DHKK - Robot Scara

i	σ_i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	0	θ_1
2	0	a_2	0	0	θ_2
3	1	a_3	0	d_2	0
4	0	0	0	0	θ_4

Paramétrage

Stäubli RX-90

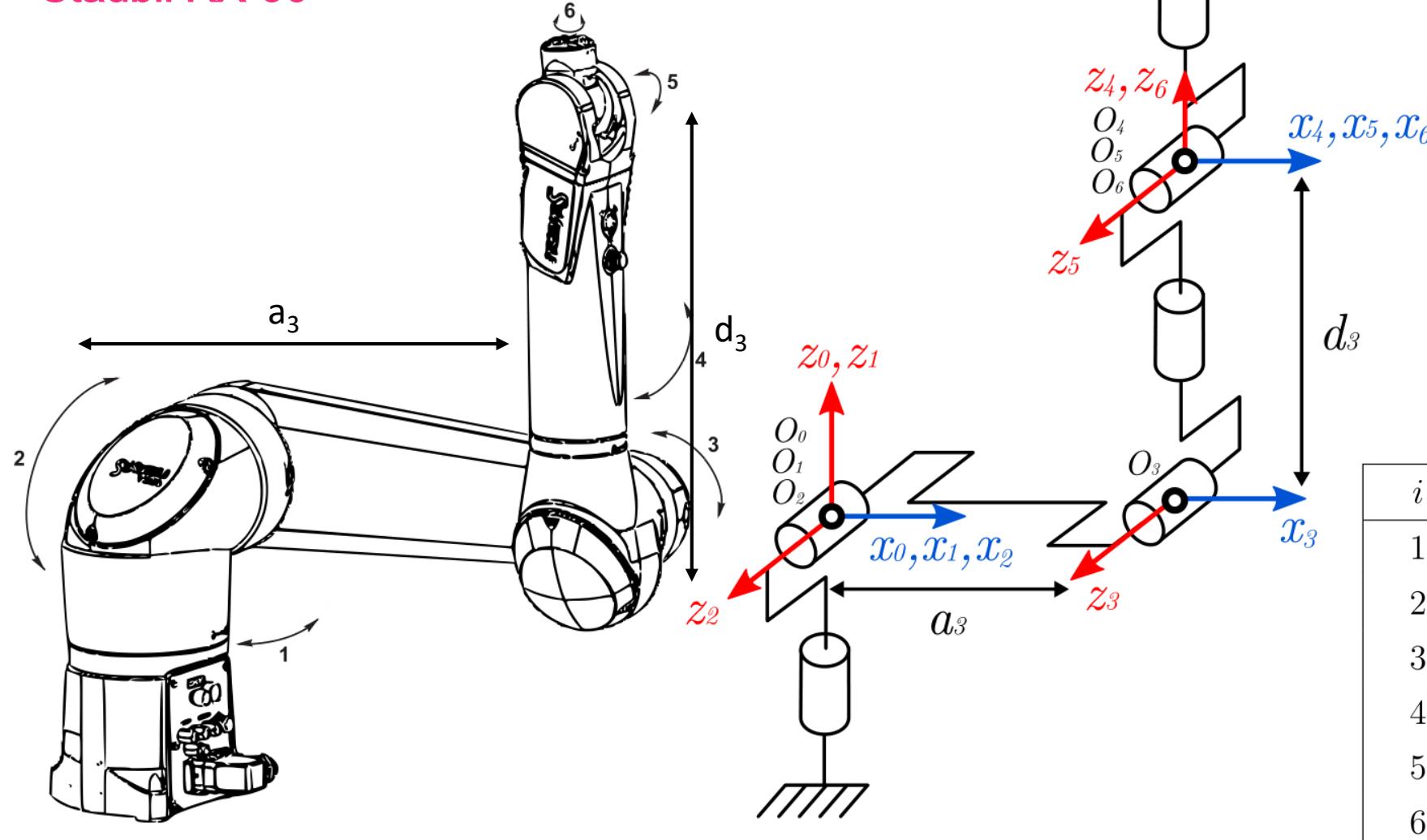
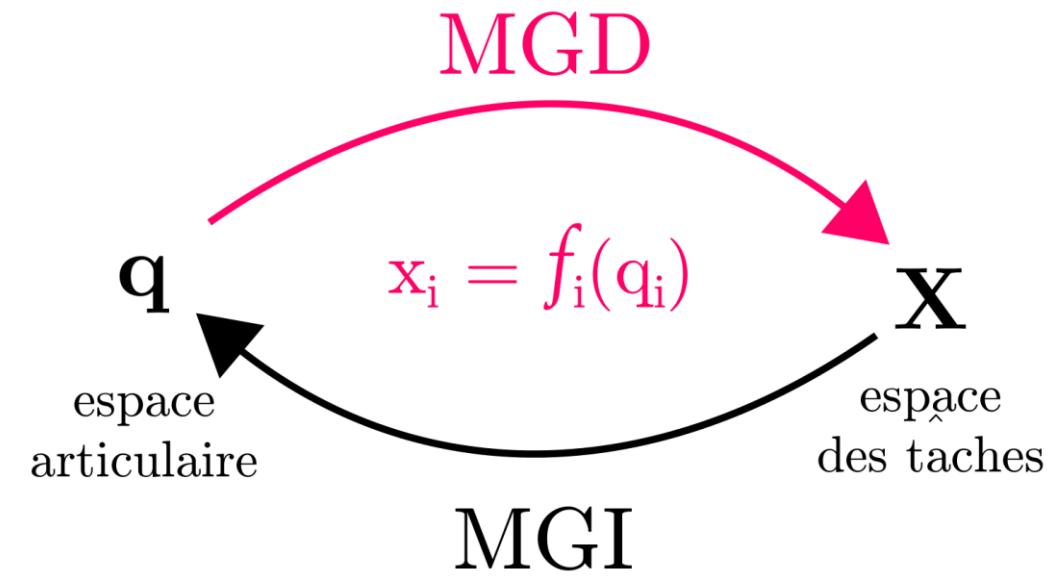
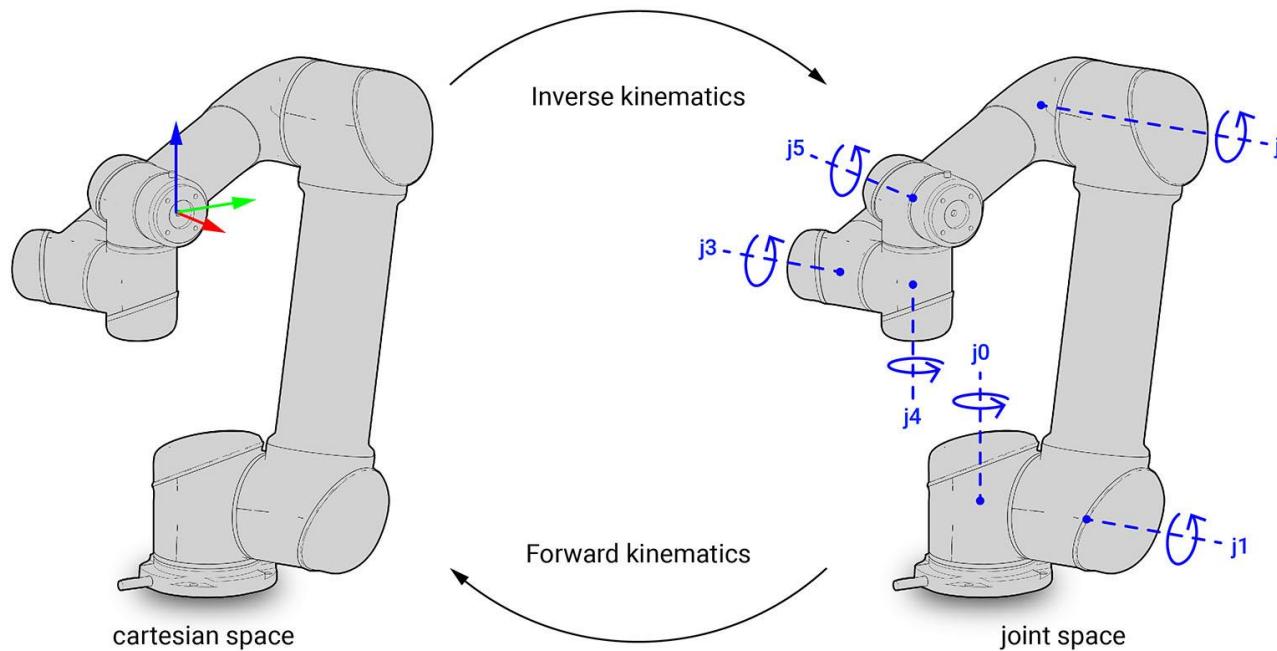


Tableau des paramètres DHKK
Robot Stäubli RX-90

i	σ_i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	0	θ_1
2	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	θ_2
3	0	a_3	0	0	θ_3
4	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_3	θ_4
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_5
6	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_6

Modèle Géométrique Direct : MGD

Le MGD est l'ensemble des relations qui donne la *pose* de l'organe terminal \mathbf{X} (*les coordonnées opérationnelles*) en fonction de la configuration du robot définie par les variables articulaires \mathbf{q} des différentes liaisons.

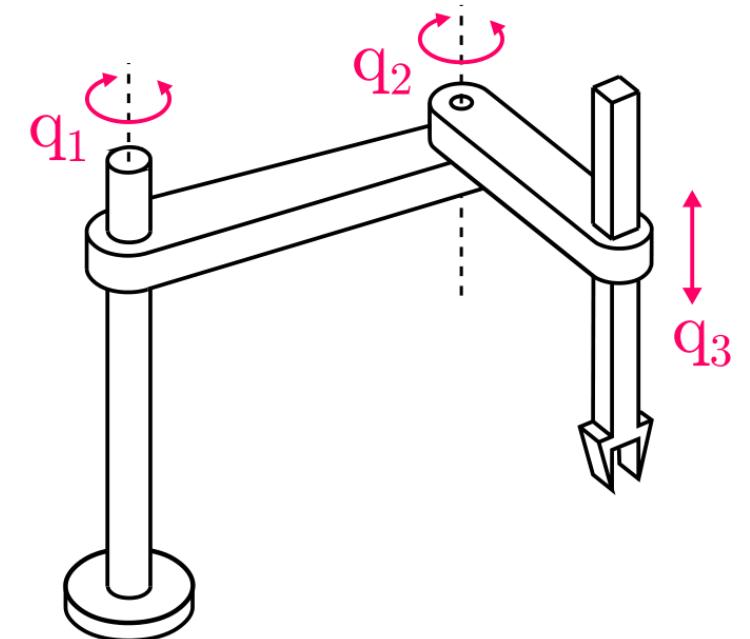


Modèle Géométrique Direct : MGD

$$\mathbf{X} = f(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \text{position de l'effecteur dans } \{\mathcal{R}_0\} \\ \text{orientation de } (\mathcal{R}_n) \text{ par rapport à } \{\mathcal{R}_0\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}_{(0)}$$

$$q_i = \begin{cases} \theta & \text{pour une liaison rotatoire} \\ a_i & \text{pour une liaison prismatique} \end{cases}$$



Modèle Géométrique Direct : MGD

Le contenu du vecteur \vec{X} peut être défini de plusieurs façons, suivant la représentation choisie :

- Avec la position cartésienne et les cosinus directeurs pour l'orientation :

$$\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, s_x, s_y, s_z, n_x, n_y, a_z, a_y, a_z]^T$$

- Avec la position cartésienne et les angles RPY pour l'orientation :

$$\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, \varphi, \theta, \psi]^T$$

Modèle Géométrique Direct : MGD

Avec le MGD dans le cas d'un robot série, si les variables des articulations sont connues, la pose de l'effecteur peut être calculée d'une **manière unique** en utilisant la matrice de transformation homogène 0T_n définie par :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n)$$

En résumé : Le calcul du MGD conduit à identifier la matrice de transformation entre le repère de référence $\{\mathcal{R}_0\}$ et celui de l'effecteur $\{\mathcal{R}_n\}$ en identifiant les paramètres de la matrice 0T_n :

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } P_x, P_y, P_z \text{ coordonnées du point P dans } \{\mathcal{R}_0\}$$

Repère global (WORLD) - Repère de l'outil (TOOL)

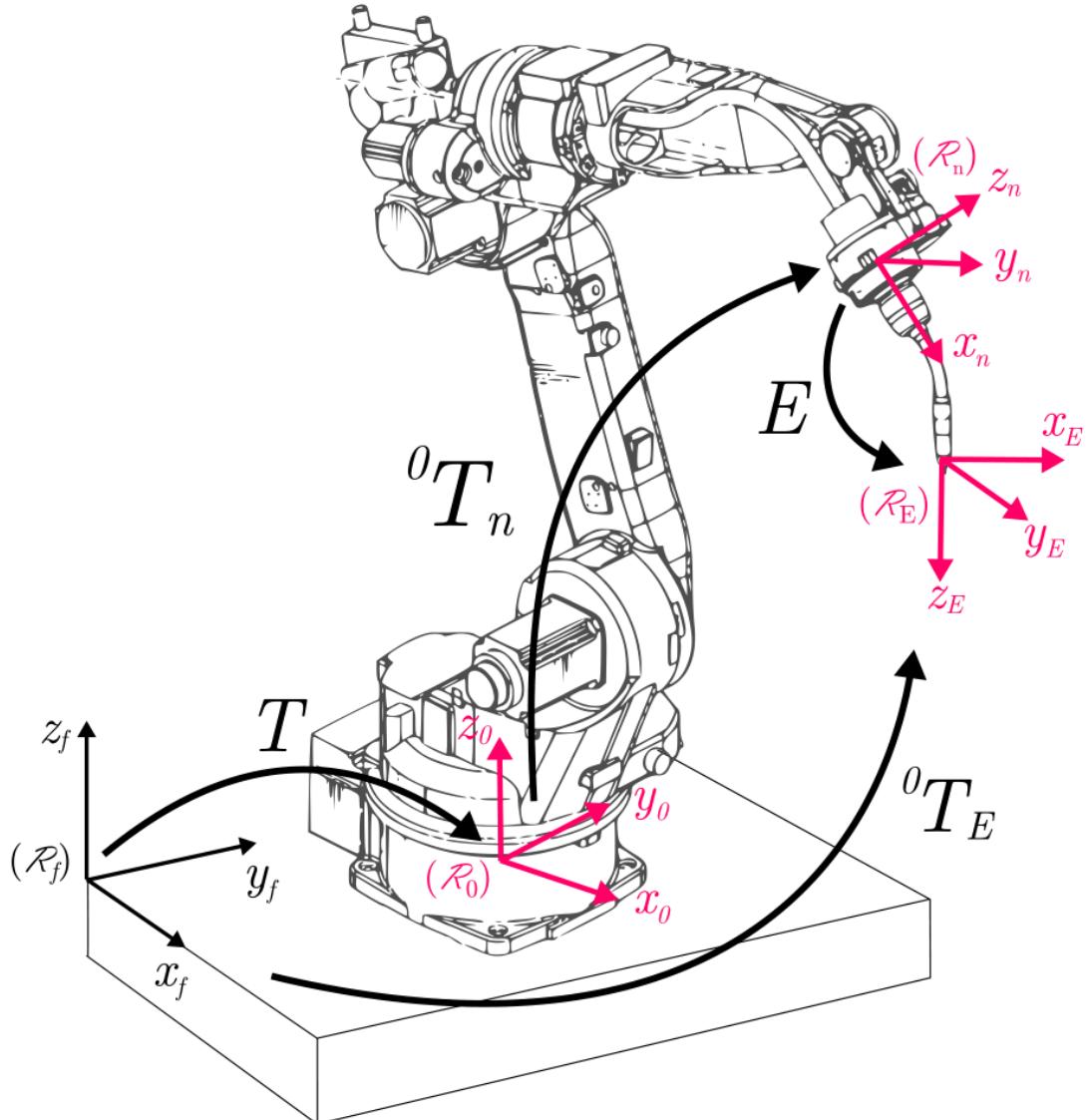
Généralement on définit un repère global (WORLD frame) (\mathcal{R}_f) qui peut être différent du repère de base $\{\mathcal{R}_0\}$ associé au bâti du robot. Un repère associé à l'outil (TOOL frame) (\mathcal{R}_E) est aussi souvent utilisé (pratique lorsque l'on change souvent d'outil avec des dimensions différentes).

Les commandes de programmation de certains robots font apparaître :

- $Z = {}^fT_0$: la matrice de transformation qui définit $\{\mathcal{R}_0\}$ dans le repère de référence (\mathcal{R}_f)
- $E = {}^nT_E$: la matrice de transformation qui définit (\mathcal{R}_E) dans le repère du terminal (\mathcal{R}_n)

Le repérage de l'outil est définie directement dans le repère global par :

$${}^nT_E = Z \ {}^0T_n(q) E$$



Modèle Géométrique Direct : MGD

Exemple Robot SCARA

A partir du tableau des paramètres DHKK on peut calculer les matrices de transfert :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modèle Géométrique Direct : MGD

Exemple Robot SCARA

$$\begin{aligned} U_4 &= I_4 \\ U_3 &= {}^3T_4 U_4 = {}^3T_4 \end{aligned}$$

$$U_2 = {}^2T_3 U_3 = {}^2T_3 {}^3T_4 = {}^2T_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & a_3 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = {}^1T_2 U_2 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 = {}^1T_4 = \begin{bmatrix} C(\theta_2 + \theta_4) & -S(\theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 C\theta_2 + a_2 \\ S(\theta_2 + \theta_4) & C(\theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1 U_1 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 = {}^0T_4 \\ &= \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & -S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 C(\theta_1 + \theta_2) + a_2 C(\theta_1) \\ S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 S(\theta_1 + \theta_2) + a_2 S(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Modèle Géométrique Direct : MGD

Exemple Robot SCARA - Python

```
from math import * # module needed to use cosinus, sinus ... functions
import numpy as np # Python doesn't have a built-in type for matrices. However NumPy is a package for scientific computing
from sympy import * # symbolic computation
```

```
def T(ai, alpha, di, theta):
    return np.array([[cos(theta), -sin(theta), 0, ai],
                    [sin(theta)*cos(alpha), cos(theta)*cos(alpha), -sin(alpha), -sin(alpha)*di],
                    [sin(theta)*sin(alpha), cos(theta)*sin(alpha), cos(alpha), cos(alpha)*di],
                    [0, 0, 0, 1]])
```

Modèle Géométrique Direct : MGD

Exemple Robot SCARA - Python

```
a1 = 0          # a i-1
alpha1 = 0      # alpha i-1
d1 = 0          # d i
t1 = symbols('t1') # theta i

a2 = symbols('a2')
alpha2 = 0
d2 = 0
t2 = symbols('t2')

a3 = symbols('a3')
alpha3 = 0
d3 = symbols('d2')
t3 = 0

a4 = 0
alpha4 = 0
d4 = 0
t4 = symbols('t4')

T01 = T(a1, alpha1, d1, t1)
T12 = T(a2, alpha2, d2, t2)
T23 = T(a3, alpha3, d3, t3)
T34 = T(a4, alpha4, d4, t4)

U4 = np.identity(4)    # I4
U3 = T34 @ U4
U2 = T23 @ U3
U1 = T12 @ U2
U0 = T01 @ U1

print(simplify(U0 @ np.array([0,0,0,1])).subs({t1:0, t2:0, t4:0}))
```

...: print(simplify(U0 @ np.array([0,0,0,1])).subs({t1:0, t2:0, t4:0})) #subs permet d'assigner une valeur numérique à une variable symbolique
[1.0*a2 + 1.0*a3, 0, -1.0*d2, 1.0]

En position $q_1 = 0, q_2 = 0, q_4 = 0$

$X = a_2 + a_3$

$Y = 0$

$Z = -d_2$

Modèle Géométrique Direct : MGD

Exemple Robot SCARA

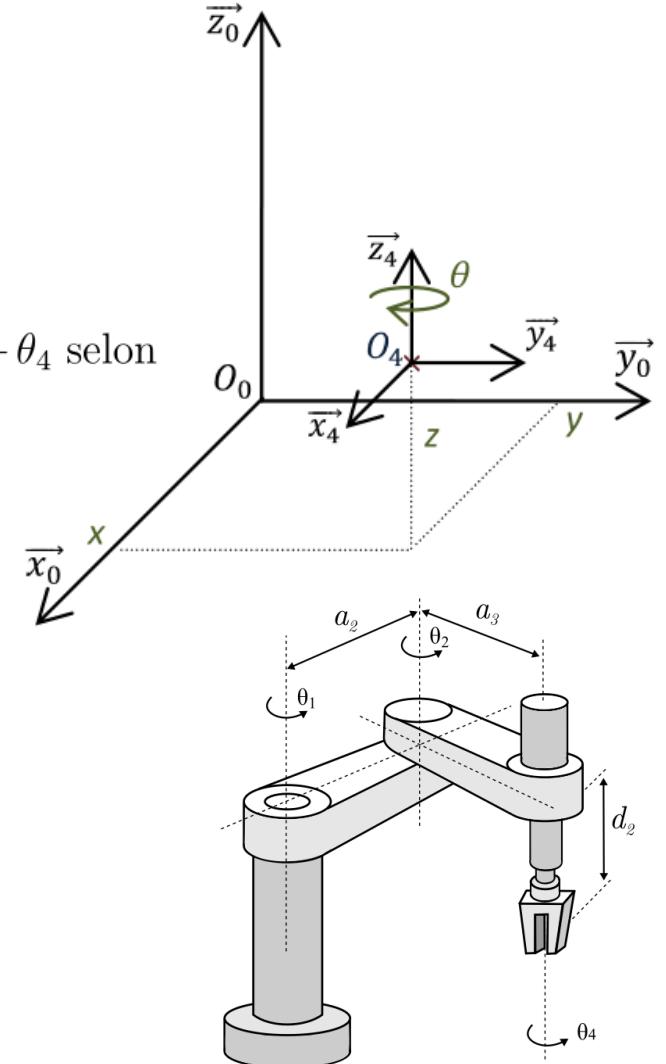
$$U_0 = \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & -S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3C(\theta_1 + \theta_2) + a_2C(\theta_1) \\ S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3S(\theta_1 + \theta_2) + a_2S(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Toutes les rotations se font selon l'axe z. L'angle d'orientation θ_z vaut alors : $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4$ selon la direction z_0 .

$$T_{04} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc MGD :

$$\begin{cases} x = a_2 \cdot \cos(\theta_1) + a_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = a_2 \cdot \sin(\theta_1) + a_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ z = -d_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 \end{cases}$$



MGD robot SCARA – Vérification géométrique

On peut vérifier aisément (car c'est un cas simple) géométriquement à l'aide de la vue de dessus :

$$O_oA =$$

$$AB =$$

$$O_oB =$$

$$O_oC =$$

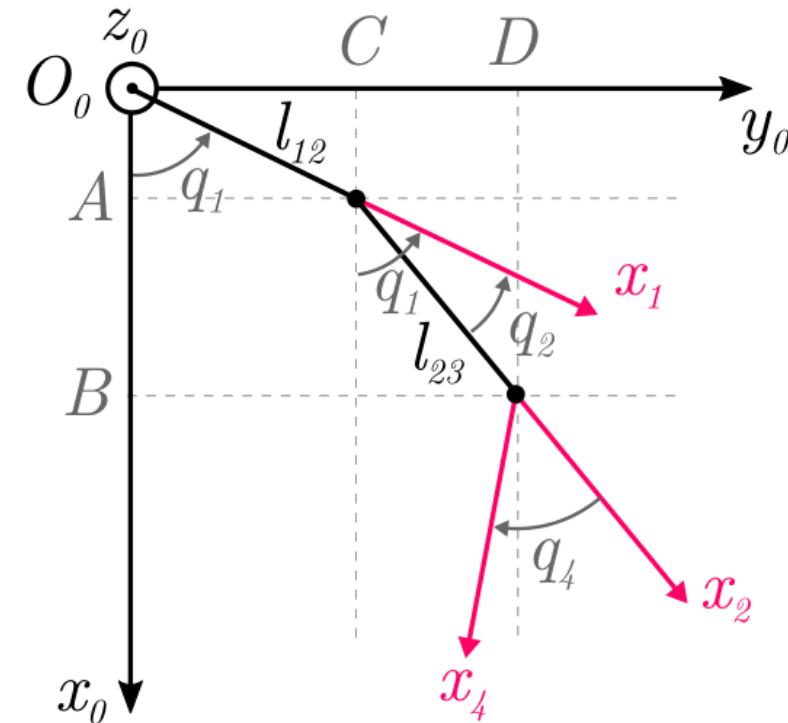
$$CD =$$

$$O_oD =$$

$$z =$$

$$\theta =$$

avec q_2 et $q_4 < 0$.



MGD robot robot Stäubli RX-90

A partir du tableau des paramètres DHKK on peut calculer les matrices de transfert :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD robot robot Stäubli RX-90

$$U_6 = I_6$$

$$U_5 = {}^5T_6$$

$$U_4 = {}^4T_6 = {}^4T_5 U_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 C\theta_6 & -C\theta_5 S\theta_6 & -S\theta_5 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ S\theta_5 S\theta_6 & -S\theta_5 S\theta_6 & C\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = {}^3T_6 = {}^3T_4 U_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 C\theta_5 S\theta_4 C\theta_6 & -C\theta_4 C\theta_5 S\theta_6 & -C\theta_4 S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 C\theta_6 & -S\theta_5 S\theta_6 & C\theta_5 & d_3 \\ -S\theta_4 S\theta_5 S\theta_6 - C\theta_4 S\theta_6 & S\theta_4 C\theta_5 S\theta_6 & S\theta_4 S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

:

$$U_0 = {}^0T_6 = {}^0T_1 U_1 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD robot robot Stäubli RX-90

$$U_0 = {}^0T_6 = {}^0T_1 U_1 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x =$$

$$S_y =$$

$$S_z =$$

$$n_x =$$

$$n_y =$$

$$n_z =$$

$$a_x =$$

$$a_y =$$

$$a_z =$$

$$P_x =$$

$$P_y =$$

$$P_z =$$

Poignet sphérique

Énormément de robots possèdent un poignet **sphérique**. C'est à dire que les axes des trois dernières articulations s'intersectent en un point.

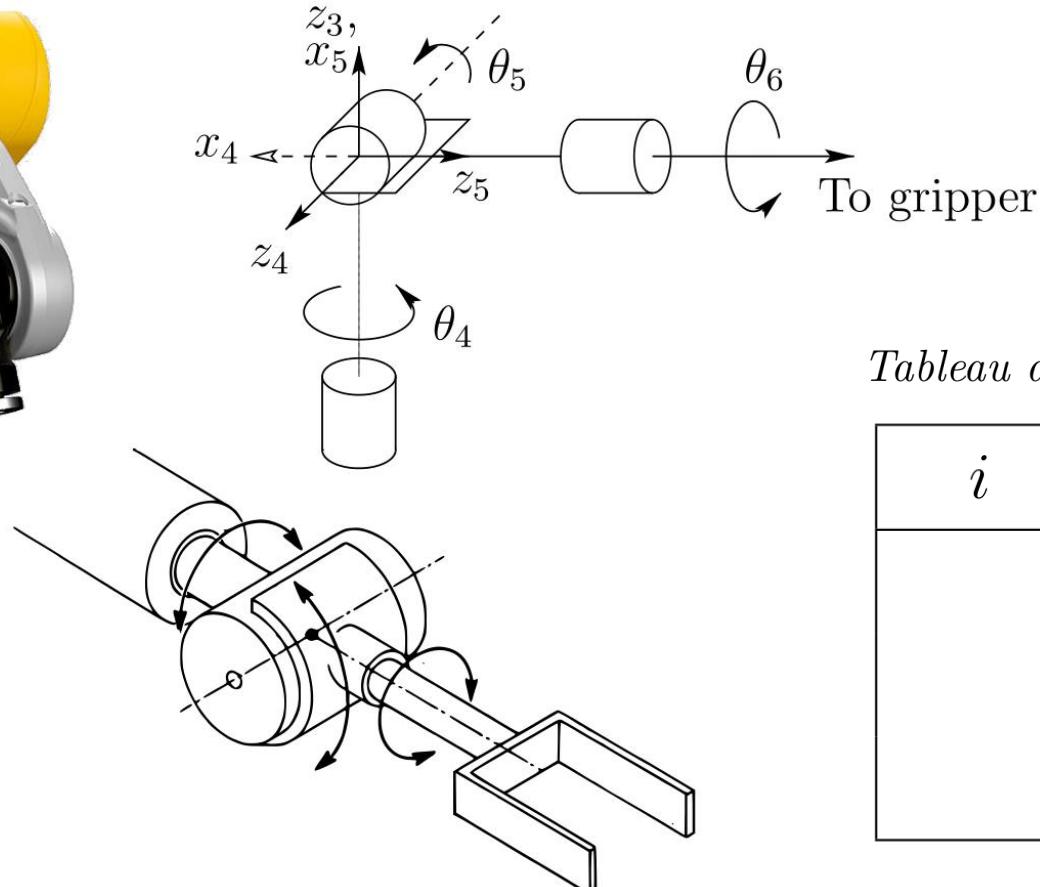
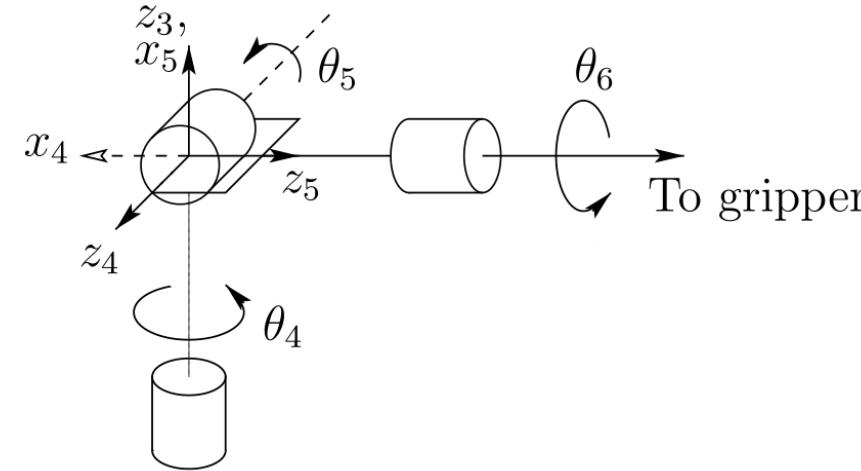
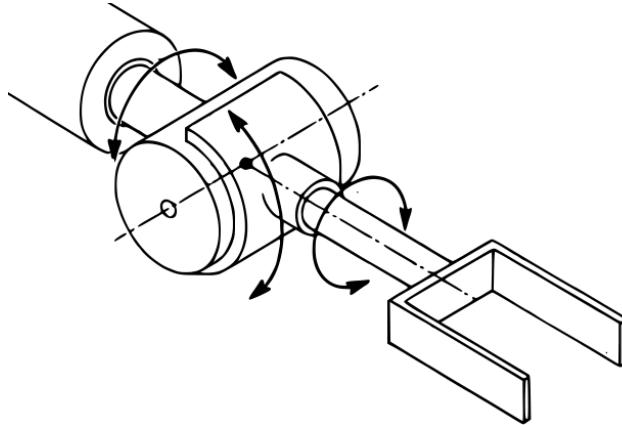


Tableau des paramètres DHKK - Poignet sphérique

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i

Poignet sphérique



$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_6 = {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4c6 & c4s5 & c4s5d_6 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 & s4s5 & s4s5d_6 \\ -s5c6 & s5s6 & c5 & c5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$