

MECA953 / MECA995

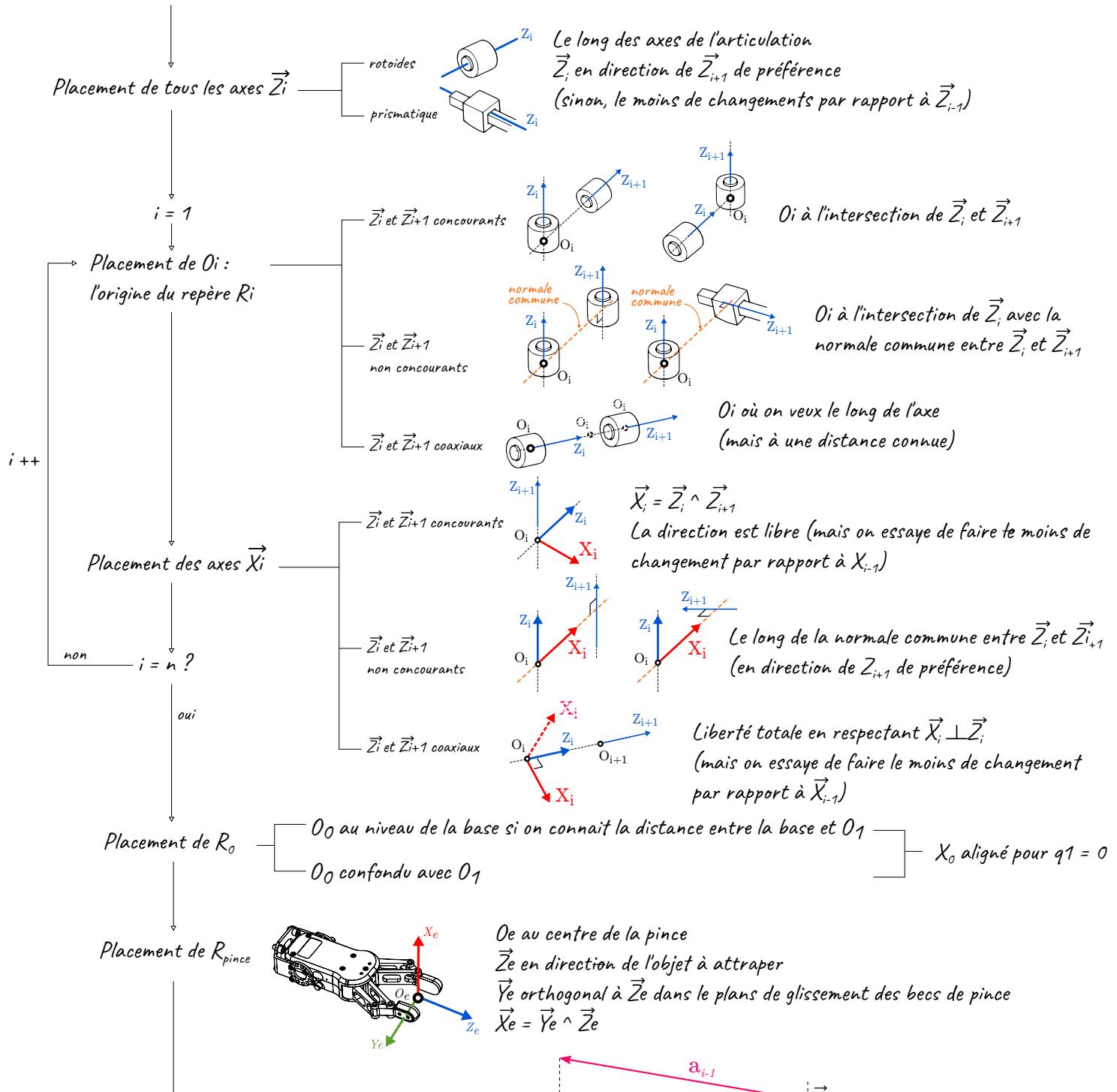
Foundations of Robotics



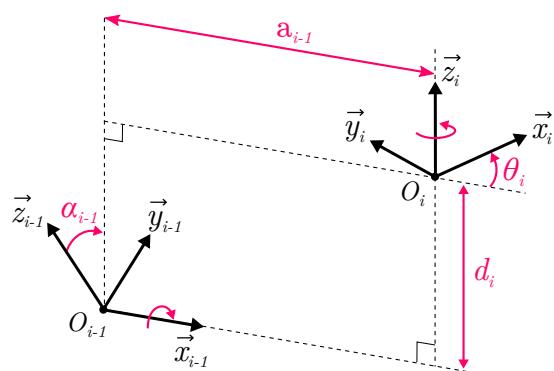
2024

PARAMETRAGE DH-KK

Numérotation des articulations et des segments de 1 à n



Symbol	Name	Description
a_{i-1}	Link Length	$Z_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } X_{i-1}]{} Z_i$
α_{i-1}	Twist Angle	$Z_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } X_{i-1}]{} Z_i$
d_i	Joint Offset	$X_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } Z_i]{} X_i$
θ_i	Joint Angle	$X_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } Z_i]{} X_i$



	segment i	σ_i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
0T_1	1					
1T_2	2					
\dots	\dots					
${}^{n-1}T_n$	n					

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Introduction

L'objectif de ce cours est de fournir des connaissances de base en géométrie et les outils mathématiques utilisés en robotique pour le repérage et les transformations homogènes. Il abordera également les différentes modélisations nécessaires pour comprendre le fonctionnement d'un robot industriel, son comportement, la description du mouvement de l'effecteur dans l'espace et les connaissances minimales pour la conception et le dimensionnement des actionneurs qui constituent le robot.

Pré-requis

Il est fortement conseillé de se mettre à niveau sur les notions suivantes :

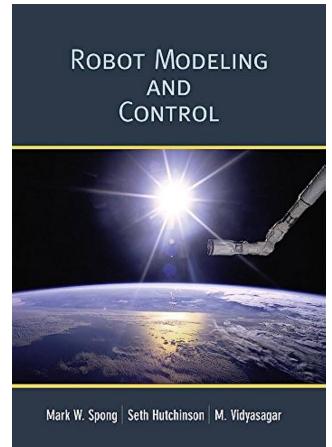
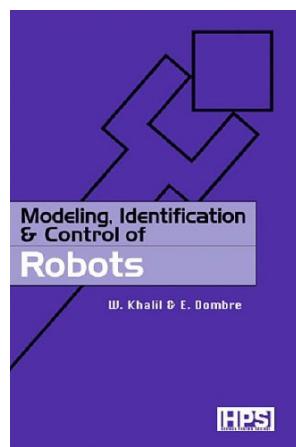
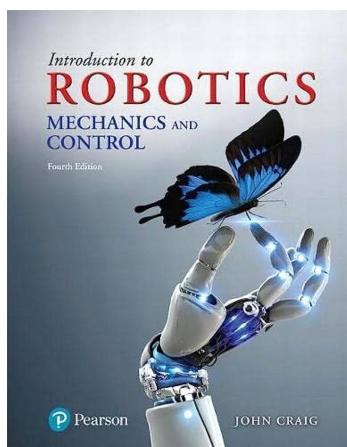
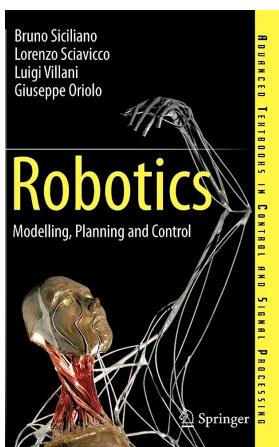
- Projection de vecteur sur un système d'axes
- Calcul de déterminant et rang de matrice, calcul de produit de matrices
- Calcul de dérivées partielle de fonctions multivariables
- Schématisation cinématique
- Torseurs cinématique

Ces notions ont été abordées dans les modules suivants :

MATHS500, MATHS501, MECA654, MECA655

Références

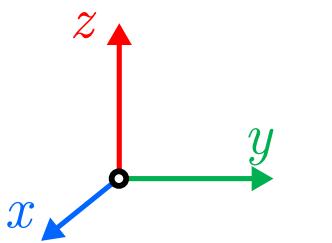
- [1] Khalil W, Dombre E. *Modeling, identification and control of robots*. Kogan Page Science 2004.
- [2] Lallemand J-P, Zeghloul S. *Robotique : aspects fondamentaux : modélisation mécanique, CAO robotique, commande*. masson ed. 1994.



Rappel Mathématiques

1 Conventions

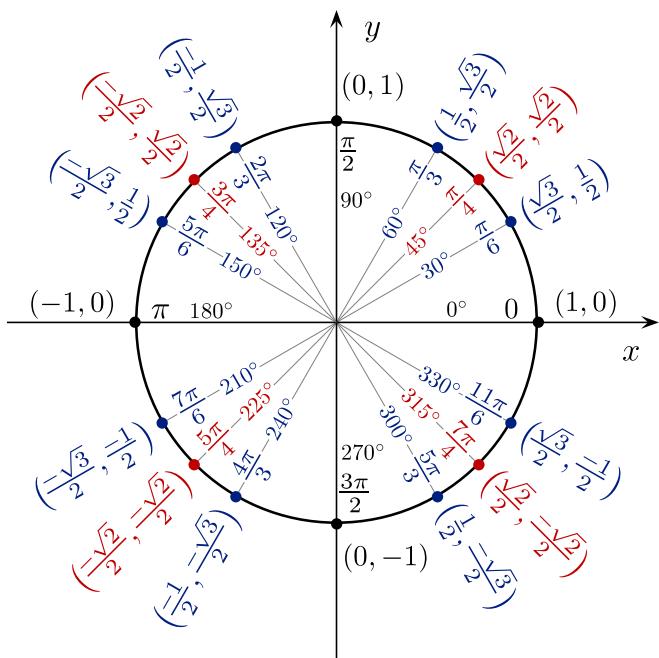
(\mathcal{R}_i)	Repère numéro i
P	Point
${}^i P$	Cordonnées de P dans le repère i
\vec{v} ou v	Vecteur
${}^i v$	Cordonnées de \vec{v} dans le repère i
\vec{OP} ou OP	Vecteur
${}^i(OP)$	Cordonnées de \vec{OP} dans le repère i
$\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$	Produit vectoriel
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	Produit scalaire
${}^0 R_{01}$	Rotation du repère 0 vers le repère 1 exprimé dans 0
${}^0 T_1$	Matrice homogène du repère 0 vers le repère 1 exprimée dans 0
c_α	$\cos(\alpha)$
s_α	$\sin(\alpha)$



On utilisera les couleurs suivantes pour les axes

2 Outils mathématiques

2.1 Trigonométrie

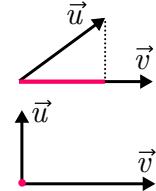


2.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre réel**. Il est obtenu par la projection d'un vecteur sur l'autre. Il permet de modéliser le travail de la force \vec{u} suivant le déplacement \vec{v} .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

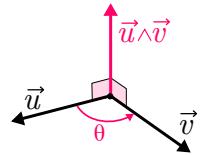
en particulier si $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



2.3 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un **vecteur perpendiculaire** aux deux autres.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$



La direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donne au triplet $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ une orientation directe (donnée par la règle des trois doigts de la main droite (Figure.1)).

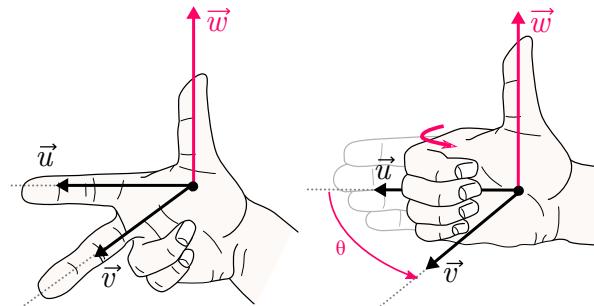
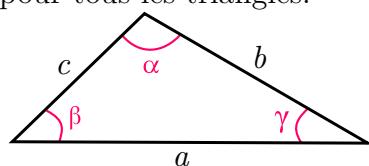


FIGURE 1 – Règle de la main droite

2.4 Formules d'Al Kashî ou Loi des cosinus

La formule d'Al-Kashi, ou loi des cosinus est une généralisation de la relation de Pythagore aux triangles quelconques. Elle est donc valable pour tous les triangles.

-
-
-



2.5 Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

2.6 Fonction ATAN2

La fonction $\text{atan}(\theta)$, où $\theta = y/x$, renvoie un angle dans la plage de $(-\pi/2, \pi/2)$. Elle ne fait pas la différence entre des directions diamétralement opposées.

La fonction atan2 à deux arguments est définie pour tout $(x,y) \neq 0$ et donne un unique angle θ sur $]-\pi, \pi]$ tel que :

$$\text{atan2}(y, x) = 2\text{atan}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$$

$$\text{avec } \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La fonction utilise le signe de x et y pour choisir le quadrant approprié pour l'angle θ

Première partie

INTRODUCTION TO ROBOTICS

1 Histoire de la robotique

Age d'or des automates

Premier robots «sensoriels »

Mot « robot », du tchèque robota (« travail, besogne, corvée »)

Apparition du terme « robotique », Isaac Asimov « I, robot »

Premier robot industriel, Unimation (Unimate, General Motors)

Premiers rover lunaires (NASA)

1ère chaîne de production robotisée (Nissan)

Développement des humanoïdes



2 Définitions

- : Dispositif **versatile et flexible** offrant des fonctions de déplacement similaires à celles des membres humains ou dont les fonctions de déplacement **sont commandées par ses capteurs** et ses moyens de reconnaissance. (*JIRA (Japan Industrial Robot Association)*, 1980)
- : Manipulateur automatique, asservi en position, reprogrammable, polyvalent, capable de positionner et d'orienter des matériaux, pièces, outils ou dispositifs spécialisés au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution de tâches variées. (*AFNOR - NF EN ISO 8373*)
- : Dispositif se comportant de manière automatique (c.a.d sans l'intervention d'un humain). Ils obéissent à un programme préétabli.

3 Caractéristiques

Un robot possède des capacités de perception, d'action, de décision et de communication, parfois il est capable d'améliorer ses performances par un apprentissage automatique ou supervisé par des humains, pour :

- **agir dans un environnement** ouvert ou confiné, dynamique, peu structuré ou inconnu, à des échelles allant du nano-monde au macro-monde,
- **exécuter de façon autonome ou en relation avec des humains**, des tâches d'observation, d'exploration, de modélisation ou d'intervention sur l'environnement
- **interagir avec d'autres machines ou avec des humains**, matériellement ou virtuellement (Human-centered robotics)

En rapport avec la définition d'un robot industriel par l'AFNOR, il y a 3 caractéristiques majeures :

- : exécution totalement automatisée de la tâche, indépendamment d'une connaissance « complète et à l'avance » de l'environnement dans lequel la tâche est réalisée. Elle suppose donc que la machine puisse appréhender seule la situation de l'environnement.
- : concerne la possibilité, pour une même machine, d'exécuter des tâches différentes et/ou d'exécuter une même tâche de plusieurs manières.
- : Les déplacements ou fonctions de la machine peuvent être changées sans altérations physiques.

4 Pourquoi robotiser ?

- **Réduction des coûts de production** : un robot est capable de travailler en 3x8 de façon constante, et peut réaliser les tâches de plusieurs opérateurs.
- **Flexibilité de la gestion de production** : un robot s'adapte à différentes tâches et peut donc aisément être affecté à des opérations multiples, selon les impératifs de l'entreprise.
- **Diminution des stocks et encours** : la configuration du robot en cellule de production permet de regrouper plusieurs opérations. On peut ainsi, en sortie de machine, ajouter des opérations complémentaires d'ébavurage, de palettisation et de contrôle, ce qui peut éviter des stocks intermédiaires.
- **Amélioration de la qualité** : les robots industriels ont la capacité de reproduire une même tâche répétitive sans dégradation des performances.

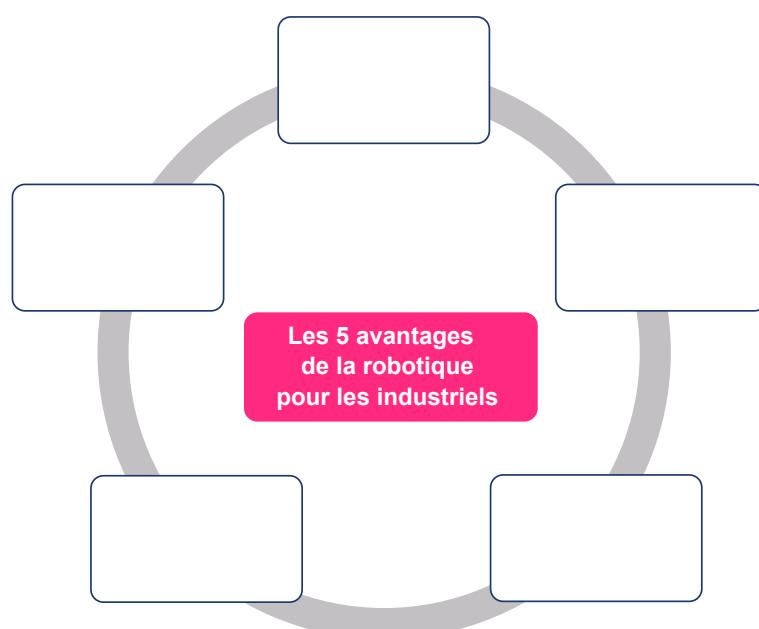


FIGURE 2 – source : étude "La robotique en France", Xerfi

5 Choix d'un robot

5.1 Coût d'un robot industriel

Type de robot	Entrée de gamme	Haut de gamme
Cartésien 3-4 axes	de 40 à 65 K€	de 75 à 90 K€
SCARA 4 axes	de 15 à 25 K€	de 35 à 60 K€
Articulé 6 axes	de 60 à 90 K€	de 120 à 140 K€
Articulé 6 axes collaboratif	de 25 à 30 K€	de 40 à 70 K€
Parallèle 6 axes	de 20 à 30 K€	de 45 à 75 K€

5.2 Justification économique de l'investissement en robotique

L'achat de robots ou le changement d'une ligne de production, représentent un coût important pour les industriels. L'investissement sera-t-il suffisamment rentabilisé ?

a. Retour sur investissement [ROI]



b. Délai de récupération [Payback Period]



- **n** : délai de récupération c.a.d. le nombre d'année nécessaire pour rembourser l'investissement.
- **coût d'investissement net** = coût d'investissement total du robot - crédit d'impôt
- **cash flow annuel net** = revenus annuels prévus avec l'installation du robot, y compris avec les économies de main-d'oeuvre directe et coût matériel - coûts d'exploitation annuels, y compris les coûts de main-d'oeuvre, de matériel et de maintenance du système robotique.

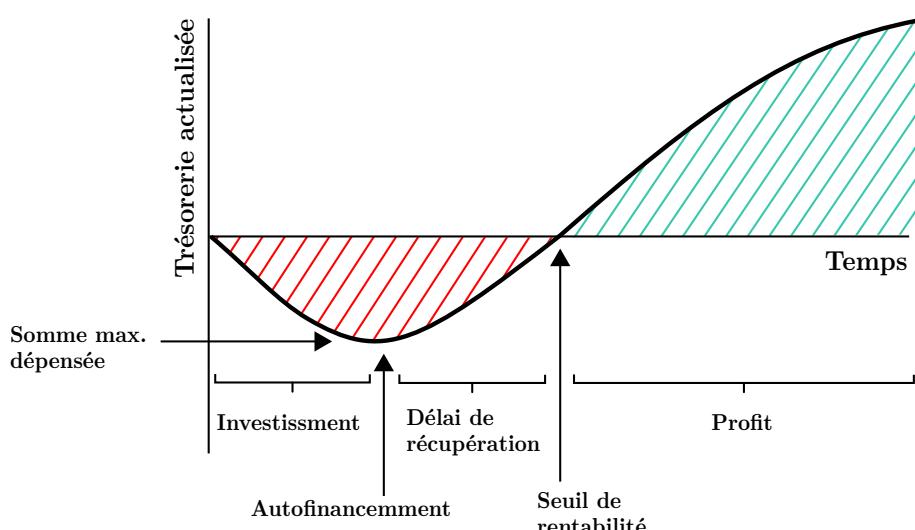


FIGURE 3 – Délai de récupération

5.3 La robotique industrielle en quelques chiffres

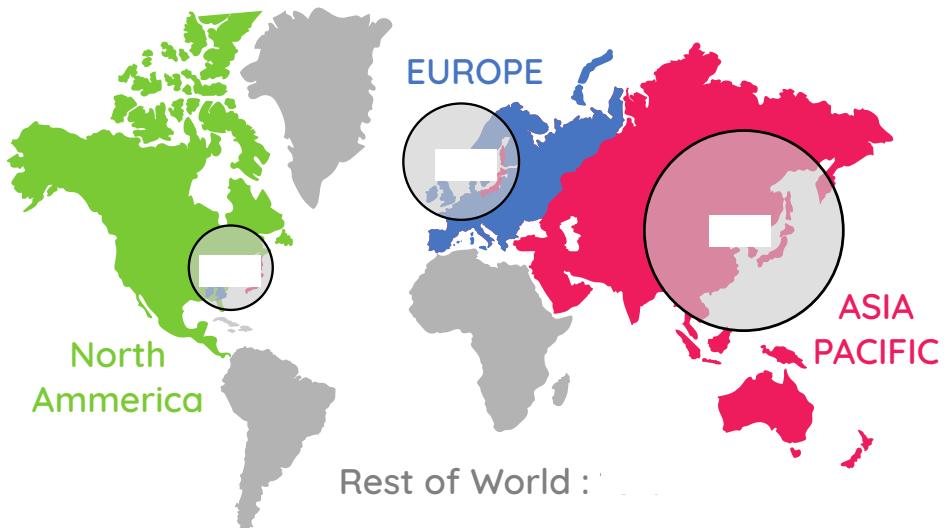


FIGURE 4 – Industrial Robotics Market Share in 2019

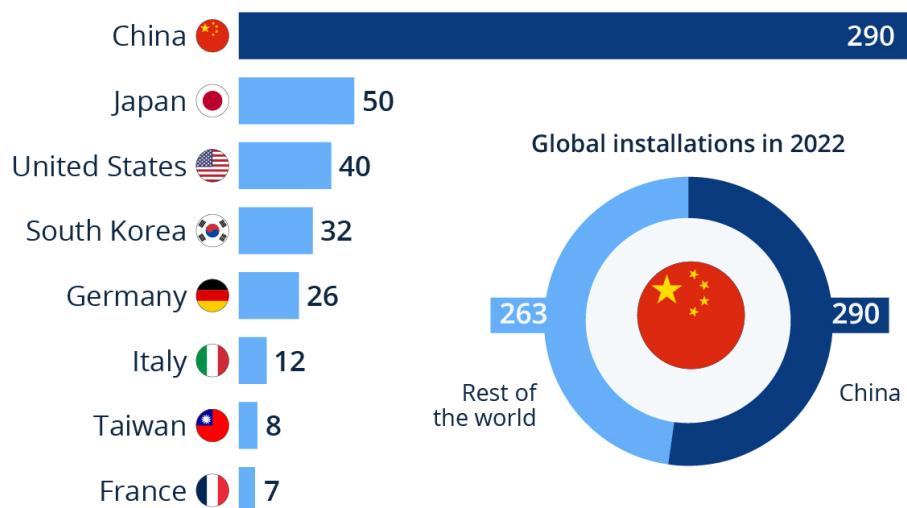


FIGURE 5 – New installation of Industrial robots in 2022 (in thousands) [source : IFR]

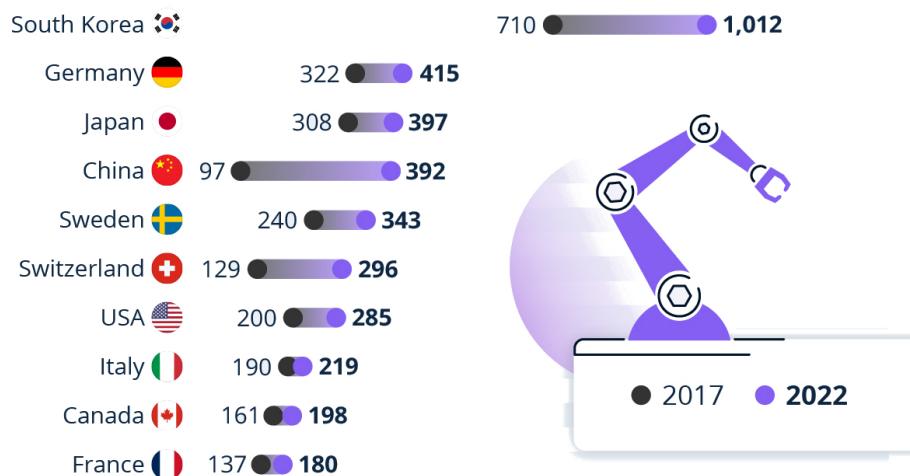


FIGURE 6 – Number of installed robots per 10,000 employees in the manufacturing industry [IFR]

Les métiers les plus menacés par l'automatisation

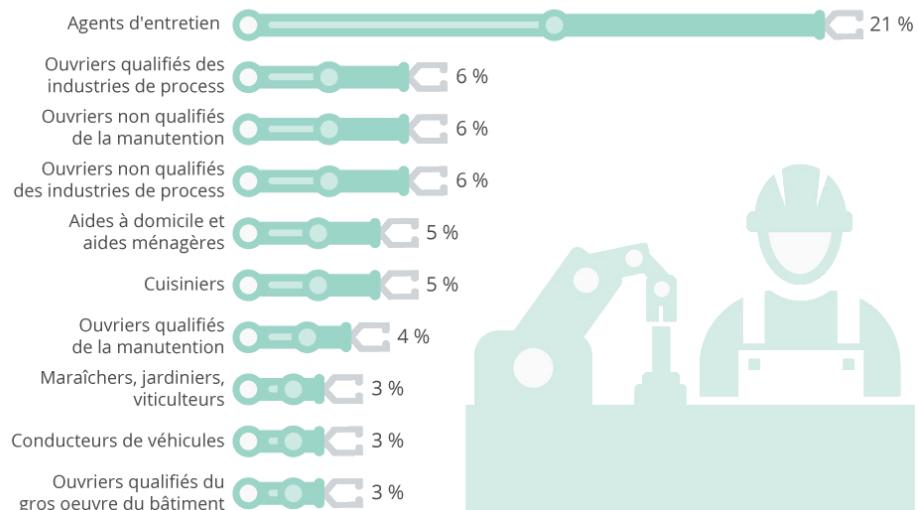


FIGURE 7 – [source : COE, Les Echos]

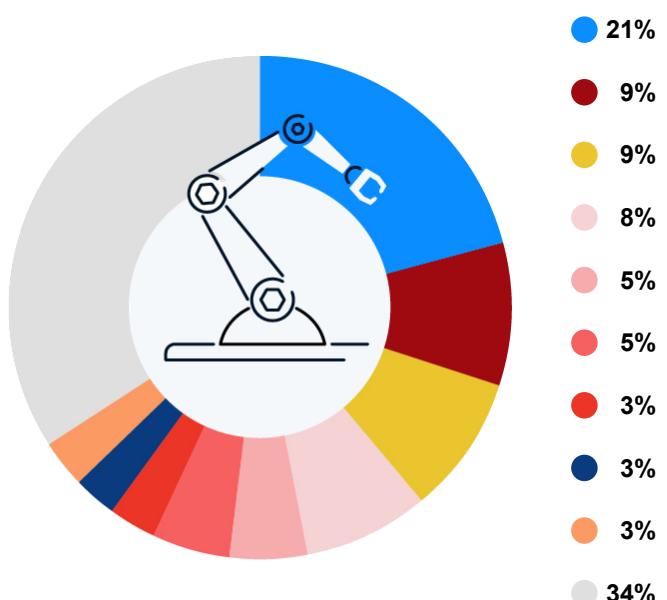


FIGURE 8 – Global market share of industrial robotics companies in 2022 by value [source : Statista]

5.4 Les domaines d'application des robots

- **Le soudage à l'arc** : une des applications robotisées les plus répandues. Le gain de productivité est de deux à cinq fois plus que pour les opérations de soudage manuel.
- **Les opérations de manutention** : pour manipuler et déplacer une ou plusieurs pièces (ou produits) d'un endroit à un autre.
- **Le packaging**
- **Les opérations d'assemblage** : réalisés la plupart du temps par des robots disposant de 6 degrés de liberté afin de reproduire les actions d'un bras humain.
- **Les applications de peinture et de pulvérisation** avec robot se développent compte tenu des contraintes de plus en plus importantes imposées pour la protection de l'environnement.
- **La découpe et la finition**. La précision des trajectoires d'un robot permet ces opérations souvent complexes et dangereuses à effectuer manuellement.

5.5 Les métiers dans la robotique

L'intégrateur robotique procède à l'étude, l'intégration et la mise au point de solutions robotisées pour l'élaboration de process existants ou en développement. (~ 450 PME ou TPE en France). L'intégrateur réalise 3 tâches principales :

- La réalisation via un logiciel, de l'étude d'intégration
- L'implantation des éléments péri robotiques
- Le paramétrage et la programmation du robot pour qu'il réalise les tâches décrites

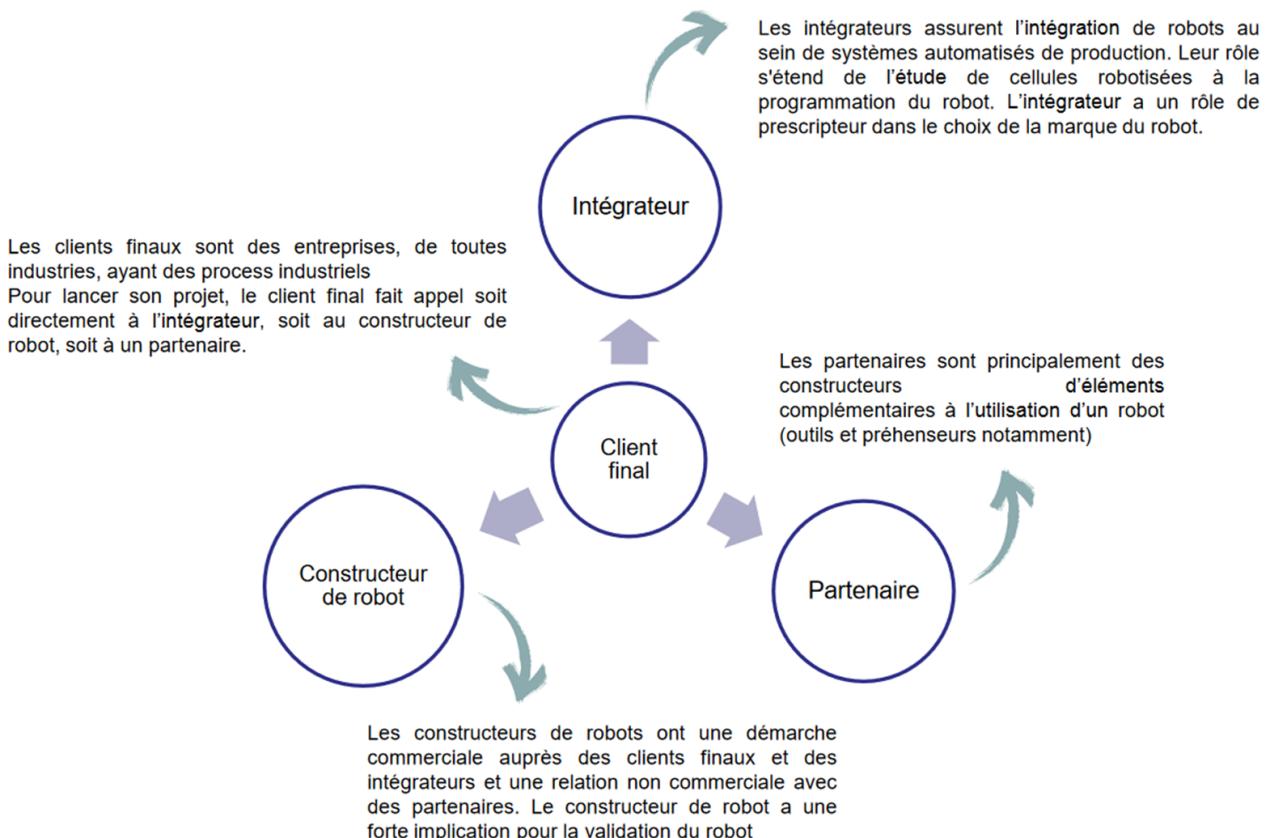


FIGURE 9 – [source Stäubli]

Deuxième partie

ROBOTIC ARMS : CHARACTERISTICS AND ARCHITECTURES

1 Composition d'un robot



FIGURE 10 – Composition d'un bras robot (source Stäubli)

- **Bras robot** [robot arm]
- **Contrôleur** (ou baie de robot) [controller] : cerveau du robot. Il intègre un calculateur et une "partie puissance" pour alimenter les moteur du bras.
- Le pupitre de programmation [**teach pendant**] : utilisé pour contrôler manuellement le robot ou entrer des commandes.
- **La programmation hors ligne** [Off-line programming] : utilisée pour valider l'implantation et réaliser des simulations.
- **Préhenseur** [Gripper] : prolongement du robot pour réaliser la tâche.

2 Critères de choix d'un robot

- Environnement/domaine d'application
- Nombre d'axes.
- Charge/inertie.
- Cadence
- Rayon d'action utile

3 Caractéristiques

Le critère de choix principal pour un robot industriel est le **domaine d'application**. En fonction de la tâche finale du robot, on choisira l'architecture adéquate : articulé, cartésien, SCARA ou parallèle.

3.1 Quelques définitions

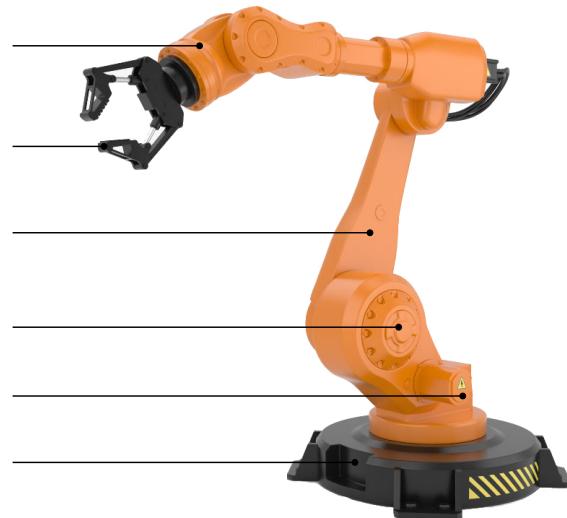


FIGURE 11 – Vocabulaire d'un bras robotique

Résolution (resolution) : Plus petit incrément de mouvement que le contrôleur peut mesurer.

n : nombre de bits de précision de l'encodeur

Justesse (accuracy) :

Répétabilité (repeatability) :

Espace des Tâches X :

Espace Articulaire Q :

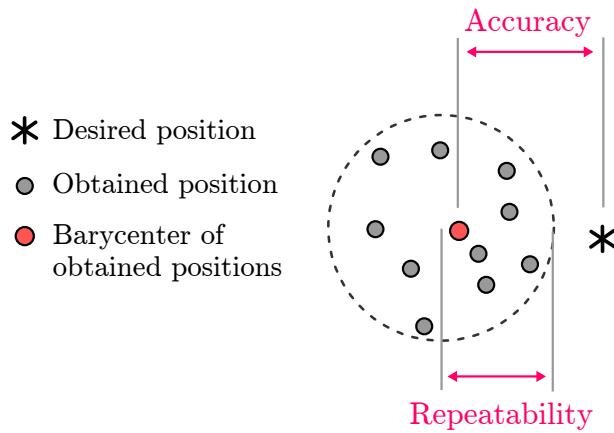


FIGURE 12 – Illustration en 2D de la signification géométrique de précision et de répétabilité

Workspace (*volume de travail*) :

L'espace de travail peut être divisé en 2 sous-ensembles : **l'espace de travail maximal (reachable workspace)** (limite extérieure de l'espace de travail, que l'organe terminal peut atteindre avec une configuration possible a minima) et **l'espace de travail dexter (dextrous workspace)** (volume de l'espace que le robot peut atteindre avec toutes les orientations possibles du manipulateur c.a.d les points où le robot peut saisir un objet immobile et toujours déplacer ses articulations).

Charge utile (payload) : charge maximale que peut porter le robot sans dégrader la répétabilité et les performances dynamiques. La charge utile est nettement inférieure à la charge maximale que peut porter le robot qui est directement dépendante des actionneurs.

Charge nominale (rated load) : masse maximale qui peut être transporté par l'interface mécanique sans dégradation daucune des performances annoncées.

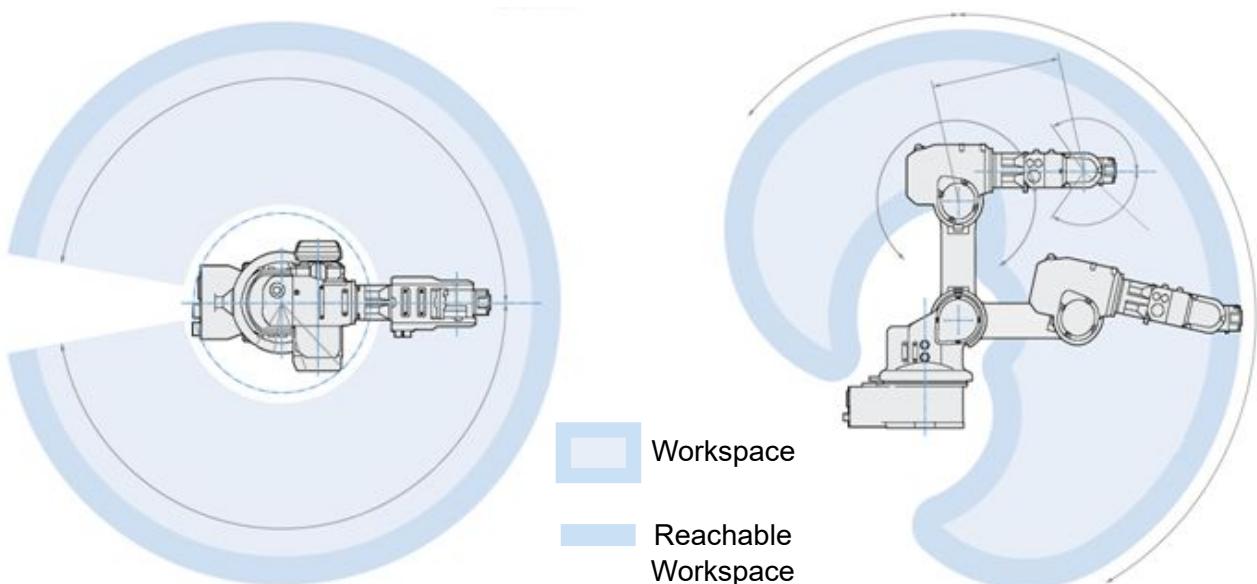


FIGURE 13 – Robot Workspace [T. Badj et al. Robotics, Springer, 2010]

3.2 Degrés de Liberté d'un robot (DOF : Degrees of Freedom)

Le DDL d'un robot est le nombre de paramètres indépendants qui permettent de définir la pose de l'organe terminal (position et orientation).

Rem : aucun des mouvements de l'effecteur n'est pris en compte dans les degrés de liberté du robot.

- Pour les robots séries à structure ouverte il est égal au nombre d'articulations.
 - Pour tous les cas, il se calcule avec la formule de Chebychev-Grübler-Kutzbach :
- | | |
|-------------------|--|
| (mouvement plan) | – L : nombre de segments
(incluant la base) |
| (mouvement en 3D) | – J_i : nombre d'articulations à i DOF |

Redondance Un robot est redondant lorsque le nombre de degrés de liberté est inférieur au nombre d'articulations indépendantes (motorisées). (i.e. la dimension de l'espace opérationnel est inférieure à la dimension de l'espace articulaire). C'est le cas notamment si sa structure présente une des propriétés suivantes :

- Plus de 6 articulations,
- Plus de trois articulations pivots d'axes concourants
- Plus de trois articulations pivots d'axes parallèles
- Plus de trois articulations prismaïques
- Deux axes d'articulations prismaïques parallèles,
- Deux axes d'articulations pivots confondus.

espace articulaire (dim Q = 4)

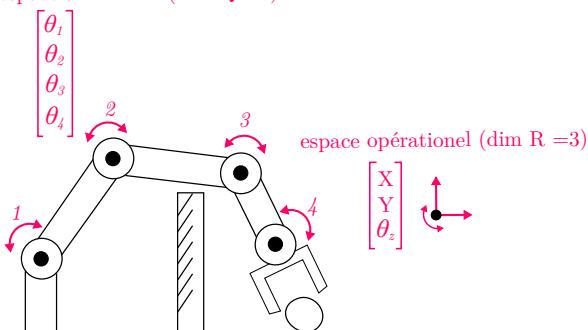


FIGURE 14 – Exemple de manipulateur plan redondant. On voit l'utilité de la redondance dans certains cas comme ici pour contourner un obstacle.

Dans certains cas, où l'environnement est envahi d'obstacles, une redondance peut être intéressante car elle offre plusieurs choix de configurations possibles pour atteindre l'objectif.

3.3 Modes de déplacement des bras robots

Les robots peuvent être déplacés par rapport à différents systèmes de coordonnées. Dans chaque type de système, les mouvements seront différents. On a généralement trois systèmes de coordonnées suivants :

WORLD : Le repère WORLD est par définition le référentiel robot. Fixe, ce référentiel est prédéfini et ne peut donc être modifié.

JOINT : Il est utilisé pour spécifier les mouvements des différentes articulations du robot. Dans ce cas, on accède à chaque articulation et on la déplace individuellement ; par conséquent, une seule articulation se déplace à la fois.

TOOL : Contrairement au repère universel WORLD, le repère local de l'outil se déplace avec le robot. L'origine de ce repère est le TCP, c'est à dire le Point de Centre Outil.

USER : C'est un repère pouvant être défini à n'importe quel endroit.

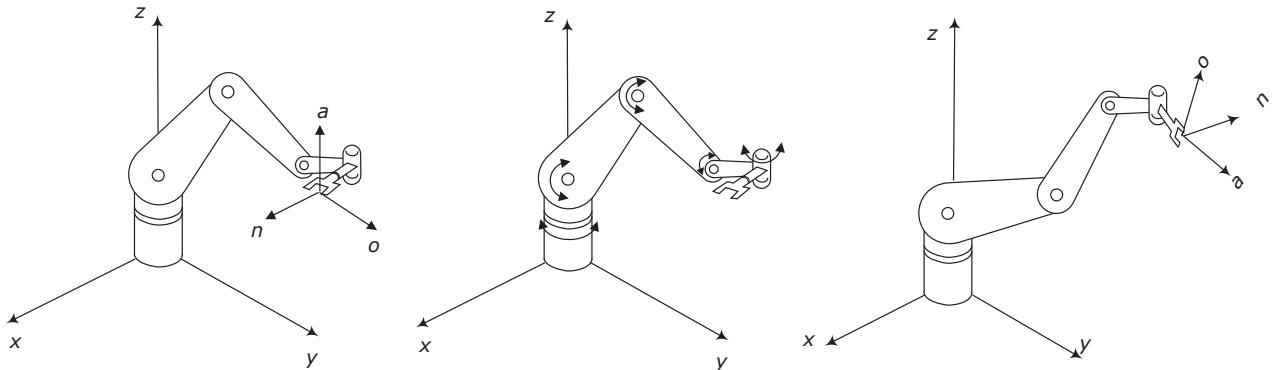


FIGURE 15 – Systèmes de coordonnées WORLD, JOINT, TOOL

4 Langages de programmation des bras robotiques industriels

Presque tous les fabricants de robots ont développé leur propre langage de programmation (cf. Fig 16).

Depuis 2007, le **middleware ROS** permet la standardisation des communications, l'interconnexion de plusieurs applications ou matériels qui n'ont pas forcément été conçus pour communiquer entre eux (ils peuvent même ne pas être sur le même réseau, utiliser des protocoles ou OS différents...).



FIGURE 16 – Langages de programmation des bras robotiques

5 Architecture des robots manipulateurs.

5.1 Structures mécaniques articulées

La chaîne cinématique structure le système mécanique articulé et correspond aux divers corps et liaisons (ou articulations) entre les corps. Les liaisons sont passives ou actives (motorisées). La chaîne peut être simple ou parallèle, ouverte (robot série), hybride ou fermée. On peut représenter la structure sous forme de différents graphes :

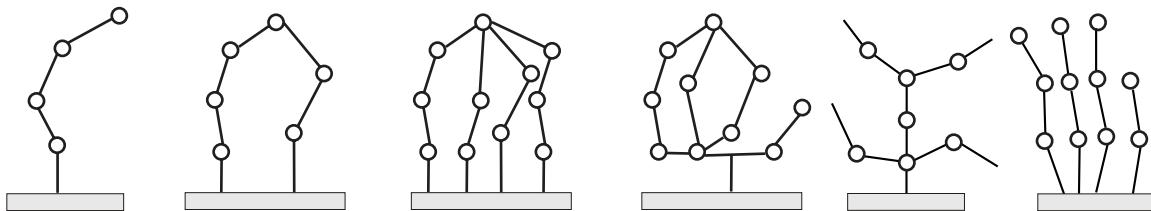


FIGURE 17 – Architecture des structures

	Architecture série	Architecture parallèle
	Chaîne cinématique ouverte. Architecture constituée d'une alternance de corps et de liaisons.	Chaîne cinématique fermée. L'organe est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes.
+		
-		

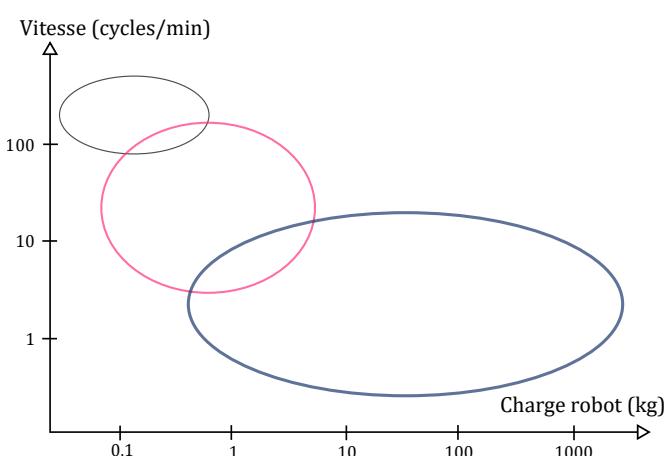


FIGURE 18 – Domaines d'applications des différentes architectures robotiques

5.2 Porteurs à chaîne cinématique ouverte (Robots série)

Les robots série possèdent généralement une architecture composée d'articulations simples de type liaisons pivots/**rotoïde** : **R** et liaisons glissières/**prismatique** : **P**. (Fig.19)

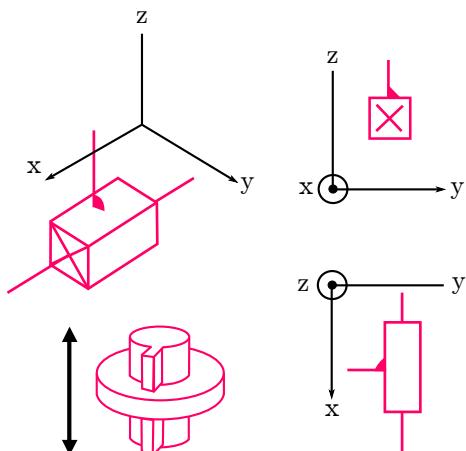
Les trois premières articulations d'un robot sont généralement conçues pour effectuer les mouvements grossiers, et les articulations restantes servent à effectuer l'orientation.

Les 3 premiers ddl du robot constituent la structure du **porteur**.

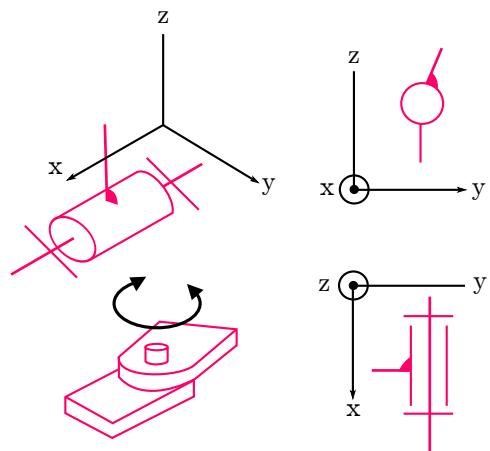
Les ddl restants forment le **poignet**.

Les robots industriels peuvent généralement être classifiés en fonction de leur structure mécanique et du type des axes comme suit :

- structure cartésienne (ou robot portique) = (21% du parc des robots industriel)
- structure cylindrique = (7%),
- structure SCARA (bi-cylindrique) = (2%),
- structure sphérique = (13%),
- structure anthropomorphique = (67%).



Prismatique P



Rotoïde R

FIGURE 19 – Articulation prismatique **P** : 1 ddl en translation T_x . Articulation rotoïde **R** : 1 ddl en rotation R_x .

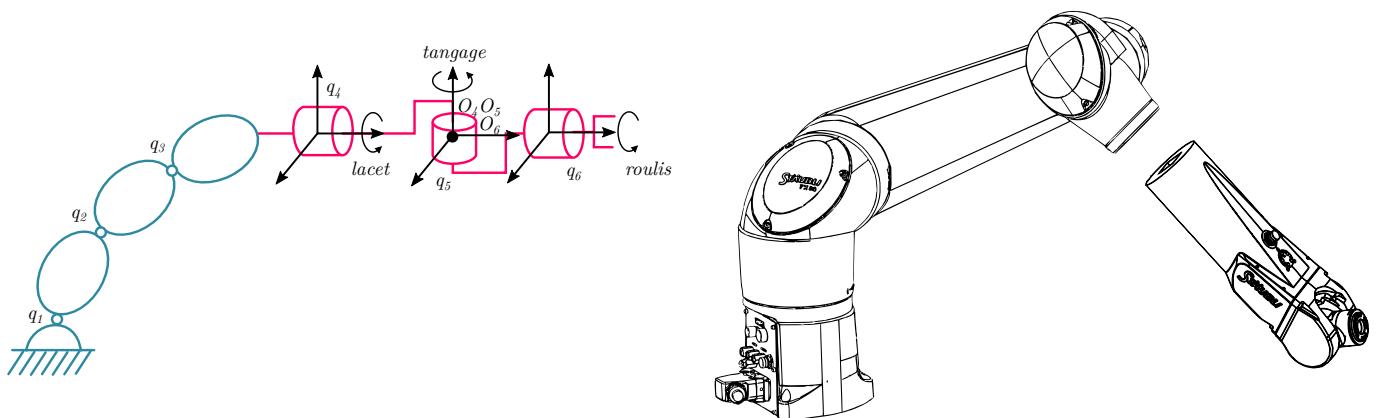


FIGURE 20 – Architecture classique d'un robot manipulateur à 6 DLL. (source : adaptée de [1])

La figure.21 liste les schémas des 12 morphologies non redondantes possibles de porteur. La figure.22 liste des morphologies possibles de poignets. Dans la pratique, le poignet de type rotule est très répandu.

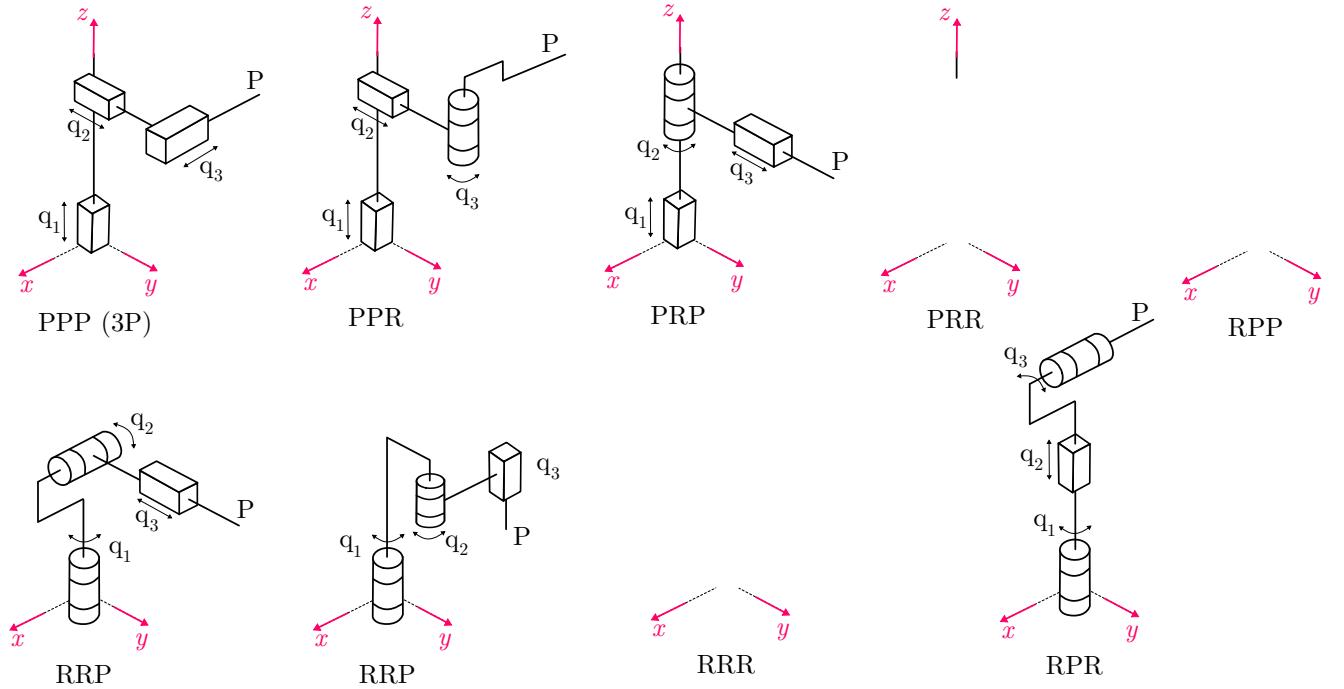


FIGURE 21 – Architecture des porteurs.

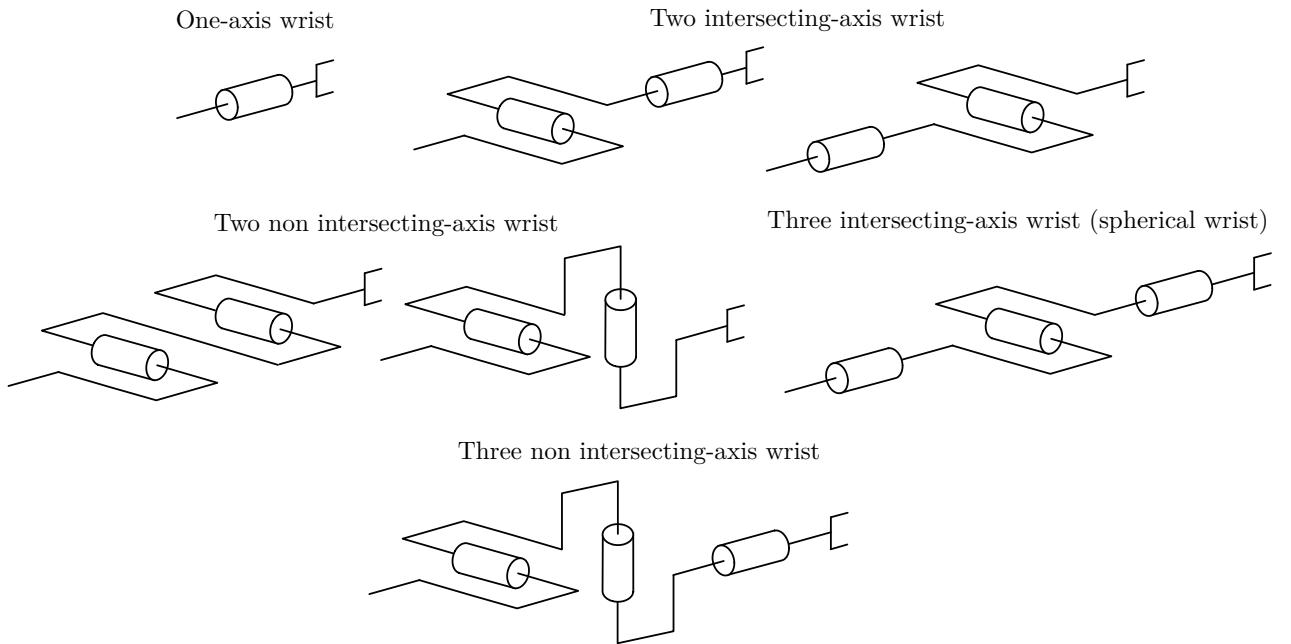
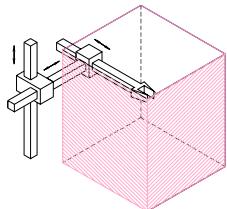
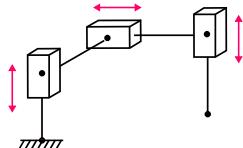
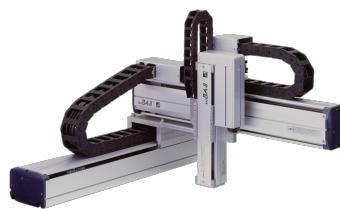
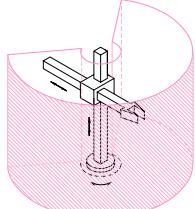
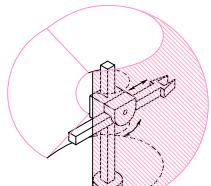
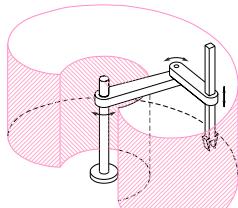
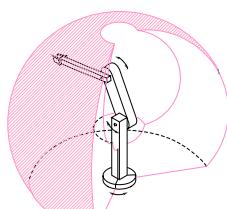


FIGURE 22 – Architectures of the wrist (source [?]).

Principe	Workspace	Chaîne cinématique	Exemple
PPP			
Cartésien			
RPP ou PRP			
Cylindrique			
RPP ou PRP			
Sphérique			
RRP			
SCARA *			
RRR			
Anthropomorphe			

5.3 Les préhenseurs

a. Pinces

L'intérêt du pneumatique réside dans sa rapidité.

Les préhenseurs pneumatiques sont généralement quasiment 2 fois moins chers qu'en électrique. Mais c'est du tout ou rien (fonctionnement en mode ouvert/fermé).

Bien que de nombreuses forces agissent sur le corps soulevé par un bras robotique, la principale force est la force de friction F .

- F , la force nécessaire pour saisir l'objet
- m , la masse de l'objet
- a , l'accélération de l'objet
- μ , le coefficient de frottement
- n , le nombre de doigts de la pince



FIGURE 23 – Pinces électrique (gauche) et pneumatique (droite)

b. Ventouses

Très courant dans les applications de pick and place (packaging, manutention).

Fonctionne en utilisant un vide industriel (effet venturi).

Inconvénients envisageables : éventuelles traces laissées sur les produits après la pose. Les surfaces perforées ou sales sont à éviter.

- f force de levage
- p pression négative
- A surface effective totale des ventouses



FIGURE 24 – Ventouses UR

c. Choix du préhenseur

Le choix du préhenseur s'effectue à partir de critères liés aux procédés, aux pièces à manipuler et aux objectifs économiques.

Les critères liés aux procédés :

- Quelle est la tâche à réaliser (palettisation, picking, maintien ...) ?
- Quel est le type de support pour la prise et la dépose (stable, mobile) ?
- Quel est le temps de cycle désiré (temps d'ouverture, de fermeture, accélération) ?
- Quelle est la précision de positionnement désirée ?
- Quel est l'environnement dans lequel l'installation se trouve (corrosif, toxique, humide, poussiéreux, salle blanche) ?

Les critères liés à l'objet à manipuler :

- La taille de la pièce permet de dimensionner la taille des pinces, la zone à libérer autour de la pièce, le couple sur le préhenseur et le robot
- La forme de la pièce ajoute des contraintes sur la prise et l'adaptabilité du préhenseur (présence de courbes, angles, surfaces planes, position du centre de gravité)
- Le poids de la pièce et du préhenseur doit être intégré à la charge totale du le-

vage. La force de serrage doit maintenir la pièce lors des accélérations et arrêts d'urgence

- L'état de surface de la pièce peut éliminer rapidement certaines techniques de préhension (salissure, fragilité, pièces esthétiques)

Les critères au niveau de la cellule :

- Le temps de cycle
- Le taux de service
- La productivité moyenne de la cellule robotisée
- Le nombre de pièces géométriques différentes en production
- Le nombre de pièces géométriques à manipuler dans un cycle
- Le nombre de pièces ou de produits introduits à l'année
- Le nombre de cellules robotisées identiques

Les critères au niveau du préhenseur :

- Le type de préhenseur possible (vide, pneumatique, électrique, magnétique)
- La flexibilité requise nécessitant un changeur d'outils ou un préhenseur adaptatif.
- La possibilité d'un préhenseur existant (sur étagère ou à adapter)
- La nécessité de concevoir un nouveau préhenseur (temps de conception et de mise au point)
- La séquence de manipulation des différentes pièces dans le cycle
- Le mode opératoire pour changer de pièce ou de produit

Troisième partie

SPATIAL DESCRIPTION AND TRANSFORMATIONS

Objectifs :

- Comprendre le changement de base
- Établir une matrice de passage
- Calculer les coordonnées d'un objet dans différents repères
- Connaître les différentes conventions de rotations
- Déterminer les angles de rotation d'un objet pour 2 orientations différentes

Pré-requis :

- Savoir projeter un vecteur sur un système d'axes
- Connaître ce qu'est le déterminant d'une matrice
- Savoir faire un produit de matrices

Modules recommandés :

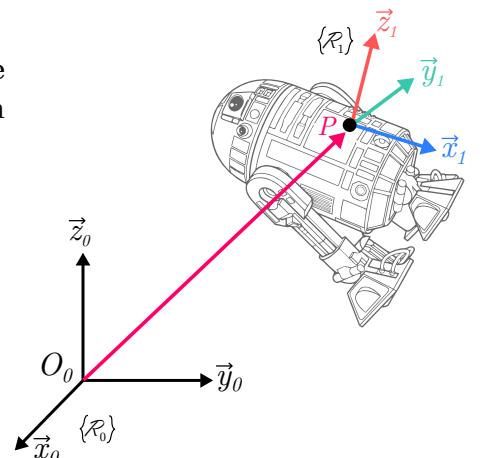
- MATHS500

1 Repérage d'un solide dans par rapport à un repère

Un solide est complètement décrit dans l'espace par sa **pose** c.a.d. sa **position** ET son **orientation**, par rapport à un référentiel (*repère*).

$$\{\mathcal{R}_0\} = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) : \text{repère fixe}$$

$$\{\mathcal{R}_1\} = (P, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) : \text{repère (1) associé au solide.}$$



1.1 Position

La position est définie par les coordonnées du point P dans le repère (0) :

$$\overrightarrow{O_0P} = P_x \cdot \vec{x}_0 + P_y \cdot \vec{y}_0 + P_z \cdot \vec{z}_0$$

notation – On note le vecteur $\overrightarrow{O_0P}$ sous forme d'une « matrice colonne » :

$${}^0\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad \text{exprimée donc dans le repère (0)}$$

1.2 Orientation (déterminée par une matrice)

Pour définir l'orientation de (1) par rapport à (0), on utilise la **matrice de changement de base**, ou **matrice de passage** de $\{\mathcal{R}_0\}$ à $\{\mathcal{R}_1\}$ notée ${}^0\mathbf{R}_1$:

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{23} \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow {}^1\vec{x}_0 \\ \leftarrow {}^1\vec{y}_0 \\ \leftarrow {}^1\vec{z}_0 \end{array} \quad \text{avec } \begin{cases} \vec{x}_1 = r_{11} \cdot \vec{x}_0 + r_{21} \cdot \vec{y}_0 + r_{31} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 = r_{11} \end{cases}$$

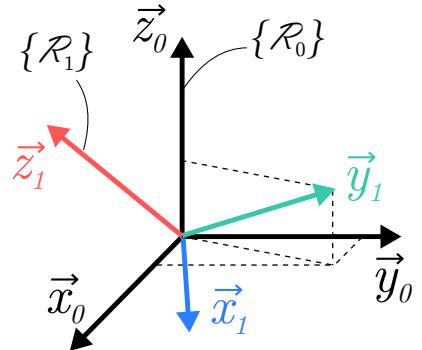
$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 ${}^0\vec{x}_1 \quad {}^0\vec{y}_1 \quad {}^0\vec{z}_1$

Cette matrice matrice de rotation s'appelle aussi **matrice des cosinus directeurs** (les éléments r_{ij}).

Les colonnes sont les coordonnées des vecteurs unitaires $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ exprimés dans la base $\{\mathcal{R}_0\}$.

Remarque : ${}^0({}^0\mathbf{R}_1)$ est exprimée dans (0).

Si ce n'est pas précisé on omettra l'indice de la base pour alléger l'écriture et on notera : ${}^0\mathbf{R}_1$



a. Changement de repère d'un vecteur

La matrice de passage permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur dans le repère $\{\mathcal{R}_0\}$ à partir de ses coordonnées données dans le repère $\{\mathcal{R}_1\}$.

Soit un vecteur \vec{p} avec

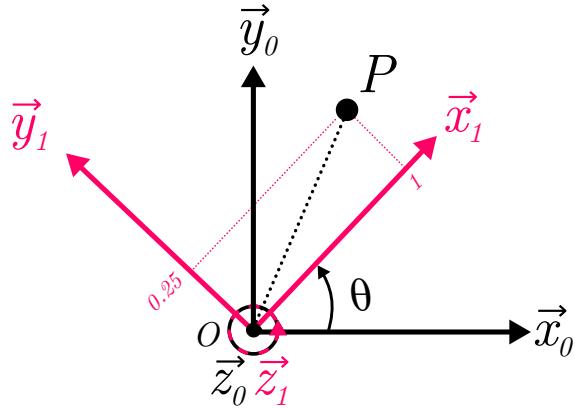
$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{p} &= \begin{pmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{pmatrix} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (0)} \\ {}^1\mathbf{p} &= \begin{pmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{pmatrix} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (1)} \end{aligned}$$

si les origines de $\{\mathcal{R}_0\}$ et $\{\mathcal{R}_1\}$ sont confondues (rotation pure entre les repères) on alors :

et inversement :

Exemple : Coordonnées d'un vecteur dans 2 bases différentes

Soit le point P dont les coordonnées sont connues dans le repère $\{\mathcal{R}_1\}$ par : ${}^1\mathbf{p} = (1, 0.25, 0)^T$. On cherche à déterminer les coordonnées de ce même point dans le repère $\{\mathcal{R}_0\}$ sachant que le repère $\{\mathcal{R}_1\}$ est défini par une rotation de $\{\mathcal{R}_0\}$ autour de z_0 par un angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Les coordonnées des vecteurs de base de $\{\mathcal{R}_1\}$ dans $\{\mathcal{R}_0\}$ sont :

$$\vec{x}_1 = \quad , \quad \vec{y}_1 = \quad , \quad \vec{z}_1 =$$

La matrice de passage de $\{\mathcal{R}_0\}$ à $\{\mathcal{R}_1\}$ s'écrit alors : ${}^0\mathbf{R}_1 =$

Les coordonnées du point P dans $\{\mathcal{R}_0\}$ sont : ${}^0\mathbf{p} =$

b. Ambiguités de la représentation matricielle

L'interprétation d'une matrice de rotation peut donner naissance à plusieurs ambiguïtés. La modification des coordonnées d'un vecteur peut correspondre à une rotation de ce vecteur, ou à une rotation du repère.

$${}^0\mathbf{p} = \begin{pmatrix} {}^{(0)} \\ {}^0 \\ {}^0 \\ {}^0 \end{pmatrix} \left[\begin{array}{l} {}^0 p_x \\ {}^0 p_y \\ {}^0 p_z \end{array} \right] \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (0)}$$

Soit un vecteur \vec{p} avec

$${}^0\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} {}^{(0)} \\ {}^0 \\ {}^0 \\ {}^0 \end{pmatrix} \left[\begin{array}{l} {}^0 p'_x \\ {}^0 p'_y \\ {}^0 p'_z \end{array} \right] \text{ les coordonnées de ce vecteur ayant subit une rotation d'angle } \theta, \text{ ex}$$

alors :

et inversement :

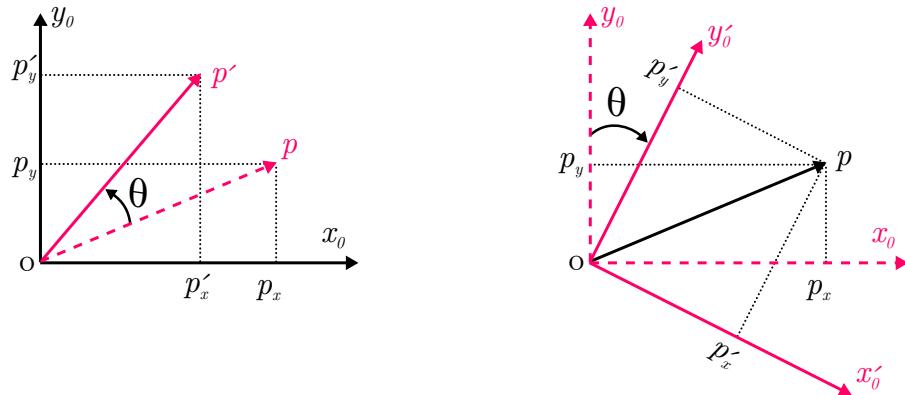


FIGURE 25 – Rotation d'un vecteur en 2D et Changement de base d'un vecteur

Dans l'exemple de la Figure.25 :

Il faut bien noter que dans cette formulation, les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{p}' , ainsi que la matrice de rotation ${}^0\mathbf{R}_1$ doivent être exprimés dans une même base, pour faire le calcul.

Il faut aussi bien comprendre qu'une rotation d'un vecteur selon un angle θ est exactement identique à effectuer une rotation du repère selon un angle $-\theta$. En effet, soit le repère est fixe et le vecteur tourne de θ , soit le vecteur est fixe et le repère de tourne d'un angle de $-\theta$, le résultat de l'un par rapport à l'autre est strictement identique.

c. Propriétés des matrices de changement de base

Propriété 1 : La matrice de rotation est orthogonale.

La transposée de la matrice de rotation est égale à son inverse :

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{12}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1$$

$$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$$

Propriété 2 : Rotation inverse.

Produit scalaire des lignes 2 à 2 et des colonnes = 0. (par exemple : $r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1$)

Les lignes (resp. colonnes) représentent des vecteurs perpendiculaires 2 à 2 (produit scalaire nul) :
 $(\vec{x}_0 \perp \vec{y}_0, \vec{x}_0 \perp \vec{z}_0, \vec{y}_0 \perp \vec{z}_0, \vec{x}_1 \perp \vec{y}_1, \dots)$

Propriété 3 : Matrice identité

(avec I la matrice (3x3) identité)

Propriété 4 : Déterminant

Propriété 5 : La composition des rotations est réalisée par multiplication de matrices de rotations

Propriété 6 : La composition des rotations n'est pas commutative

1.3 Matrices de rotation élémentaires

Les *rotations élémentaires* sont réalisées autour d'un seul axe du repère.

L'angle de la rotation est positif dans le sens trigonométrique 

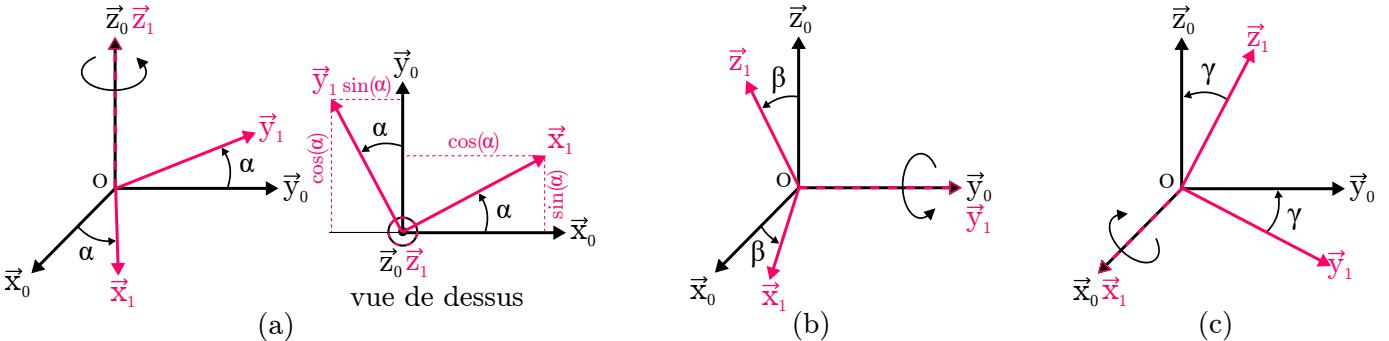


FIGURE 26 – (a) $\mathbf{R}_z(\alpha)$: Rotation autour de l'axe z . (b) $\mathbf{R}_y(\beta)$: Rotation autour de l'axe y . (c) $\mathbf{R}_x(\gamma)$: Rotation autour de l'axe x .

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1.4 Composition de matrices de rotation

Soit 3 repères $\{\mathcal{R}_0\} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\{\mathcal{R}_1\} = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $\{\mathcal{R}_2\} = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ayant la même origine O . Le vecteur \mathbf{p} décrivant la position d'un point dans l'espace peut être exprimée respectivement dans chaque repère par ${}^0\mathbf{p}$, ${}^1\mathbf{p}$, ${}^2\mathbf{p}$.

on a donc :

$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p}$$

et

$${}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}$$

mais aussi :

donc on a :

Remarque : ${}^0\mathbf{R}_1$ et ${}^0\mathbf{R}_2$ représentent des rotations par rapport au repère $\{\mathcal{R}_0\}$ alors que ${}^1\mathbf{R}_2$ représente une rotation par rapport au repère $\{\mathcal{R}_1\}$. On peut interpréter la rotation globale comme une succession de rotation en 2 étapes :

- Une rotation qui emmène $\{\mathcal{R}_0\}$ en $\{\mathcal{R}_1\}$;
- puis une rotation qui emmène $\{\mathcal{R}_1\}$ en $\{\mathcal{R}_2\}$.

Exemple : ordre de multiplication des matrices de rotation

Supposons que la matrice de rotation R représente une rotation d'angle β autour de l'axe y suivit d'une rotation d'angle α autour de l'axe z

Calculez R :

Supposons maintenant que la matrice de rotation R' représente une rotation d'angle α autour de l'axe z suivit d'une rotation d'angle β autour de l'axe y

Calculez R' :

On vérifie bien que $R \neq R'$

a. *Rotation par repère fixe / repère courant*

Deux cas se présentent pour combiner deux rotations :

- soit on effectue la seconde rotation par rapport au repère résultant de la première rotation, appelé **repère courant**. Dans ce cas, la composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations :
- soit on effectue les deux rotations par rapport à un unique repère, le **repère fixe**. Dans ce cas, la composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations :

Remarque : Dans le cas d'une combinaison de rotations par repère fixe, la deuxième rotation est réalisée par rapport au repère fixe. C'est déroutant et inapproprié d'utiliser la notation 1R_2 pour la décrire. Dans ce cas on précise explicitement le repère fixe dans lequel cette rotation est définie.

Exemple : ordre de multiplication des matrices de rotation

Soit (\mathcal{R}') et (\mathcal{R}'') les repères résultant des deux rotations successives du repère fixe (\mathcal{R}) . Dans les deux, le repère (\mathcal{R}') résulte de la rotation ${}^0\mathbf{R}_1$ de (\mathcal{R}) autour d'un axe lié au repère fixe (\mathcal{R}) . Ensuite, les deux cas précédents donnent :

- repère courant : (\mathcal{R}'') résulte de la rotation de (\mathcal{R}') autour d'un axe lié à (\mathcal{R}') ;
- repère fixe : (\mathcal{R}'') résulte de la rotation de (\mathcal{R}') autour d'un axe lié à (\mathcal{R}) ;

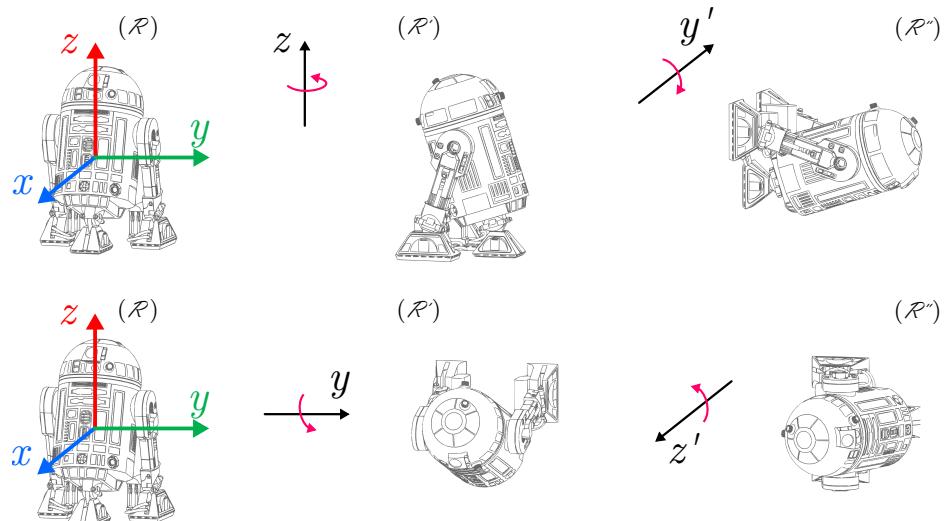


FIGURE 27 – Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**.

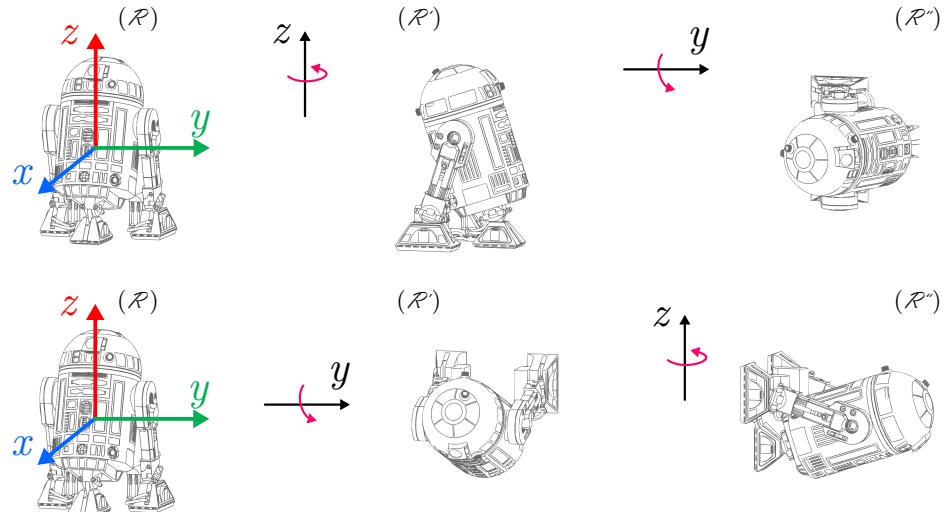


FIGURE 28 – Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**. On vérifie bien que l'ordre des rotations R_z suivie de R_y ne donne pas le même résultat que R_y suivie de R_z .

b. Remarques

Les matrices de rotation donnent une description *redondante* de l'orientation d'un corps. En effet, la matrice de rotation R est constituée de 9 éléments liés par seulement 6 relations indépendantes (contraintes d'orthogonalité et normalité) :

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 & r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 & r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \\ r_{12}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, 3 paramètres linéairement indépendants sont suffisants pour décrire l'orientation d'un corps. Ces trois rotations peuvent alors être définies de différentes manières (à condition que deux rotations consécutives ne soient pas autour du même axe) :

Pour exprimer de cette manière l'orientation d'un solide, ou de l'organe terminal d'un robot, on peut choisir, parmi diverses possibilités que l'on trouve sur la plupart des robots industriels comme par exemple :

- Angles d'Euler
- Angles nautique appelés aussi Angles de Cardan ou de Bryant (Roll Pitch Yaw)
- Quaternions

2 Angles d'Euler ZYZ

Succession de 3 rotations élémentaires appelées *précession*, *nutation* et *rotation propre*. Chaque nouvelle rotation est effectuée par rapport à un repère ayant tourné.

Il existe plusieurs conventions (12 ordres de rotation différents ! xyx, xyz, zxz, xzy, yxy, yxz, yzx, yzy, zxy, zxz, zyx, zyz). Mais pour les angles d'Euler, le principe consiste à utiliser le même axe de rotation pour les première et troisième transformations. Les deuxième et troisième rotations sont réalisées autour d'axes issus de la rotation précédente. La convention présentée ici est **ZYZ** :

- $R_z(\varphi)$: la précession φ , autour de l'axe z_0 , fait passer de $\{\mathcal{R}_0\}$ à (\mathcal{R}') (avec $-\pi \leq \varphi \leq \pi$),
- $R_{y'}(\theta)$: la nutation θ , autour de l'axe y' , fait passer de (\mathcal{R}') à (\mathcal{R}'') (avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$),
- $R_{z''}(\psi)$: la rotation propre ψ , autour de z'' , fait passer de (\mathcal{R}'') à $\{\mathcal{R}_1\}$ (avec $-\pi \leq \psi \leq \pi$).

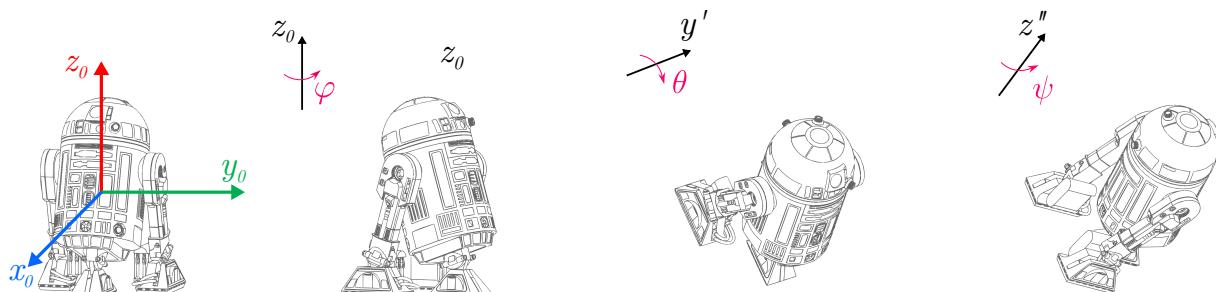


FIGURE 29 – Euler ZYZ

La matrice de rotation équivalente à une orientation donnée par les angles d'Euler (**rotation par repère courant**, ici dans le cas ZYZ) est obtenue par **post-multiplication** des matrices de rotation élémentaires :

Réiproquement, on peut obtenir les angles d'Euler à partir des cosinus directeurs (les composantes de la matrice \mathbf{R})

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Pour la convention ZYZ on a :

- une résolution inverse est indéterminée quand $\theta = 0$ ou π .
- Si $r_{33} \neq \pm 1$

$$\left| \begin{array}{l} \text{si } \theta \in [0, \pi] \\ \quad \varphi = \\ \quad \theta = \\ \quad \psi = \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{si } \theta \in [-\pi, 0] \\ \quad \varphi = \\ \quad \theta = \\ \quad \psi = \end{array} \right.$$

2.1 Blocage de Cardan (Gimbal Lock)

Quel que soit l'ordre des rotations choisi, la représentation d'une rotation par les angles d'Euler possède toujours une *singularité* quand la première et la dernière rotation ont lieu selon la même direction (*blocage de Cardan* ou *gimbal lock*).

Par exemple, cela se voit sur la convention ZYZ quand sur Y, $\theta = 0^\circ$ ou 180° , ou sur la convention YXZ lorsque sur X, $\theta = 90^\circ$.

Mathématiquement cela peut se montrer avec les angles d'Euler.

$$R_{ZYZ} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $\theta = 0$, la composition des matrices de rotation devient :

$$R_{ZYZ} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) & 0 \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut changer les valeurs de φ et ψ mais l'axe de rotation reste dans la direction Z. La troisième colonne et la troisième ligne de la matrice ne changeront pas. On a donc perdu un degré de liberté.

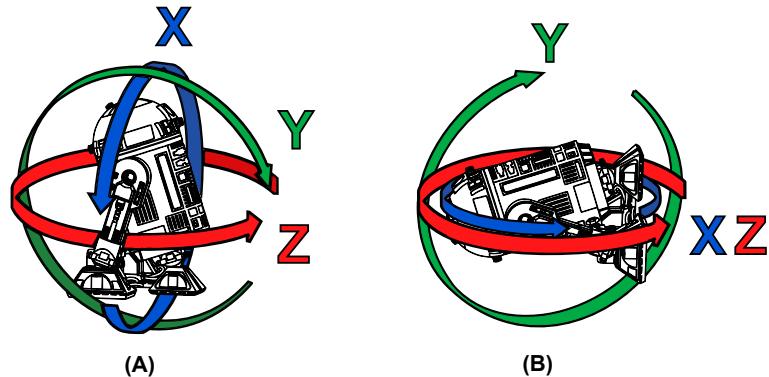
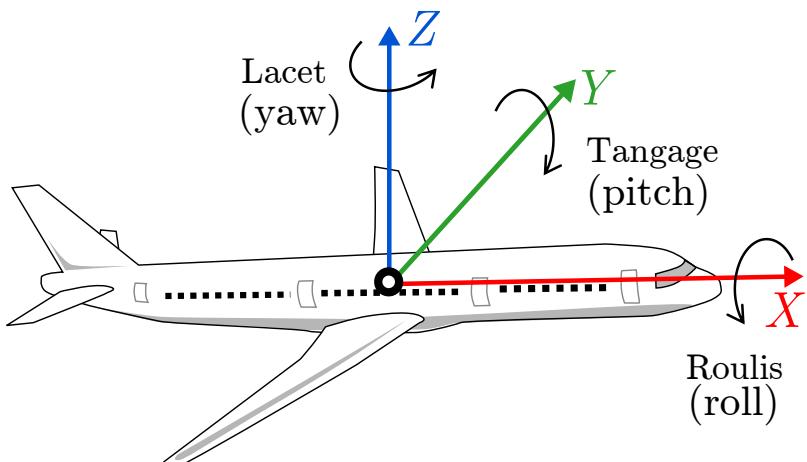


FIGURE 30 – (A) L’orientation de l’objet est complètement défini dans l’espace avec 3 degrés de libertés. (B) Blocage de Cardan : deux des trois axes de rotations sont coïncidents, un degré de liberté est perdu. Que l’on tourne suivant X ou Z cela aura le même résultat. On ne peut plus orienter librement l’objet en 3D dans l’espace.

Remarques : Quelques exemples de robots industriels et leur convention :

- robots Kawasaki, Adept et Stäubli : zyz
- robots Bosch : yxz
- robots FANUC et KUKA : convention xyz
- robots ABB : convention xyz
- logiciels CATIA et SolidWorks : convention zxz

3 Angles de Cardan / Tait-Bryant / RPY / Nautiques



Très utilisés en aéronautique et navigation les angles *Roll-Pitch-Yaw* (Roulis-Tangage-Lacet) sont en fait une version des rotations avec les angles d’Euler **ZYX** s’effectuant autour d’**axes fixes** suivant :

- Roll (roulis) ψ , autour de l’axe x_0 , fait passer de $\{\mathcal{R}_0\}$ à (\mathcal{R}') (avec $-\pi \leq \psi \leq \pi$),
- Pitch (tangage) θ , autour de l’axe y_0 , fait passer de (\mathcal{R}') à (\mathcal{R}'') (avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$),
- Yaw (lacet) φ , autour de l’axe z_0 , fait passer de (\mathcal{R}'') à $\{\mathcal{R}_1\}$ (avec $-\pi \leq \varphi \leq \pi$).

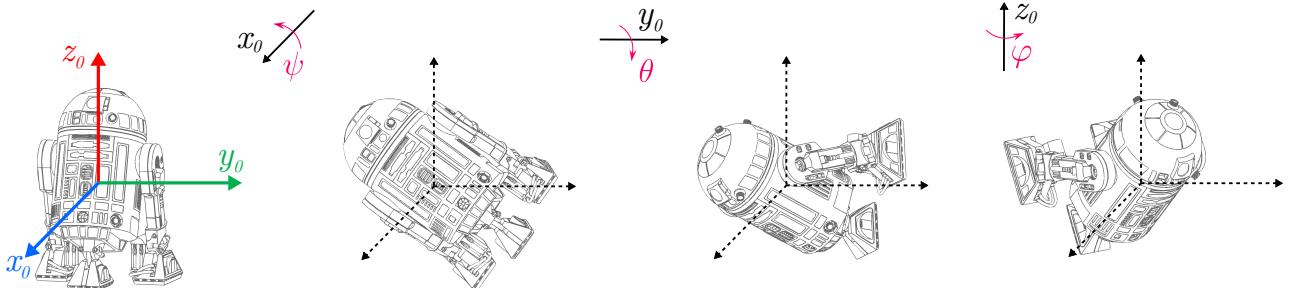


FIGURE 31 – Angles Roll-Pitch-Yaw

Attention à l'ordre car les rotations s'effectuent en **repère fixe** !

La matrice de rotation équivalente à une orientation donnée par les RPY est obtenue par **pré-multiplication** des matrices de rotation élémentaires :

Réiproquement, connaissant la matrice des cosinus directeurs \mathbf{R}_{XYZ} , il est possible de calculer les angles de cardan :

$$\text{si } r_{11} \neq 0 \text{ } (\theta \text{ et } \varphi \neq \frac{\pi}{2}) \text{ et } r_{33} \neq 0 \text{ } (\theta \text{ et } \psi \neq \frac{\pi}{2}) \quad \left| \begin{array}{l} \varphi = \\ \theta = \\ \psi = \end{array} \right.$$

4 Orientation déterminée par un vecteur et un angle

On peut décrire l'orientation d'un repère par rapport à un autre grâce à une seule rotation d'angle θ autour d'un vecteur unitaire, \vec{u} qui n'est pas nécessairement un axe d'un repère.

La matrice de rotation est issue de la formule de Rodrigues :

avec $\mathbf{S}_{(\mathbf{u})} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$, la matrice antisymétrique associée au vecteur \mathbf{u} .

On trouve aussi la relation sous cette forme matricielle :

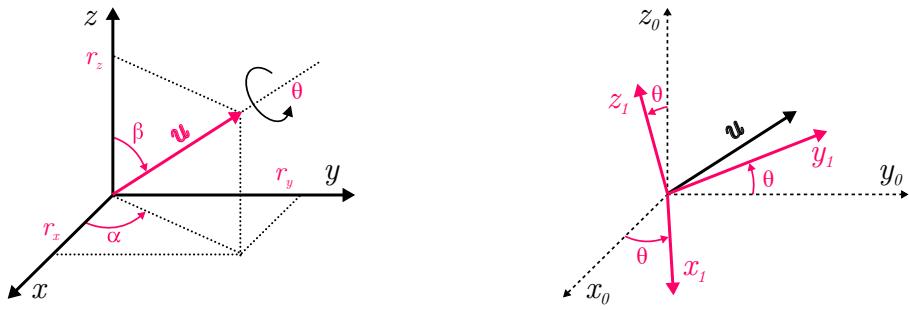


FIGURE 32 – Rotation par un vecteur et un angle

où sous une forme compacte :

Remarque : Si \mathbf{u} est un axe de rotation de $\{\mathcal{R}_1\}$ par rapport à $\{\mathcal{R}_0\}$ alors : ${}^0\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{u} = {}^0\mathbf{u}$ (vecteur invariant de la rotation)

autrement dit, \mathbf{u} est un vecteur propre de la matrice de rotation.

Rappel : Les vecteurs propres d'une matrice sont les vecteurs dont la direction reste inchangée après multiplication par la matrice. Ils sont associés aux à une valeur propre.

$$R(-\theta, -\mathbf{u}) = R(\theta, \mathbf{u})$$

- Une rotation d'un angle $-\theta$ autour de l'axe \mathbf{u} ne peut pas être distinguée d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe \mathbf{u} .
- La représentation angle/axe n'est pas unique !

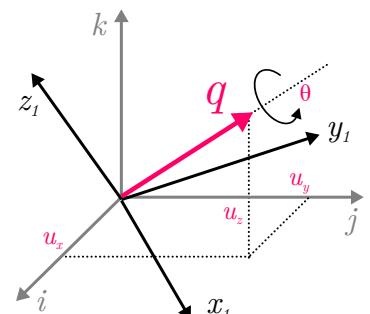
5 Orientation déterminée par les quaternions

Un quaternion est un vecteur $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ composé de quatre paramètres qui décrivent une **rotation unique** d'angle $\theta \in [0, \pi]$ autour d'un axe de vecteur unitaire \vec{u} .

Le premier paramètre est un nombre réel les trois autres sont les composantes de $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ dans l'espace complexe.

$$\mathbf{q} = \underbrace{q_0}_{\text{Re}(q)} + \underbrace{q_1 \cdot \mathbf{i} + q_2 \cdot \mathbf{j} + q_3 \cdot \mathbf{k}}_{\text{Im}(q)} = q_0 + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 = \\ q_1 = \\ q_2 = \\ q_3 = \end{bmatrix}$$



La rotation identité est : $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 = 1 \\ q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \end{bmatrix}$

a. Propriétés

Formule fondamentale : $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk}^2 = -1$

Quaternion : $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$

Quaternion conjugué : $\bar{\mathbf{q}} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]^T$

Quaternion inverse : $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}$

Norme : $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$

Non commutativité : $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \neq \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

$$\cos(\theta) = 2q_1^2 - 1$$

Les quaternions ont été inventés en 1843 par Sir William Rowan Hamilton dont l'objectif était de généraliser les nombres complexes à trois dimensions.

Remarque : Les quaternions sont rarement utilisés comme moyen de communication entre l'usager est le contrôleur du robot, car ils ne sont pas très intuitifs. Cependant ils restent des outils puissant car ils évitent le phénomène de *Gimbal Lock*.

b. Rotation d'un vecteur v par un quaternion unitaire q

où \mathbf{v}_q est un vecteur quaternion pure de dimension 4 : $\mathbf{v}_q = [0, \mathbf{v}]^T = [0, v_x, v_y, v_z]$

et l'opérateur \otimes est le produit Hamiltonien définit par :

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 \\ q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2 \\ q_0 p_2 - q_1 p_3 + q_2 p_0 + q_3 p_1 \\ q_0 p_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_0 \end{bmatrix}^T \quad \text{avec : } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

c. Rotation relative entre deux quaternions

Soit q_{01} qui décrit l'orientation du Repère 1 par rapport au Repère 0 (le passage 0→1).
Soit q_{02} qui décrit l'orientation du Repère 2 par rapport au Repère 0 (le passage 0→2).

Le quaternion q_{12} décrit l'orientation du Repère 2 par rapport au Repère 1 et donné par :

$$q_{02} = q_{01} \otimes q_{12}$$

$$q_{01}^{-1} \otimes q_{02} = q_{01}^{-1} \otimes q_{01} \otimes q_{12}$$

donc :

d. Matrice de rotation à partir d'un quaternion

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} q_0 = \frac{\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}}{2} \\ q_1 = sign(r_{32} - r_{23}) \frac{\sqrt{1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}}}{2} \\ q_2 = sign(r_{13} - r_{31}) \frac{\sqrt{1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}}}{2} \\ q_3 = sign(r_{21} - r_{12}) \frac{\sqrt{1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}}}{2} \end{array} \right.$$

e. Angles d'Euler dans la convention XYZ à partir d'un quaternion

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \left(\frac{2q_0q_1 + q_2q_3}{1 - 2q_2^2q_3^2} \right) \\ \arcsin \left(2(q_0q_2 - q_1q_3) \right) \\ \arctan \left(\frac{2q_0q_3 + q_1q_2}{1 - 2q_2^2q_3^2} \right) \end{bmatrix}$$

f. Quaternion à partir des angles d'Euler dans la convention XYZ

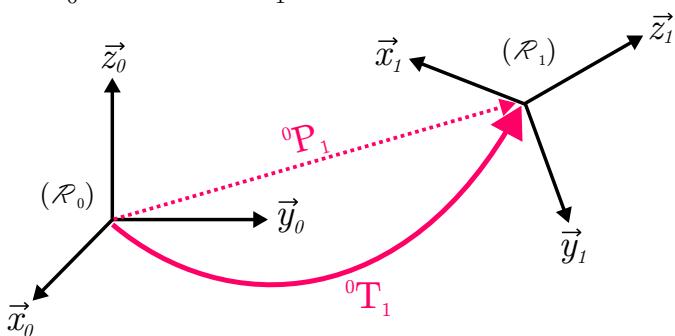
6 Matrice de passage homogène

Les matrices de *passage homogènes* (4X4) : ${}^0\mathbf{H}_1$ permettent de décrire le passage d'un repère $\{\mathcal{R}_0\}$ vers un repère $\{\mathcal{R}_1\}$, en combinant une translation et une rotation.

repère repère

final ${}^0\mathbf{H}_1 \rightarrow$ initial

\mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1



\mathbf{R} : matrice (3x3) des rotations donnant l'orientation du solide dans un repère fixe $\{\mathcal{R}_0\}$.

\mathbf{P} : matrice (3x1) des translations donnant la position du solide dans un repère fixe $\{\mathcal{R}_0\}$.

Remarque : Les coordonnées homogènes d'un vecteur de l'espace sont de la forme : $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$.

On trouvera aussi souvent les notations suivantes pour les cosinus directeurs \mathbf{s} , \mathbf{n} , \mathbf{a} et le vecteur de translation \mathbf{P} tel que :

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matrice Rot.} & \text{Vecteur } \mathbf{T} \text{rans.} \\ \text{Trans. Persp.} & \text{Scaling Factor} \end{bmatrix}$$

a. Transformation d'un vecteur

Soit un vecteur $\tilde{\mathbf{v}}^\dagger$ avec

$$\begin{cases} {}^i\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} {}^{(i)}V_x \\ {}^{(i)}V_y \\ {}^{(i)}V_z \\ 1 \end{bmatrix} & \text{ses coordonnées exprimées dans le repère (i)} \\ {}^j\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} {}^{(j)}V_x \\ {}^{(j)}V_y \\ {}^{(j)}V_z \\ 1 \end{bmatrix} & \text{ses coordonnées exprimées dans le repère (j)} \end{cases}$$

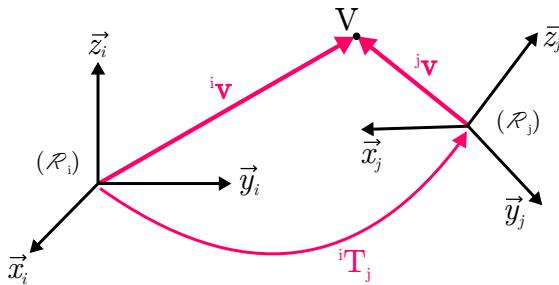
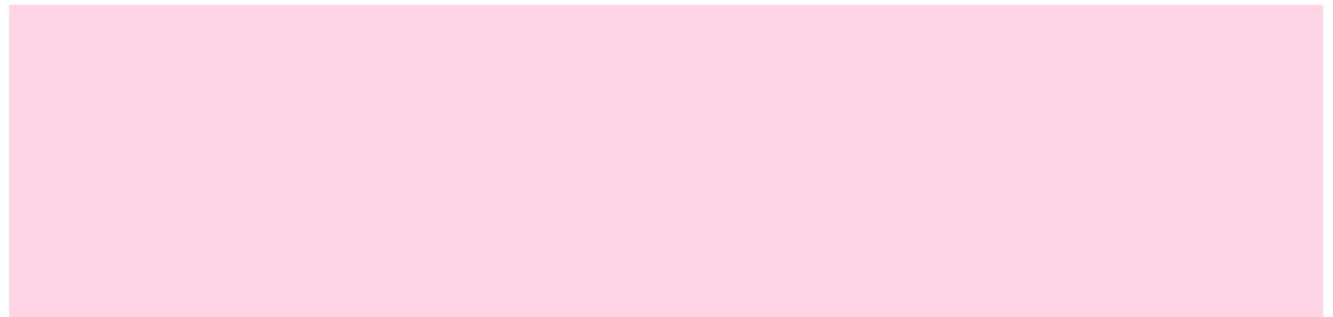


FIGURE 33 – Expression d'un vecteur \mathbf{V} dans différents repères

La matrice de transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ permet de calculer les coordonnées d'un vecteur dans le repère $\{\mathcal{R}_i\}$ à partir de ses coordonnées dans le repère $\{\mathcal{R}_j\}$.



6.1 Propriétés des matrices de passage homogènes

La propriété de l'orthogonalité ne s'applique pas donc en général :

[†]. Par la suite pour éviter de surcharger l'écriture et si l'on sait que les *transformation homogènes* sont en jeu, on omettra le ~ sur le vecteur

a. Composition des transformations

Soit deux transformations représentées par leurs matrices homogènes :

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_2 & {}^1\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \text{ alors :}$$

Si $\{\mathcal{R}_i\}$ est modifié par k transformations consécutives avec chaque transformation i définie par rapport au repère courant (\mathcal{R}_{i-1}) . La composition de transformations successives par rapport au *repère courant* est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de transformation en suivant l'ordre donné des transformations (Fig.34).

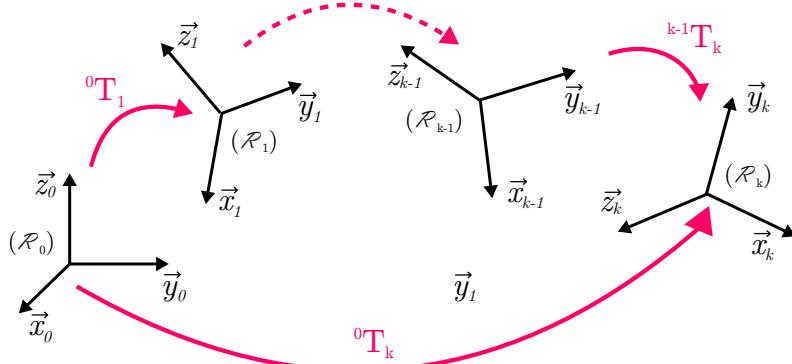


FIGURE 34 – Transformations consécutives. (source : adaptée de [1])



Quatrième partie

FORWARD KINEMATICS

Objectifs :

- Construire le schéma cinématique d'un système robotique
- Définir les variables articulaires d'un robot
- Établir le modèle géométrique d'un robot avec la convention Denavit-Hartenberg

Pré-requis :

- Connaître les fonctions et formules trigonométriques classiques
- Établir le schéma cinématique d'un système mécanique

Modules recommandés :

- MECA655

1 Convention DH-KK : Denavit-Hartenberg modifiée (appelée aussi Khalil-Kleinfinger)

Initialement introduite en 1955 par Jacques Denavit et Richard S. Hartenberg, la méthode DH permet de normaliser, simplifier et rationaliser la modélisation géométrique d'un robot. Par la suite Khalil et Kleinfinger ont proposé une amélioration. **C'est cette convention dite "DH modifiée" qui est présentée ici.**

1.1 Règles de paramétrage

- Les segments sont numérotés dans l'ordre croissant, de la base (0) à l'effecteur (n).
- Le repère $\mathcal{R}_i (O_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$ est associé au segment i .
- L'axe \vec{Z}_i correspond à l'axe de l'articulation i . (pivot ou glissière).
- L'axe \vec{X}_i correspond à la perpendiculaire commune entre \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} . ($\vec{X}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{Z}_{i+1}$).
- L'axe \vec{Y}_i est placé de façon à créer un repère orthogonal direct. ($\vec{Y}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{X}_i$).
- L'origine O_i est située à intersection de \vec{X}_i et \vec{Z}_i .

Le segment i possède 2 axes : Z_i et Z_{i+1} . L'axe Z_i est lié à l'articulation i et l'axe Z_{i+1} est lié à l'articulation $i + 1$.

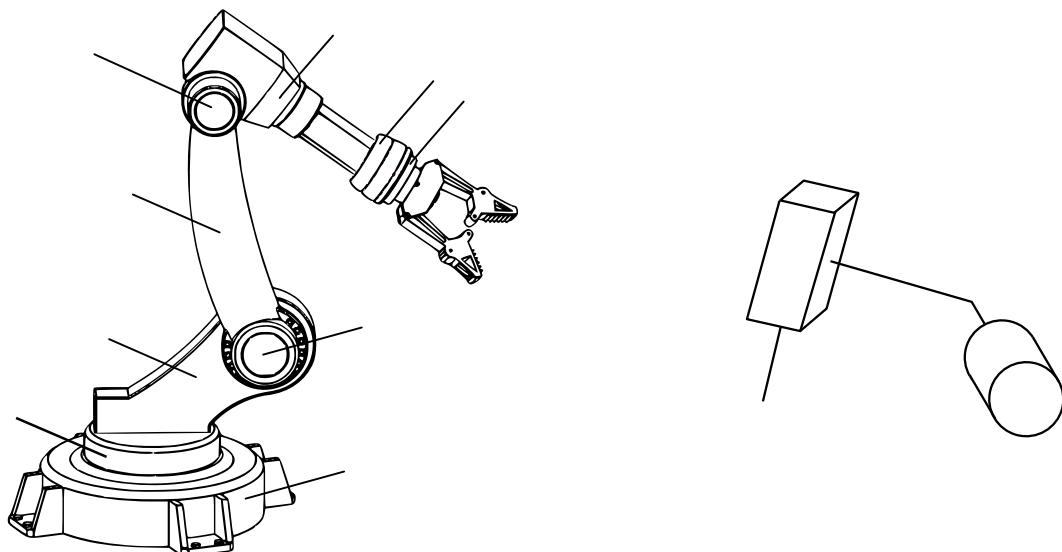


FIGURE 35 – Numérotation des segments et liaisons. Définition des axes Z_i .

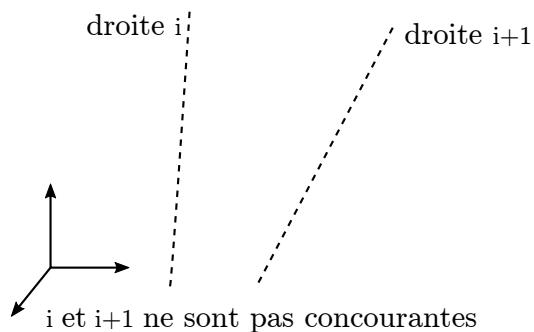
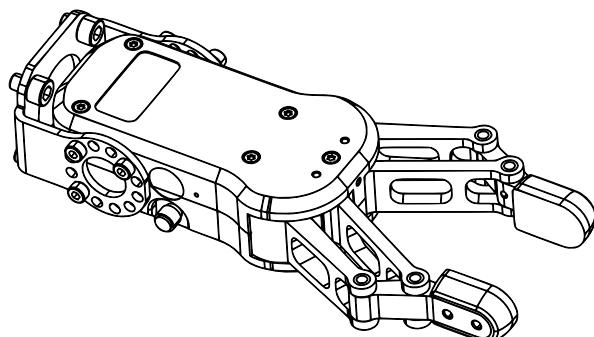


FIGURE 36 – La **normale commune** est la droite qui contient le segment de distance minimale entre les deux droites.

a. Effecteur pince

Si l'effecteur est une **pince** le repère est défini ainsi :

- Origine O_e : au centre de la pince
- \vec{Z}_e : en direction de l'objet à attraper.
- \vec{Y}_e : orthogonal à \vec{Z}_e , dans le plan de glissement des becs de la pince.
- \vec{X}_e : orthogonal au deux autres axes pour avoir un repère orthogonal direct ($\vec{X}_e = \vec{Y}_e \wedge \vec{Z}_e$).



1.2 Paramétrage avec la convention DH-KK

a. Paramètres

Les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés sont utilisés pour calculer les matrices de transformation homogènes de chaque articulation et, enfin, la matrice de transformation homogène totale (la solution du problème de cinématique direct).

Le passage de $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$ à $\{\mathcal{R}_i\}$ (Fig.37) s'exprime en fonction des quatre paramètres DH modifiés suivants : a_{i-1} (excentricité), α_{i-1} (torsion), d_i (longueur), θ_i (angle).



Symbol	Name	Description
a_{i-1}	Link Length	$Z_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } X_{i-1}]{} Z_i$
α_{i-1}	Twist Angle	$Z_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } X_{i-1}]{} Z_i$
d_i	Joint Offset	$X_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } Z_i]{} X_i$
θ_i	Joint Angle	$X_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } Z_i]{} X_i$

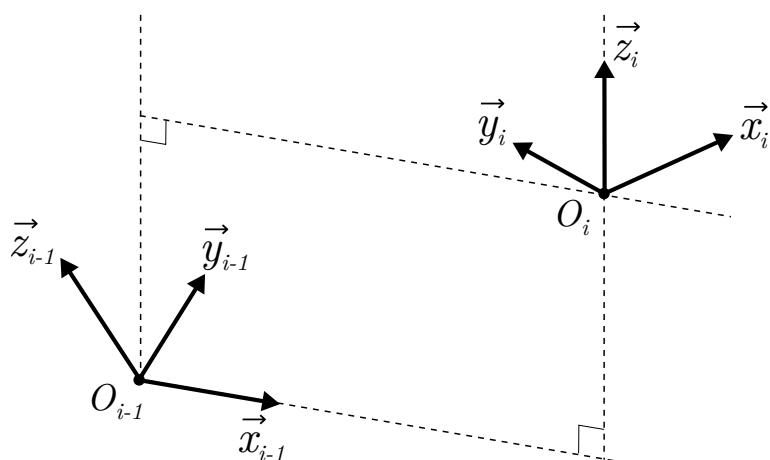


FIGURE 37 – Paramètres de la convention DH-KK.

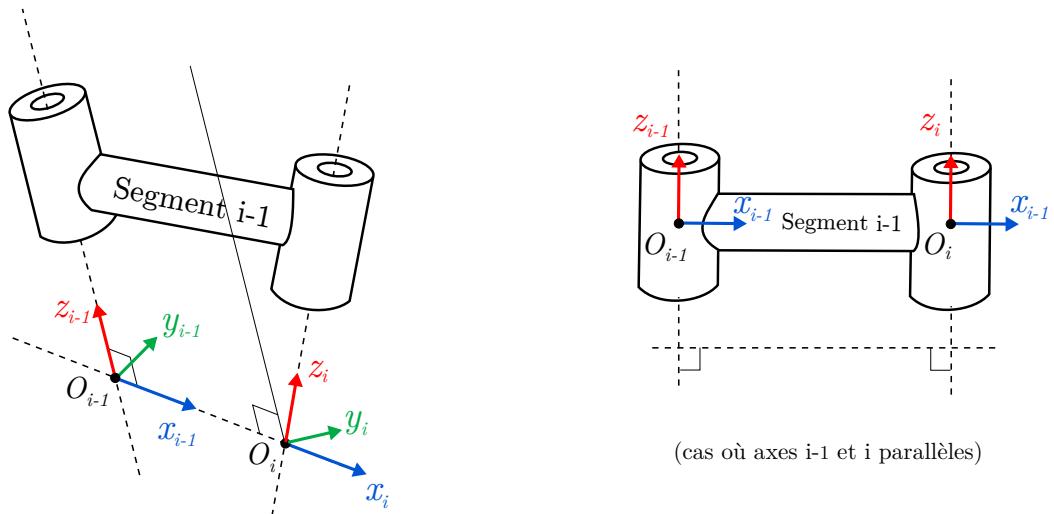


FIGURE 38 – Paramétrage d'un segment (convention DH-KK).

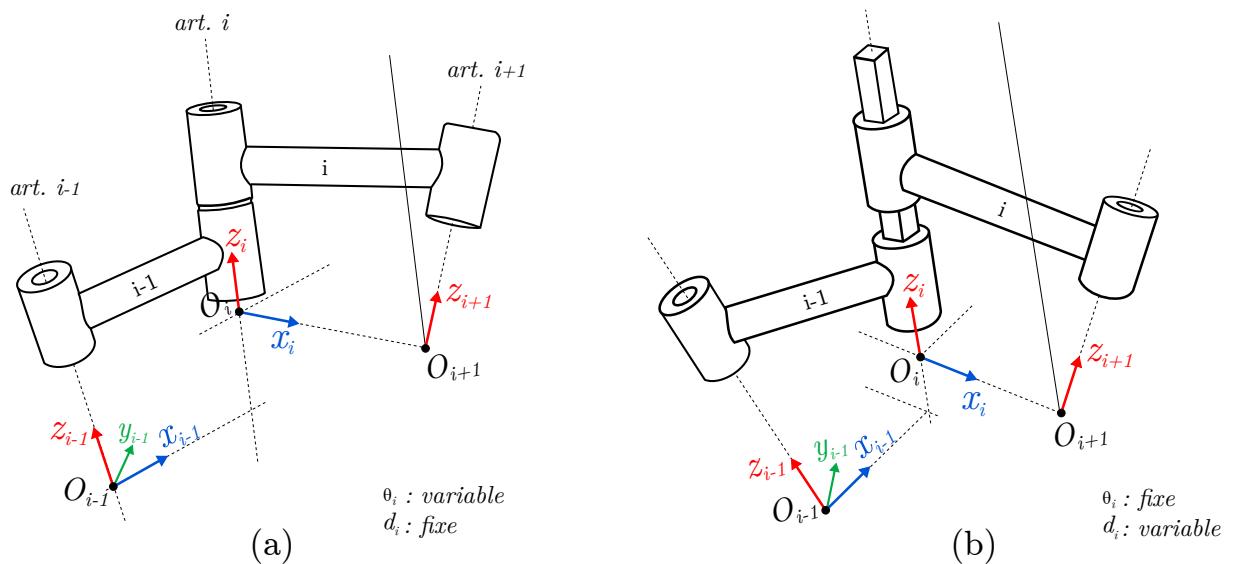


FIGURE 39 – Paramétrage (a) d'une liaison pivot, (b) d'une liaison glissière. (convention DH-KK)

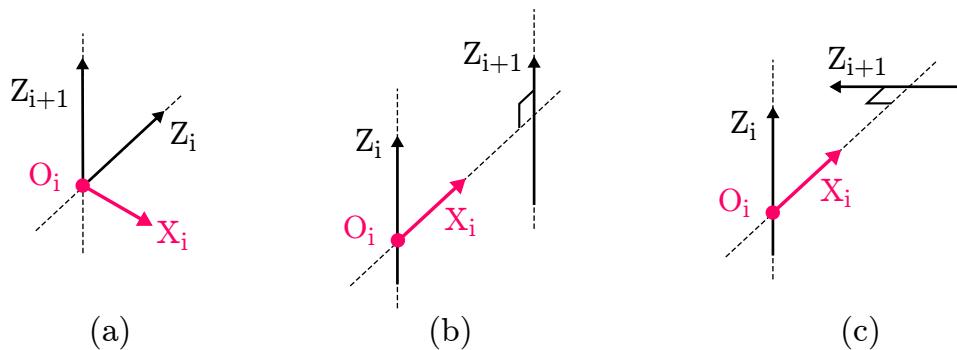
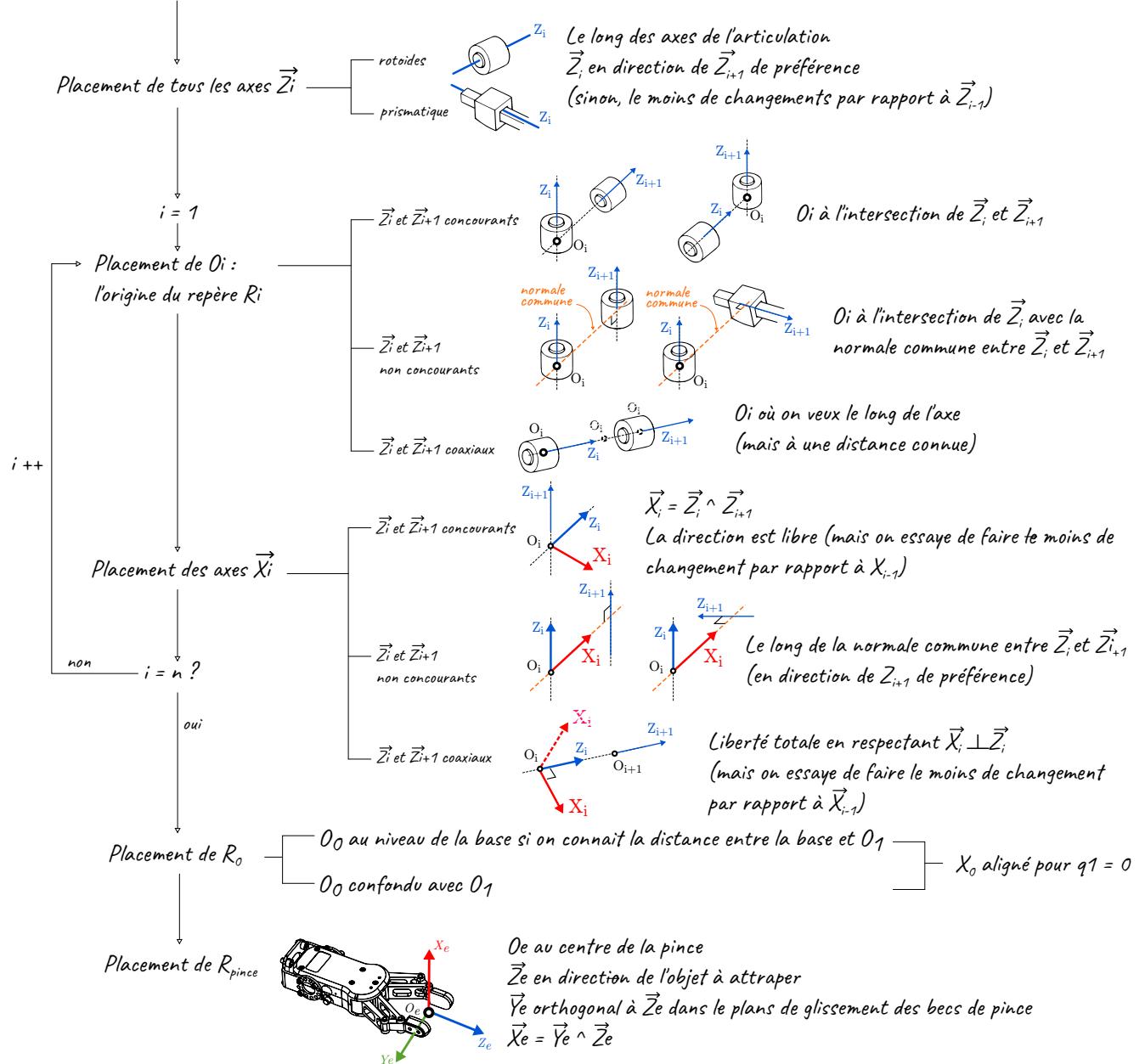


FIGURE 40 – (a) \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} s'intersectent. (b,c) \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} sont parallèles.

b. Algorithme du paramétrage

Numérotation des articulations et des segments de 1 à n



c. Variables articulaires : q_i

Le nombre de variables articulaires est égale au nombre d'axes du robot.

avec :

- $\sigma_i = 0$
- $\sigma_i = 1$

La variable articulaire q_i , associée à l'articulation i , est soit θ_i , soit d_i , selon que cette articulation est respectivement de type rotoïde ou prismatique.

autrement dit :

- si l'articulation est une rotation alors $q_i = \theta_i$ est variable, α_i, a_i, d_i sont constants.
- si l'articulation est une translation alors $q_i = d_i$ est variable, α_i, a_i, θ_i sont constants.

d. Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

La matrice de transformation homogène (position et orientation) entre 2 repères adjacents $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$, $\{\mathcal{R}_i\}$ peut être décomposée en 4 transformations élémentaires :

$\mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1})$: Translation le long de \mathbf{X} d'une distance a .

$\mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1})$: Rotation autour de \mathbf{X} d'un angle α .

$\mathbf{Trans}_{z_i}(d_i)$: Translation le long de \mathbf{Z} d'une distance d .

$\mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$: Rotation autour de \mathbf{Z} d'un angle θ .

$$\mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1}) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Trans}_{z_i}(d_i) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le produit des matrices de passage successives donne l'expression de la matrice de transformation qui amène le repère $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$ au repère $\{\mathcal{R}_i\}$:

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1}) \cdot \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Trans}_{z_i}(d_i) \cdot \mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soit :

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i & {}^{i-1}\mathbf{O}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sous-matrice (3x3) supérieure gauche est la rotation ${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$.

La dernière colonne (3 premières composantes) est le vecteur de translation des origines ${}^{i-1}\mathbf{O}_i = \overrightarrow{O_{i-1}O_i}$.

e. Remarques

La transformation inverse ${}^i\mathbf{T}_{i-1}$ est donnée par :

$${}^i\mathbf{T}_{i-1} = \mathbf{Rot}_{z_i}(-\theta_i) \cdot \mathbf{Trans}_{z_i}(-d_i) \cdot \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(-\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(-a_{i-1})$$

$${}^i\mathbf{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T & -a_{i-1} C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si une chaîne contient deux ou plusieurs articulations parallèles consécutives, la composition des matrices de transformation entre elles peut être réduite à une matrice de transformation équivalente en utilisant la somme des variables jointes.

$${}^{i-1}\mathbf{T}_{i+1} = {}^{i-1}\mathbf{T}_i {}^i\mathbf{T}_{i+1} = \\ \mathbf{Rot}(\vec{x}_{i-1}, \alpha_i) \mathbf{Trans}(\vec{x}_{i-1}, d_i) \mathbf{Rot}(\vec{z}_i, \theta_i) \mathbf{Trans}(\vec{z}_i, d_i) \mathbf{Trans}(\vec{x}_i, d_{i+1}) \mathbf{Rot}(\vec{z}_i, \theta_{i+1}) \mathbf{Trans}(\vec{z}_i, r_{i+1})$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_{i+1} = \begin{bmatrix} C(\theta_i + \theta_{i+1}) & -S(\theta_i + \theta_{i+1}) & 0 & a_i + d_{i+1}C\theta_i \\ C\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & -S\alpha_i & d_{i+1}C\alpha_i S(\theta_i) - (d_i + r_{i+1})S\alpha_i \\ S\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & S\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i & d_{i+1}S\alpha_i S(\theta_i) + (d_i + r_{i+1})C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformation inverse à pour expression :

$${}^{i+1}\mathbf{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} C(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & S\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & -a_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) - d_{i+1}C\theta_{i+1} \\ -S(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & S\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & a_i S(\theta_i) + d_{i+1}S\theta_{i+1} \\ 0 & -S\alpha_i & C\alpha_i & -(d_i + r_{i+1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f. Comparaisons des paramètres de Denavit-Hartenberg classiques et modifiés

Paramètres	Convention originale DH	Convention modifiée DH-KK
axe de liaison	z_{i-1} pour l'articulation i	z_i pour l'articulation i
longueur : a_i	distance de O_i à l'intersection de z_{i-1} et x_i , le long de x_i	distance de z_i à z_{i+1} , le long de x_i
torsion : α_i	angle de z_{i-1} à z_i , autour de x_i	angle de z_i à z_{i+1} , autour de x_i
longueur : d_i	distance de O_{i-1} à l'intersection de z_{i-1} et x_i , le long de z_{i-1}	distance de x_{i-1} à x_i , le long de z_i
angle : θ_i	angle de x_{i-1} à x_i , autour de z_{i-1}	angle de x_{i-1} à x_i , autour de z_i
${}^{i-1}\mathbf{T}_i$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
${}^i\mathbf{T}_{i-1}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -a_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -d_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -d_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i C\alpha_{i-1} & S\theta_i S\alpha_{i-1} & -a_{i-1} C\theta_i \\ -S\theta_i & C\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & a_{i-1} S\theta_i \\ 0 & -S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemple : Paramétrage du robot Scara

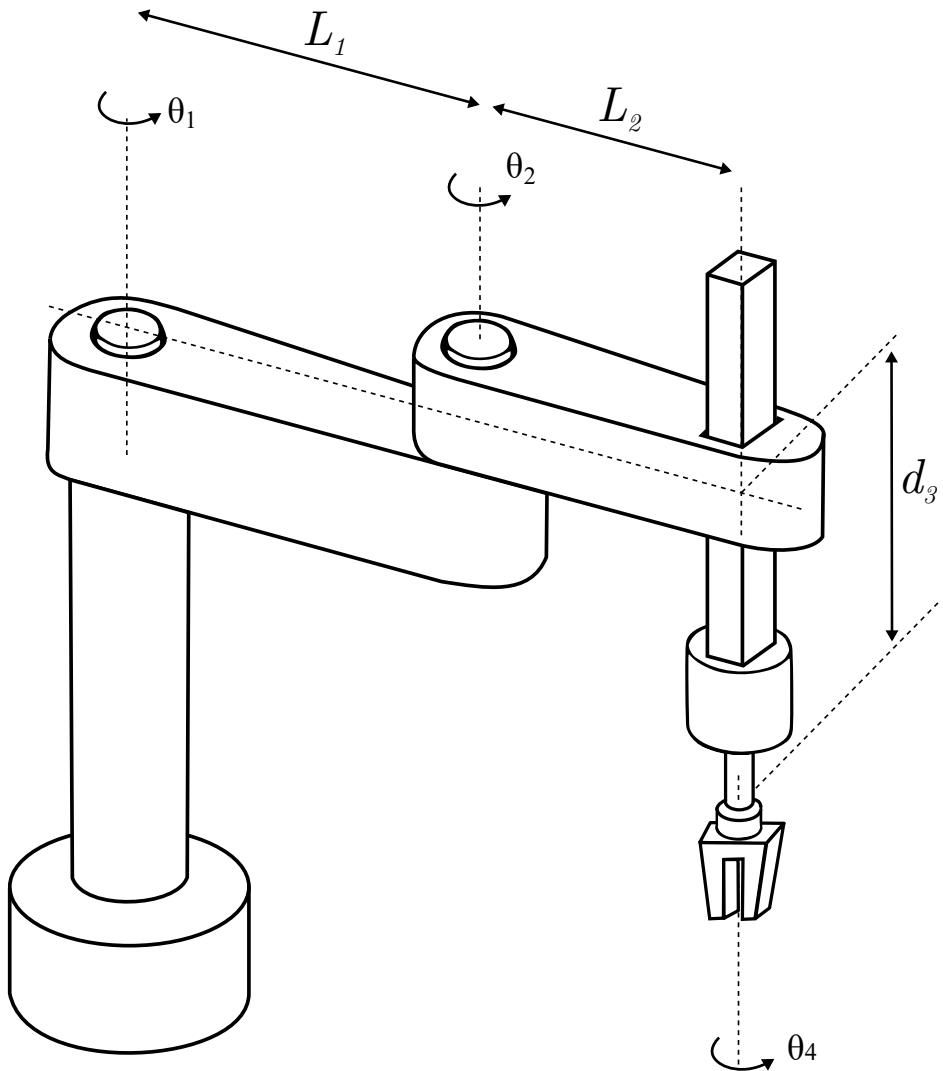


TABLEAU 1 – Tableau des paramètres DHKK - Robot Scara

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				

Ce tableau sert à établir les matrices de transfert du Modèle Géométrique Direct (MGD).

On nomme les articulations sur le schéma de 1 à 4.

Z_1 est l'axe de rotation de l'articulation #1.

Z_2 est l'axe de rotation de l'articulation #2.

Z_3 est dirigé le long de l'articulation #3 glissière (choix de direction libre. On essaye de faire le moins de changement possible par rapport à la précédente articulation. D'où Z_3 dirigé comme Z_2).

Z_4 est l'axe de rotation de l'articulation #4 (choix de direction libre généralement en direction de la pince mais, on essaye de faire le moins de changement possible par rapport à la précédente articulation. D'où Z_4 dirigé comme Z_3).

Comme Z_1 et Z_2 sont parallèles, O_1 est située au point d'intersection entre Z_1 et la normale commune entre Z_1 et Z_2 .

Comme Z_1 et Z_2 sont parallèles, X_1 est dirigé le long de la normale commune entre Z_1 et Z_2 (choix de direction libre mais on essaye d'aller en direction de la prochaine articulation)

Comme Z_2 et Z_3 sont parallèles, O_2 est située au point d'intersection entre Z_2 et la normale commune entre Z_2 et Z_3 .

Comme Z_2 et Z_3 sont parallèles, X_2 est dirigé le long de la normale commune entre Z_1 et Z_2 (choix de direction libre mais on essaye d'aller en direction de la prochaine articulation)

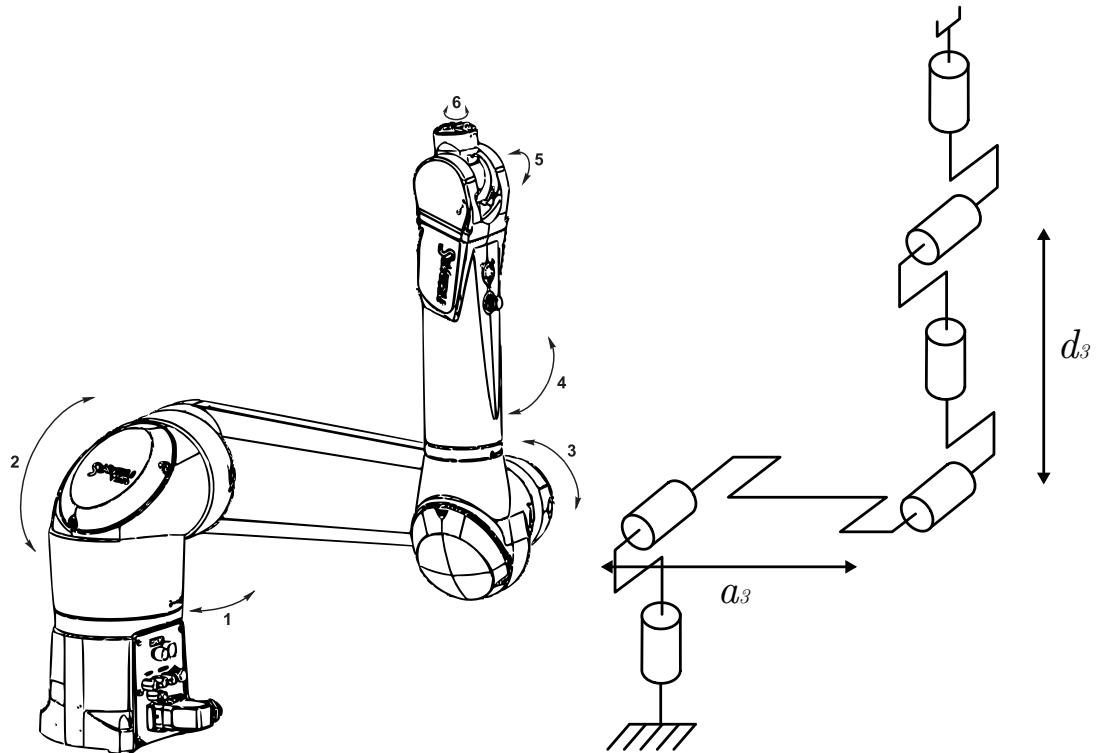
Comme Z_3 et Z_4 sont coaxiaux, on à le choix du placement de O_3 le long de l'axe mais à une distance connue. On peut la mettre à la même hauteur que O_2 où alors au bout de la hauteur d_2 . Comme Z_3 et Z_4 sont coaxiaux, on est libre de placer X_3 comme on veut en respectant $X_3 \perp Z_3$. Choix de direction libre, mais on essaye de faire le moins de changement possible par rapport à la précédente articulation. D'où X_3 comme X_2 .

L'articulation #4 est la dernière. On connaît la distance d_2 donc on place O_4 au bout de d_2 . Pour la dernière articulation on place X_4 comme on veut mais on essaye de faire le moins de changement possible par rapport à la précédente articulation. D'où X_4 comme X_3 .

Enfin, On ne connaît pas la distance entre la base et O_1 , donc on place O_0 confondu avec O_1 . On laisse R_0 orienté comme R_1 .

Exemple : Paramétrage du robot Stäubli RX-90

Le porteur du robot (articulations 1, 2 et 3) est du type RRR, le poignet est du type rotule, c'est-à-dire, est tel que les articulations 4, 5 et 6 sont de type rotoïde dont les axes se coupent en un même point.



Remarque : Il n'y a pas de véritable segment entre les liaisons 1 et 2 (d'ailleurs l'information de distance entre les deux n'est pas connue). Un peu comme pour un poignet de type rotule, les 2 liaisons sont considérées comme confondues dans le carter du robot. On peut donc établir l'origine des articulation 0, 1 et 2 au même point.

TABLEAU 2 – Tableau des paramètres DHKK - Robot Stäubli RX-90

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

2 Modèle Géométrique Direct (MGD)

Le MGD est l'ensemble des relations qui donne la **pose** de l'organe terminal \mathbf{X} (*les coordonnées opérationnelles*) en fonction de la configuration du robot définie par les variables articulaires \mathbf{Q} des différentes liaisons.

On note q_i la variable articulaire associée à la liaison i . Dans le cas d'une articulation rotatoire, q_i est représentée l'angle de rotation, et dans le cas d'une articulation prismatique, q_i est représentée la distance de déplacement (Figure 41) :



$$\mathbf{X} = f(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \text{position de l'effecteur dans } \{\mathcal{R}_0\} \\ \text{orientation de } (\mathcal{R}_n) \text{ par rapport à } \{\mathcal{R}_0\} \end{bmatrix}$$

avec \mathbf{q} le vecteur des variables des liaisons du robot, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$,

$$\text{et } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}_{(0)}$$

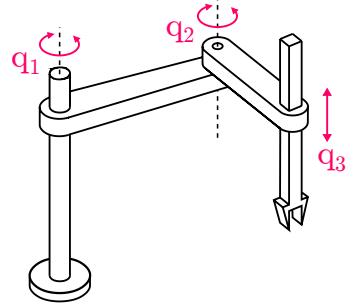


FIGURE 41 – Variables articulaires associées aux liaisons

Le contenu du vecteur \vec{X} peut être défini de plusieurs façons, suivant la représentation choisie :

- Avec la position cartésienne et les cosinus directeurs pour l'orientation :

$$\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, s_x, s_y, s_z, n_x, n_y, a_z, a_y, a_z]^T$$

- Avec la position cartésienne et les angles RPY pour l'orientation :

$$\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, \varphi, \theta, \psi]^T$$

Avec le MGD dans le cas d'un robot série, si les variables des articulations sont connues, la pose de l'effecteur peut être calculée d'une **manière unique** en utilisant la matrice de transformation homogène ${}^0\mathbf{T}_n$ définie par :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n)$$

En résumé : Le calcul du MGD conduit à identifier la matrice de transformation entre le repère de référence $\{\mathcal{R}_0\}$ et celui de l'effecteur $\{\mathcal{R}_n\}$ en identifiant les paramètres de la matrice ${}^0\mathbf{T}_n$:

$${}^0\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec P_x, P_y, P_z coordonnées du point P dans $\{\mathcal{R}_0\}$.

Pour l'obtenir, on multiplie les matrices de transformation homogènes ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ en partant de la dernière afin de définir des matrices intermédiaires \mathbf{U}_i utiles pour l'élaboration du modèle géométrique inverse (MGI).

Exemple : MGD du robot Scara

A partir du tableau des paramètres DHKK on peut calculer les matrices de transfert :

$${}^0T_1 = \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right] {}^1T_2 = \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right] {}^2T_3 = \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right] {}^3T_4 = \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\& & & & & & \end{array} \right]$$

```
# DHKK parameters for SCARA manipulator
# * +-----+-----+-----+-----+
# * | ai-1 | ?i-1 | di | ?i |
# * +-----+-----+-----+-----+
# * | 0 | 0 | 0 | ?1 |
# * | 0 | a2 | 0 | ?2 |
# * | 0 | a3 | -d2 | 0 |
# * | 0 | 0 | 0 | ?4 |
# * +-----+-----+-----+-----+

a1 = 0 # ai-1
alpha1 = 0 # ?i-1
d1 = 0 # di
t1 = dynamicsymbols('theta1') # ?i

a2 = dynamicsymbols('a2')
alpha2 = 0
d2 = 0
t2 = dynamicsymbols('theta2')

a3 = dynamicsymbols('a3')
alpha3 = 0
d3 = -dynamicsymbols('d2')
t3 = 0

a4 = 0
alpha4 = 0
d4 = 0
t4 = dynamicsymbols('theta4')
```

```
# Homogeneous transformation matrices
T01 = T(a1, alpha1, d1, t1)
T12 = T(a2, alpha2, d2, t2)
T23 = T(a3, alpha3, d3, t3)
T34 = T(a4, alpha4, d4, t4)

T04 = T01*T12*T23*T34
```

Simplification Trigonométrique

```
sp.simplify(T04)
```

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} a_3C(\theta_1 + \theta_2) + a_2C(\theta_1) \\ a_3S(\theta_1 + \theta_2) + a_2S(\theta_1) \\ -d_2 \end{bmatrix}$$

Toutes les rotations se font selon l'axe z. L'angle d'orientation θ_z vaut alors : $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4$ selon la direction z_0 . (avec $\theta_4 < 0$ pour notre cas)

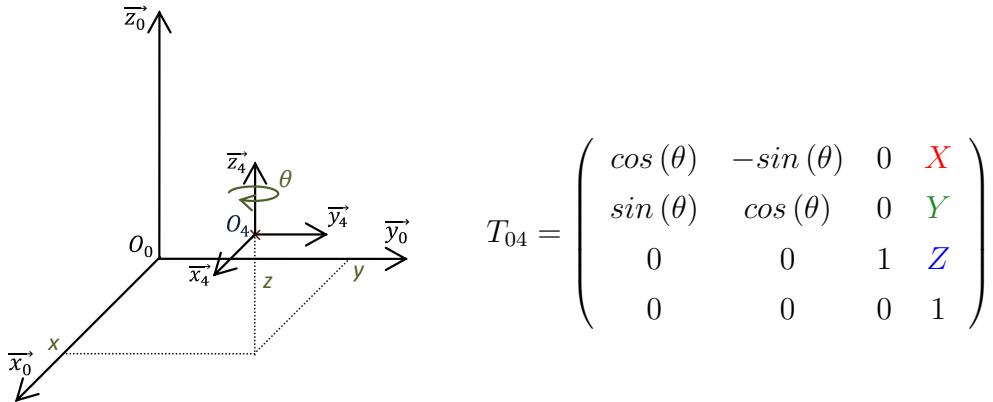


FIGURE 42 – Coordonnées Opérationnelles

Affichage de la dernière colonne uniquement

```
MGD = sp.simplify(T04*sp.Matrix([0,0,0,1]))
MGD
```

Donc le MGD complet (position + orientation) s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} X = a_2.\cos(\theta_1) + a_3.\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ Y = a_2.\sin(\theta_1) + a_3.\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ Z = -d_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 \end{array} \right.$$

On peut vérifier aisément (car c'est un cas simple) géométriquement à l'aide de la vue de dessus :

$$O_oA =$$

$$AB =$$

$$O_oB = x =$$

$$O_oC =$$

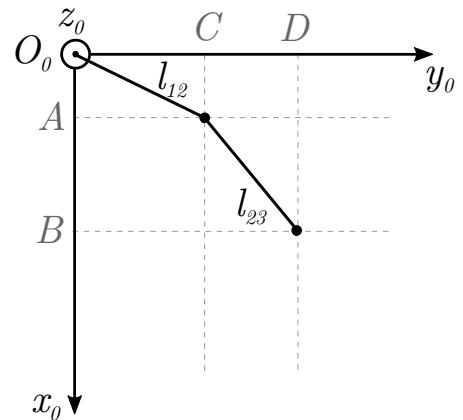
$$CD =$$

$$O_oD = y =$$

$$z = q3 \text{ (translation selon l'axe } \vec{z})$$

$$\theta = q_1 + q_2 + q_4$$

avec q_2 et $q_4 < 0$.



ROBOT SCARA

Import de librairies Python pour le calcul formel et l'affichage de matrices

Ces librairies sont nécessaires pour le calcul symbolique et matriciel.

Il y a plusieurs façons de créer une matrice en python.

Celle proposée ici avec l'objet *Matrix* de la librairie *sympy*, à l'avantage de créer un rendu agréable à lire en output.

Entrée [36]:

```
import sympy as sp
import numpy as np
from math import *
from sympy.physics.mechanics import dynamicsymbols
from sympy.physics.vector import init_vprinting
init_vprinting(use_latex='mathjax', pretty_print=True)
```

Pour Le calcul symbolique
Pour le calcul matriciel
Pour définir des variables symboliques en lettres grecques
Pour avoir un bon affichage des matrices

Definition de fonction usuelles en robotique

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}, R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}, R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i & C\theta_i & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i & C\theta_i & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^iT_{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i & C\alpha_{i-1} & -a_{i-1} C\theta_i \\ -S\theta_i & C\theta_i & C\alpha_{i-1} & a_{i-1} S\theta_i \\ 0 & -S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entrée [37]:

```
# function to calculate elementary rotation matrix
def Rx(angle_rad):
    return sp.Matrix([[1, 0, 0],
                    [0, sp.cos(angle_rad), -sp.sin(angle_rad)],
                    [0, sp.sin(angle_rad), sp.cos(angle_rad)]])

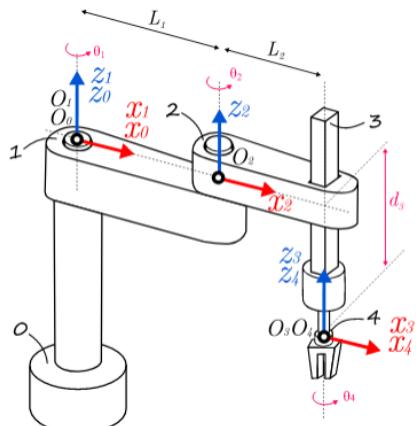
def Ry(angle_rad):
    return sp.Matrix([[sp.cos(angle_rad), 0, sp.sin(angle_rad)],
                    [0, 1, 0],
                    [-sp.sin(angle_rad), 0, sp.cos(angle_rad)]])

def Rz(angle_rad):
    return sp.Matrix([[sp.cos(angle_rad), -sp.sin(angle_rad), 0],
                    [sp.sin(angle_rad), sp.cos(angle_rad), 0],
                    [0, 0, 1]])

# Matrice homogene de transfert de i-1 vers i (convention DHKK)
def T(ai, alpha, di, theta):
    return sp.Matrix([[sp.cos(theta), -sp.sin(theta), 0, ai],
                    [sp.sin(theta)*sp.cos(alpha), sp.cos(theta)*sp.cos(alpha), -sp.sin(alpha), -sp.sin(alpha)*di],
                    [sp.sin(theta)*sp.sin(alpha), sp.cos(theta)*sp.sin(alpha), sp.cos(alpha), sp.cos(alpha)*di],
                    [0, 0, 0, 1]])

# Matrice homogene de transfert de i vers i-1 (convention DHKK)
def Tinv(ai, alpha, di, theta):
    return sp.Matrix([[sp.cos(theta), sp.sin(theta)*sp.cos(alpha), sp.sin(theta)*sp.sin(alpha), -ai*sp.cos(theta)],
                    [-sp.sin(theta), sp.cos(theta)*sp.cos(alpha), sp.cos(theta)*sp.sin(alpha), ai*sp.sin(theta)],
                    [0, -sp.sin(alpha), sp.cos(alpha), -di],
                    [0, 0, 0, 1]])
```

Forward Kinematics SCARA robot



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i		
1	0	0	0	θ_1^*		
2	L_1	0	0	θ_2^*	L_1	150 mm
3	L_2	0	$-d_3^*$	0	L_2	100 mm
4	0	0	0	θ_4^*		

```
# DHKK parameters for SCARA Robot
# * +-----+-----+-----+
# * | ai-1 | ai-1 | di | theta_i |
# * +-----+-----+-----+
# * | 0 | 0 | 0 | theta1* |
# * | L1 | 0 | 0 | theta2* |
# * | L2 | 0 | -d3* | 0 |
# * | 0 | 0 | 0 | theta4* |
# * +-----+-----+-----+
a1 = 0 # ai-1
alpha1 = 0 # ai-1
d1 = 0 # di
t1 = dynamicsymbols('theta1') # theta_i

a2 = dynamicsymbols('L1')
alpha2 = 0
d2 = 0
t2 = dynamicsymbols('theta2')

a3 = dynamicsymbols('L2')
alpha3 = 0
d3 = -dynamicsymbols('d3')
t3 = 0

a4 = 0
alpha4 = 0
d4 = 0
t4 = dynamicsymbols('theta4')
```

```
# Homogeneous transformation matrices
T01 = T(a1, alpha1, d1, t1)
T12 = T(a2, alpha2, d2, t2)
T23 = T(a3, alpha3, d3, t3)
T34 = T(a4, alpha4, d4, t4)

T04 = T01*T12*T23*T34
```

```
# Homogeneous transformation matrices
T01 = T(a1, alpha1, d1, t1)
T12 = T(a2, alpha2, d2, t2)
T23 = T(a3, alpha3, d3, t3)
T34 = T(a4, alpha4, d4, t4)

T04 = T01*T12*T23*T34
```

Entrée [52]: T01

```
Out[52]: 
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

Entrée [53]: T12

```
Out[53]: 
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & L_1 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

Entrée [54]: T23

```
Out[54]: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

Entrée [55]: T34

```
Out[55]: 
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

Entrée [56]: T04

```
Out[56]: 
$$\begin{bmatrix} (-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\theta_4)) + (-\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_1))\sin(\theta_4) & -(-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2))\sin(\theta_4) \\ (-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2))\sin(\theta_4) + (\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1))\cos(\theta_4) & -(-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2))\cos(\theta_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```

Simplification Trigonométrique

Entrée [57]: `sp.simplify(T04)`

Out[57]:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Affichage de la dernière colonne uniquement

Entrée [58]: `MGD = sp.simplify(T04*sp.Matrix([0,0,0,1]))
MGD`

Out[58]:

$$\begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -d_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entrée [59]: `# Display only the Position vector [X,Y,Z,1] when q1=0, q2=0, q3=50, q4=0
subs_list={
 dynamicsymbols('theta1'):0,
 dynamicsymbols('theta2'):0,
 dynamicsymbols('d3'):50,
 dynamicsymbols('theta4'):0,
 #dynamicsymbols('L1'):100,
 #dynamicsymbols('L2'):150,
}

MGD_zero = MGD.subs(subs_list)
MGD_zero`

Out[59]:

$$\begin{bmatrix} L_1 + L_2 \\ 0 \\ -50 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple : MGD du robot Stäubli RX-90

A partir du tableau des paramètres DHKK on peut calculer les matrices de transfert :

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_1 &= \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right] & {}^1\mathbf{T}_2 &= \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right] & {}^2\mathbf{T}_3 &= \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right] \\
 {}^3\mathbf{T}_4 &= \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right] & {}^4\mathbf{T}_5 &= \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right] & {}^5\mathbf{T}_6 &= \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right] \\
 {}^0\mathbf{T}_6 &= {}^0\mathbf{T}_1 \cdot {}^1\mathbf{T}_2 \cdot {}^2\mathbf{T}_3 \cdot {}^3\mathbf{T}_4 \cdot {}^4\mathbf{T}_5 \cdot {}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$S_x = C_1(C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6) - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$$

$$S_y = S_1(C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6) + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$$

$$S_z = S_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_{23}S_5C_6$$

$$n_x = C_1(-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6) + S_1(S_4C_5S_6 - C_4C_6)$$

$$n_y = S_1(-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6) - C_1(S_4C_5S_6 - C_4C_6)$$

$$n_z = -S_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) - C_{23}S_5S_6$$

$$a_x = -C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_1S_4S_5$$

$$a_y = -S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - C_1S_4S_5$$

$$a_z = -S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5$$

$$P_x = -C_1(S_{23}d_3 - C_2a_3)$$

$$P_y = -S_1(S_{23}d_3 - C_2a_3)$$

$$P_z = C_{23}d_3 + S_2a_3$$

2.1 Poignet sphérique

Énormément de robots possèdent un poignet **sphérique**. C'est à dire que les axes des trois dernières articulations s'intersectent en un point.

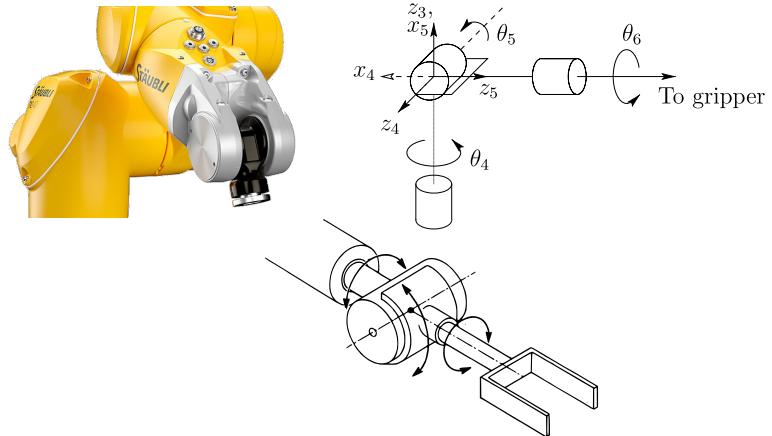


FIGURE 43 – poignet sphérique

TABLEAU 3 – Tableau des paramètres DHKK - Poignet sphérique

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_4^*
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_5^*
6	0	0	d_6	θ_6^*

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_6 = {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4c6 & c4s5 & c4s5d_6 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 & s4s5 & s4s5d_6 \\ -s5c6 & s5s6 & c5 & c5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinquième partie

INVERSE KINEMATICS

1 Modèle géométrique inverse (MGI)

Le modèle géométrique inverse est le problème qui permet de connaître toutes les solutions possibles pour les variables articulaires \mathbf{Q} correspondant à une situation de l'organe terminal \mathbf{X} donné, ce qui peut se représenter par la relation :

$$\mathbf{Q} = f^{-1}(\mathbf{X}) \quad (\text{si c'est possible})$$

Les équations du problème à résoudre sont, en général, non linéaires (il y'a des *sinus* et *cosinus*). Le problème peut avoir des solutions multiples (exemple Fig.44) voire un nombre infini de solutions (robots redondants cinématiquement) et même n'avoir aucune solution admissible (à cause de la structure cinématique du manipulateur). Le MGI est donc souvent difficile, voire parfois quasi-impossible, de l'inverser directement.

Il n'existe pas de méthode systématique pour déterminer le modèle géométrique inverse. Cependant, 2 méthodes prédominent :

- Géométrique (résolution de triangle)
- Analytique (Inversion de MGD)

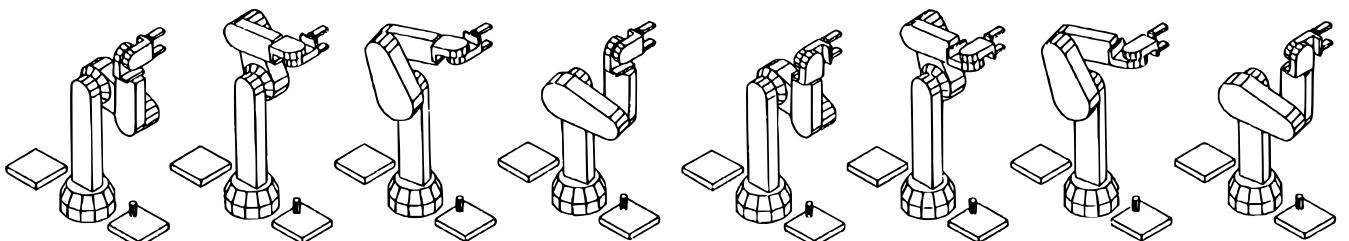


FIGURE 44 – Exemple de solutions du MGI pour un robot 6R. La position et l'orientation de l'organe terminal est exactement la même pour les 8 possibilités présentées. (Source [2])

1.1 Méthode géométrique

Cette méthode consiste à utiliser les relations trigonométriques d'un triangle quelconque. On essaie alors de ramener le problème à la résolution de triangles, en partant souvent de l'effecteur, pour remonter jusqu'à la base du robot.

Exemple : MGI du robot Scara

Les coordonnées *opérationnelles* x, y, z sont les coordonnées du point O_4 par rapport au repère de base $\{\mathcal{R}_0\} = (O_0, x_0, y_0, z_0)$

On pose $\mathbf{p} = [p_x, p_y]^T = \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_3$.

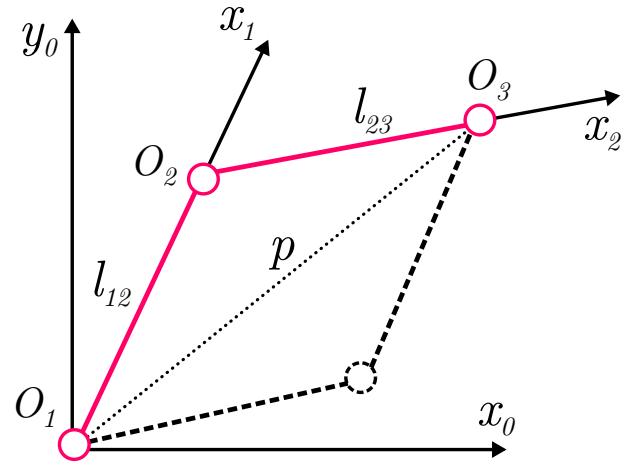
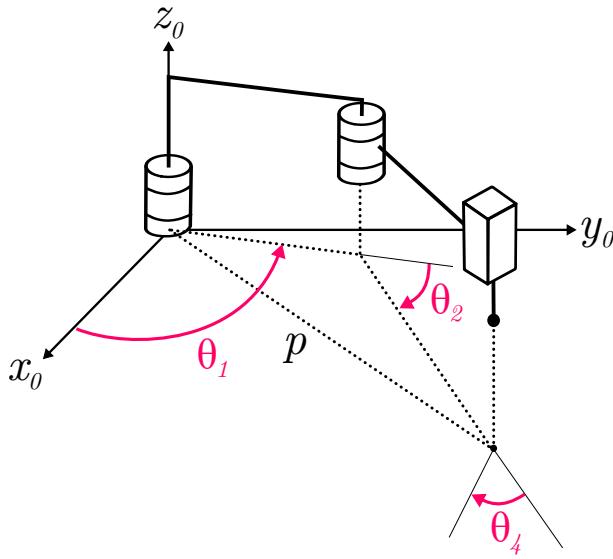


TABLEAU 4 – Projection suivant le plan $(O_1; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$

FIGURE 45 – Projection suivant le plan $(O_1; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$

Remarque : Il ya deux configurations possibles qui permettent d'obtenir position de l'organe terminal dans cette position : la configuration "bras haut" ($\theta_2 \in (0, \pi)$) et la configuration "bras bas" ($\theta_2 \in (-\pi, 0)$).

- Calcul de θ_1
Il faut considérer les angles α et β

- Calcul de θ_2

- Calcul de θ_4

On définit donc le repère de l'organe terminal dans le repère de travail avec 2 configurations possibles suivant la valeur de ε :

$$\begin{cases} q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \\ q_3 = -z \\ q_4 = \theta - \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

On le voit, le calcul du MGI avec la méthode géométrique s'avère fastidieux même pour un robot possédant une géométrie simple.

Workspace

En prenant en compte les limites physiques des liaisons (encadrement des variables articulaires $q_{i\min} < q_i < q_{i\max}$, on définit le volume de travail.

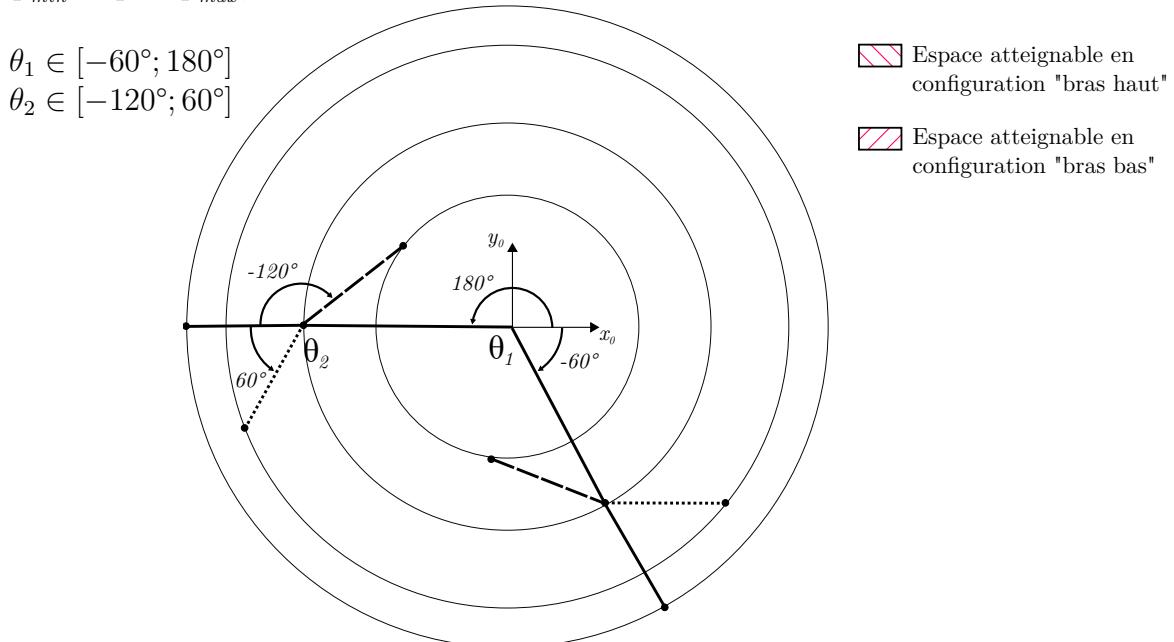


FIGURE 46 – espace de travail dans le plan $(O_1; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$

1.2 Méthode de Paul

Cette méthode nécessite de connaître le MGD au préalable (la matrice ${}^0\mathbf{T}_6$).

On cherche à exprimer chaque variable q1, q2, ..., qn en fonction de X, Y et Z et des dimensions du robots.

D'une manière générale, un robot à 6 ddl, on a :

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0\mathbf{T}_6 \iff \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & X \\ s_y & n_y & a_y & Y \\ s_z & n_z & a_z & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \\ &\iff \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & X \\ s_y & n_y & a_y & Y \\ s_z & n_z & a_z & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(q1,6)} & \mathbf{d}_{(q1,6)} & \mathbf{g}_{(q1,6)} & \mathbf{j}_{(q1,6)} \\ \mathbf{b}_{(q1,6)} & \mathbf{e}_{(q1,6)} & \mathbf{h}_{(q1,6)} & \mathbf{k}_{(q1,6)} \\ \mathbf{c}_{(q1,6)} & \mathbf{f}_{(q1,6)} & \mathbf{i}_{(q1,6)} & \mathbf{l}_{(q1,6)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tous les termes en gras sont connus. La méthode consiste à pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation précédente par les matrices ${}^i\mathbf{T}_{i-1}$ pour i variant de 1 à 6. Cela permet d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires q_i recherchées.

$$U_0 = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6$$

$$1. {}^1T_0 U_0 = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \rightarrow \text{identification de } q_1$$

$$2. {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 = {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \rightarrow \text{identification de } q_2$$

$$3. {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 = {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \rightarrow \text{identification de } q_3$$

$$4. {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 = {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \rightarrow \text{identification de } q_4$$

$$5. {}^5T_4 {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 = {}^5\mathbf{T}_6 \rightarrow \text{identification de } q_5$$

$$6. {}^5T_6 {}^5T_4 {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 U_0 = I_6 \rightarrow \text{identification de } q_6$$

1. Prémultiplication à gauche par 1T_0 :

$${}^1T_0 \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & X \\ s_y & n_y & a_y & Y \\ s_z & n_z & a_z & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1T_0 {}^0T_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6$$

$$\begin{bmatrix} s_x(q_1) & n_{x(q1)} & a_{x(q1)} & X_{(q1)} \\ s_y(q_1) & n_{y(q1)} & a_{y(q1)} & Y_{(q1)} \\ s_z(q_1) & n_{z(q1)} & a_{z(q1)} & Z_{(q1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6$$

$$\begin{bmatrix} s_x(q_1) & n_{x(q1)} & a_{x(q1)} & X_{(q1)} \\ s_y(q_1) & n_{y(q1)} & a_{y(q1)} & Y_{(q1)} \\ s_z(q_1) & n_{z(q1)} & a_{z(q1)} & Z_{(q1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(q2,6)} & \mathbf{d}_{(q2,6)} & \mathbf{g}_{(q2,6)} & \mathbf{j}_{(q2,6)} \\ \mathbf{b}_{(q2,6)} & \mathbf{e}_{(q2,6)} & \mathbf{h}_{(q2,6)} & \mathbf{k}_{(q2,6)} \\ \mathbf{c}_{(q2,6)} & \mathbf{f}_{(q2,6)} & \mathbf{i}_{(q2,6)} & \mathbf{l}_{(q2,6)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice de droite sont des **constantes** ou des fonctions des variables q_2, \dots, q_6 . Les éléments de la matrice de gauche sont des constantes ou des fonctions **uniquement de q_1** . Une identification terme à terme des deux membres de l'équation permet de réduire le problème à un système d'une ou de deux équations fonction de q_1 uniquement.

Les solutions de ces équations sont présentées dans le tableau 5, certains types ont une solution évidente, d'autres nécessitent quelques développements.

2. Prémultiplication à gauche par ${}^2\mathbf{T}_1$:

Le même procédé est utilisé pour trouver q_2 en pré-multipliant l'expression précédente par ${}^2\mathbf{T}_1$. Les éléments de la matrice de droite sont des **constantes** ou des fonctions des variables q_3, \dots, q_6 . Les éléments de la matrice de gauche sont des constantes ou des fonctions **uniquement de q_1 déjà connu et de q_2** .

... et ainsi de suite jusqu'à q_6 .

Type	Equation	Solution
Type 1	$A.r_i = B$	$r_i = \frac{B}{A}$
Type 2	$A.\sin(\theta_i) + B.\cos(\theta_i) = C$	<p>1) Si $A = 0$ et $B \neq 0$ et $C \neq 0$:</p> $\theta_i = \text{atan}2(\pm\sqrt{1 - (\cos(\theta_i))^2}, \cos(\theta_i))$ <p>2) Si $B = 0$ et $A \neq 0$ et $C \neq 0$:</p> $\theta_i = \text{atan}2(\sin(\theta_i), \pm\sqrt{1 - (\sin(\theta_i))^2})$ <p>3) Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $C = 0$:</p> $\theta_i = \text{atan}2(-B, A)$ $\theta'_i = \theta_i + \pi$ <p>4) Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $C \neq 0$:</p> $\sin(\theta_i) = \frac{AC + \varepsilon B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}$ $\cos(\theta_i) = \frac{BC - \varepsilon A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}$ $\theta_i = \text{atan}2(\sin(\theta_i), \cos(\theta_i))$ (avec $\varepsilon = \pm 1$)
Type 3	$X1.\sin(\theta_i) + Y1.\cos(\theta_i) = Z1$ $X2.\sin(\theta_i) + Y2.\cos(\theta_i) = Z2$	cf doc Solution équations TYPE pour Méthode de Paul
Type 4	$X1.r_j.\sin(\theta_i) = Z1$ $X2.r_j.\cos(\theta_i) = Z2$	cf doc Solution équations TYPE pour Méthode de Paul

TABLEAU 5 – *Solutions aux types d'équations rencontrés avec la méthode de Paul.* (r_i : prismatic joint variable, θ_i : revolute joint variable)

1.3 Méthode de Piper (pour les manipulateur à poignet sphérique)

Dans la pratique, les manipulateurs possédant un poignet de type rotule (ou sphérique) sont très répandus. Le centre du poignet est à l'intersection des axes de rotation concourants des trois dernières liaisons pivots du robot. L'origine du repère R6 lié au dernier corps peut être directement positionnée au centre de la rotule. Pour les bras à 6 DDL, il existe donc un découplage entre la position de ce point et l'orientation de l'effecteur :

- Le porteur donne la position du centre poignet. Ce point ne dépend donc que des trois premières variables articulaires q_1 , q_2 et q_3 .
- Le poignet donne l'orientation de l'organe terminal (pince, outil) qui ne dépend que des trois dernières variables articulaires q_4 , q_5 et q_6 .

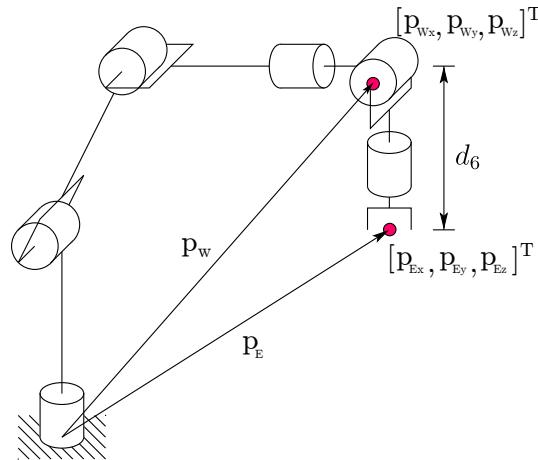


FIGURE 47 – Découplage Cinématique

Rappel :

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^0P_6 = {}^0\mathbf{T}_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

La position du centre du poignet P_W est définie juste par un offset de d_6 par rapport à la position de la pince.

$$\begin{bmatrix} P_{Wx} \\ P_{Wy} \\ P_{Wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{Ex} - d_6 r_{13} \\ P_{Ey} - d_6 r_{23} \\ P_{Ez} - d_6 r_{33} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, sur la base de ce découplage cinématique, le problème se sépare en deux problèmes à 3 équations et 3 inconnues et peut être résolu selon les étapes suivantes :

a. Position du poignet

Comme la position du poignet est confondue avec l'origine des repères 4, 5 et 6 on a :

$${}^0P_6 = {}^0P_4$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On utilise ensuite la méthode de Paul pour terminer la résolution, en multipliant successivement à gauche les membres de l'équation par 1T_0 puis 2T_1 . L'identification terme à terme des deux matrices permet de déterminer successivement les variables q_1 puis q_2 puis q_3 . Les membres de droite étant connus grâce au MGD.

$${}^1T_0 \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_1 {}^1T_0 \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2T_3 {}^3T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Orientation du poignet

$${}^0R_6 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$$

$${}^3R_0 \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = {}^3R_6$$

Les membres de gauche ne dépendent que de q_1, q_2 et q_3 . Comme ils sont connus grâce à la position du poignet, il ne reste donc plus qu'à identifier successivement les variables q_4, q_5 et q_6 en comparant terme à terme les matrices après multiplication à gauche par 4R_3 puis 5R_4 . Les membres de droite étant connus grâce au MGD.

$${}^4R_3 {}^3R_0 \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = {}^4R_6$$

$${}^5R_4 {}^4R_3 {}^3R_0 \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = {}^5R_6$$

Sixième partie

Modèle Différentiel Direct et Inverse d'un robot série

- Matrice Jacobienne • Torseurs cinématiques des liaisons • Singularités

Pré-requis :

- Savoir faire le calcul de dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables
- Être capable de formuler le torseur cinématique d'une liaison mécanique
- Calculer le rang d'un matrice

Modules recommandés :

- MATHS501 • MECA654
-

1 Modèle Différentiel Direct (MDD)

Le modèle cinématique différentiel décrit les variations infinitésimales dX des coordonnées opérationnelles en fonction des variations infinitésimales des coordonnées articulaires dQ :

Le **modèle cinématique direct** est une relation linéaire entre \dot{X} , vitesses des coordonnées opérationnelles et \dot{Q} , vitesses articulaires :

$$\dot{X} = J \cdot \dot{Q}$$

J est la matrice jacobienne (exprimée dans (\mathcal{R}_0)).

Elle est obtenue en dérivant le MGD en utilisant les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial q_j}$.

$$J =$$

1.1 Rappel : Matrice Jacobienne

Si $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ où \mathbf{y} et \mathbf{x} sont des vecteurs à n dimensions et $f(\mathbf{x})$ un groupe de n fonctions différentes.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

alors

$$J((x_1, \dots, x_n)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Le Jacobien permet donc de déterminer la pente (la variation) du vecteur \mathbf{y} en fonction d'un vecteur \mathbf{x} donné, étant donné les équations f .

D'un point de vue de cinématique inverse, le Jacobien met en relation la variation des positions et orientations en fonction de la variation des variables des articulations.

La matrice jacobienne est un outil puissant, elle sert notamment à :

- Déterminer des algorithmes pour le modèle géométrique inverse (le cas présent)
- Trouver les singularités
- Analyser la redondance
- Décrire la relation entre les forces appliquées à l'effecteur et les forces résultantes au niveau des articulations pour des efforts statiques
- Dériver les équations dynamiques du mouvement
- Développer des stratégies de contrôle dans l'espace opérationnel

2 Méthodes de détermination du Modèle Cinématique Direct

Il existe 2 matrices Jacobiennes :

- $J_a(q)$: La **jacobienne analytique**, généralement calculée en utilisant une représentation explicite de l'orientation comme les angles d'Euler ou les angles nautiques. Néanmoins, les représentations de l'orientation par trois angles sont mal adaptées pour calculer les efforts articulaires.
- $J_c(q)$: La **jacobienne géométrique** ou **jacobienne de base**.

2.1 Matrice Jacobienne analytique : $J_a(q)$

Pour un robot 6 axes à 6 ddl et une orientation définie par les angles de cardan, la relation s'écrit :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial x}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{\partial t} \quad (\text{avec : } \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t})$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{\partial t}$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{\partial t}$$

⋮

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial \gamma}{\partial q_6} \cdot \frac{\partial q_6}{\partial t}$$

soit sous forme matricielle :

Exemple : Obtention par dérivation du MGD - Robot SCARA

Rappel : MGD du robot SCARA

$$\left| \begin{array}{l} x = r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ y = r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ z = r_3 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 \end{array} \right.$$

Différentiation du MGD

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q_1} &= & \frac{\partial y}{\partial q_1} &= \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} &= & \frac{\partial y}{\partial q_2} &= \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} &= & \vdots & \\ \frac{\partial x}{\partial q_4} &= & \frac{\partial \theta}{\partial q_4} &= \end{aligned}$$

Modèle Différentiel Direct

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial x}{\partial q_4} \dot{q}_4 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} =$$

$$\dot{y} =$$

$$\dot{z} =$$

$$\dot{\theta} =$$

Rappel : Les notations étant généralement lourdes, on adopte un certain nombre de conventions pour simplifier les écritures :

$$\left| \begin{array}{l} s_i = \sin(\theta_i) \\ s_i = \cos(\theta_i) \\ s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \\ c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j) \end{array} \right.$$

2.2 Matrice Jacobienne géométrique : $J_c(q)$

Le calcul de la matrice Jacobienne de base, aussi connue sous le nom de matrice Jacobienne géométrique est obtenue sans calcul de la dérivée du MGD.

Elle relie le torseur cinématique de l'organe terminal \mathcal{V}_n (formé des éléments de réduction : vecteurs des vitesses de translation et de rotation \mathbf{v}_n et $\boldsymbol{\omega}_n$ du repère de l'organe terminal (\mathcal{R}_n) par rapport au référentiel de base (\mathcal{R}_0)) et les vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\Leftrightarrow$$

Les vitesses de translation et de rotation du segment i , peuvent être exprimées comme une fonction des Jacobiens géométriques et des dérivées des variables articulaires :

où \mathbf{v}_i et $\boldsymbol{\omega}_i$ sont les contributions de la vitesse de l'articulation i respectivement à la vitesse de translation et de rotation de l'effecteur lorsque toutes les autres articulations sont immobiles.

a. Vitesse de translation

$$\mathbf{J}_{v_i} = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

b. Vitesse de rotation

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

L'axe de l'articulation est notée \mathbf{z}_{i-1}

c. Combinaison des Jacobiens de vitesse et de rotation

$$\mathbf{J}_i =$$

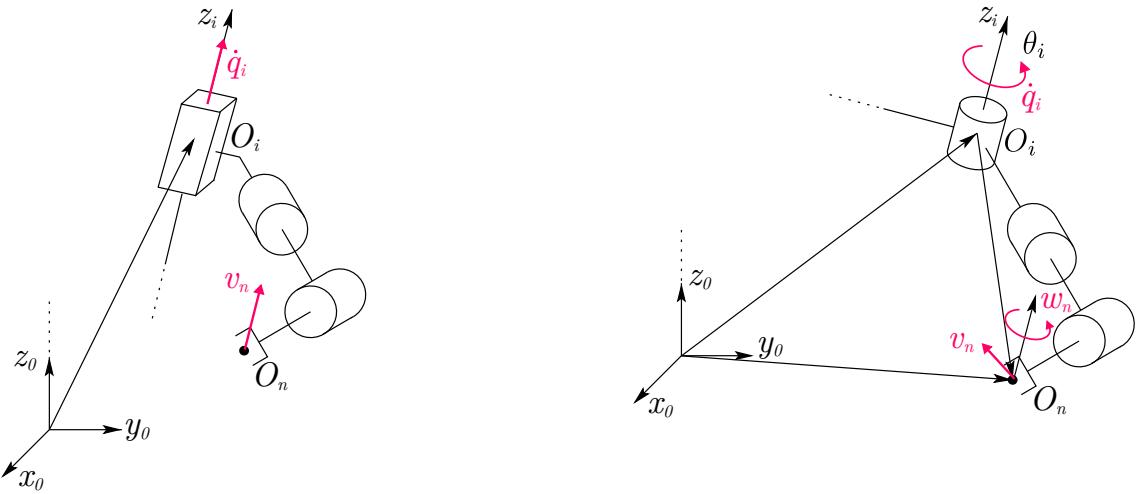


FIGURE 48 – Mouvement de l'organe terminal engendré par le segment i .
 (2 cas sont représentés ici selon que l'articulation soit prismatique ou rototoïde).

Pour un manipulateur à n segments, le Jacobien géométrique peut être partitionné en vecteurs colonnes :

$$\text{avec } {}^0 J_i = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

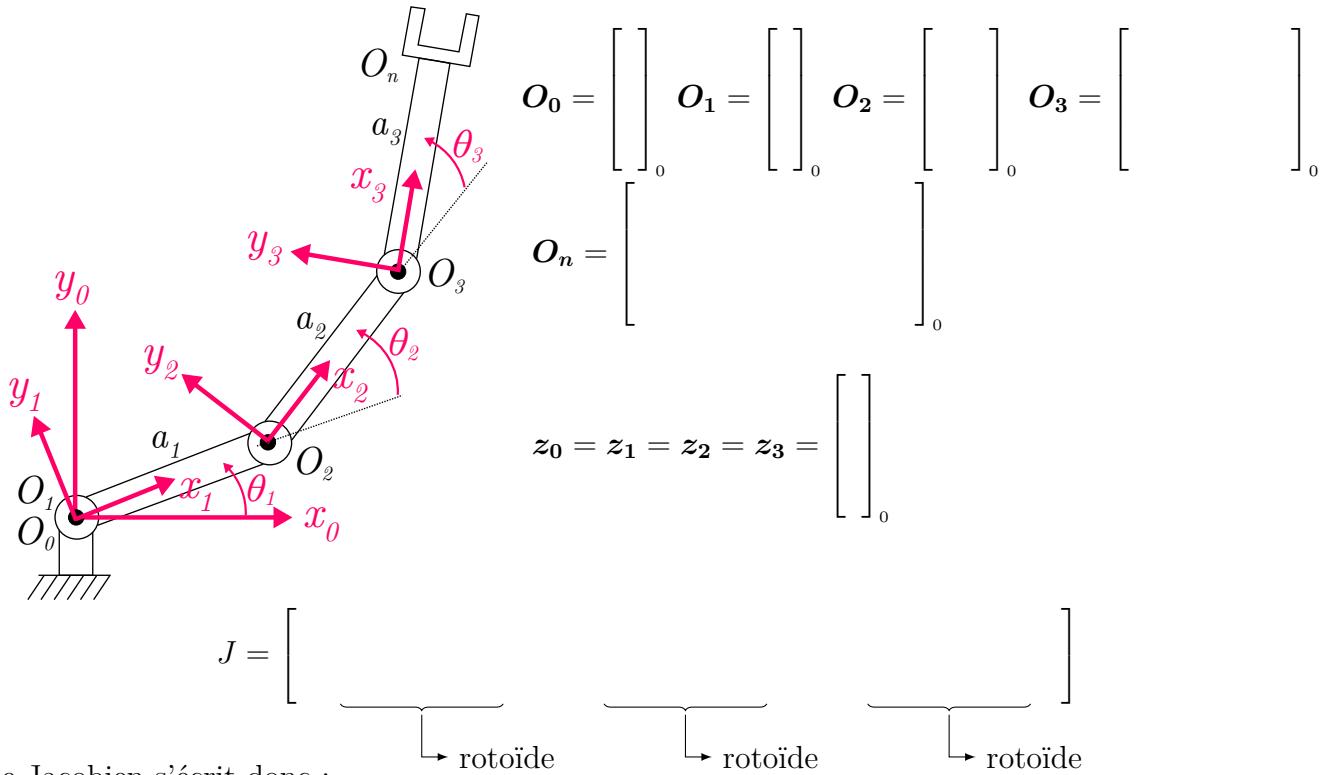
On obtiendra ensuite les vitesses des coordonnées opérationnelles par :

Remarques Changement de Repère du Jacobien $J(q)$ Si on connaît la matrice jacobienne ${}^i J(q)$ dans le repère (\mathcal{R}_i) et que l'on souhaite l'exprimer dans le repère (\mathcal{R}_0) on effectue le changement de repère tel que :

où ${}^0 R_i$ est la matrice de rotation entre les repères orthonormés (\mathcal{R}_0) et (\mathcal{R}_i) exprimée dans (\mathcal{R}_0)

Exemple : Bras articulé à 3 segments en 2D

Calculez le Jacobien du manipulateur du bras articulé suivant. On utilisera comme technique l'expression directe de toutes les coordonnées dans le repère de base (\mathcal{R}_0).



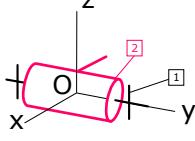
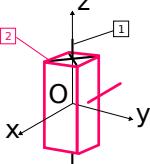
$$J = \left[\begin{array}{c} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{array} \right]$$

Les 3 premières lignes donnent les équations de la vitesse de translation de l'origine O_3 par rapport à la base (on voit aisément qu'il n'y a pas de mouvement dans la direction \vec{z}_0). Les 3 dernières lignes représentent la vitesses de rotation du repère (\mathcal{R}_3) par rapport à la base (rotation de $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$ autour de l'axe \vec{z}_0).

2.3 Méthode Cinématique

Le mouvement de l'organe terminal peut également être défini par sa vitesse instantanée et sa vitesse de rotation instantanée sous la forme d'un torseur cinématique. La matrice Jacobienne permet d'établir la relation entre ce torseur et les positions et vitesses articulaires \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$.

- Écriture des torseurs cinématiques associés aux liaisons, **dans le même repère**.
 - Utilisation du théorème de la composition des vitesses :
- $$\mathcal{V}_{0/n} = \mathcal{V}_{0/1} + \mathcal{V}_{1/2} + \cdots + \mathcal{V}_{n-1/n}$$
- pour obtenir le torseur $\mathcal{V}_{0/n}$ en fonctions des variables articulaires q_i et \dot{q}_i
- Expression de $\mathcal{V}_{0/n}$ en fonctions des x_j
 - Identification

Liaison	Schéma cinématique	Torseur cinématique
Rotoïde de centre A d'axe \vec{y}		${}^0_A \{ \mathcal{V}_{1/0} \} = {}^0_A \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega}_{1/0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = {}^0_A \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\}$
Prismatique de centre A d'axe \vec{z}		${}^0_A \{ \mathcal{V}_{1/0} \} = {}^0_A \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{(A)1/0} \end{matrix} \right\} = {}^0_A \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\}$

a. Rappel

Torseur cinématique :

Composition de vitesse :

Composition de vitesse de rotation instantanée :

Composition de torseurs cinématique :

Transport des moments :

Le mouvement de l'organe terminal est complètement défini par le torseur cinématique ${}^0 \{ \mathcal{V}_{n/0} \}_P$. On cherche donc à établir la relation entre la vitesse de l'organe terminal et les positions et vitesses articulaires \mathbf{q}_i et $\dot{\mathbf{q}}_i$ sous la forme suivante :

0J est la matrice jacobienne dite géométrique (ou encore jacobienne de base) pour ne pas la confondre avec la matrice jacobienne analytique.

Le torseur ${}^0\{\mathcal{V}_{n/0}\}_P$ peut s'obtenir avec les lois de composition :

$${}^0\{\mathcal{V}_{n/0}\}_P = {}^0\{\mathcal{V}_{n/n-1}\}_P + {}^0\{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\}_P + \cdots + {}^0\{\mathcal{V}_{2/1}\}_P + {}^0\{\mathcal{V}_{1/0}\}_P$$

On exprime alors chaque torseur ${}^0\{\mathcal{V}_{i/i-1}\}_P$ à l'aide de la matrice de changement de base ${}^0T_{i-1}$ de (\mathcal{R}_0) à (\mathcal{R}_{i-1}) telle que :

$${}^0T_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} & 0 \\ 0 & {}^0R_{i-1} \end{bmatrix}$$

et donc :

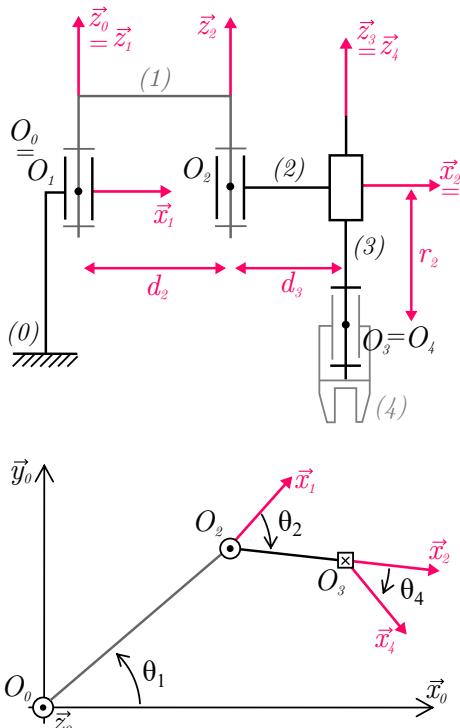
$${}^0\{\mathcal{V}_{i/i-1}\}_P = {}^0T_{i-1} \cdot {}^{i-1}\{\mathcal{V}_{i/i-1}\}_P$$

$${}^0\{\mathcal{V}_{n/0}\}_P = {}^0T_{n-1} \cdot {}^{n-1}\{\mathcal{V}_{n/n-1}\}_P + {}^0T_{n-2} \cdot {}^{n-2}\{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\}_P + \cdots + {}^0T_1 \cdot {}^1\{\mathcal{V}_{2/1}\}_P + {}^0T_0 \cdot {}^0\{\mathcal{V}_{1/0}\}_P$$

finalement :

$${}^0\{\mathcal{V}_{i/i-1}\}_P = \sum_{i=0}^{n-1} {}^0T_{i-1} \cdot {}^i\{\mathcal{V}_{i+1/i}\}_P$$

Exemple : Modèle cinématique direct du Robot SCARA



$${}^1\{\mathcal{V}_{0/1}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ o_1 \\ o_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ o_1 \\ o_1 \end{Bmatrix}$$

$${}^2\{\mathcal{V}_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ o_2 \\ o_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ o_2 \\ o_2 \end{Bmatrix}$$

$${}^3\{\mathcal{V}_{2/3}\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ o_3 \\ o_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ o_3 \\ o_3 \end{Bmatrix}$$

$${}^4\{\mathcal{V}_{3/4}\} = \begin{Bmatrix} 4 \\ o_4 \\ o_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ o_4 \\ o_4 \end{Bmatrix}$$

Expression des torseurs cinématiques au point O_4 :

$$-\underset{O_4}{\underset{o_4}{\text{---}}}\{\mathcal{V}_{0/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} + O_4 \vec{O}_1 \wedge \omega_{01} = \\ \quad \quad \quad (0) \\ = \\ \quad \quad \quad (0) \end{array} \right| \wedge \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| \right\}$$

$$-\underset{O_4}{\underset{o_4}{\text{---}}}\{\mathcal{V}_{1/2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} + O_4 \vec{O}_2 \wedge \omega_{12} = \\ \quad \quad \quad (0) \\ = \\ \quad \quad \quad (0) \end{array} \right| \wedge \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| \right\}$$

$$\Rightarrow \underset{O_4}{\underset{o_4}{\text{---}}}\{\mathcal{V}_{0/4}\} = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \cdot \vec{z}_0 \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad O_4 \end{array} \right| \right\}$$

$$\underset{O_4}{\underset{o_4}{\text{---}}}\{\mathcal{V}_{0/4}\} = \left\{ \begin{array}{l} (0) \\ \quad \quad \quad | \\ (0) \end{array} \right| \right\}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \left[\quad \quad \quad \right] \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}$$

3 Modèle Cinématique Inverse

Ce modèle est calculable à condition que J soit inversible (ce qui n'est pas toujours le cas).

Si $D_r = m$, J est une matrice carrée et si $\text{Det}(J) \neq 0$, alors le système est inversible.
Le modèle cinématique inverse peut donc s'écrire :

$$\dot{Q} = J^{-1} \cdot \dot{X}$$

Il s'obtient :

- Par dérivation du modèle géométrique direct. On obtient les termes de la matrice Jacobienne sous forme explicite.
- Par une méthode cinématique en utilisant les théorèmes de composition des vitesses.

4 Efforts statiques

L'interaction d'un robot avec son environnement produit des forces et des moments sur l'organe terminal (ou l'outil). Ceux-ci à leur tour vont produire des forces et des couples au niveau des articulations.

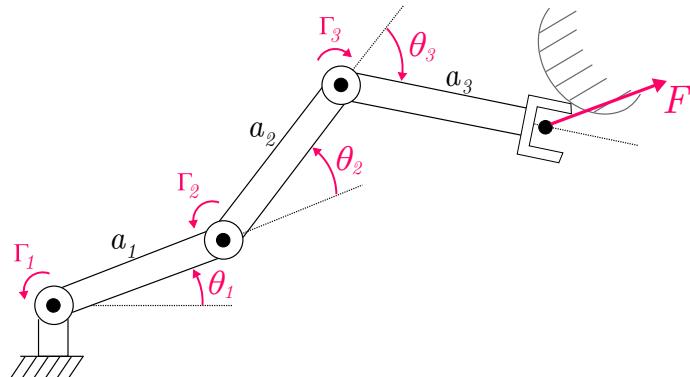
- Les couples sont transmis si les articulations sont rotoïdes,
- Les forces sont transmises si les articulations sont prismatiques.

Le vecteur des efforts sur les articulations et le vecteur des efforts statiques sur l'organe terminal sont liés (uniquement à vitesse constante) par la transposée du jacobien géométrique :

avec $\Gamma : \text{le vecteur } (nx1) \text{ des efforts exercés par les actionneurs sur les articulations du robot,}$
 $\gamma_e = (F_x, F_y, F_z, n_x, n_y, n_z)^T : \text{le vecteur des efforts statiques (forces et moments) agissant sur l'effecteur.}$

Exemple : efforts statiques sur un bras articulé à 3 segments en 2D

Calculez le couples des efforts statiques transmis au niveau des articulations.



$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} F_x \\ F_y \\ F_z \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{array} \right]$$

5 Singularités

Le terme **singularité** fait penser à un comportement ou un état non souhaitable, peut être dangereux. Ce comportement singulier du robot a lieu dans des situations bien terminées.

En mathématique nous parlons de matrice singulière quand le déterminant de cette dernière est nul et qu'elle devient non inversible (Le système d'équations associé n'a ainsi pas de solutions). C'est ce qui peut arriver lorsque l'on essaye de résoudre le modèle cinématique inverse.

$$\dot{Q} = J^{-1} \cdot \dot{X}$$

Lorsque $\det(J) = 0$, cette dernière n'est pas inversible et le robot est en singularité.

Les singularités représentent des configurations pour lesquelles certains points de l'espace ne sont pas atteignables par le robot, contraint par ses moteurs, la rigidité de ses axes et l'impuissance des équations à multiples inconnues. La mobilité du robot est réduite.

- A la position singulière, le robot sériel perd un (ou plusieurs) degrés de liberté,
- la transformation de coordonnées inverse possède parfois un nombre infini de solutions.
- A proximité d'une singularité, les vitesses limites de l'organe terminal peuvent correspondre à des valeurs infinies pour les vitesses dans les articulations,
- les couples d'efforts limites aux articulations peuvent correspondre à des forces ou à des moments infinis sur l'organe terminal.

Il existe deux types de singularités :

- Les **singularités de frontière** qui se produisent lorsque le manipulateur est étiré ou rétracté. Ce n'est pas un véritable inconvénient, car elles peuvent être évitées à condition que le manipulateur ne soit pas amené aux limites de son espace de travail accessible.
- Les **singularités à l'intérieur du volume de travail** qui apparaissent lors de l'alignement de deux ou plus axes du robot, ou pour des configurations particulières de l'effecteur. Elles sont critiques parce que on peut les rencontrer partout dans le volume de travail.

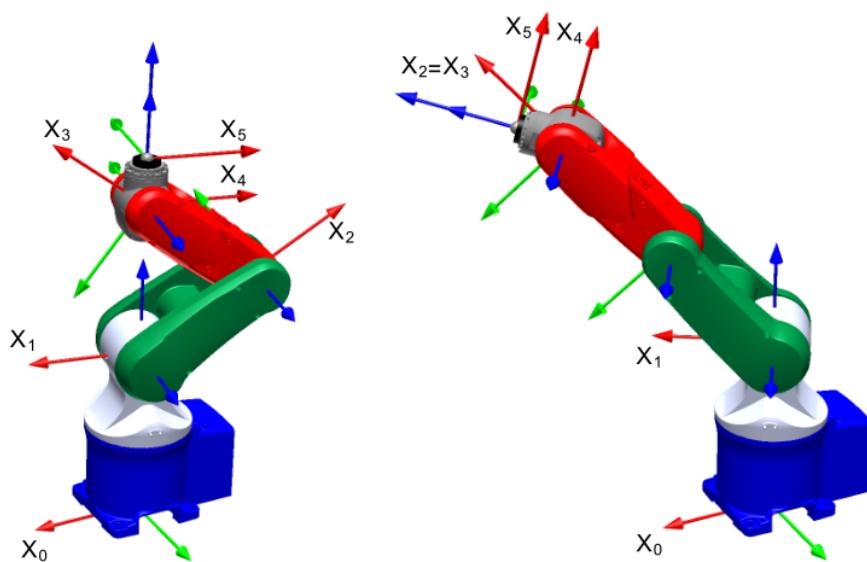


FIGURE 49 – Singularités 6axis

Le rang r de la matrice jacobienne n'est pas nécessairement constant. Il va dépendre des configuration \mathbf{q} . On peut dire que le rang du Jacobien corresponds au nombre de d.d.l. de l'organe terminal. Les configurations où le Jacobien n'a pas de rang plein[‡] sont critiques. Elles représentent les singularités cinématiques. Si $r < m$; on parle alors de singularité d'ordre $m - r$.

Avec une matrice jacobienne J , le rang de J est toujours tel que :

$$\text{rang}(J) \leq \min(m,n)$$

- Si $m = n$ le robot est non redondant. Il dispose du nombre juste de liaisons permettant de donner le nombre m de d.d.l. à l'organe terminal.
- Si $m < n$ le robot est redondant d'ordre $n - m$. Il dispose de plus d'articulations qu'il n'en faut pour donner le nombre m de d.d.l. à l'organe terminal.

Pour un robot 6 axes classique, la matrice J est carrée, les singularités sont données par les zéros de :

a

Pour un robot redondant, les singularités sont données par les zéros de :

-
- a.* Si $\det(J) = 0$ la matrice Jacobienne est singulière et donc non inversible.

Exemple : Positions singulières du Robot SCARA

$$J = \begin{bmatrix} -r_1 s_1 - r_2 s_{12} & -r_2 s_{12} & 0 & 0 \\ r_1 c_1 + r_2 c_{12} & r_2 c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det J =$$

Positions singulières \rightarrow

Lorsqu'un robot s'approche d'une configuration singulière, $\det(J)$ devient de plus en plus faible. Singularities usually (but not always) correspond to points on the boundary of the manipulator workspace, that is, to points of maximum reach of the manipulator.

Near singularities there will not exist a unique solution to the inverse kinematics problem. In such cases there may be no solution or there may be infinitely many solutions

- Singularité du porteur***
- Singularité du poignet***

[‡]. Une matrice de plein rang ou matrice régulière est une matrice carrée dont toutes les colonnes et les lignes sont linéairement indépendantes. Une matrice régulière est donc une matrice carrée dont le rang est égal à l'ordre.

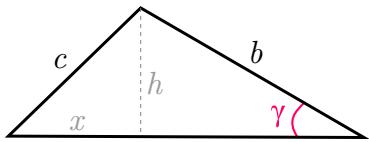
0. PROBLEMS : Maths Reminder

0.1 Trigonométrie

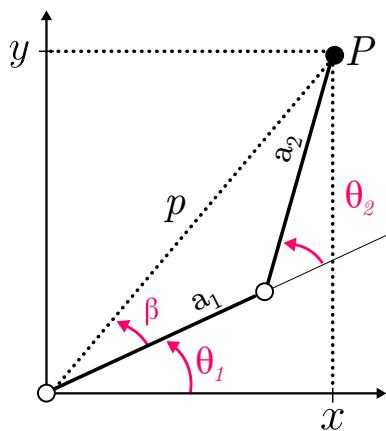
Soit le triangle quelconque de cotés : a, b, c .

Exprimez x en fonction de a, b et γ .

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle de gauche, exprimez c^2 en fonction de a, b et γ . Comment s'appelle cette formule ?



0.2 Géometrie



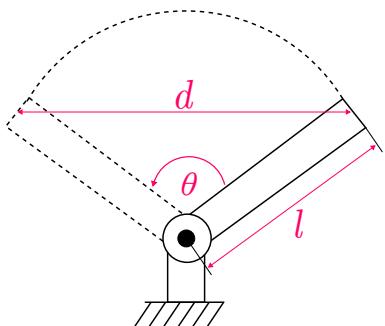
En utilisant la loi des cosinus, exprimer l'angle θ_2 en fonction des coordonnées du point $P = [x, y]^T$, de a_1 et de a_2 . En utilisant l'angle β et en l'exprimant en fonction des coordonnées du point $P = [x, y]^T$, de a_1 et de a_2 , trouver l'angle θ_1 .

1.3 Géometrie

En reprenant la figure de l'exercice 1-1, et en considérant les angles θ_1 et θ_2 connus, exprimer les coordonnées x et y du point P .

En considérant $a_1 = 1$ et $a_2 = 1$, donner les coordonnées du point P , pour $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

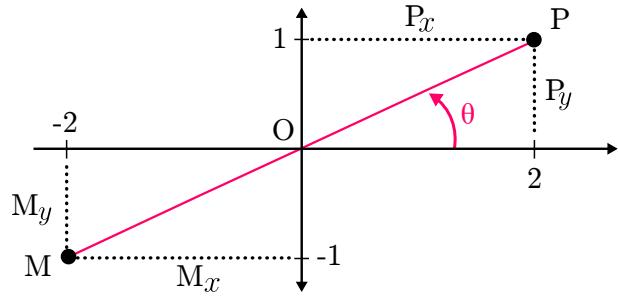
1.4 Géometrie



En utilisant la loi des cosinus, montrer que la distance d est donnée par : $d = l\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$.

Avec un contrôleur 10 bits et avec $l = 1m$, $\theta = 90^\circ$, quelle est la résolution d'un segment linéaire ? et d'un segment de rotation ?

0.5 fonction atan2



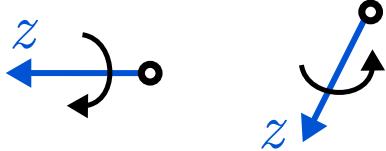
En utilisant les fonctions atan et atan2 et les coordonnées du point P, calculer l'angle θ .

Faire de même avec les coordonnées du point M.

Qu'en déduisez vous ?

0.6 Direction of Rotation

What is the direction of rotation around the z axis for each case ?



1. PROBLEMS : Introduction to Robotics

1.1 Which of the following laws is Asimov's first and most important law of robotics ?

- robots must make business a greater profit
- robots must follow the directions given by humans
- robots must never take actions harmful to humans
- none of the above

1.2 A 4 DOF robot arm is generally more expensive than a 6 DOF True False

1.3 What is the brand of this robotic arm ?



- Stäubli
- KUKA
- FANUC
- UR
- YASKAWA
- BBA

1-4 What is the difference between an automaton and a robot ?

1-5 Mechatronics definitions

What is mechatronics ? What is the difference between mechatronics and robotics ?

1-6 Robot Manufacturer

Which is the world's largest robot manufacturer ?

What country are the robot manufacturers ABB, Stäubli, Kuka and Denso from ?

1-7 Types of robots

Qu'est ce qu'un COBOT ?

Donnez des applications industrielles où les robots de types portiques (gantry robot en anglais) sont utilisés.

1-8 Notion of price

Quelle est la gamme de prix d'un robot FANUC de la série M10 ? Du cobot Franka Emika ?

1-9 Users of industrial robot

Which industry is the leading user of robots ?

1-10 Le marché français / Le marché allemand

Quel est le taux de robotisation en France ? et en Allemagne ?

1-11 Economics

What was the world's first digital, programmable robot ?

- Atlas (Boston Dynamics)
- The Stanford Arm
- Unimate
- The FAMULUS (Kuka)

In Europe, which is the most robotized country ?

- Swiss
- Germany
- France
- Austria
- Italy

1-12 Économie

Calculez le temps de cycle et le taux de production d'une cellule robotisée d'une seule machine pour un poste de 8 heures si la disponibilité du système est de 90%.

Déterminez également le pourcentage d'utilisation de la machine et du robot.

Données :

Temps de traitement de la machine : 30 s

Le robot récupère la pièce du convoyeur : 3.0 s

Le robot déplace la pièce sur la machine : 1.3 s

Le robot charge la pièce sur la machine : 1.0 s

Le robot décharge la pièce de la machine : 0.7 s

Le robot déplace la pièce sur le convoyeur : 1.5 s

Le robot met la pièce à la sortie convoyeur : 0.5 s

Le robot se déplace du convoyeur de sortie au convoyeur d'entrée : 4.0 s

1–13 Calculating ROI and Payback Period for Robotic Investment

A manufacturing company is considering the purchase of a robotic arm to automate part of its production line. The robotic arm costs 150 k€ and is expected to generate an annual cost savings of 50 k€ by reducing labor costs and increasing efficiency. The expected lifespan of the robotic arm is 5 years.

1. Calculate the Return on Investment (ROI) for the robotic arm.
2. Determine the Payback Period for this investment.
3. If the company expects to save an additional 10 k€ annually due to increased production output starting from the second year, how would this affect the ROI and Payback Period ? Provide your calculations and explain the impact.

1–14 Délai de récupération

Une entreprise envisage de remplacer une opération de peinture manuelle par un système robotique. Déterminez le délai de récupération pour une équipes.

- Le système coûte 160 k€, (incluant les capteurs, les pinces et autres accessoires).
- Le coût annuel de maintenance et d'exploitation du système de robot sur une seule équipe de travail est de 10 k€.
- L'investissement de la société est éligible à un crédit d'impôt de 20 k€ du gouvernement dans le cadre de son programme d'investissement technologique.
- Le robot remplacera deux opérateurs. Le taux horaire d'un opérateur est de 20 €, avantages sociaux compris. Un opérateur travaille 250 jours par ans. Il n'y a pas d'augmentation du taux de production.

1–15 Cycle Time and Production Rate in Robotic Systems

A manufacturing facility uses a robotic arm to assemble widgets. The robot performs the following operations in sequence :

1. Pick and Place : 2 seconds
 2. Welding : 3 seconds
 3. Quality Check : 1 second
-
1. Calculate the Cycle Time : Determine the total cycle time for the robotic arm to complete one full assembly cycle of a widget.
 2. Determine the Production Rate : If the manufacturing facility operates 8 hours a day, calculate the production rate (widgets per hour) based on the cycle time you calculated.
 3. Impact of Improvements : If the facility implements a new welding machine that reduces the welding time by 1 second, what will be the new cycle time and the updated production rate ?

2. ROBOTIC ARMS : CHARACTERISTICS AND ARCHITECTURES

2.1 Documentation technique

D'après la fiche technique du bras robot TX200 de Stäubli, déterminer :

- Le nombre d'axes
- La charge maximale transportable
- La répétabilité de positionnement
- Le poids
- Le rayon d'action
- La vitesse angulaire maximale des deux premiers axes
- Modes de fixation
- Le volume de travail

2.2 Caractéristiques de robots

Sur une ligne montage de voiture, peut on utiliser un Kuka KR30 pour manipuler un châssis ?
Donnez un modèle de robot KUKA, ABB et Kawasaki qui ont une charge de travail pouvant aller jusqu'à 15 Kg.

2.3 Répétabilité et Justesse

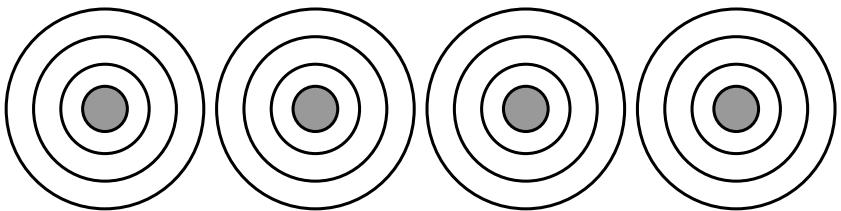
Pourquoi la justesse est-elle généralement inférieure à la répétabilité ?

Pourquoi la justesse n'est pas constante partout dans l'espace de travail ?

Pour un robot, pourquoi la répétabilité est elle beaucoup plus importante que la justesse ?

Illustrez un système :

- non juste et non répétable
- juste, mais non répétable
- répétable, mais non juste
- juste et répétable



2.4 Répétabilité

Quel est l'ordre de grandeur de la répétabilité d'un bras robotisé ?

2.5 Résolution

Pourquoi la résolution des axes linéaires est généralement plus élevée que celle des axes de révolution ?

2.6 Préhenseur

On monte en bout d'un bras, une pince parallèle Schunk modèle EGP 40-N-S-B, avec un coefficient de friction de 0.15. Peut on soulever sans danger une pièce de 0.8 kg avec une accélération de $12m/s^2$?

2.7 Vacuum cup gripper

A vacuum cup gripper is used to lift flat plates of stainless steel weighing 50 kg. The gripper will utilize two suction cups of diameter 100 mm. If the friction coefficient is 0.1 and factor of safety is 2.0, determine the negative pressure required to lift the weight

2.8 Charge

Quelle valeur d'accélération faut il ne pas dépasser pour soulever une pièce de 28 kg avec un bras robot RX160-HD ?

2.9 Which of the following terms IS NOT one of the five basic parts of a robot ?

- end effector peripheral tools sensor controller

2.10 Architecture

Quels sont les éléments qui composent un robot ? (En français et anglais)

2.11 Variables

Les coordonnées suivantes : $[100 \text{ mm}, 55 \text{ mm}, 33^\circ]^T$, son composées de variables

- opérationnelles
- articulaires
- cinématiques
- configurationnelles

2.12 Architecture

- Un robot sériel est une structure à chaîne cinématique fermée.
- En général, un robot angulaire est plus précis qu'un robot cartésien.
- En général, un robot parallèle est plus rigide qu'un robot sériel.
- Un robot redondant possède plus de degrés de liberté que de moteurs.

2.13 Structure

For a robot unit to be considered a functional industrial robot, typically, how many degrees of freedom would the robot have ?

2.14 What is standard form of SCARA ?

- Selective Compliance Articulated Robot Arm
- Simple Compliance Articulated Robot
- Single Compliance Articulated Robot
- Single Circular Articulated Robot Arm

2.15 What is/are the disadvantages of SCARA ?

- Limited applications
- Height axis is rigid
- Large work area
- none

2.16 What is/are the main drawbacks of SCARA ?

- Low speed
- Low repeatability
- Limited payloads
- none

2.17 The full form of Cobots is

- Co-operative Robots
- Collaboration Robots
- Collaborative Robots
- Co-operation Robots

2.18 What type of robot is this ?



2.19 The full form of AGV is

- Automated Grouped Vehicles
- Alternative Guided Vehicles
- Automatic Guided Vehicles
- All time Guided Vehicles

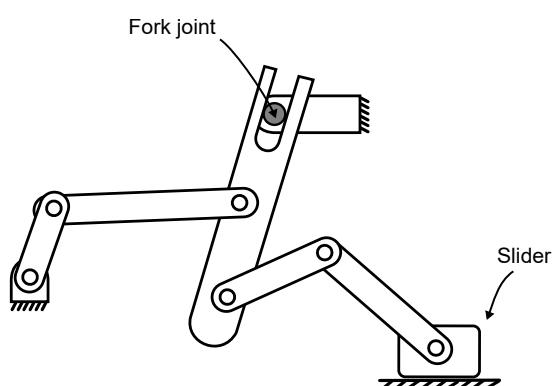
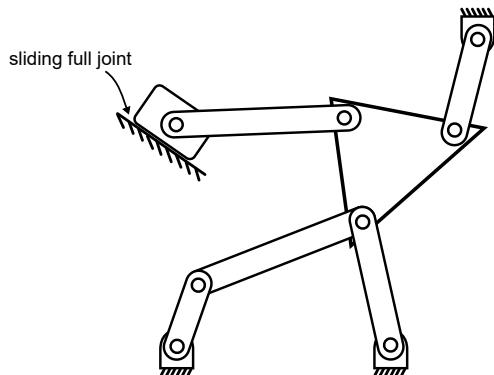
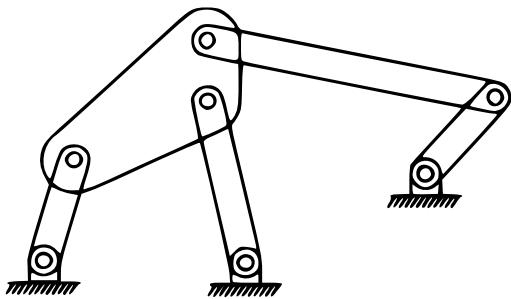
2.20 The name for the space inside which a robot unit operates is called ?

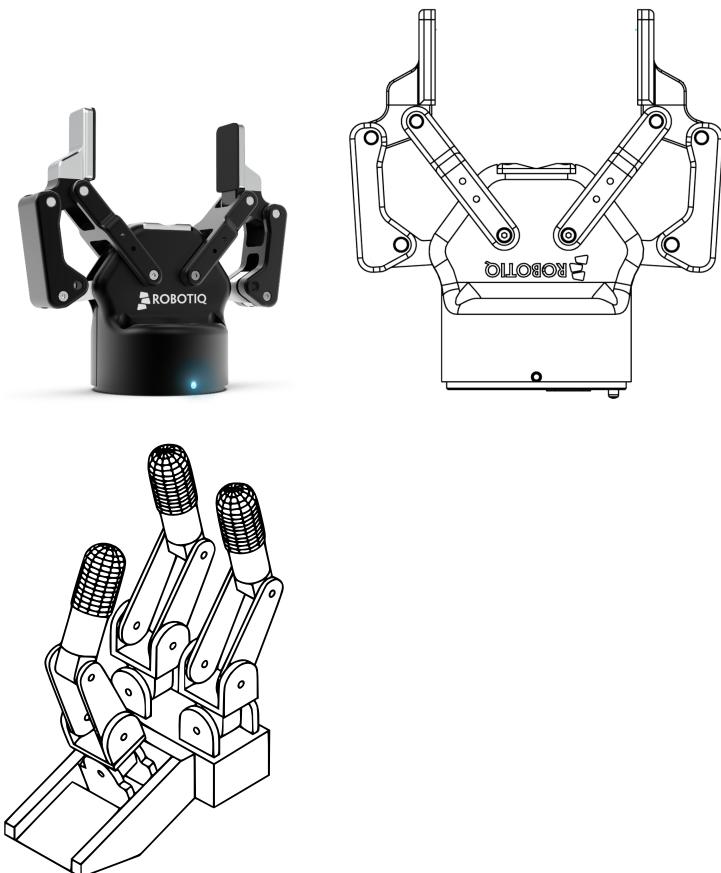
- Spatial base
- Exclusion zone
- Workspace
- Task space
- Operational space

2.21 This is the maximum distance a robot can reach within its workspace envelope.

- Payload
- Precision
- Reach
- Repeatability

2.22 DOF : Determine the number of degrees of freedom for the following mechanisms

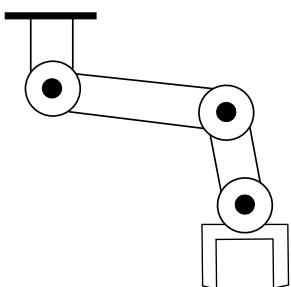




2.23 Redundancy : What are the interests of a redundant robot ?

2.24 Redundancy : Are these robot redundant ?

QUESTION



2.25 Architecture

Indiquer les robots à architecture parallèle.

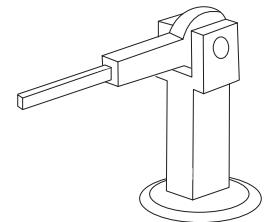
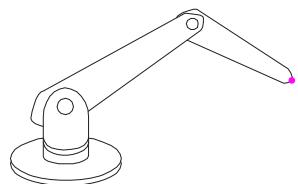
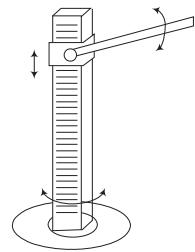
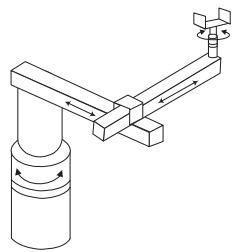


2.26 In arm configuration, a PPP joints arrangement is called as

- Polar configuration
- Cylindrical configuration
- Cartesian configuration
- Wrist configuration

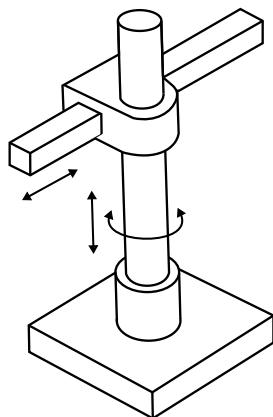
2.27 Workspace

Draw the approximate workspace for the following robot. Assume the dimensions of the base and other parts of the structure of the robot are as shown.



2.28 Workspace

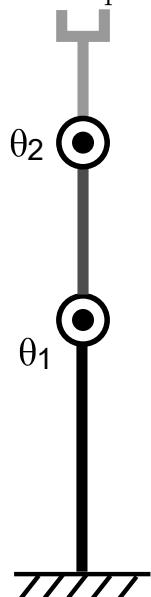
Draw the workspace this manipulator. How is this kind of robot called ?



2.29 Workspace

A 2 DOF robot arm is represented here in the following position $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$.

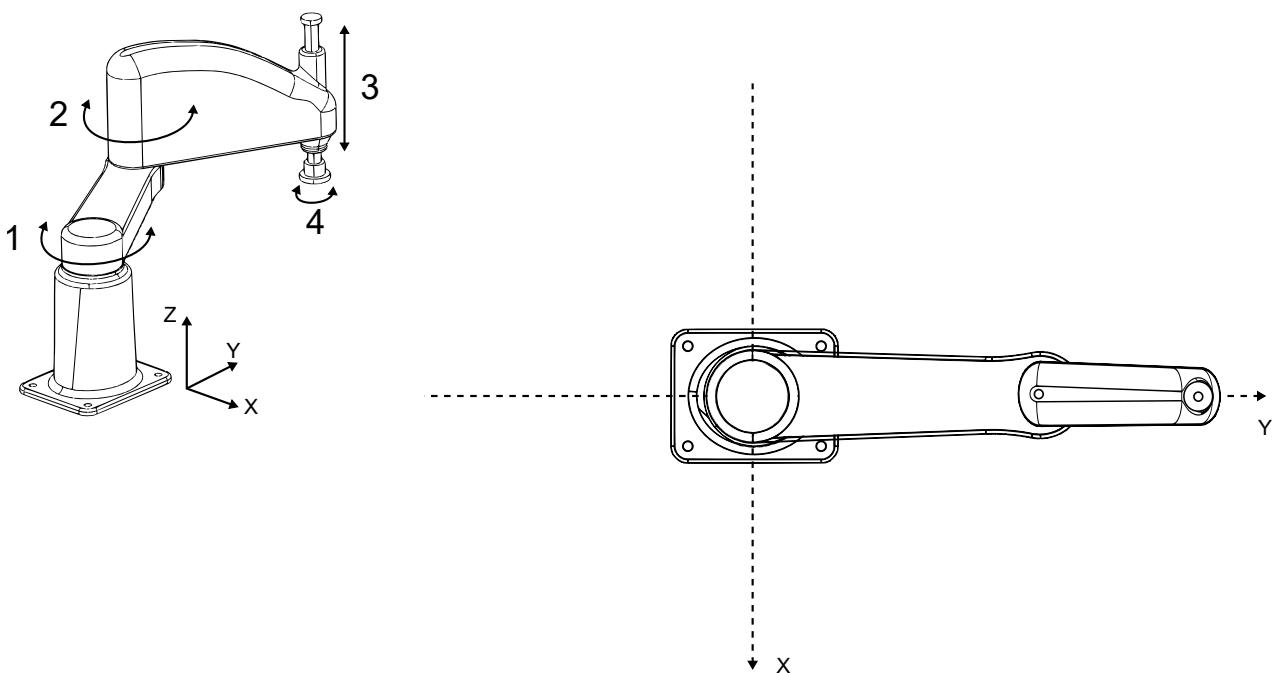
Draw the workspace knowing that $\theta_1 = [0^\circ, 90^\circ]$, $\theta_2 = [0^\circ, 45^\circ]$.



2.30 Workspace SCARA Stäubli

A SCARA robot arm is represented here in the following position $Q = [0,0,0,0]$.

Draw the workspace knowing that $\theta_1 = [0^\circ, 220^\circ]$, $\theta_2 = [0^\circ, 160^\circ]$ and $\theta_3 = [-45^\circ, +45^\circ]$.



3. PROBLEMS : PYTHON PROGRAMMING

3.1 Python : Matrix definition

Create and print out the matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 12 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ and the matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 6 & 5 & 0 \\ 9 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Check that the product : $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 159 & 59 & 73 \\ 185 & 62 & 103 \\ 50 & 36 & 22 \end{bmatrix}$

3.2 Python : Symbolic computation

1. Create the matrixes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha) & 0 \\ 1 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and the matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 1 & \cos(\theta) \\ -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Derive and simplify the product $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Check that $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(2\alpha)}{2} & -\cos(\alpha) & x \\ x & x & x \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

3. Give the numerical result of \mathbf{C} for $\alpha = 0.2$ rad, and $\theta = \frac{\pi}{2}$

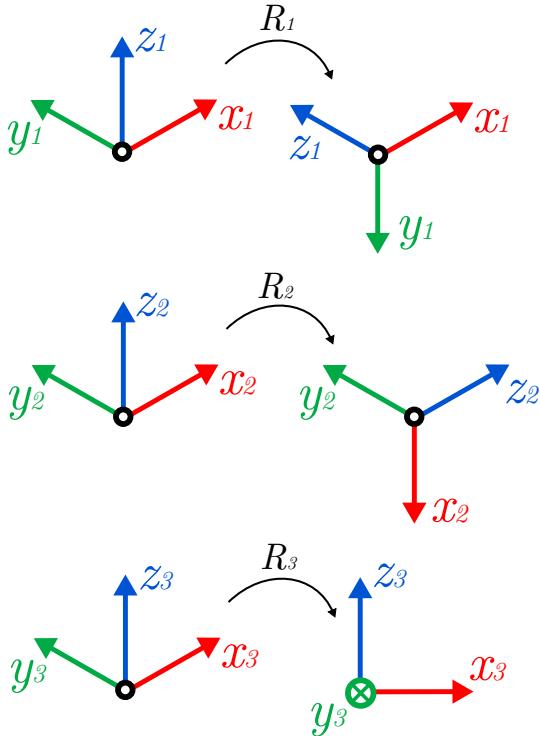
3.3 Python : Rotation sequence

Workout the result of the following rotation sequence : $\mathbf{R}_{XZY} = \mathbf{R}_Y(40^\circ) \cdot \mathbf{R}_Z(-\frac{\pi}{2}) \cdot \mathbf{R}_X(\frac{\pi}{2})$

4. PROBLEMS : SPATIAL DESCRIPTION AND TRANSFORMATIONS

4.1 Rotating Frames

Give the axis and angle of rotation of the 3 independant frame rotations \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 and \mathcal{R}_3 as illustrated below :



4.2 Base Elementary Matrices

Consider the following rotation matrix :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

What type of rotation represents R, what is the axis of rotation and what is the angle of rotation ?

4.3 Rotation matrix

Find x, y et z in the following rotation matrix :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.433 & -0.500 & z \\ x & 0.866 & -0.433 \\ 0.866 & y & 0.500 \end{bmatrix}$$

4.4 Properties of a Rotation Matrix

Do the following matrices represent rotation matrices ?

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.5 Rotation of coordinate frame

A coordinate frame X_1, Y_1, Z_1 is rotated into a configuration X_2, Y_2, Z_2 in such a way that $X_2 = -Y_1$, $Y_2 = Z_1$, $Z_2 = -X_1$. Find the matrix representation of the rotation in X_1, Y_1, Z_1 coordinates. Compute the direction of the axis and the angle of rotation.

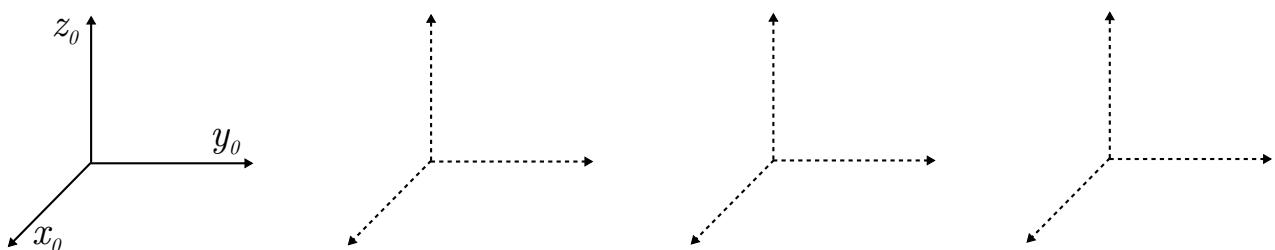
4.6 Angles d'Euler et rotation finie

Le repère $\mathbf{R}_3(O_3; \vec{x}_3; \vec{y}_3; \vec{z}_3)$ est défini par rapport au repère $\mathbf{R}_0(O_0; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$ par les angles d'Euler suivants : $\psi = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

1. Déterminer la matrice de passage 0R_3 .
2. Montrer que la rotation autour de \vec{e} de $\frac{\pi}{2}$ avec $\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$, conduit à la même matrice.

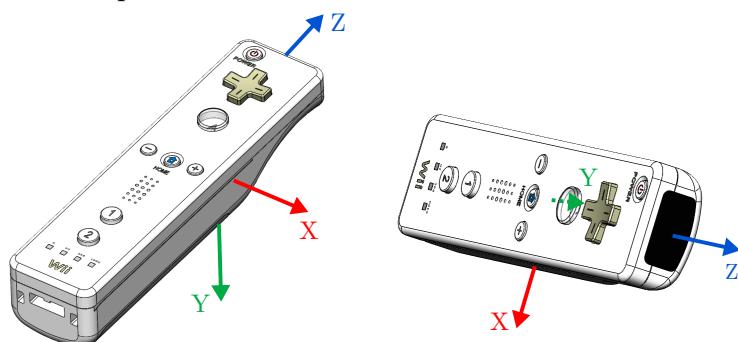
4.7 Angles de Cardans

1. Trouver la matrice de rotation représentée par les angles de Cardans suivants la séquence peu originale : un Roulis (Roll) de $\frac{\pi}{2}$, suivi d'un Lacet (Yaw) de $-\frac{\pi}{2}$, suivi d'un Tangage (Pitch) de $\frac{\pi}{4}$. (On donnera le détail du calcul et les matrices de rotations élémentaires).
2. Dessiner sur le schéma suivant les repères obtenus pour chaque rotation intermédiaire calculées précédemment. (x en rouge, y en vert, z en bleu).



4.8 Sequence of rotations

What sequence of rotations took the Wii mote from left to right orientation ?



- Euler XYZ : $-90^\circ, -90^\circ, -45^\circ$
- Euler ZYX : $-90^\circ, +45^\circ, -90^\circ$
- Euler ZYX : $+90^\circ, +45^\circ, +90^\circ$
- RPY : $+90^\circ, -45^\circ, +90^\circ$
- Euler XZX : $+90^\circ, +90^\circ, -90^\circ$

4.9 Relative Rotation Between two Quaternions

Pour mesurer l'angle d'élévation d'un bras sur une personne, on utilise 2 centrales inertielles Bosch BNO551.

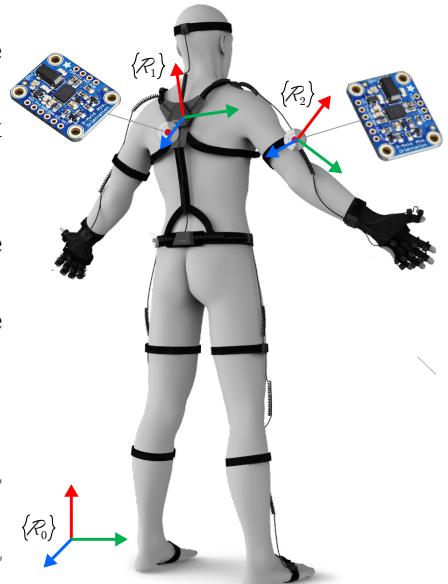
Le premier est placé au niveau de la colonne vertébrale et le deuxième sur le bras.

Le repère global est noté 0 , les repères associés aux capteurs 1 et 2 respectivement.

Le capteur 1, donne le quaternion q_{01} qui décrit le passage $0 \rightarrow 1$.

Le capteur 2, donne le quaternion q_{02} qui décrit le passage $0 \rightarrow 2$.

1. Pourquoi utilise t'on 2 centrales inertielles ?
2. Calculer l'angle d'élévation du bras par rapport à la colonne vertébrale.
3. Donner les angles d'Euler correspondants dans la convention XYZ.



4.10 Matrices homogènes

Soit la matrice de transformation homogène suivante :

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 2 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Donner la matrice ${}^1\mathbf{T}_0$.
2. Soit ${}^0\mathbf{V} = [4, 5, 6]^T$. Avec $\theta = 45^\circ$, calculer ${}^1\mathbf{V}$.

4.11 Inversion de matrices homogènes

Soit la matrice homogène de transformation suivante :

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.43 & 0.86 & 5.0 \\ 0.87 & -0.50 & 0.00 & -4.0 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quel est la valeur de l'élément (2,4) de la matrice ${}^B\mathbf{T}_A$?

4.12 Rotation de repères

Trouver les nouvelles coordonnées homogènes du point $P(1,2,3,1)^T$ par rapport au repère de référence après une rotation de 30° autour de l'axe z , suivie d'une rotation de 60° autour de l'axe y .

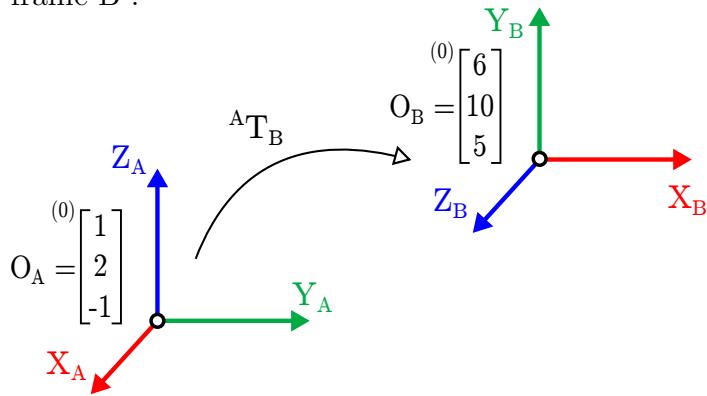
4.13 Nautical angles

Work out the Roll, Pitch, and Yaw angles from the following rotation matrix :

$${}^B R_G = \begin{bmatrix} 0.53 & -0.84 & 0.13 \\ 0.0 & 0.15 & 0.99 \\ -0.85 & -0.52 & 0.081 \end{bmatrix}$$

4.14 Homogenous Transformation Matrix

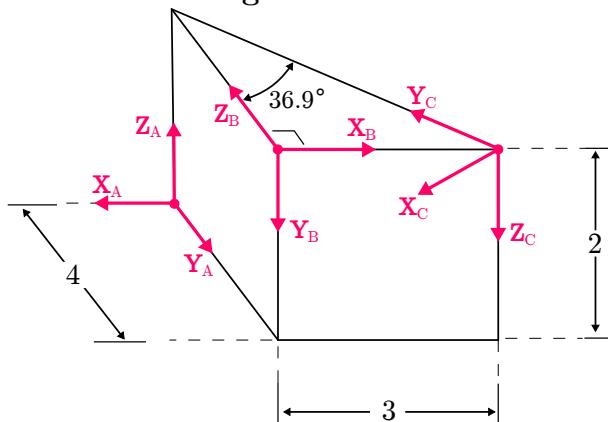
Find the homogenous matrix that represents the following transformation from frame A to frame B :



4.15 Which equations are valid (there could be more than one or none) ?

- $\text{workshop} T_{\text{tool}} = {}^0 T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3 {}^3 T_{\text{tool}}$
- $\text{workshop} T_{\text{tool}} = {}^0 T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3 \text{ workshop} T_0$
- ${}^0 T_3 = {}^0 T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3$
- ${}^3 T_0 = {}^0 T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3$
- $\text{workshop} T_{\text{effector}} = {}^0 T_{\text{workshop}} {}^1 T_0 {}^2 T_1 {}^3 T_2 \text{ effector} T_3$

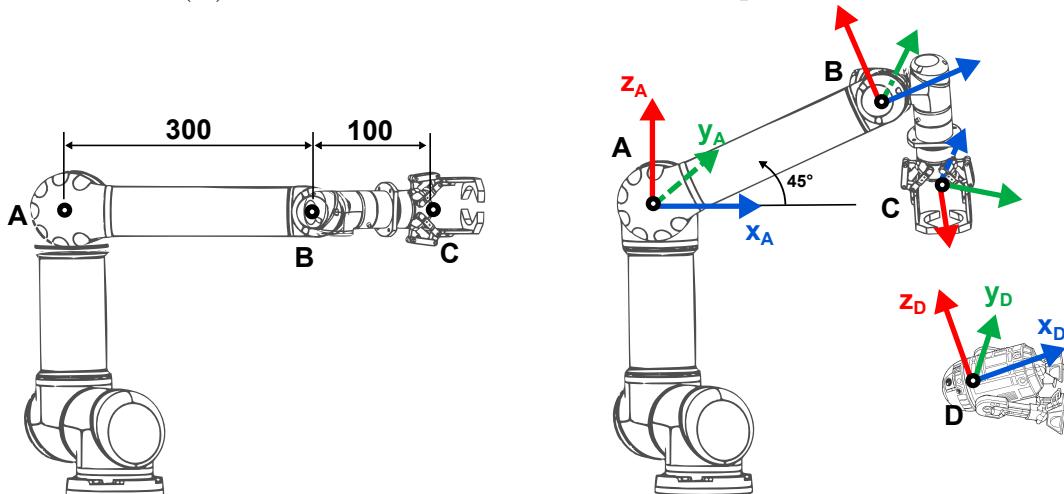
4.16 Matrices homogènes de transformation



Donner les valeurs des matrices ${}^A T_C$, ${}^B T_C$ et ${}^C T_A$.

4.17 Matrices homogènes de transformation

Une caméra (C) est montée en bout d'un bras robotique.



En position repos les repères $\{\mathcal{A}\}$, $\{\mathcal{B}\}$ et $\{\mathcal{C}\}$ possèdent la même orientation. Dans la configuration présentée, le repère $\{\mathcal{C}\}$ est orienté tel qu'il a effectué une rotation dans le repère mobile de 30° suivant l'axe y puis de 170° suivant x.

$$\text{Les coordonnées de la caméra par rapport à l'objet sont : } C = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 300 \end{bmatrix}_{(D)}$$

L'orientation de la caméra par rapport à l'objet est donnée par la matrice de rotation :

$${}^D R_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9962 & 0.0872 \\ 0 & -0.0872 & -0.9962 \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice homogène : ${}^A T_D$

Donnez les coordonnées de l'objet dans le repère $\{\mathcal{A}\}$.

4.18 Rotation Matrices

An engineer has carried out the following rotation matrix calculations.

Discuss the validity of the results :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.9801 & -0.1987 \\ -0.9553 & 0.0595 & 0.6896 \\ 0.2957 & 0.1896 & 0.9363 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.9801 & -0.1987 \\ -0.9553 & 0.0595 & 0.2896 \\ 0.2957 & 0.1896 & 0.9363 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.9801 & 0.1987 \\ -0.9553 & 0.5950 & -0.2896 \\ 0.2957 & 0.1896 & -0.9363 \end{bmatrix}$$

4.19 Composition of Rotations

Given the following transformed matrices :

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{R}_B &= \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8290 & 0.5592 \\ 0 & -0.5592 & 0.8290 \end{bmatrix} {}^C\mathbf{R}_D = \begin{bmatrix} 0.5592 & 0 & 0.8290 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ -0.8290 & 0 & 0.5592 \end{bmatrix} \\ {}^B\mathbf{R}_D &= \begin{bmatrix} 0.9931 & 0.0793 & 0.0868 \\ -0.0868 & 0.9924 & 0.0872 \\ -0.0793 & -0.0941 & 0.9924 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Derive ${}^A\mathbf{R}_C$

4.20 Frames

Given the following homogeneous transform matrix :

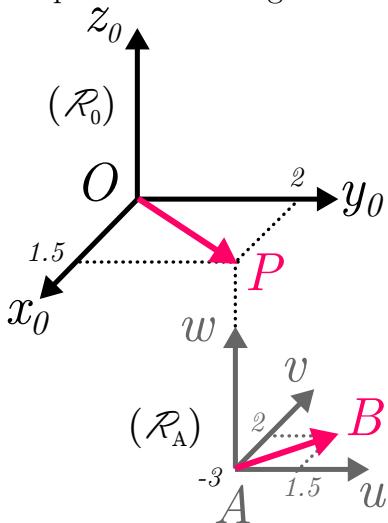
$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -1.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 8.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.0 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 & 10.0 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 & -20.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^3\mathbf{T}_0 &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & -3.0 \\ 0.43 & 30.750 & -0.500 & -3.0 \\ 0.250 & 0.433 & 0.866 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Draw the frames to show their arrangement qualitatively, and solve for 2T_3 .

4.21 Repères relatifs et absolus

Soit les 2 repères présentés dans la figure ci dessous.

La position de l'origine A est à $(1.5, 2, -3)$ par rapport à O.



Donnez la matrice de passage homogène qui représente l'orientation du repère par rapport à X. Calculez les coordonnées du vecteur P dans les 2 repères.

4.22 Composition de matrices de rotation

Soit les séquences de rotation suivantes. Écrire le produit de matrices donnant la rotation résultante (n'effectuez pas de calculs).

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z du repère courant ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe Y_0 du repère global.

Soit la séquence de rotation suivante :

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe X du repère courant.

Soit la séquence de rotation suivante :

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z du repère courant ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe X du repère courant ;
- Rotation d'un angle α autour de l'axe Z_0 du repère global.

Soit la séquence de rotation suivante :

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe X du repère courant ;
- Rotation d'un angle α autour de l'axe Z_0 du repère global.

4.23 Quaternion

Find the quaternion that represents a rotation of 60° about the axis $[2, 0, 0]$.

4.24 Rotation matrix associated to an axis/angle representation

A rigid body is rotated first by an angle $\theta = \pi/3$ around the unit vector $r = (1/\sqrt{3}) \cdot [111]^T$ and then by an angle $\varphi = -\pi/3$ around the fixed y-axis.

Work out the rotation matrix representing the final orientation of the body.

4.25 Euler angles sequences

An initial orientation \mathbf{R}_i and a final orientation \mathbf{R}_f are defined by

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_f = \mathbf{I}$$

Find the two sequences of ZYZ Euler angles that represent the rotation from \mathbf{R}_i to \mathbf{R}_f .

4.26 Rotation vecteur et angle

Given the following matrix

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ a & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

determine, if possible, a value $a > 0$ such that the identity $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \theta) = A$ holds, where $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \theta)$ is the rotation matrix associated to an axis-angle representation of the orientation. Provide then all unit vectors \mathbf{r} and associated angles $\theta \in (-\pi, +\pi]$ that are solutions to this equation.

4.27 Pose and Rotation

The frame attached to the base of a robot manipulator is called $\{B\}$, and the frame attached to the end effector is called $\{E\}$. The end effector is displaced and rotated with respect to the base frame. This displacement is represented by the vector.

$$\mathbf{p} = [1 \ 0.5 \ -0.4]^T [m]$$

and the orientation is represented, with respect to the base frame, by the following sequence of XZX angles :

$$\phi_1 = \frac{\pi}{4}, \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \phi_3 = \frac{\pi}{4}, [\text{rad}]$$

- a) Provide the rotation matrix that describes the orientation of the end effector with respect to the base frame for the aforementioned configuration.
- b) Write the homogeneous transformation matrix that describes the pose of the end effector with respect to the base frame.
- c) Represent the orientation of the end effector using a unit quaternion.
- d) The end effector is grasping an object. Consider a point \mathbf{P} on this object whose position with respect to the end-effector frame is given by $\mathbf{p} = [0.10.20.15]^T$. Provide the position of this point with respect to the base of the robot.

5. PROBLEMS : FORWARD KINEMATICS

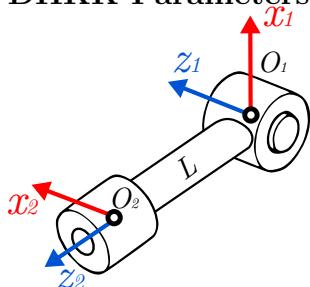
5.1 It is a scheme to determine joint angles of a robot by knowing its position in the world coordinate system

- Forward kinematics Trajectory planning Inverse kinematics Degrees of freedom

5.2 It is a scheme to determine the pose of a robot in the world coordinate system by knowing its joint angles

- Forward kinematics Trajectory planning Inverse kinematics Degrees of freedom

5.3 DHKK Parameters



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
2	0	$+\frac{\pi}{2}$	L	$\theta_2 + \frac{\pi}{2}$

The DHKK table is correct : Yes No

5.4 DHKK Parameters

Identify the DHKK parameters for the following matrix :

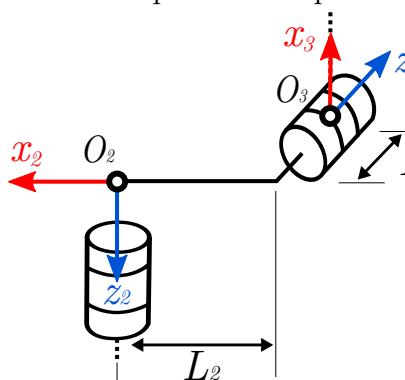
$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assume that all angle measurements are between 0 and 2π .

a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i

5.5 Paramétrage DHKK ...R2R3...

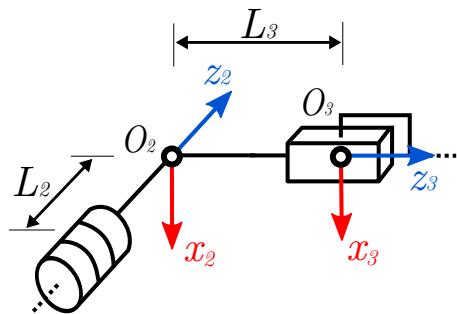
Donner les paramètres pour la matrice de passage de 2 vers 3.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
3				

5.6 Paramétrage DHKK ...R2P3...

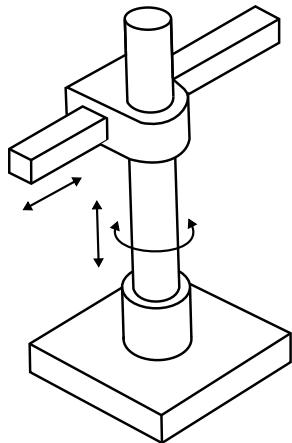
Donner les paramètres pour la matrice de passage de 2 vers 3.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
3				

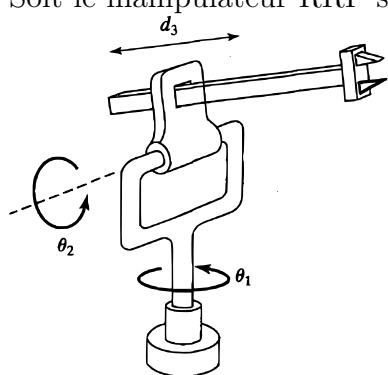
5.7 DHKK Assignment

Give an assignment of the DHKK frames for the following manipulator.



5.8 Forward kinematics - RRP robot

Soit le manipulateur RRP suivant :



Dessiner le schéma cinématique du manipulateur.

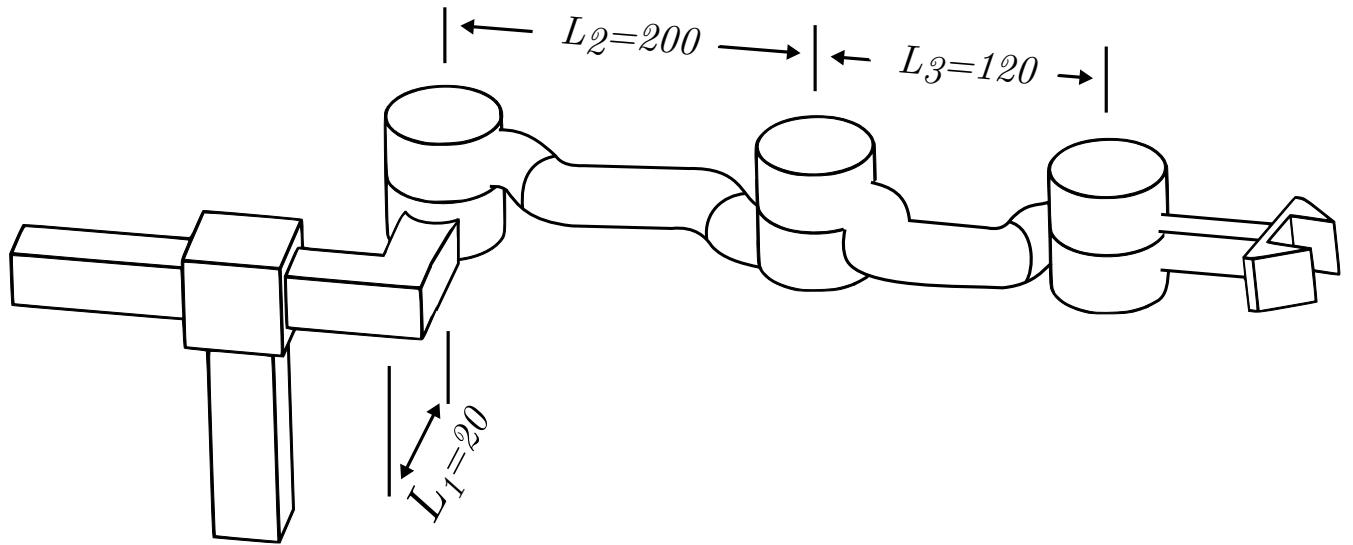
En supposant que sur le schéma cinématique, la liaison glissière est parallèle au sol, dans cette configuration $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, donner le paramétrage DHKK.

Donner la matrice homogène de transformation 0T_3 .

5.9 Forward kinematics - PRRR robot

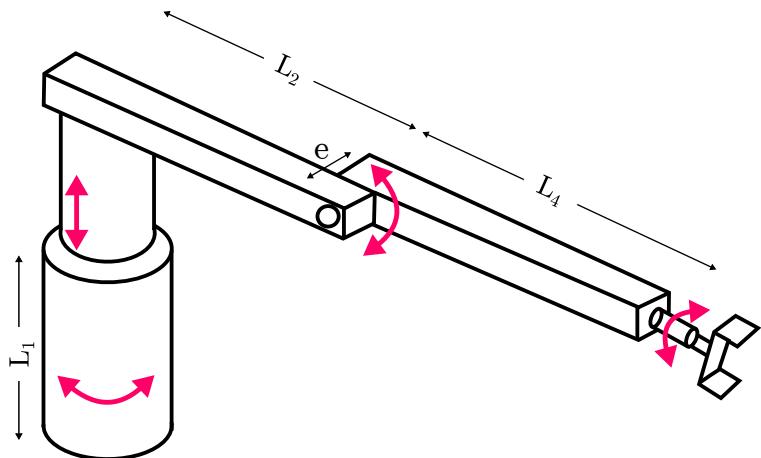
Consider the 4-dof robot made by a 3R planar arm mounted on a rail. Give an assignment of the DHKK frames, provide the table of parameters and the Forward Kinematics model.

$$\text{Verify the position of the End Effector for } \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \end{bmatrix} \text{ and for } \mathbf{Q}_A = \begin{bmatrix} q_1 = 10 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = -\frac{\pi}{2} \\ q_4 = 0 \end{bmatrix}.$$



5.10 DHKK frames assignment - RPRR Robot

Give an assignment of the DHKK frames for the following 4-dof robot.

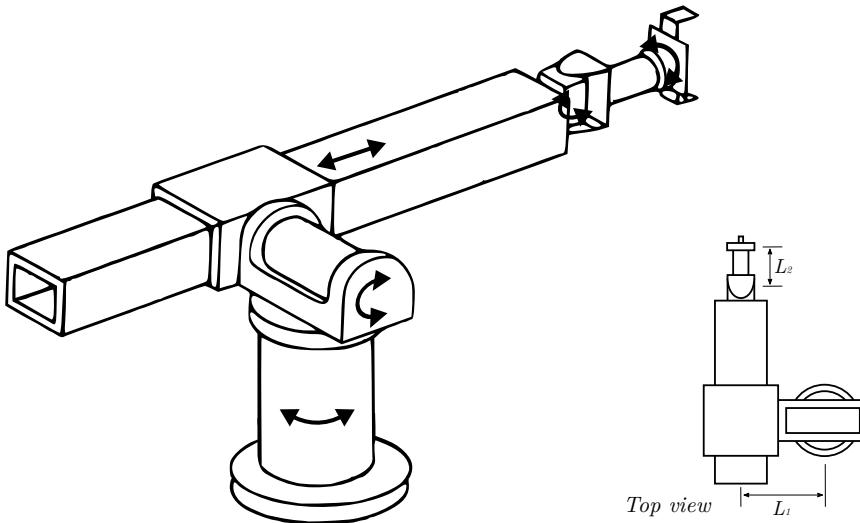


i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				

5.11 Forward kinematics - 5-dof Stanford robot

Consider the 5-dof Stanford robot. Give an assignment of the DHKK frames, provide the table of parameters and the Forward Kinematics model.

Verify the position of the End Effector for $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{bmatrix}$ and for $\mathbf{Q}_A = \begin{bmatrix} q_1 = 10^\circ \\ q_2 = -90^\circ \\ q_3 = 56.8 \text{ mm} \\ q_4 = 30^\circ \\ q_5 = 5.6^\circ \end{bmatrix}$, with $L_1 = 45 \text{ mm}$ and $L_2 = 60 \text{ mm}$.



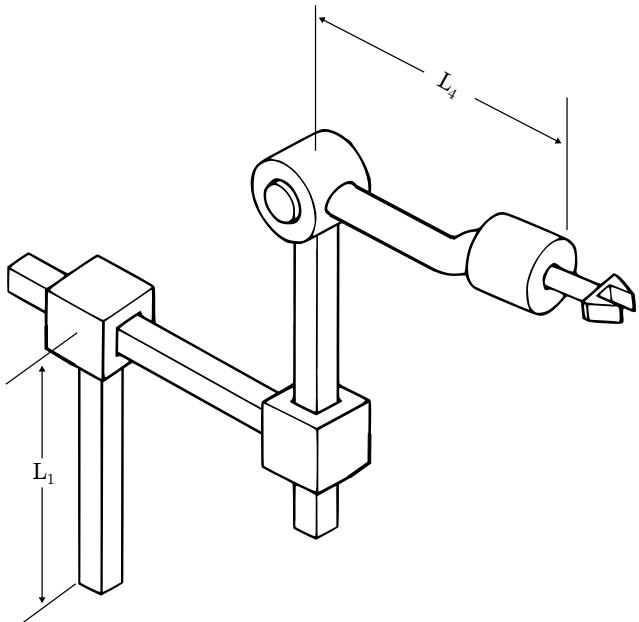
i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				

5.12 Forward kinematics - PPRR Robot

Give an assignment of the DHKK frames for the following 4-dof robot and provide the table of parameters. Find the homogeneous transformation between the World frame and End effector frame. The frame R_0 is already given.

Verify the position of the end effector for : $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 = 30 \\ q_2 = 40 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \end{bmatrix}$ and for : $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 = 30 \text{ mm} \\ q_2 = 40 \text{ mm} \\ q_3 = -\frac{\pi}{2} \\ q_4 = 0 \end{bmatrix}$.

$$L_1 = 100\text{mm}, L_4 = 150\text{mm}.$$

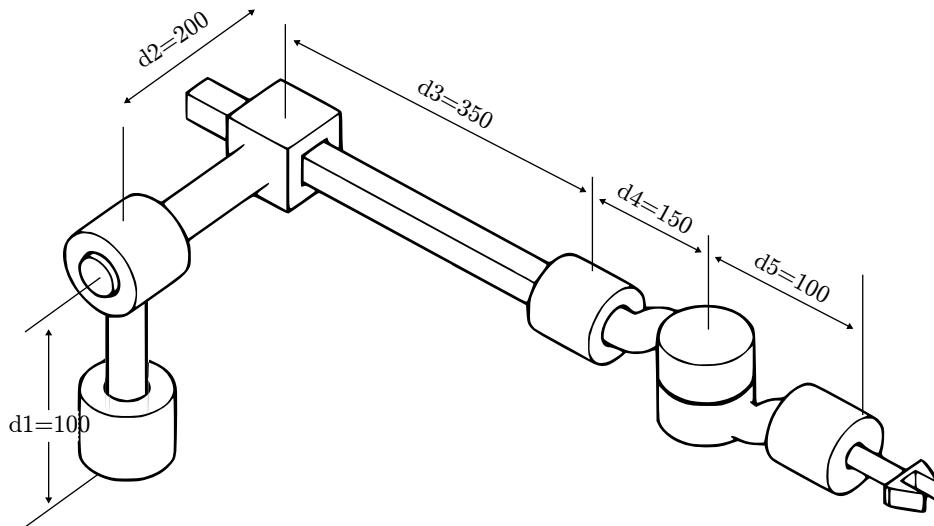


i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				

5.13 Forward kinematics - The Stanford Robot

Paramétriser le robot Stanford avec la convention DHKK.

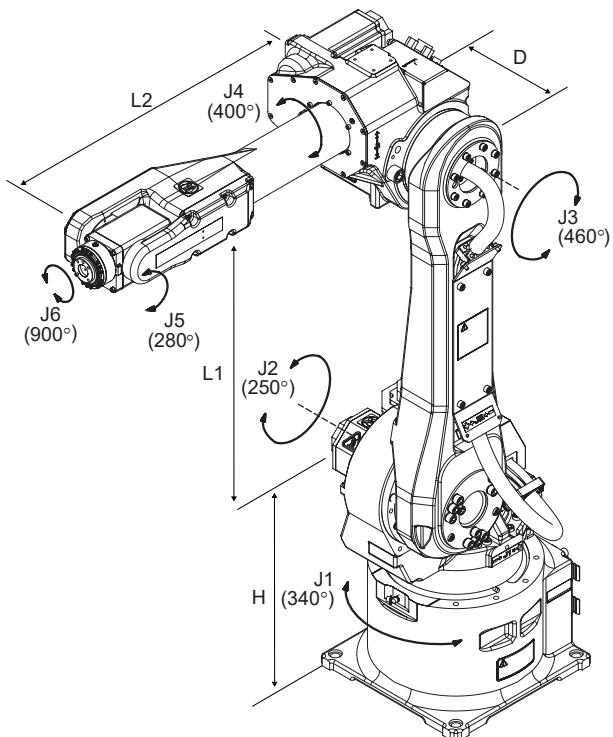
Donner la position du robot pour la configuration suivante [$q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = -\frac{\pi}{2}, q_3 = 400, q_4 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0$]



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

5.14 Forward kinematics - FANUC M-16iB series Robot

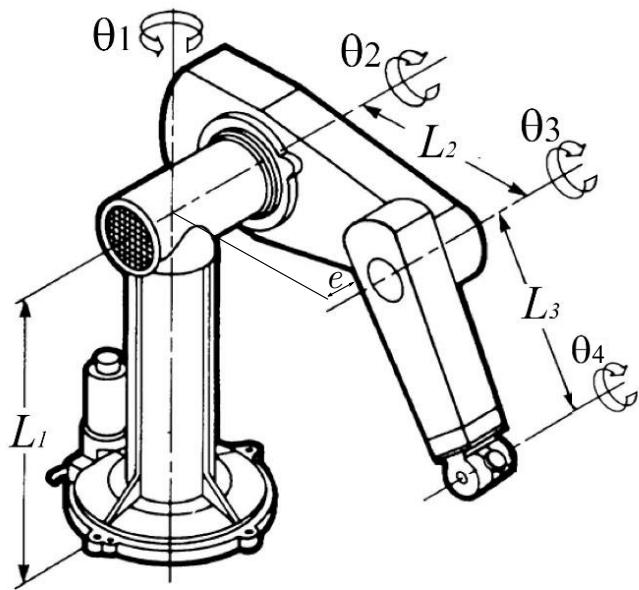
Give an assignment of the DHKK frames for the following FANUC robot and provide the table of parameters. Find the homogeneous transformation between the World frame and End effector frame. Verify the end-effector position when all the joint variables are set to zero :



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

5.15 Forward kinematics - PUMA Robot

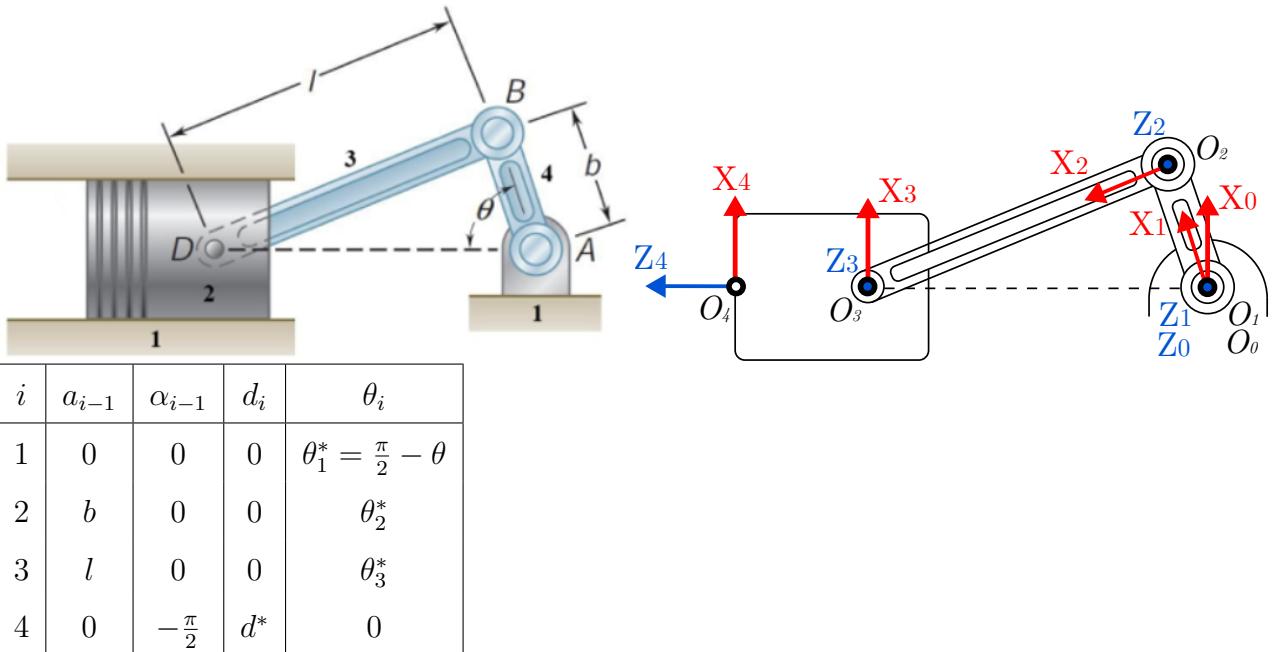
Give an assignment of the DHKK frames for the following PUMA robot and provide the table of parameters. Find the homogeneous transformation between the World frame and End effector frame. Verify the end-effector position when all the joint variables are set to zero :



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				

5.16 Rod-crank Mechanism

A simple single cylinder engine system consisting of a piston, 2 , a connecting rod, 3 , and a crank, 2 , is shown below. For this engine, distance $l = 250$ mm and distance $b = 100$ mm. What is the position of point D relative to point A when $\theta = 30^\circ$



5.17 Paramétrage DHKK

Soit le robot formé de 4 articulations rototoïdes et dont le tableau de paramétrage est donné :

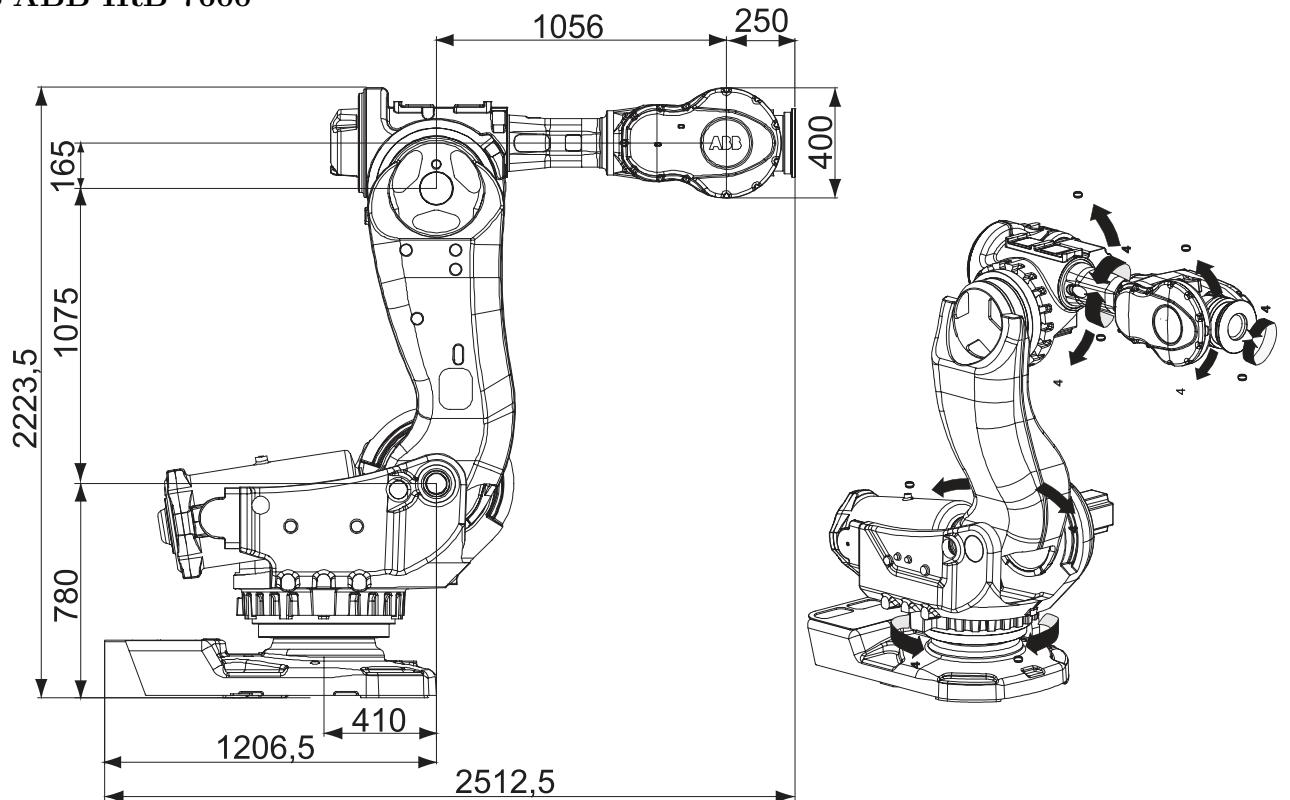
i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	$a_1 > 0$	$\frac{\pi}{2}$	$d_1 > 0$	q_1
2	$a_2 > 0$	$\frac{\pi}{2}$	0	q_2
3	0	$-\frac{\pi}{2}$	$d_3 > 0$	q_3
4	$a_4 > 0$	$\frac{\pi}{2}$	0	q_4

Dessiner le schéma cinématique de ce robot avec les repères dans les 2 configurations suivantes :

$q_A = 0$ et $q_B = (0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Donner la position \mathbf{p} de l'origine du repère 4.

5.18 ABB IRB 7600

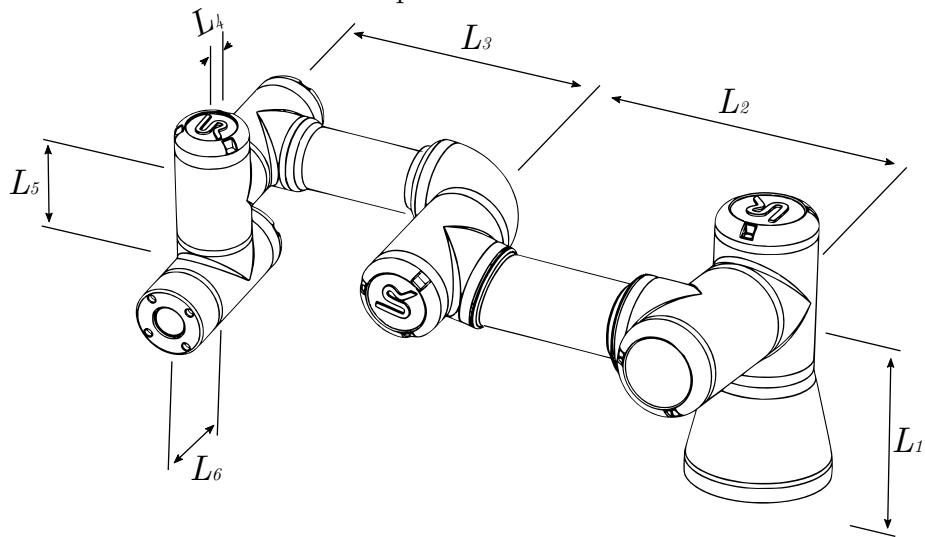


Dessiner le schéma cinématique et paramétriser de l'IRB 7600 dans sa position de repos donnée par le constructeur.

5.19 UR3 Robot kinematics

Paramétrer le robot UR3 d'Universal Robot (6DLL) dans la position ZERO du constructeur. Le repère R_0 est imposé par le constructeur du robot.

Réalisez le schéma cinématique.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

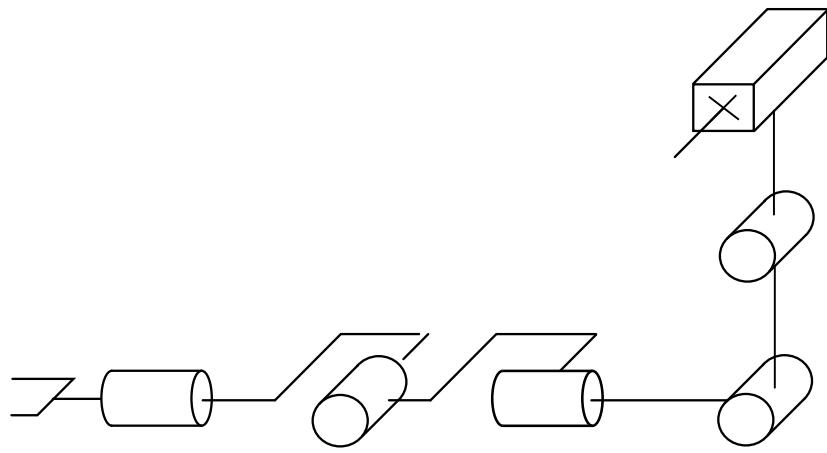
5.20 RoboFlex Güdel

Donnez le nom de ce type de robot.

Réalisez le schéma cinématique.

Paramétrier le robot RoboFlex de Güdel (6DLL) dans la position ZERO du constructeur.

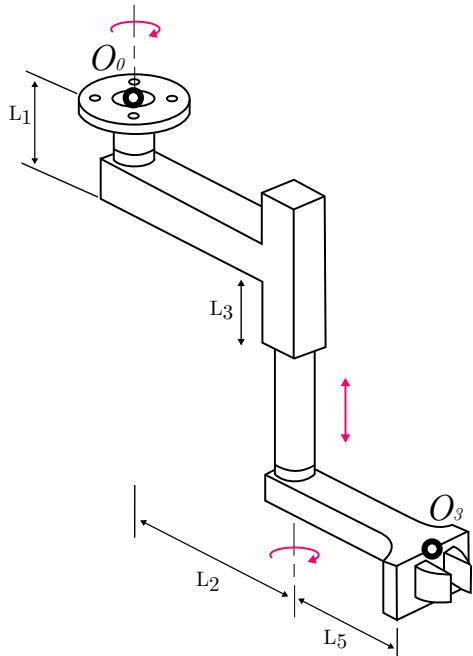
Déterminer les 3 coordonnées opérationnelles (X_i) définissant la position du point O_4 dans le repère R_0 et les 3 coordonnées articulaires (Q_i) permettant de positionner le centre du poignet.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

5.21 Ceiling Mounted Robot Forward Kinematics

The ceiling-mounted robot shown in Figure bellow has a single prismatic joint and two revolute joints. Complete the partially assigned frames according to the modified Denavit Hartenberg (DHKK) convention. Fill in the table with the DHKK parameters for the this RPR robot and compute the homogeneous transformation, 0T_3 .



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				

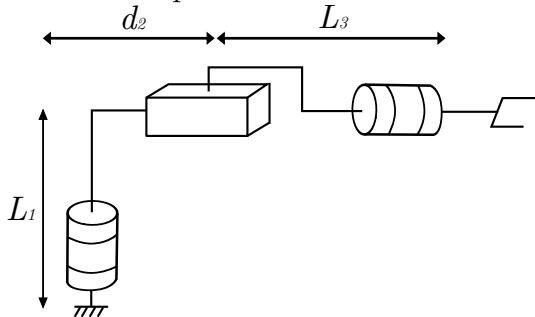
6. PROBLEMS : INVERSE KINEMATICS

6.1 La cinématique inverse permet d'obtenir...

- la pose de l'effecteur du robot, à partir de ses paramètres et des coordonnées articulaires.
- les valeurs des coordonnées articulaires du robot, à partir de la pose de l'effecteur et des paramètres du robot
- la position de l'effecteur du robot, sur la base de ses paramètres et des coordonnées articulaires.

6.2 MGJ méthode de Paul

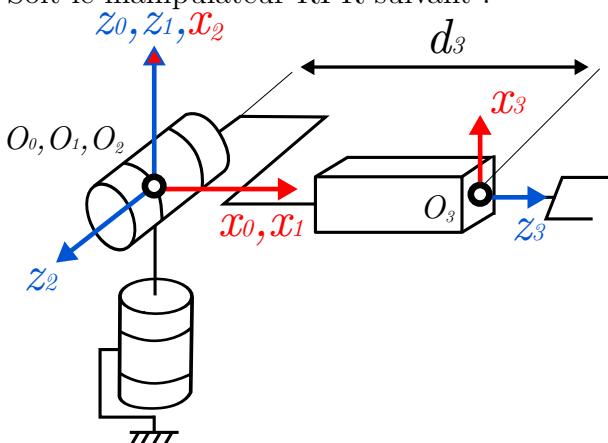
Soit le manipulateur RPR suivant :



En utilisant la méthode de Paul, donner le MGJ du manipulateur.

6.3 MGJ méthode de Paul

Soit le manipulateur RPR suivant :



En utilisant la méthode de Paul, donner le MGJ du manipulateur.

7. PROBLEMS : DYNAMICS

7.1 Singularités

Déterminez les singularités du système dont le Jacobien est :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -c_1 d_3 & 0 & -s_1 \\ -s_1 d_3 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les singularités existent lorsque $\det(\mathbf{J}) = 0$

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} -c_1 d_3 & -s_1 \\ -s_1 d_3 & c_1 \end{bmatrix} = d_3(c_1^2 + s_1^2)$$

$\det(\mathbf{J}) = 0$ ssi $d_3 = 0$

C'est la seule singularité