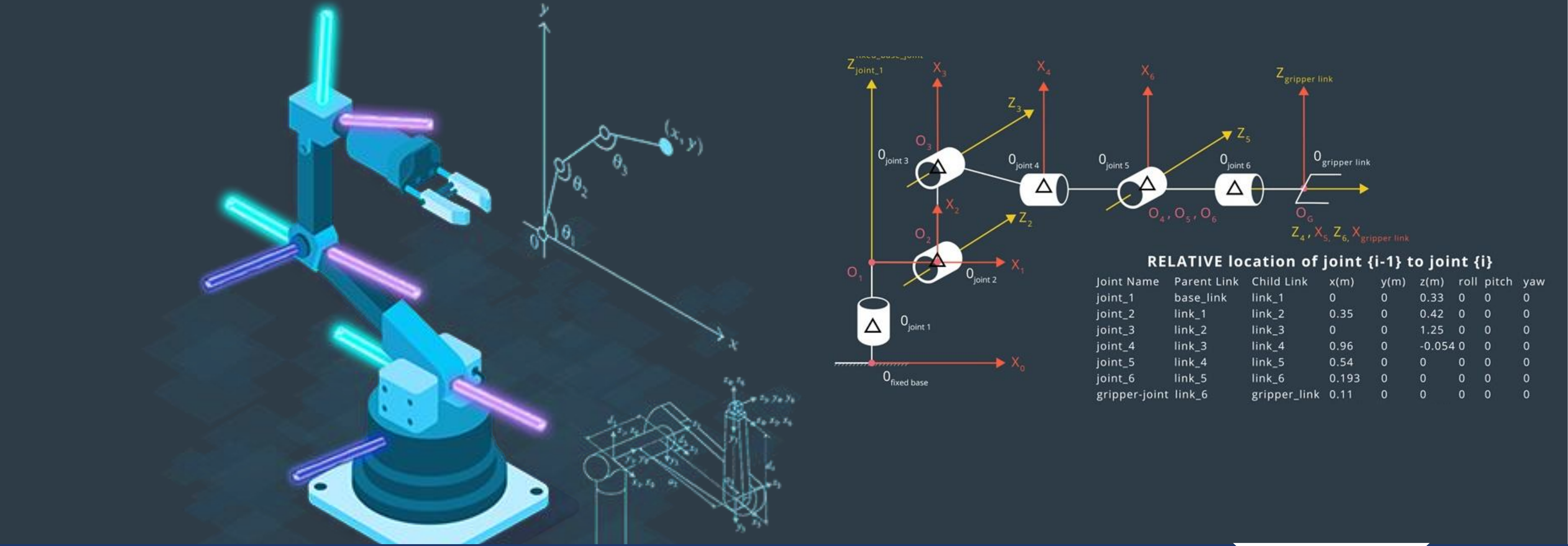


2020

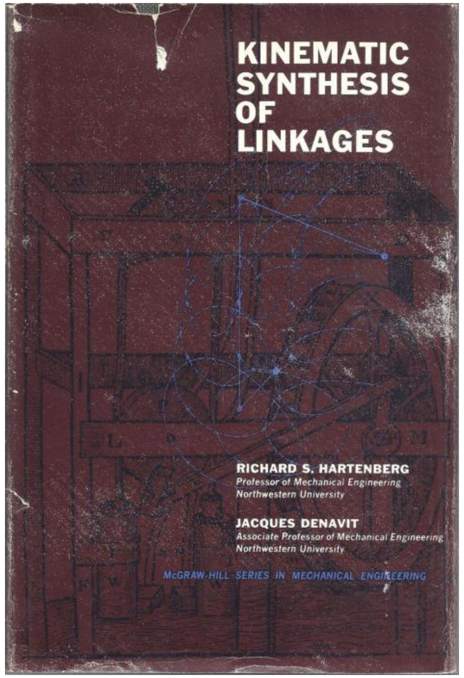
MECA 953 - Robotique

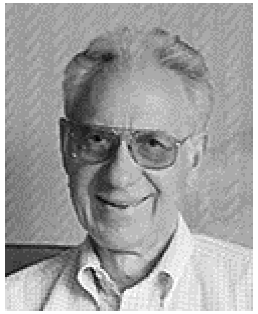
MMT5

4. Cinématique Directe MGD

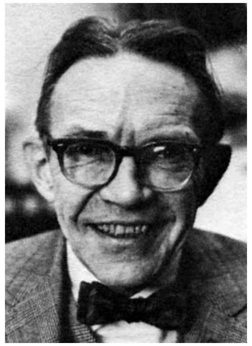
UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC
POLYTECH ANNECY-CHAMBÉRY
SYMME

Convention Denavit Hartenberg

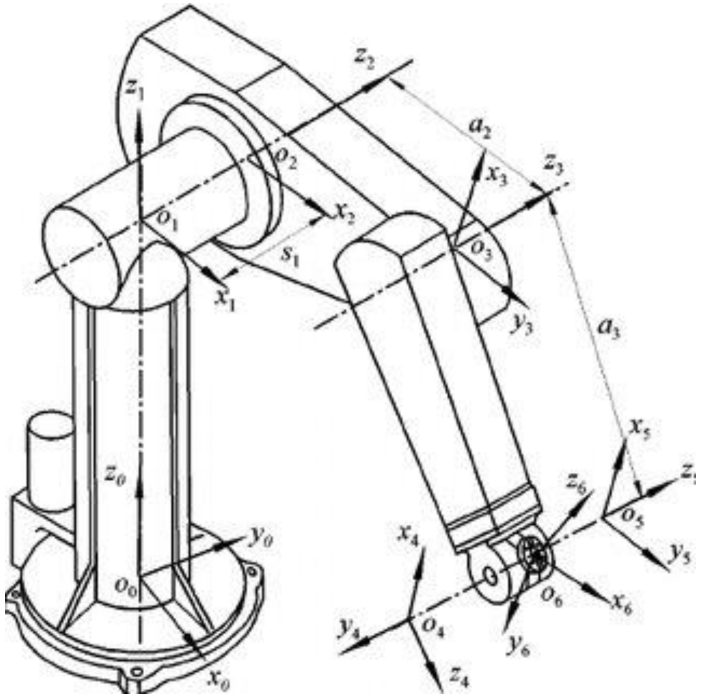




Jacques **DENAVIT**
(1930-2012)

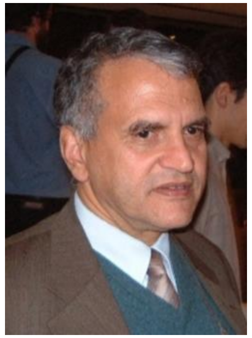


Richard Scheunemann **HARTENBERG**
(1907-1997)



Initialement introduite en 1955 par Jacques Denavit et Richard S. Hartenberg, la méthode DH permet de normaliser, simplifier et rationaliser la modélisation géométrique d'un robot.

Convention DH-KK : Denavit-Hartenberg modifiée (appelée aussi Khalil-Kleinfinger)



Wisama **KHALIL**

Jean-François **KLEINFINGER**

La convention de Denavit-Hartenberg modifiée, appelée aussi convention de Khalil-Kleinfinger, qui est préconisée depuis 1986.
(parce qu'elle permet un allègement du formalisme dans les exposés, portant sur les méthodes numériques par récurrence de la dynamique des robots).

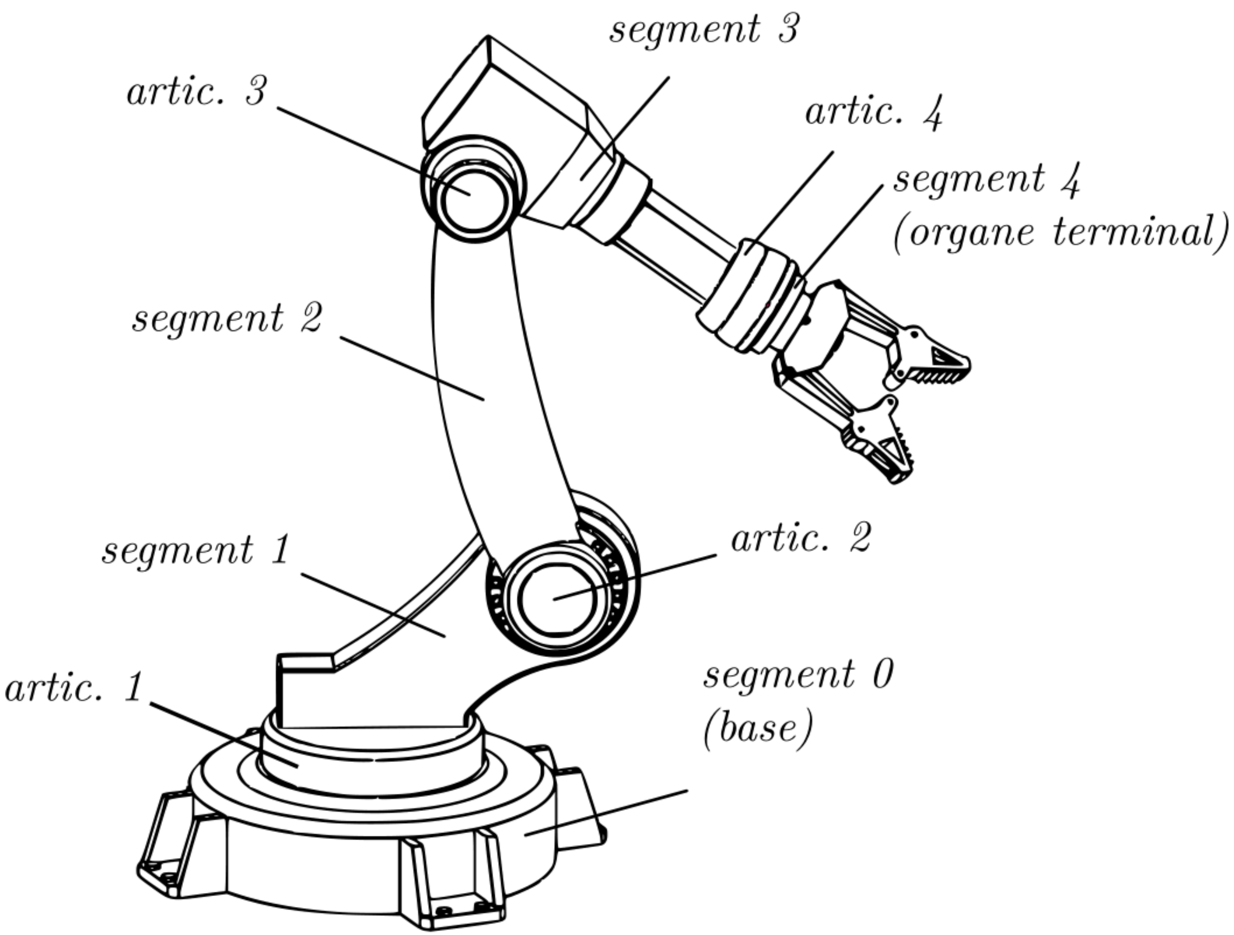
Règles de paramétrage

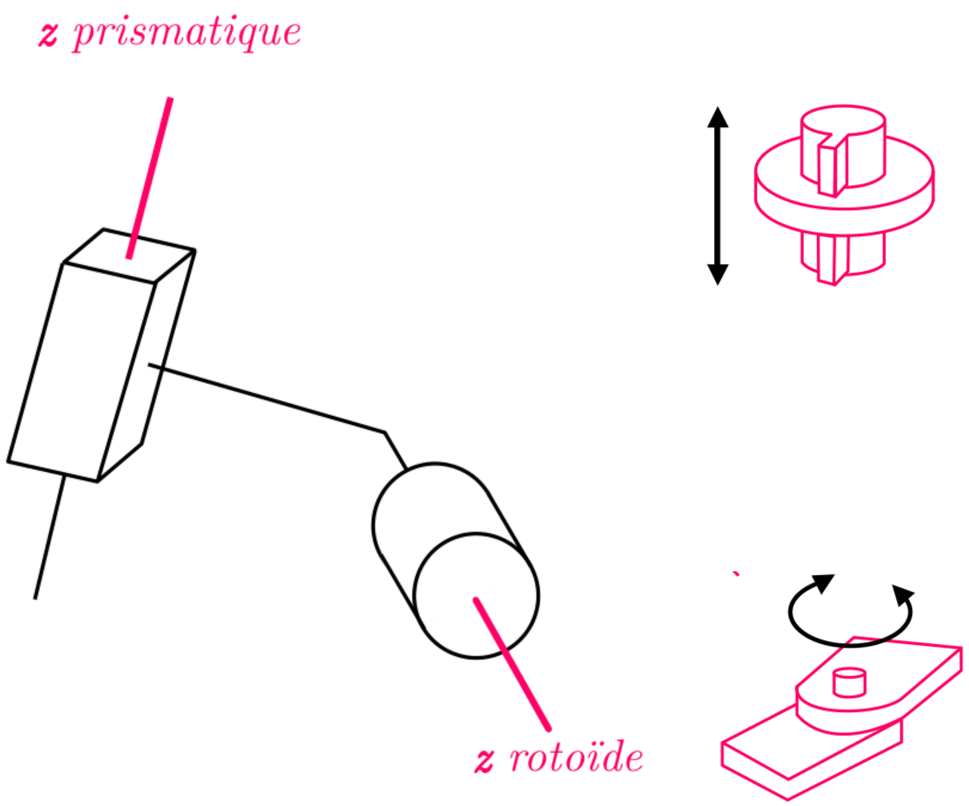
Règles de paramétrage

- Les segments sont numérotés dans l'ordre croissant, de la base (0) à l'effecteur (n).
- Le repère $\mathcal{R}_i$ $(O_i,\vec{X}_i\vec{Y}_i\vec{Z}_i)$ est associé au segment i.
- L'axe $\vec{Z}_i$ correspond à l'axe de l'articulation i. (pivot ou glissière).
- L'axe $\vec{X}_i$ correspond à la perpendiculaire commune entre $\vec{Z}_i$ et $\vec{Z}_{i+1}$. ($\vec{X}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{Z}_{i+1}$).
- L'axe $\vec{Y}_i$ est placé de façon à créer un repère orthogonal direct. ($\vec{Y}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{X}_i$).
- L'origine O_i est située à intersection de $\vec{X}_i$ et $\vec{Z}_i$.

Règles de paramétrage

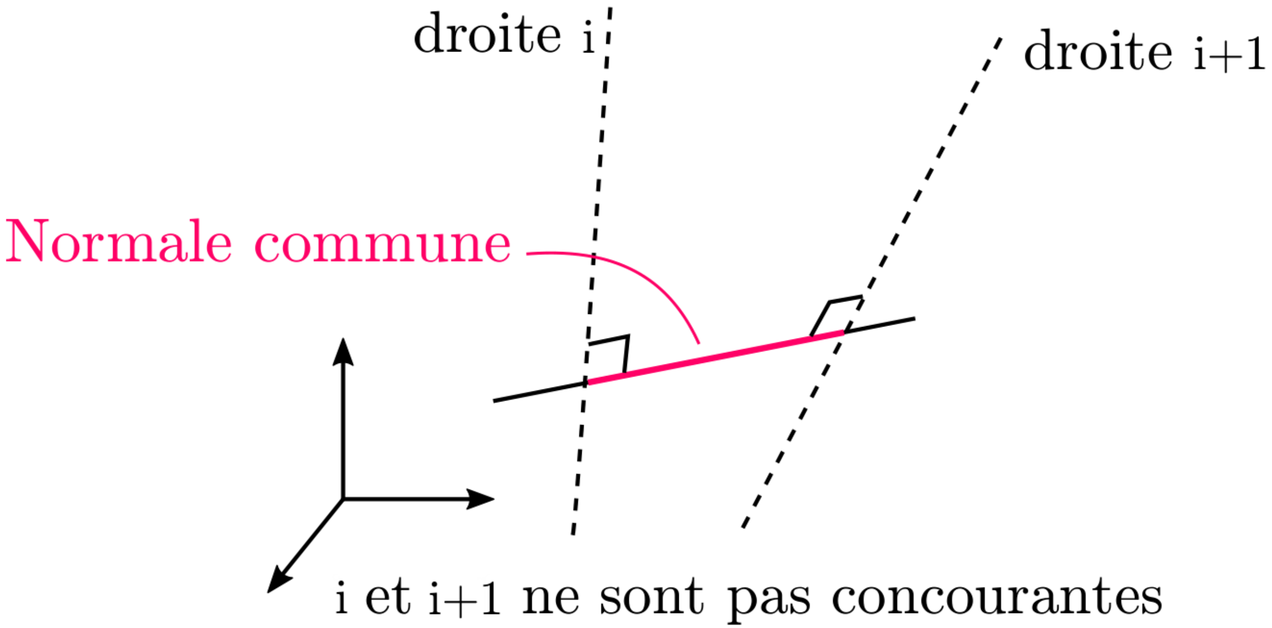
Numérotation des segments et liaisons & Définition des axes Z_i





Règles de paramétrage

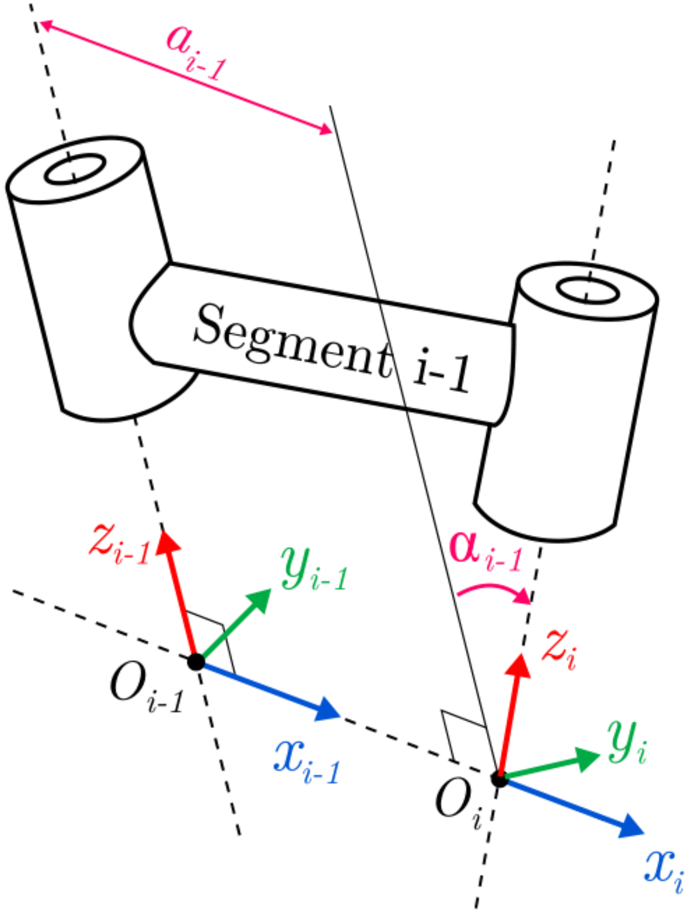
Numérotation des segments et liaisons & Définition des axes Z_i

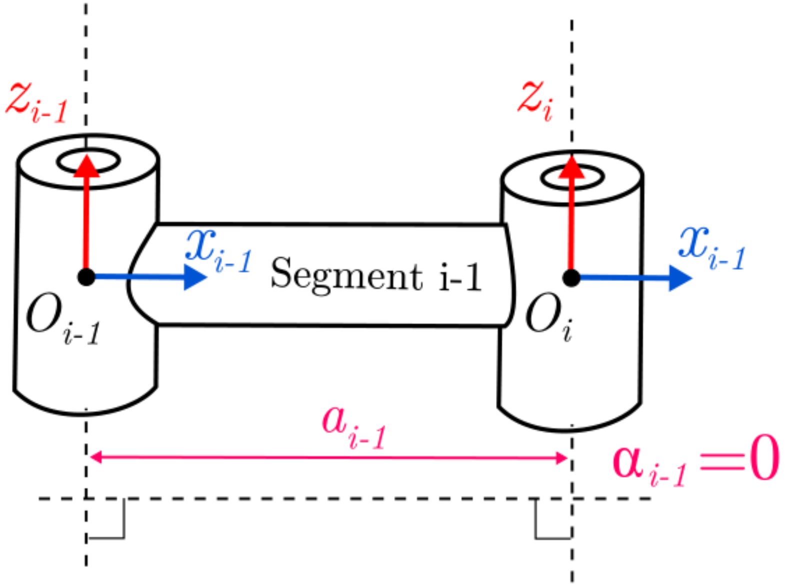


*La **normale commune** entre deux droites est la droite qui contient le segment de distance minimale entre les deux droites.*

Règles de paramétrage

Paramétrage d'un segment (convention DH-KK)

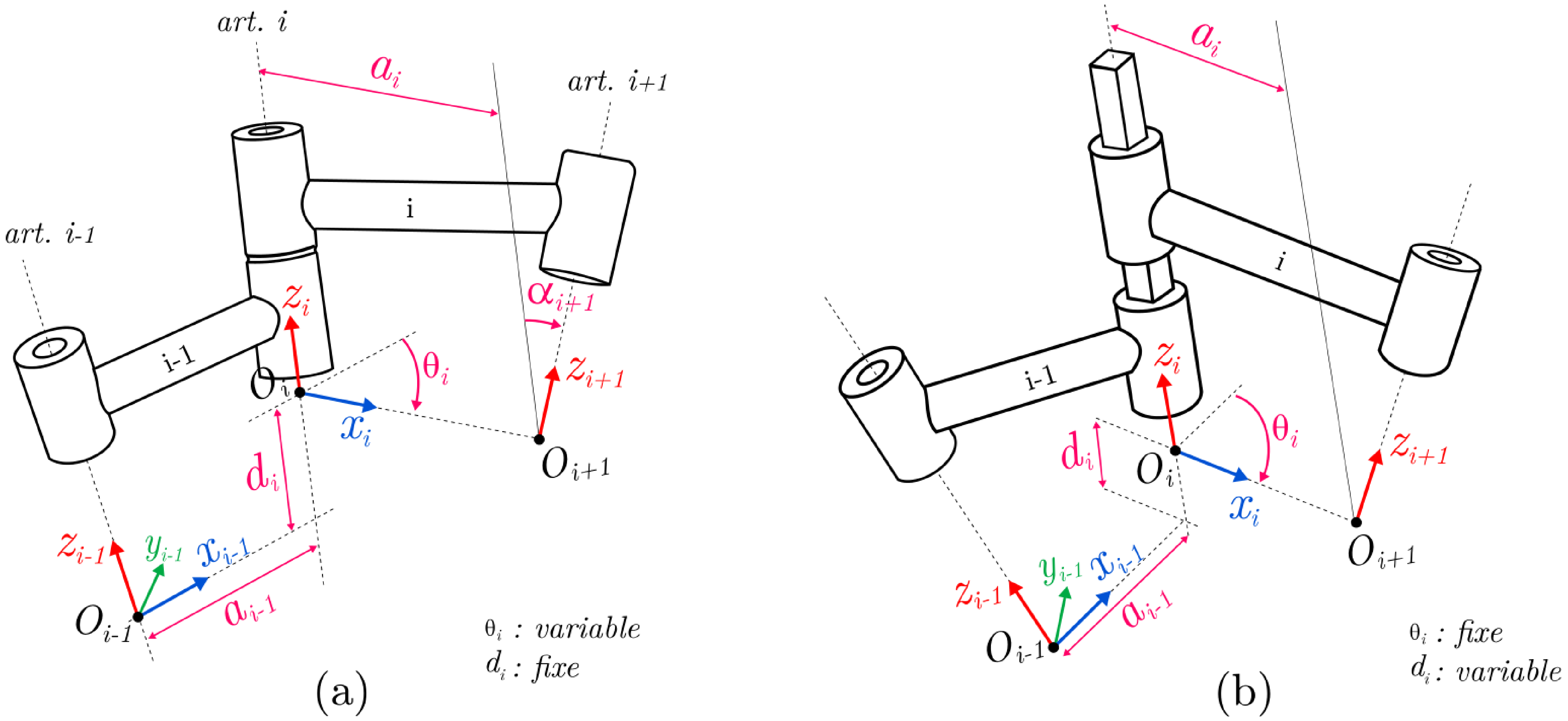




(cas où axes i-1 et i parallèles)

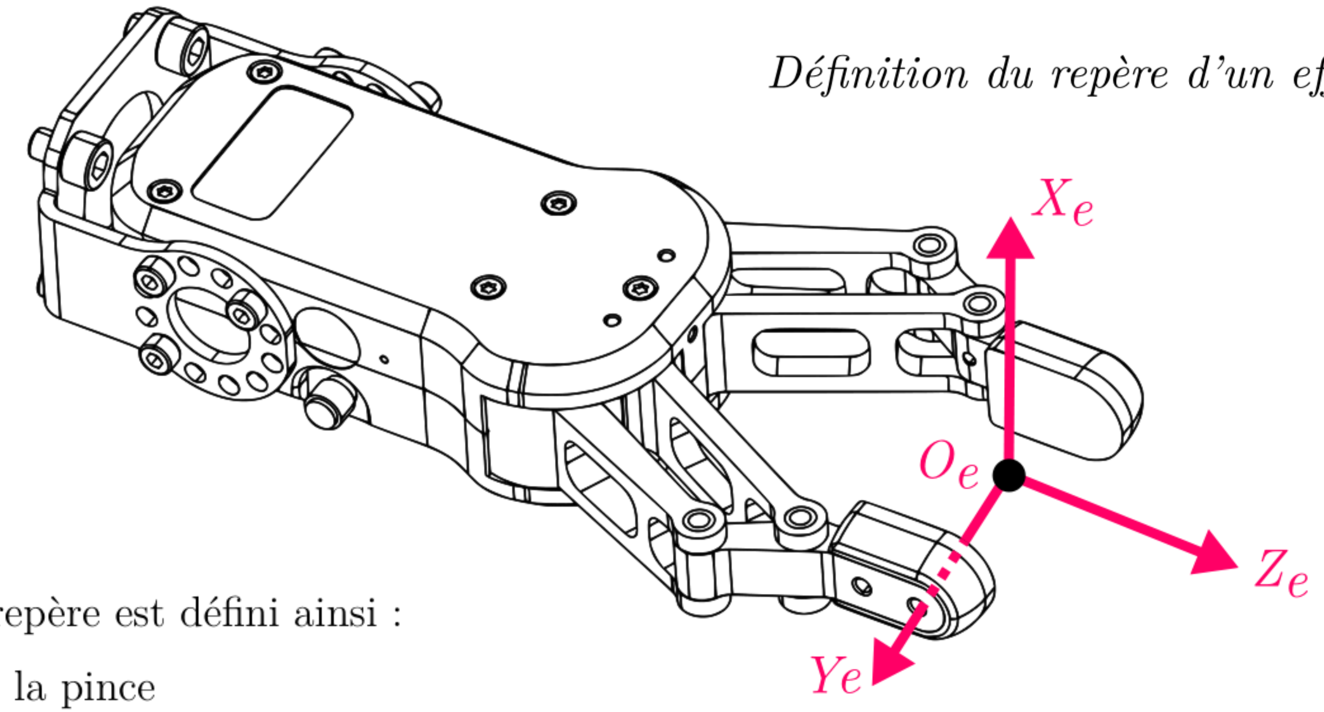
Règles de paramétrage

Paramétrage (a) d'une liaison pivot, (b) d'une liaison glissière. (convention DH-KK)



Règles de paramétrage

Effecteur pince



Définition du repère d'un effecteur de type pince.

Si l'effecteur est une **pince** le repère est défini ainsi :

- Origine O_e : au centre de la pince
- $\vec{Z}_e$: en direction de l'objet à attraper.
- $\vec{Y}_e$: orthogonal à $\vec{Z}_e$, dans le plan de glissement des becs de la pince.
- $\vec{X}_e$: orthogonal au deux autres axes pour avoir un repère orthogonal direct ($\vec{X}_e = \vec{Y}_e \wedge \vec{Z}_e$).

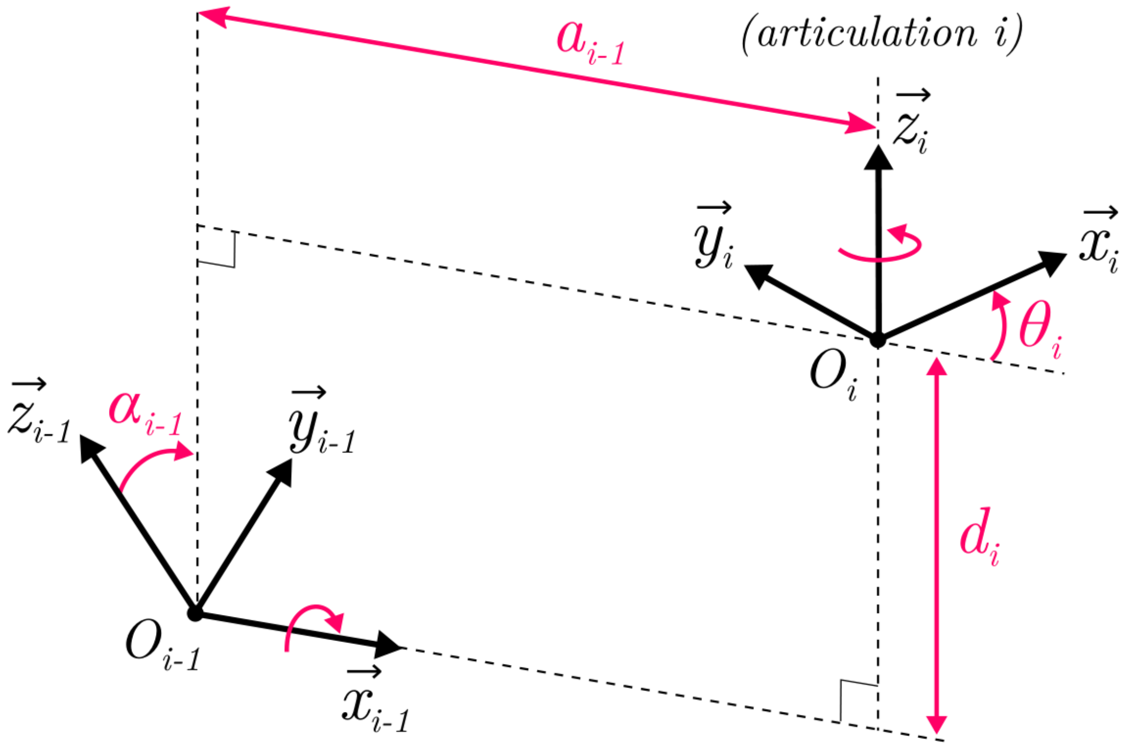
Convention DH modifiée (DH-KK)

Le passage de $(\mathcal{R}_{i-1})$ à $(\mathcal{R}_i)$ s'exprime en fonction des quatre paramètres DH modifiés suivants : $\boldsymbol{a_{i-1}}$ (excentricité), $\boldsymbol{\alpha_{i-1}}$ (torsion), $\boldsymbol{d_i}$ (longueur), $\boldsymbol{\theta_i}$ (angle).

$\boldsymbol{a_{i-1}}$: Distance de $\boldsymbol{Z_{i-1}}$ vers $\boldsymbol{Z_i}$, le long de $\boldsymbol{X_{i-1}}$.
$\boldsymbol{\alpha_{i-1}}$: Angle entre $\boldsymbol{Z_{i-1}}$ et $\boldsymbol{Z_i}$, autour de l'axe $\boldsymbol{X_{i-1}}$.

$\boldsymbol{d_i}$: Distance de $\boldsymbol{X_{i-1}}$ vers $\boldsymbol{X_i}$, le long de $\boldsymbol{Z_i}$.
$\boldsymbol{\theta_i}$: Angle entre $\boldsymbol{X_{i-1}}$ et $\boldsymbol{X_i}$, autour de l'axe $\boldsymbol{Z_i}$.

Paramètres de la convention DH-KK.



Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramétrage

Symbol	Name	Description
$a_{i\text{-}1}$	Link Length	$Z_{i\text{-}1} \xrightarrow[@\ X_{i\text{-}1}]{\perp\text{,distance}} Z_i$
$\alpha_{i\text{-}1}$	Twist Angle	$Z_{i\text{-}1} \xrightarrow[@\ X_{i\text{-}1}]{\circlearrowleft\text{rotation}} Z_i$
d_i	Joint Offset	$X_{i\text{-}1} \xrightarrow[@\ Z_i]{\perp\text{,distance}} X_i$
θ_i	Joint Angle	$X_{i\text{-}1} \xrightarrow[@\ Z_i]{\circlearrowleft\text{rotation}} X_i$

Paramètres de la convention DH-KK.

Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramétrage

Étape 1 **Identification des segments :** Chaque repère $(\mathcal{R}_i)$ est lié au segment i
Identification des articulations de 1 à n : L'axe Z_i du repère $(\mathcal{R}_i)$ coïncide avec l'articulations i. Le segment i possède 2 axes : Z_i et Z_{i+1}. L'axe Z_i est lié à l'articulation i et l'axe Z_{i+1} est lié à l'articulation $i+1$.

Étape 2 **Choisir** Z_i le long de l'axe des articulations i.

Étape 3 **Identifier la normale commune entre** Z_i **et** Z_{i+1}. L'origine du repère O_i est située à l'intersection de la normale commune a_i et l'axe Z_i.

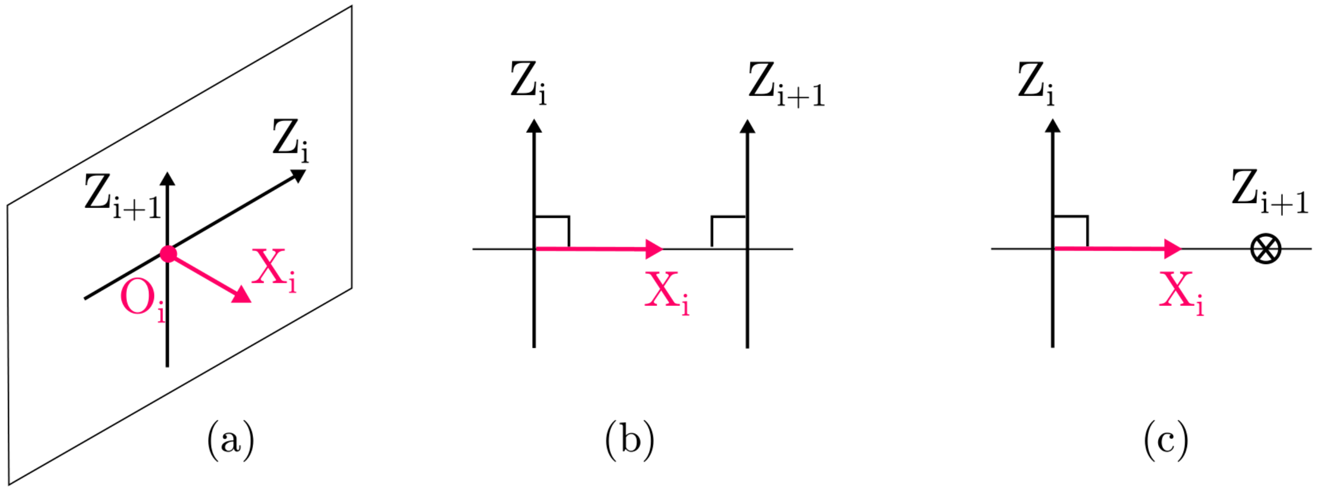
- Si Z_i et Z_{i+1} sont concourants, O_i est située au point d'intersection.
- Si Z_i et Z_{i+1} sont parallèles, le choix de l'origine Z_i est arbitraire (on choisit généralement une solution qui donne d_i=0).
- De même si il s'agit d'une articulation prismatique, la liberté est donnée quand à la position de l'origine du repère.

Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramètrage

Étape 4 **Choisir** X_i le long de la normale commune a_i et dirigé de Z_i vers Z_{i+1}.

- Si Z_i et Z_{i+1} s'intersectent, X_i est perpendiculaire au plan contenant les deux axes et le choix de la direction de X_i est libre.
- Si Z_i et Z_{i+1} sont parallèles, X_i est choisi de tel sorte qu'il intersecte X_{i-1}.



(a) $\vec{Z_i}$ et $\vec{Z_{i+1}}$ s'intersectent. (b,c) $\vec{Z_i}$ et $\vec{Z_{i+1}}$ sont parallèles.

Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramètrage

Étape 5 **Choisir** Y_i pour obtenir un trièdre direct avec Z_i et X_i soit $Y_i = Z_i \wedge X_i$. (Généralement on ne représente pas les axes Y_i pour ne pas encombrer le schéma)

Étape 6 **Assignation du repère de Base** $(\mathcal{R}_0)$ **:** Le repère de base est lié au segment 0. Le repère est placé arbitrairement mais le choix le plus simple consiste à prendre $(\mathcal{R}_0)$ confondu avec $(\mathcal{R}_1)$ quand q_1 =0. (On a alors d_0=0 et α_0= 0, r_1=0 si l'articulation est rotoïde et θ_1=0 si l'articulation est prismatique)

Convention DH modifiée (DH-KK)

Algorithme de paramètrage

Étape 7 **Assignation du repère de l'organe terminal n :**
Si l'articulation n est rotoïde, la direction de x_n est choisie le long de x_{n-1} quand $\theta_n = 0$ et l'origine du repère n est choisie telle que $r_n = 0$.
Si l'articulation n est prismatique, la direction de x_n est choisie telle que $\theta_n = 0$ et l'origine du repère n est définie à l'intersection de x_{n-1} et z_n tel que $r_n = 0$.

Étape 8 **Remplissage du tableau des paramètres**

	segment i	σ_i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
$^{0}\boldsymbol{T}_1$	1					
$^{1}\boldsymbol{T}_2$	2					
...	...					
$^{n-1}\boldsymbol{T}_n$	n					

Convention DH modifiée (DH-KK)

Variables articulaires : q_i

$$q_i = (1 - \sigma_i)\theta_i + \sigma_i d_i$$

avec :

- $\sigma_i = 0$ si i est une articulation rotoïde.
- $\sigma_i = 1$ si i est une articulation prismatique.

autrement dit :

- si l'articulation est une rotation alors $q_i = \theta_i$ est variable, α_i, a_i, d_i sont constants.
- si l'articulation est une translation alors $q_i = d_i$ est variable, α_i, a_i, θ_i sont constants.

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

La matrice de transformation homogène (position et orientation) entre 2 repères adjacents $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$, $\{\mathcal{R}_i\}$ peut être décomposée en 4 transformations élémentaires :

$\boldsymbol{Trans_{x_{i-1}}}(a_{i-1})$: Translation le long de $\boldsymbol{X}$ d'une distance a.
$\boldsymbol{Rot_{x_{i-1}}}(\alpha_{i-1})$: Rotation autour de $\boldsymbol{X}$ d'un angle α.
$\boldsymbol{Trans_{z_i}}(d_i)$: Translation le long de $\boldsymbol{Z}$ d'une distance d.
$\boldsymbol{Rot_{z_i}}(\theta_i)$: Rotation autour de $\boldsymbol{Z}$ d'un angle θ.

$$\boldsymbol{Trans_{x_{i-1}}}(a_{i-1}) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Rot_{x_{i-1}}}(\alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Trans_{z_i}}(d_i) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Rot_{z_i}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

Le produit des matrices de passage successives donne l'expression de la matrice de transformation qui amène le repère $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$ au le repère $\{\mathcal{R}_i\}$:

$$^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \boldsymbol{Trans}_{\boldsymbol{x}_{i-1}}(a_{i-1}) \cdot \boldsymbol{Rot}_{\boldsymbol{x}_{i-1}}(\alpha_{i-1}) \cdot \boldsymbol{Trans}_{\boldsymbol{z}_i}(d_i) \cdot \boldsymbol{Rot}_{\boldsymbol{z}_i}(\theta_i)$$

$$^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i\, C\alpha_{i-1} & C\theta_i\, C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i\, S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i\, S\alpha_{i-1} & C\theta_i\, S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i\, C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} ^{i-1}\boldsymbol{R}_i & ^{i-1}\boldsymbol{O}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

Transformation inverse

La transformation inverse ${}^{i}\boldsymbol{T}_{i-1}$ est donnée par :

$$ {}^{i}\boldsymbol{T}_{i-1} = \boldsymbol{Rot}_{z_i}(-\theta_i) \cdot \boldsymbol{Trans}_{z_i}(-d_i) \cdot \boldsymbol{Rot}_{x_{i-1}}(-\alpha_{i-1}) \cdot \boldsymbol{Trans}_{x_{i-1}}(-a_{i-1}) $$

$$ {}^{i}\boldsymbol{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} & {}^{i-1}\boldsymbol{R}_i^T & & -a_{i-1}\, C\theta_i \\ & & & a_{i-1}\, S\theta_i \\ & & & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

Comparaisons des paramètres de Denavit-Hartenberg classiques et modifiés

La méthode de Denavit-hartenberg "originale" est bien adaptée pour des structures ouvertes simples, mais présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots à structures fermées ou arborescentes. La variante dite "modifiée" permet de définir les paramètres à partir de deux solides seulement (trois axes caractéristiques de liaison) au lieu de trois pour la convention DH classique.

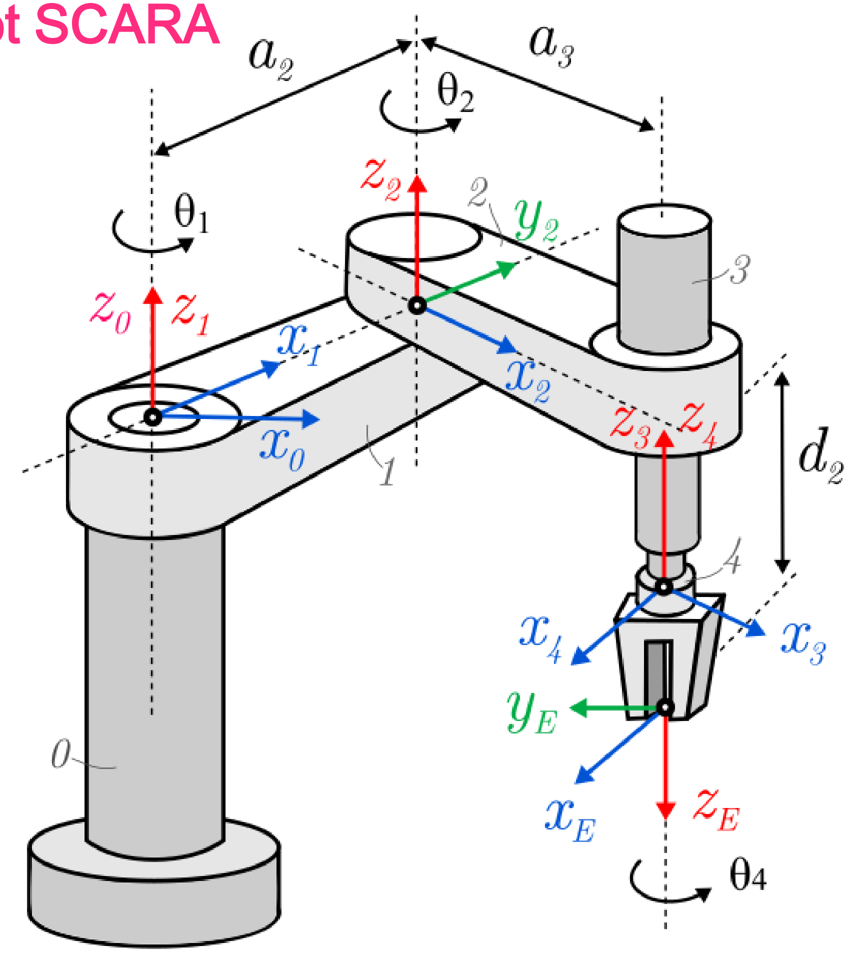
Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

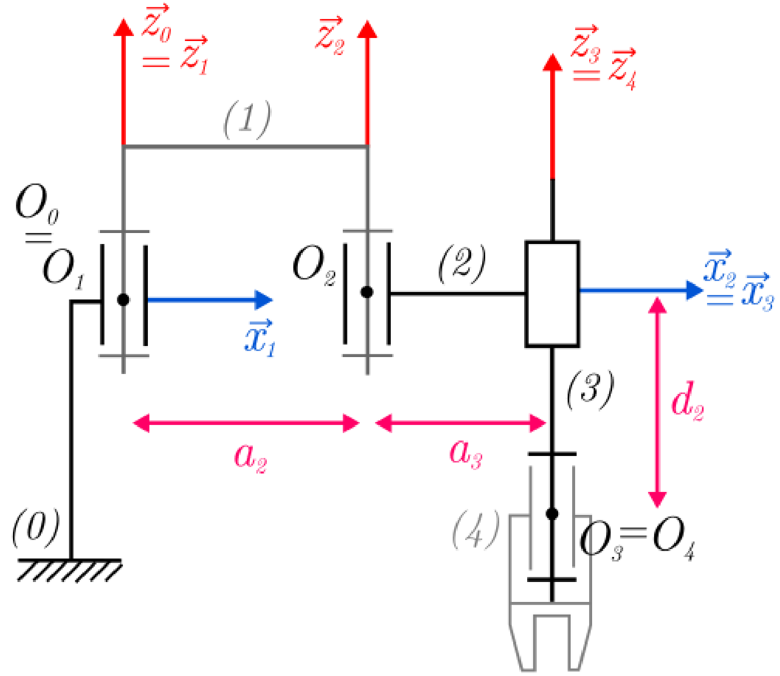
Comparaisons des paramètres de Denavit-Hartenberg classiques et modifiés

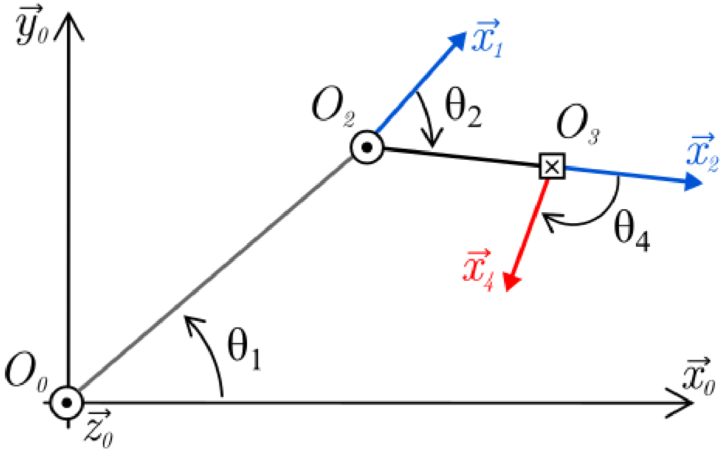
Paramètres	Convention originale DH	Convention modifiée DH-KK
axe de liaison	z_{i-1} pour l'articulation i	z_i pour l'articulation i
longueur : a_i	distance de O_i à l'intersection de z_{i-1} et x_i, le long de x_i	distance de z_i à z_{i+1}, le long de x_i
torsion : α_i	angle de z_{i-1} à z_i, autour de x_i	angle de z_i à z_{i+1}, autour de x_i
longueur : d_i	distance de O_{i-1} à l'intersection de z_{i-1} et x_i, le long de z_{i-1}	distance de x_{i-1} à x_i, le long de z_i
angle : θ_i	angle de x_{i-1} à x_i, autour de z_{i-1}	angle de x_{i-1} à x_i, autour de z_i
$^{i-1}T_i$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & d_i C\theta i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & d_i S\theta i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i\, C\alpha_{i-1} & C\theta_i\, C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i\, S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i\, S\alpha_{i-1} & C\theta_i\, S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i\, C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$^{i}T_{i-1}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -d_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -a_i S\alpha i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -a_i C\alpha i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i\, C\alpha_{i-1} & S\theta_i\, S\alpha_{i-1} & -a_{i-1}\, C\theta i \\ -S\theta_i & C\theta_i\, C\alpha_{i-1} & C\theta_i\, S\alpha_{i-1} & a_{i-1}\, S\theta i \\ 0 & -S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Paramétrage

Exemple Robot SCARA







Paramétrage

Exemple Robot SCARA

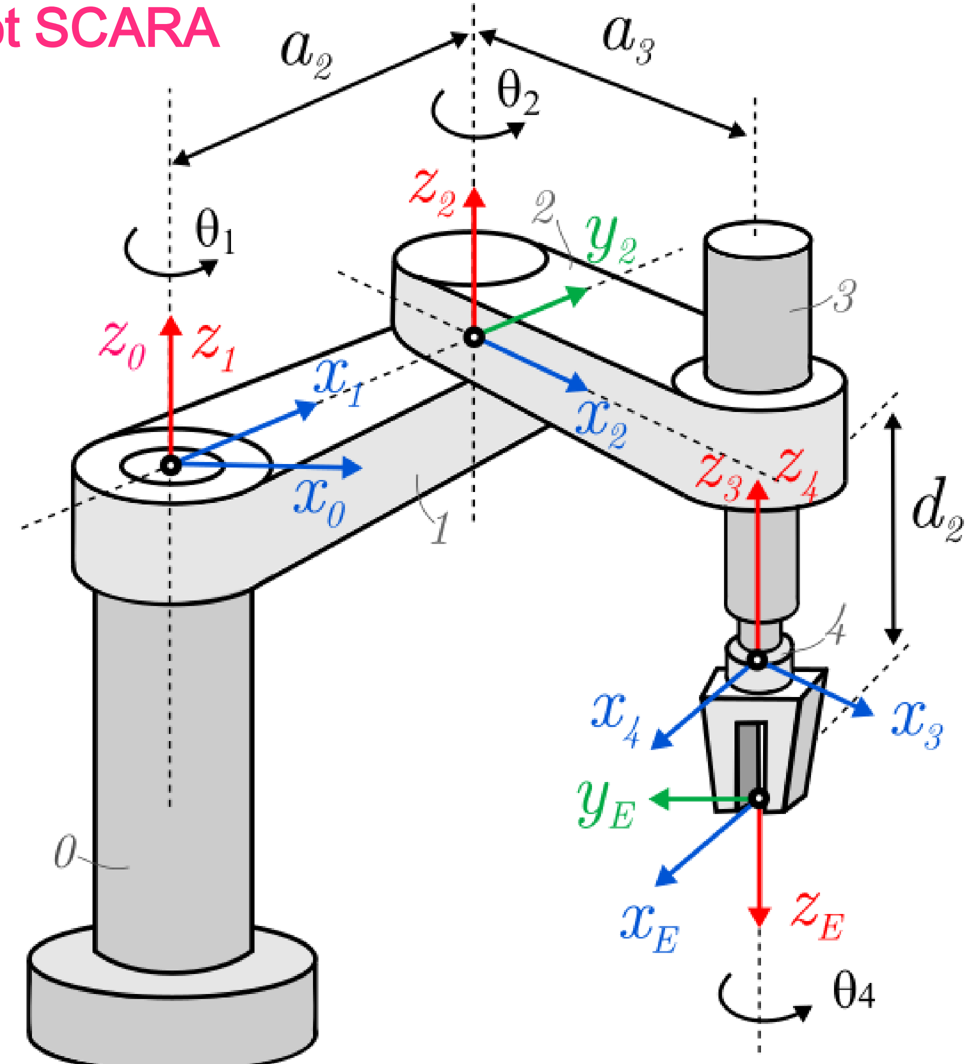
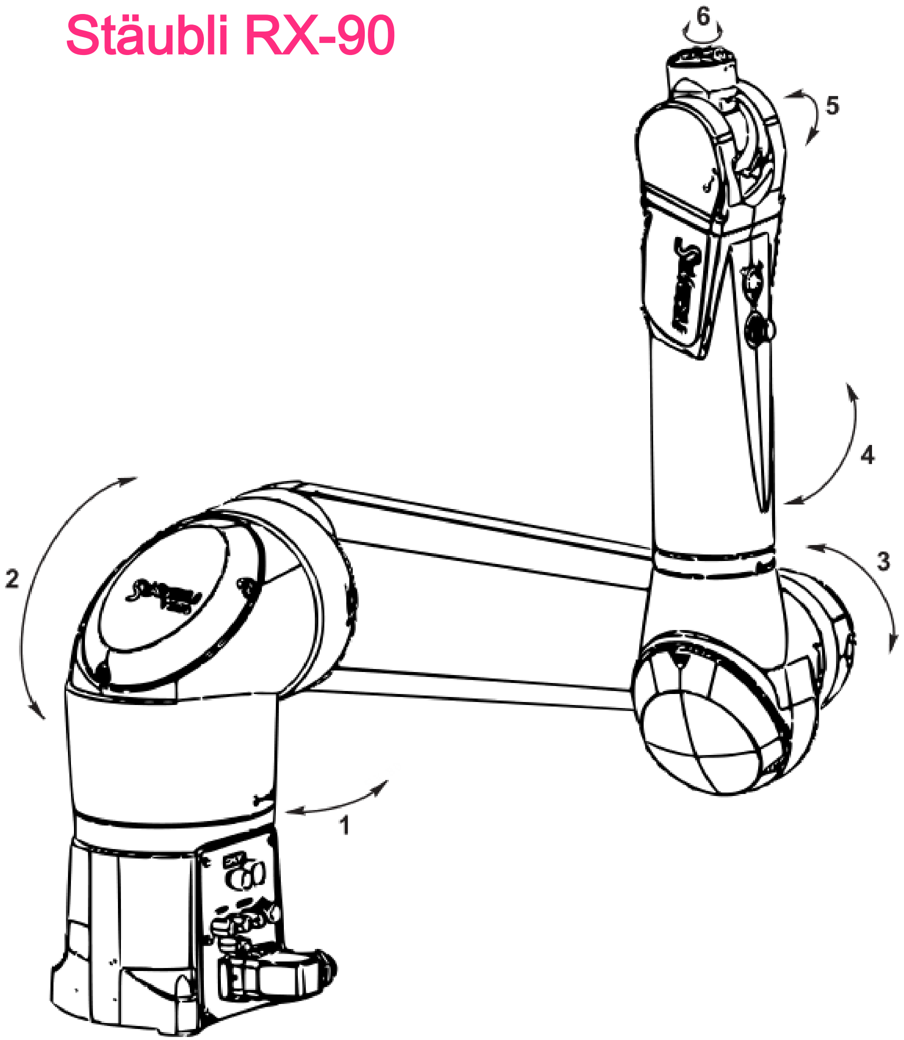


Tableau des paramètres DHKK - Robot Scara

i	σ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	0	θ_1
2	0	0	a_2	0	θ_2
3	1	0	a_3	d_2	0
4	0	0	0	0	θ_4

Paramétrage

Stäubli RX-90



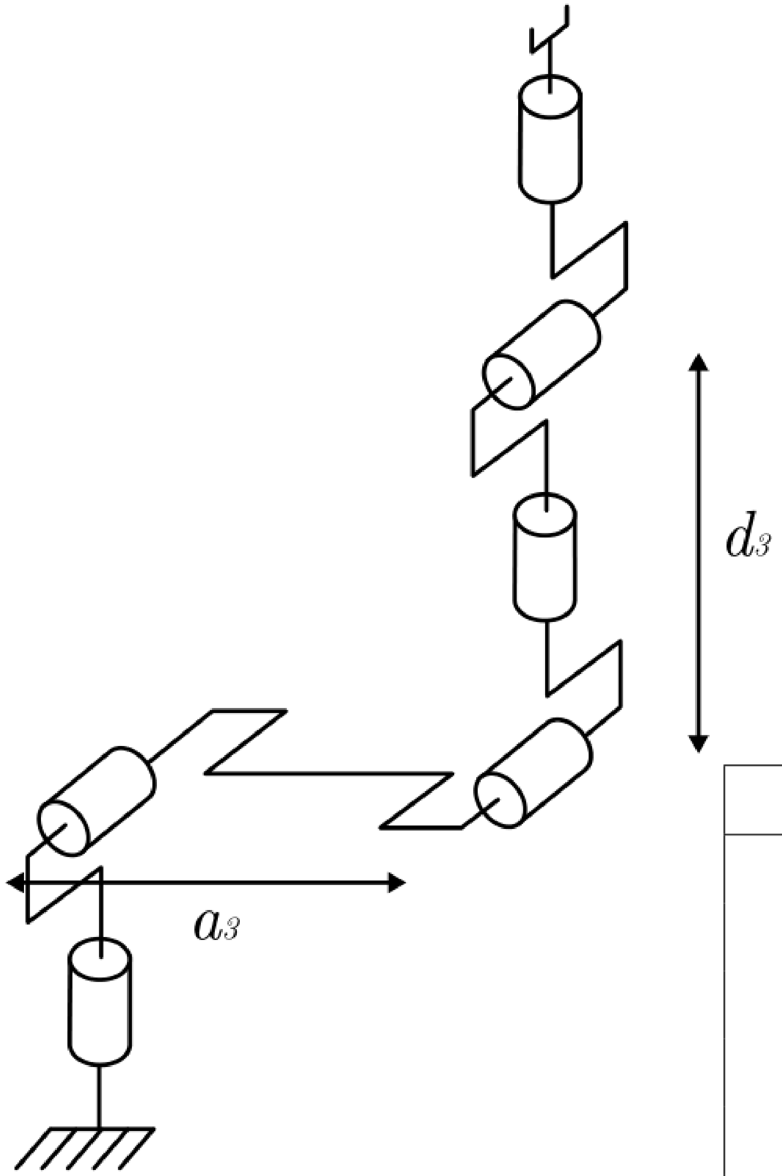


Tableau des paramètres DHKK
Robot Stäubli RX-90

i	σ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i