

MECA 953 ROBOTIQUE

Luc Marechal

2022



Introduction

L'objectif de ce cours est de fournir des connaissances de base en géométrie et les outils mathématiques utilisés en robotique pour le repérage et les transformations homogènes. Il abordera également les différentes modélisations nécessaires pour comprendre le fonctionnement d'un robot industriel, son comportement, la description du mouvement de l'effecteur dans l'espace et les connaissances minimales pour la conception et le dimensionnement des actionneurs qui constituent le robot.

Pré-requis

Il est fortement conseillé de se mettre à niveau sur les notions suivantes :

- Projection de vecteur sur un système d'axes
- Calcul de déterminant et rang de matrice, calcul de produit de matrices
- Calcul de dérivées partielle de fonctions multivariées
- Schématisation cinématique
- Torseurs cinématique

Ces notions ont été abordées dans les modules suivants :

MATHS500, MATHS501, MECA654, MECA655

Références

- [1] Khalil W, Dombre E. *Modeling, identification and control of robots*. Kogan Page Science 2004.
- [2] Siciliano B. *Robotics : modelling, planning and control*. Springer 2009.
- [3] Giordano M, Lottin J. *Cours de robotique : description et fonctionnement des robots industriels*. armand col ed. 1990.
- [4] Spong M, Hutchinson S, Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. wiley ed. 2005.
- [5] Lallemand J-P, Zeghloul S. *Robotique : aspects fondamentaux : modélisation mécanique, CAO robotique, commande*. masson ed. 1994.

Première partie

Introduction

1 Histoire de la robotique

Mythologie grecque	Description des robots dans l'Iliade d'Héphaïstos
XVIIIème siècle	Age d'or des automates
1915	Premier robots «sensoriels »
1920	Mot « robot », du tchèque robota (« travail, besogne, corvée »)
1940	Apparition du terme « robotique », Isaac Asimov « I, robot »
1961	Premier robot industriel, Unimation (Unimate, General Motors)
1970	Premiers rover lunaires (NASA)
1972	1ère chaîne de production robotisée (Nissan)
2000	Développement des humanoïdes



2 Définitions

- **ROBOT** : Dispositif **versatile et flexible** offrant des fonctions de déplacement similaires à celles des membres humains ou dont les fonctions de déplacement **sont commandées par ses capteurs** et ses moyens de reconnaissance. (*JIRA (Japan Industrial Robot Association)*, 1980)
- **ROBOT INDUSTRIEL** : Manipulateur automatique, asservi en position, reprogrammable, polyvalent, capable de positionner et d'orienter des matériaux, pièces, outils ou dispositifs spécialisés au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution de tâches variées. (*AFNOR - NF EN ISO 8373*)
- **Automate** : Dispositif se comportant de manière automatique (c.a.d sans l'intervention d'un humain). Ils obéissent à un programme préétabli.

3 Caractéristiques

Un robot possède des capacités de perception, d'action, de décision et de communication, parfois il est capable d'améliorer ses performances par un apprentissage automatique ou supervisé par des humains, pour :

- **agir dans un environnement** ouvert ou confiné, dynamique, peu structuré ou inconnu, à des échelles allant du nano-monde au macro-monde,
- **exécuter de façon autonome ou en relation avec des humains**, des tâches d'observation, d'exploration, de modélisation ou d'intervention sur l'environnement
- **interagir avec d'autres machines ou avec des humains**, matériellement ou virtuellement (Human-centered robotics)

En rapport avec la définition d'un robot industriel par l'AFNOR, il y a 3 caractéristiques majeures :

- **automatisme** : exécution totalement automatisée de la tâche, indépendamment d'une connaissance « complète et à l'avance » de l'environnement dans lequel la tâche est réalisée. Elle suppose donc que la machine puisse appréhender seule la situation de l'environnement.
- **polyvalence** : concerne la possibilité, pour une même machine, d'exécuter des tâches différentes et/ou d'exécuter une même tâche de plusieurs manières.
- **reprogrammabilité** : Les déplacements ou fonctions de la machine peuvent être changées sans altérations physiques.

4 Pourquoi robotiser ?

- **Réduction des coûts de production** : un robot est capable de travailler en 3x8 de façon constante, et peut réaliser les tâches de plusieurs opérateurs.
- **Flexibilité de la gestion de production** : un robot s'adapte à différentes tâches et peut donc aisément être affecté à des opérations multiples, selon les impératifs de l'entreprise.
- **Diminution des stocks et encours** : la configuration du robot en cellule de production permet de regrouper plusieurs opérations. On peut ainsi, en sortie de machine, ajouter des opérations complémentaires d'ébavurage, de palettisation et de contrôle, ce qui peut éviter des stocks intermédiaires.
- **Amélioration de la qualité** : les robots industriels ont la capacité de reproduire une même tâche répétitive sans dégradation des performances.

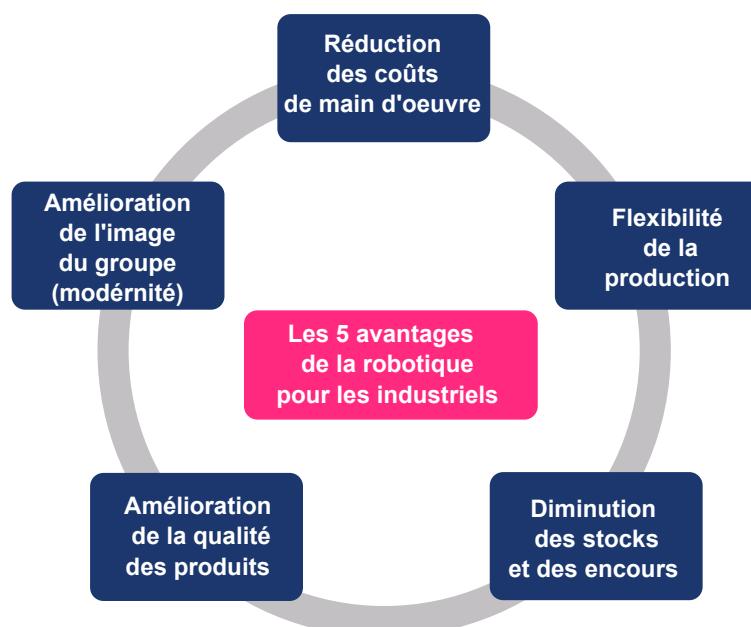


FIGURE 1 – source : étude "La robotique en France", Xerfi

5 Choix d'un robot

5.1 Coût d'un robot industriel

Type de robot	Entrée de gamme	Haut de gamme
Cartésien 3-4 axes	de 40 à 65 K€	de 75 à 90 K€
SCARA 4 axes	de 15 à 25 K€	de 35 à 60 K€
Articulé 6 axes	de 60 à 90 K€	de 120 à 140 K€
Articulé 6 axes collaboratif	de 25 à 30 K€	de 40 à 70 K€
Parallèle 6 axes	de 20 à 30 K€	de 45 à 75 K€

5.2 Justification économique de l'investissement en robotique

L'achat de robots ou le changement d'une ligne de production, représentent un coût important pour les industriels. L'investissement sera-t-il suffisamment rentabilisé ?

Les choix stratégiques des entreprises trouvent une justification économique dans le calcul du délai de récupération, une méthode utile pour évaluer les projets.

$$n = \frac{\text{coût d'investissement net du système robotique, accessoires compris}}{\text{cash flow annuel net}}$$

- **n** : délai de récupération c.a.d. le nombre d'année nécessaire pour rembourser l'investissement.
- **coût d'investissement net** = coût d'investissement total du robot - crédit d'impôt à l'investissement
- **cash flow annuel net** = revenus annuels prévus avec l'installation du robot, y compris avec les économies de main d'oeuvre directe et coût matériel - coûts d'exploitation annuels, y compris les coûts de main-d'oeuvre, de matériel et de maintenance du système robotique.

5.3 Les domaines d'application des robots

- **Le soudage à l'arc** : une des applications robotisées les plus répandues. Le gain de productivité est de deux à cinq fois plus que pour les opérations de soudage manuel.
- **Les opérations de manutention** : pour manipuler et déplacer une ou plusieurs pièces (ou produits) d'un endroit à un autre.
- **Le packaging**
- **Les opérations d'assemblage** : réalisés la plupart du temps par des robots disposant de 6 degrés de liberté afin de reproduire les actions d'un bras humain.
- **Les applications de peinture et de pulvérisation** avec robot se développent compte tenu des contraintes de plus en plus importantes imposées pour la protection de l'environnement.
- **La découpe et la finition**. La précision des trajectoires d'un robot permet ces opérations souvent complexes et dangereuses à effectuer manuellement.

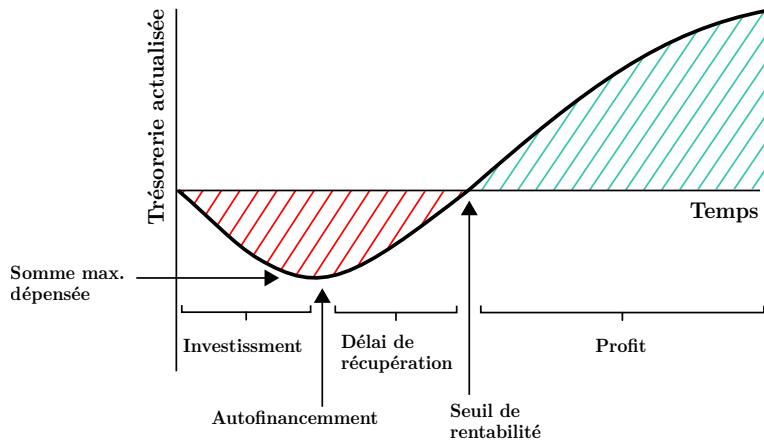


FIGURE 2 – Délai de récupération

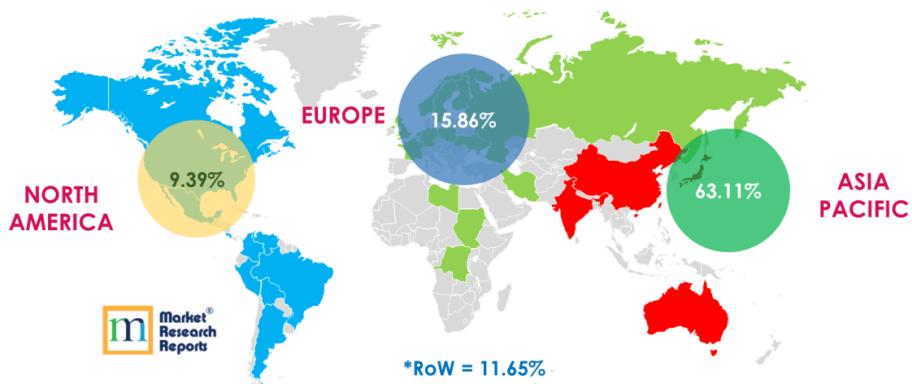


FIGURE 3 – Industrial Robotics Market Share. (Row = Rest of World)

5.4 Les métiers dans la robotique

L'intégrateur robotique procède à l'étude, l'intégration et la mise au point de solutions robotisées pour l'élaboration de process existants ou en développement. (~ 450 PME ou TPE en France). L'intégrateur réalise 3 tâches principales :

- La réalisation via un logiciel, de l'étude d'intégration
- L'implantation des éléments péri robotiques
- Le paramétrage et la programmation du robot pour qu'il réalise les tâches décrites

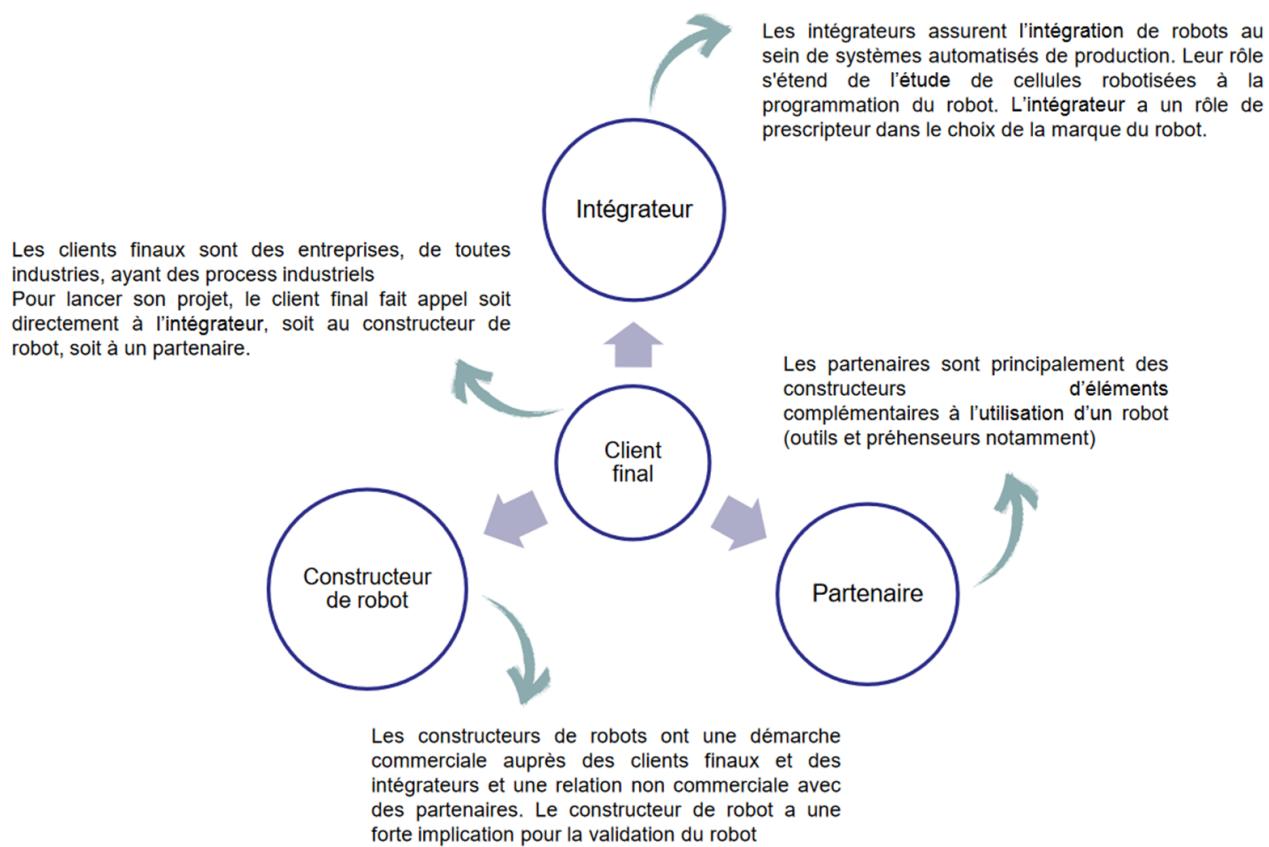


FIGURE 4 – [source Stäubli]



FIGURE 5 – World's top robot manufacturers

Exercices

1–1 Définition automate

Quelle est la différence entre un automate et un robot ?

1–2 Mechatronics definitions

What is mechatronics ? What is the difference between mechatronics and robotics ?

1–3 Fabricants de robot

Quel est le plus gros fabricant de robot au monde ?

De quel pays sont originaires les constructeurs de robots ABB, Stäubli, Kuka et Denso ?

1–4 Les types de robots

Qu'est ce qu'un COBOT ?

Donnez des applications industrielles où les robots de types portiques (gantry robot en anglais) sont utilisés.

1–5 Notions de prix

Quelle est la gamme de prix d'un robot FANUC de la série M10 ? Du cobot Franka Emika ?

1–6 Users of industrial robot

Which industry is the leading user of robots ?

1–7 Le marché français / Le marché allemand

Quel est le taux de robotisation en France ? et en Allemagne ?

1–8 Délai de récupération

Une entreprise envisage de remplacer une opération de peinture manuelle par un système robotique. Déterminez le délai de récupération pour une et pour deux équipes.

- Le système coûte 160 k€, (incluant les capteurs, les pinces et autres accessoires).
- Le coût annuel de maintenance et d'exploitation du système de robot sur une seule équipe de travail est de 10 k€.
- L'investissement de la société est éligible à un crédit d'impôt de 20 k€ du gouvernement dans le cadre de son programme d'investissement technologique.
- Le robot remplacera deux opérateurs. Le taux horaire d'un opérateur est de 20 €, avantages sociaux compris. Un opérateur travaille 250 jours par ans. Il n'y a pas d'augmentation du taux de production.

1–9 Économie

Calculez le temps de cycle et le taux de production d'une cellule robotisée d'une seule machine pour un poste de 8 heures si la disponibilité du système est de 90%.

Déterminez également le pourcentage d'utilisation de la machine et du robot.

Données :

Temps de traitement de la machine : 30 s

Le robot récupère la pièce du convoyeur : 3.0 s

Le robot déplace la pièce sur la machine : 1.3 s

Le robot charge la pièce sur la machine : 1.0 s

Le robot décharge la pièce de la machine : 0.7 s

Le robot déplace la pièce sur le convoyeur : 1.5 s

Le robot met la pièce à la sortie convoyeur : 0.5 s

Le robot se déplace du convoyeur de sortie au convoyeur d'entrée : 4.0 s

1–10 Economics

What was the world's first digital, programmable robot ?

- a. The Stanford Arm
- b. The FAMULUS (Kuka)
- c. Atlas (Boston Dynamics)
- d. Unimate

Deuxième partie

Bras Robots : Caractéristiques et architectures

1 Composition d'un robot

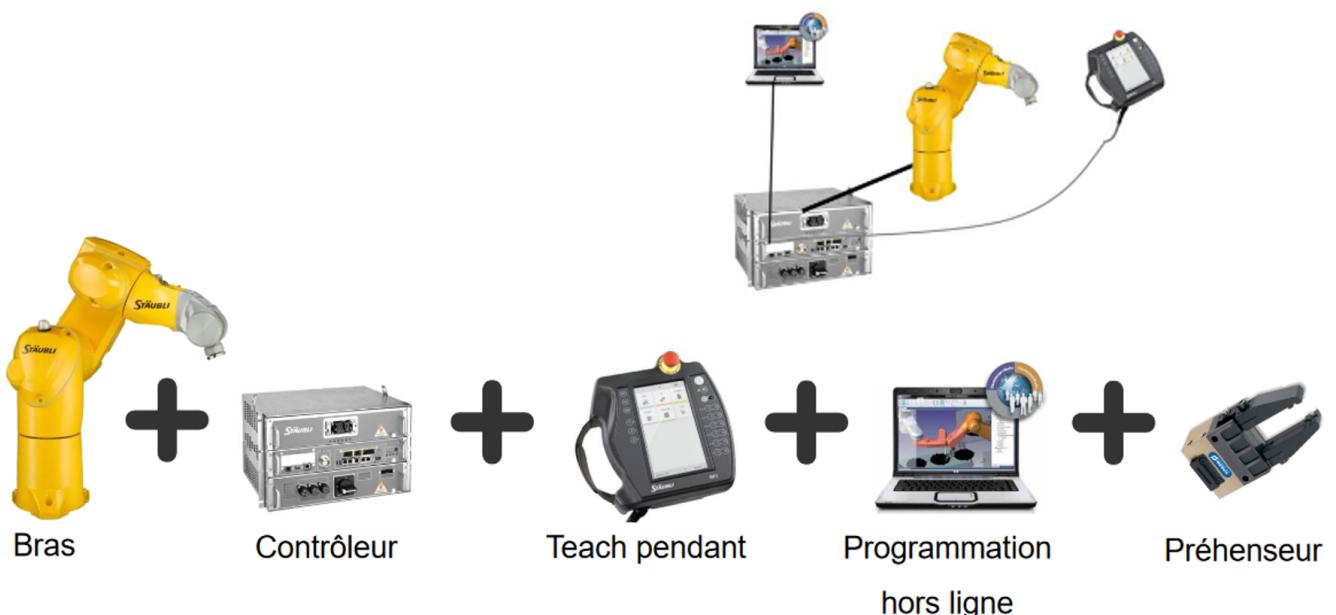


FIGURE 6 – Composition d'un bras robot (source Stäubli)

- Bras robot [robot arm]
- Contrôleur (ou baie de robot) [controller] : cerveau du robot. Il intègre un calculateur et une "partie puissance" pour alimenter les moteur du bras.
- Le pupitre de programmation [teach pendant] : utilisé pour contrôler manuellement le robot ou entrer des commandes.
- La programmation hors ligne [Off-line programming] : utilisée pour valider l'implantation et réaliser des simulations.
- Préhenseur [Gripper] : prolongation du robot pour réaliser la tâche.

2 Critères de choix d'un robot

- Environnement/domaine d'application
- Nombre d'axes.
- Charge/inertie.
- Cadence
- Rayon d'action utile

3 Caractéristiques

Le critère de choix principal pour un robot industriel est le domaine d'application. En fonction de la tâche finale du robot, on choisira l'architecture adéquate : articulé, cartésien, SCARA ou parallèle.

3.1 Quelques définitions

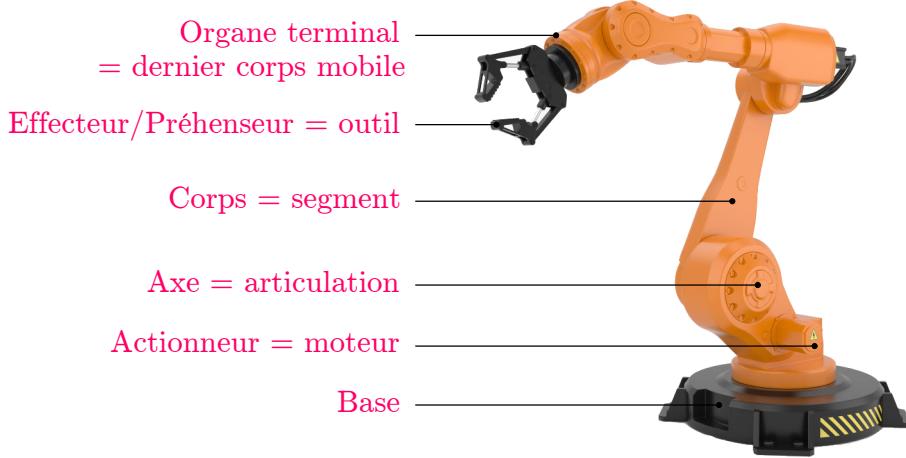


FIGURE 7 – Vocabulaire d'un bras robotique

Résolution : Plus petit incrément de mouvement que le contrôleur peut mesurer.

$$\text{résolution} = \frac{\text{distance totale parcourue par l'extrémité}}{2^n}$$

où n est le nombre de bits de précision de l'encodeur.

Justesse (accuracy) : Erreur entre la pose désirée et la pose atteinte par l'effecteur, lors d'un seul déplacement. La précision n'est pas constante sur l'espace de travail, en raison de l'effet de la cinématique, de la géométrie, du jeu d'engrenage (*backlash*), de la flexion des liaisons sous la gravité et la charge.

Répétabilité (repeatability) : Erreur maximale de positionnement répété de l'outil en tout point de son espace de travail. Autrement dit, la répétabilité est la capacité d'un mécanisme à revenir plusieurs fois dans la même position dans des conditions identiques. En général, la répétabilité d'un bras ne peut jamais être meilleure que sa résolution. La répétabilité des robots industriels est de l'ordre de 0.03 à 0.1 mm pour les robots de faible et de moyenne envergure et elle peut dépasser les 0.2 mm pour les gros porteurs.

Espace des Tâches : espace dans lequel est définie la position et l'orientation de l'effecteur (indépendant de la structure du robot).

→ **Coordonnées opérationnelles :** variables x_j qui définissent la position de l'organe terminal.

exemple du robot Scara : $[x, y, z, \theta_z]^T$

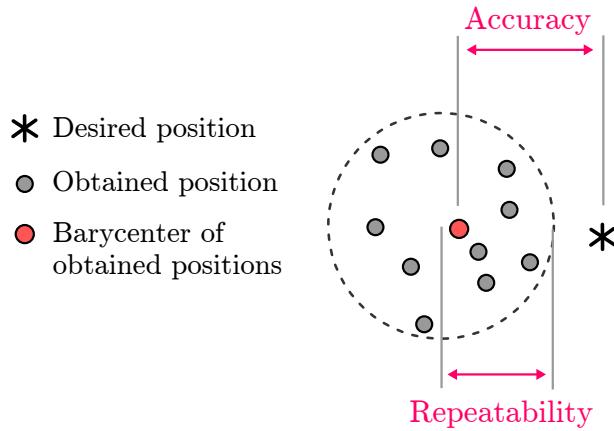


FIGURE 8 – Illustration en 2D de la signification géométrique de précision et de répétabilité

Espace Articulaire : spécifique au robot, c'est dans cet espace que sont définis la position et l'orientation des différentes liaisons.

→ **Coordonnées généralisée ou variables articulaires** q_i : angles ou longueur associés à chaque liaison (axe).

exemple du robot Scara : $[q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [\theta_1, \theta_1, r_3, \theta_4]^T$

Volume de travail (workspace) : ensemble des points atteignables par le préhenseur. Ce volume dépend de la géométrie du robot, de la longueur des segments, des contraintes sur les angles/courses des articulations (souvent limitées par des butées).

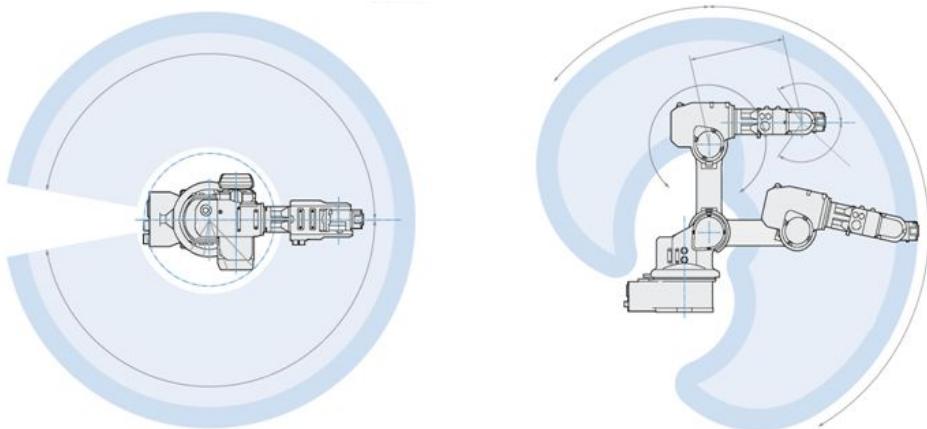


FIGURE 9 – Robot Workspace [T. Badij, M. Mihelj, J. Lenarčič, A. Stanovišnik, M. Munih, Robotics, Springer, 2010]

L'espace de travail peut être divisé en 2 sous-ensembles : **l'espace de travail maximal (reachable workspace)** (limite extérieure de l'espace de travail, que l'organe terminal peut atteindre avec une configuration possible a minima) et **l'espace de travail dexter (dextrous workspace)** (volume de l'espace que le robot peut atteindre avec toutes les orientations possibles du manipulateur c.a.d les points où le robot peut saisir un objet immobile et toujours déplacer ses articulations).

Charge utile (payload) : charge maximale que peut porter le robot sans dégrader la répétabilité et les performances dynamiques. La charge utile est nettement inférieure à la charge maximale que peut porter le robot qui est directement dépendante des actionneurs.

Charge nominale (rated load) : masse maximale qui peut être transporté par l'interface mécanique sans dégradation daucune des performances annoncées.

Degré de liberté de l'organe terminal : DDL (DOF). C'est le nombre de paramètres indépendants qui permettent de définir la situation possible de l'organe terminal (position et orientation). Pour un robot, le nombre d'articulations détermine le nombre de DDL. IL égal à la dimension de l'espace de configuration.

Redondance

Un robot est dit redondant si le DDL de l'organe terminal est inférieur au nombre de variables de l'espace articulaire. (i.e. la dimension de l'espace opérationnel est inférieur à la dimension de l'espace articulaire). C'est le cas notamment si sa structure présente une des propriétés suivantes :

- Plus de 6 articulations,
- Plus de trois articulations pivots d'axes concourants
- Plus de trois articulations pivots d'axes parallèles
- Plus de trois articulations prismatiques
- Deux axes d'articulations prismatiques parallèles,
- Deux axes d'articulations pivots confondus.

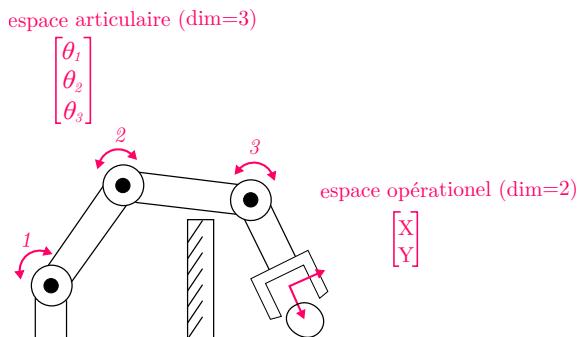


FIGURE 10 – Exemple de manipulateur plan redondant. On voit l'utilité de la redondance dans certains cas comme ici pour contourner un obstacle.

Dans certains cas, où l'environnement est envahi d'obstacles, une redondance peut être intéressante car elle offre plusieurs choix de configurations possibles pour atteindre l'objectif.

3.2 Modes de déplacement des bras robots

Les robots peuvent être déplacés par rapport à différents systèmes de coordonnées. Dans chaque type de système, les mouvements seront différents. On a généralement trois systèmes de coordonnées suivants :

WORLD : Le repère WORLD est par définition le référentiel robot. Fixe, ce référentiel est prédéfini et ne peut donc être modifié.

JOINT : Il est utilisé pour spécifier les mouvements des différentes articulations du robot. Dans ce cas, on accède à chaque articulation et on la déplace individuellement ; par conséquent, une seule articulation se déplace à la fois.

TOOL : Contrairement au repère universel WORLD, le repère local de l'outil se déplace avec le robot. L'origine de ce repère est le TCP, c'est à dire le Point de Centre Outil.

USER : C'est un repère pouvant être défini à n'importe quel endroit.

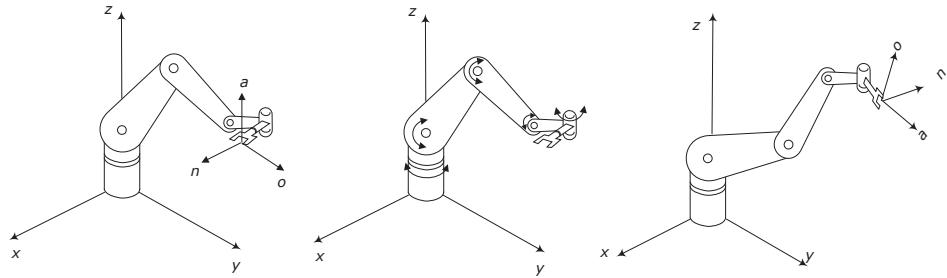


FIGURE 11 – Systèmes de coordonnées WORLD, JOINT, TOOL

4 Langages de programmation des bras robotiques industriels

Presque tous les fabricants de robots ont développé leur propre langage de programmation (cf. Fig 12). Depuis 2007, le *middleware* ROS permet la standardisation des communications, l'interconnexion de plusieurs applications ou matériels qui n'ont pas forcément été conçus pour communiquer entre eux (ils peuvent même ne pas être sur le même réseau, utiliser des protocoles ou OS différents...).

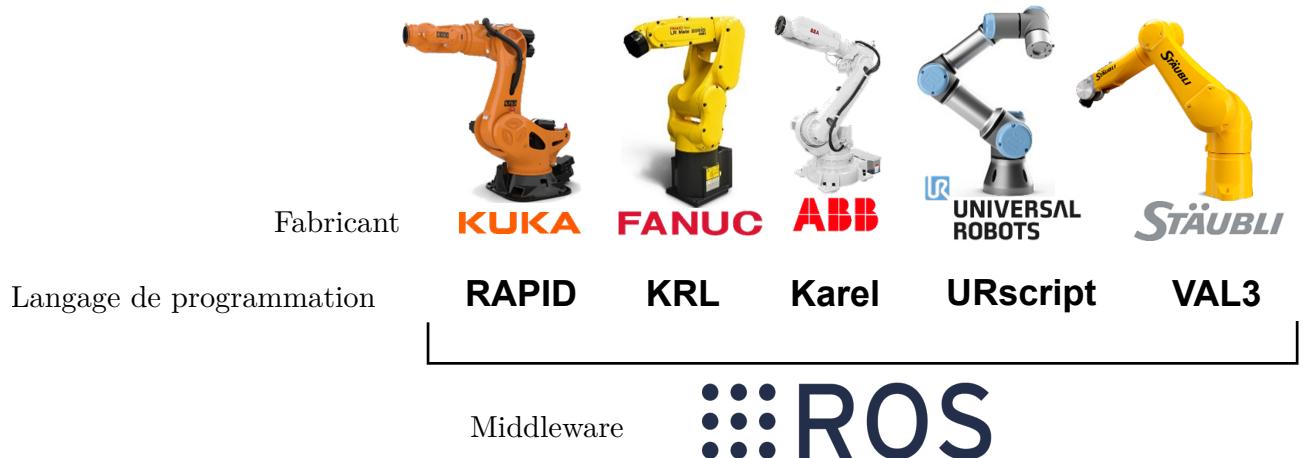


FIGURE 12 – Langages de programmation des bras robotiques

5 Architecture des robots manipulateurs.

5.1 Structures mécaniques articulées

La chaîne cinématique structure le système mécanique articulé et correspond aux divers corps et liaisons (ou articulations) entre les corps. Les liaisons sont passives ou actives (motorisées). La chaîne peut être simple ou parallèle, ouverte (robot série), hybride ou fermée. On peut représenter la structure sous forme de différents graphes :

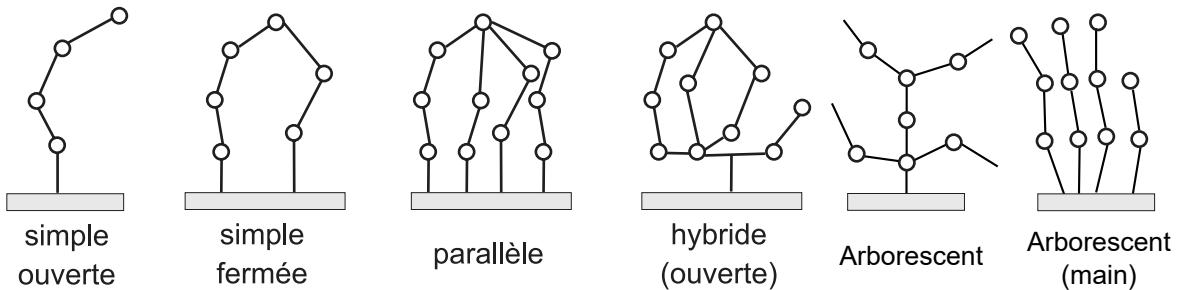


FIGURE 13 – Architecture des structures

Architecture série		Architecture parallèle
Chaîne cinématique ouverte. Architecture constituée d'une alternance de corps et de liaisons.		Chaîne cinématique fermée. L'organe est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes.
		
+ Polyvalence Espace de travail important Modélisation simple		Transport de très lourdes charges Meilleure précision Bonnes performances dynamiques
		Rigidité moyenne Espace de travail plus limité Modélisation et analyse complexes

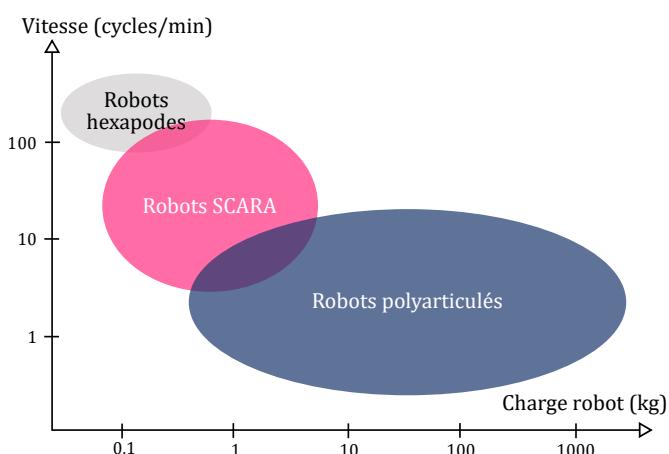


FIGURE 14 – Domaines d'applications des différentes architectures robotiques

5.2 Porteurs à chaîne cinématique ouverte (Robots série)

Les robots série possèdent généralement une architecture composée d'articulations dites simples de type liaisons pivots/**rotoïde** : **R** et liaisons glissières/**prismatique** : **P**. (Fig.15)

Les trois premières articulations d'un robot sont généralement conçues pour effectuer les mouvements grossiers, et les articulations restantes servent à effectuer l'orientation. Ainsi, les 3 premiers ddl du robot constituent la structure du **porteur**. Les ddl restants forment le **poignet**.

Les robots industriels peuvent généralement être classifiés en fonction de leur structure mécanique et du type des axes comme suit :

- structure cartésienne (ou robot portique) = **PPP** (21% du parc des robots industriel)
- structure cylindrique = **RPP** (7%),
- structure SCARA (bi-cylindrique) =**RRP** (2%),
- structure sphérique = **RRP** (13%),
- structure anthropomorphique = **RRR** (67%).

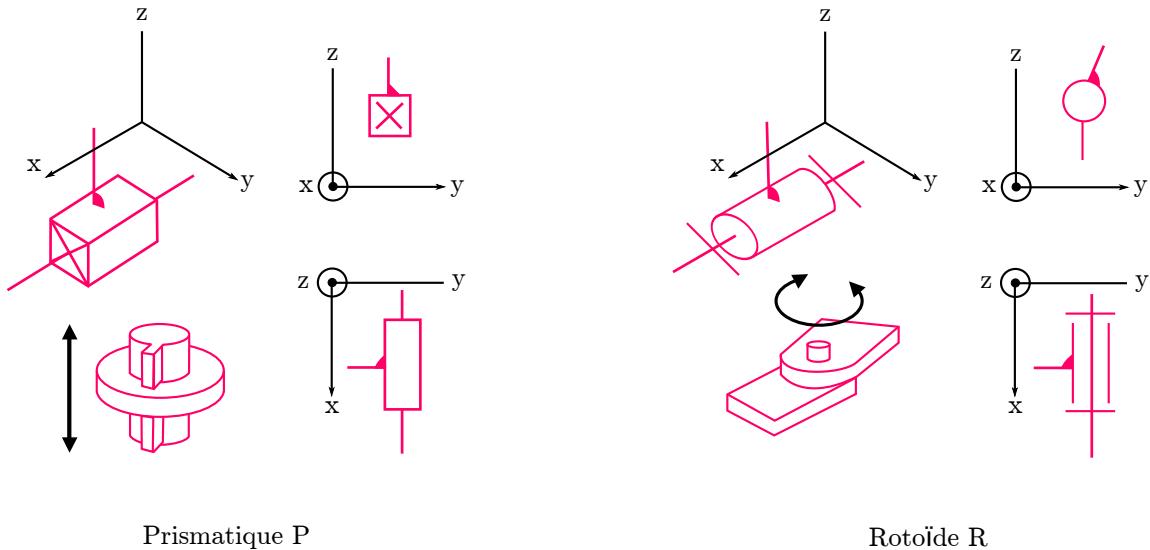


FIGURE 15 – Articulation prismatique **P** : 1 ddl en translation T_x . Articulation rotoidé **R** : 1 ddl en rotation R_x .

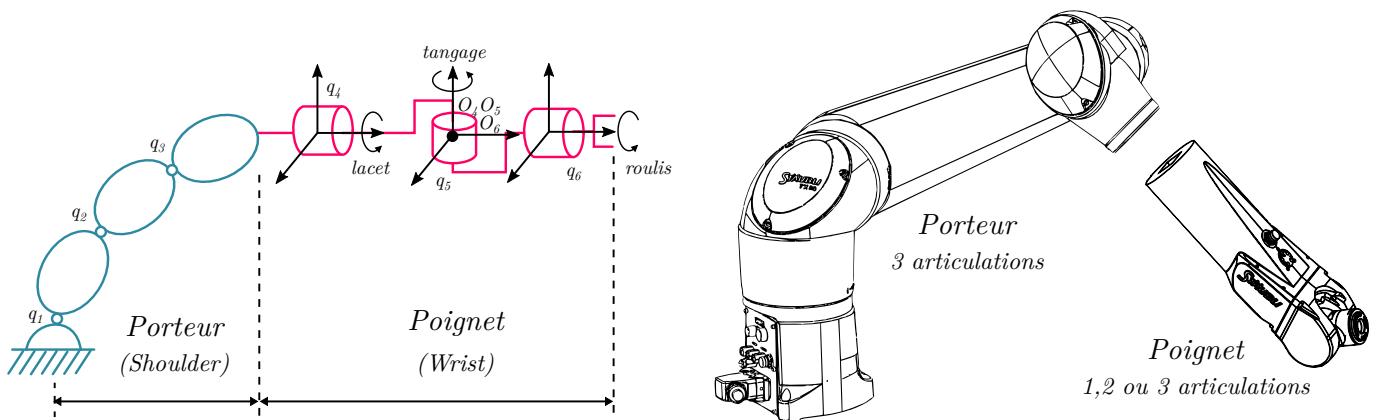


FIGURE 16 – Architecture classique d'un robot manipulateur à 6 DLL. (source : adaptée de [1])

La figure.17 liste les schémas des 12 morphologies non redondantes possibles de porteur. La figure.18 liste des morphologies possibles de poignets. Dans la pratique, le poignet de type rotule est très répandu.

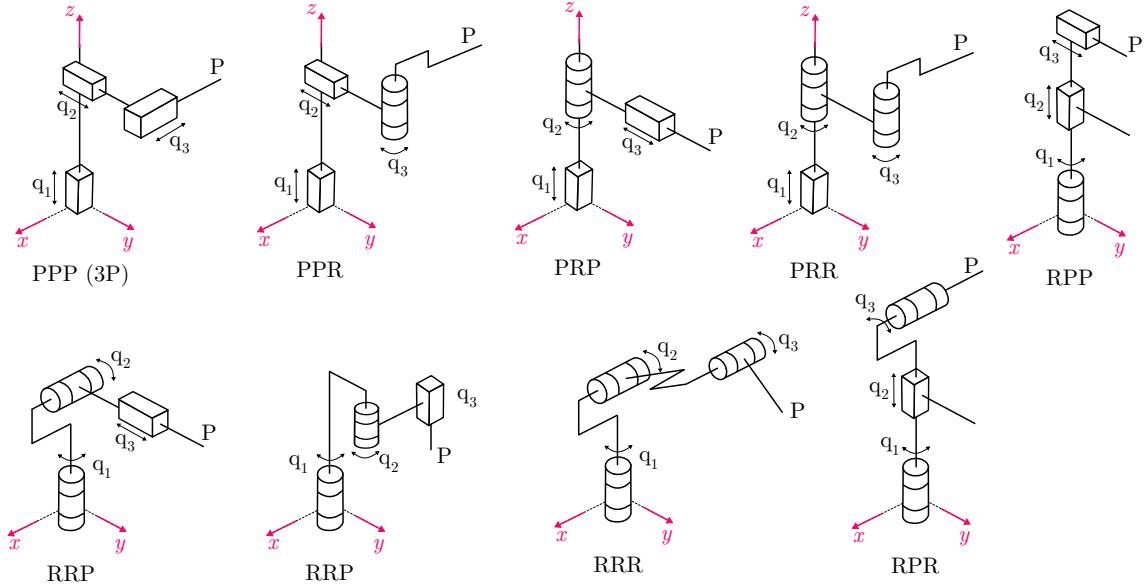


FIGURE 17 – Architecture des porteurs.

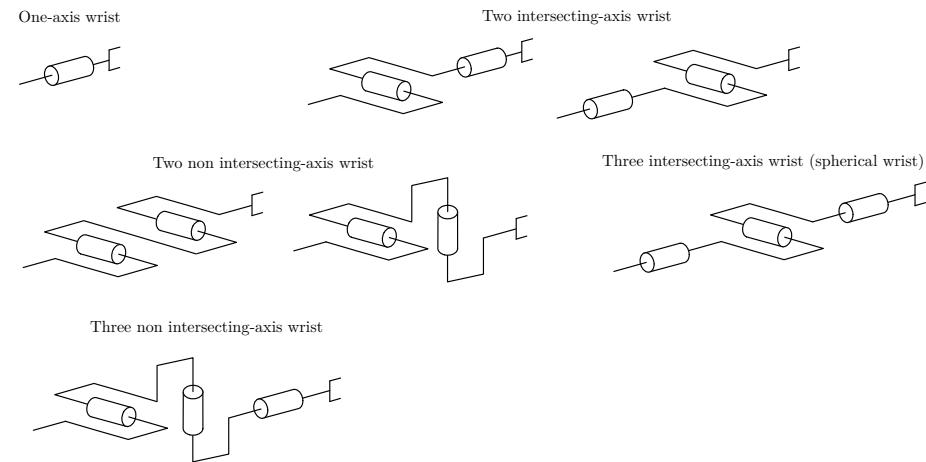
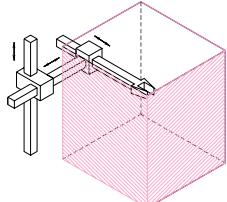
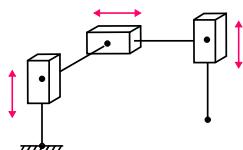
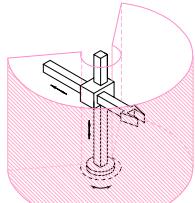
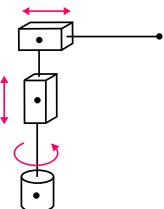
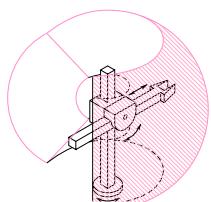
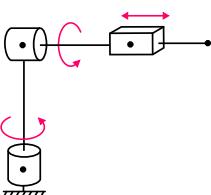
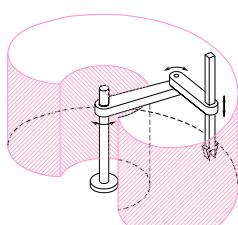
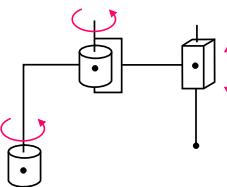
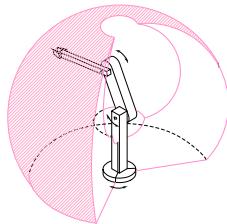
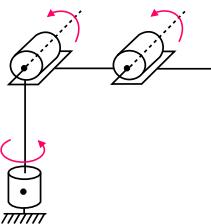


FIGURE 18 – Architectures of the wrist (source [?]).

Principe	Workspace	Chaîne cinématique	Exemple
PPP			
Cartésien			
RPP ou PRP			
Cylindrique			
RPP ou PRP			
Sphérique			
RRR			
SCARA *			
RRR			
Anthropomorphe			

5.3 Les préhenseurs

a. *Pinces*

L'intérêt du pneumatique réside dans sa rapidité.

Les préhenseurs pneumatiques sont généralement quasiment 2 fois moins chers qu'en électrique. Mais c'est du tout ou rien (fonctionnement en mode ouvert/fermé).

Bien que de nombreuses forces agissent sur le corps soulevé par un bras robotique, la principale force est la force de friction F .

$$F = \frac{m(a + g)}{\mu \cdot n}$$

avec :

F , la force nécessaire pour saisir l'objet,
 m , la masse de l'objet,
 a , l'accélération de l'objet,
 μ , le coefficient de frottement et,
 n , le nombre de doigts de la pince.



FIGURE 19 – Pince électrique (gauche) et pneumatique (droite)

b. *Ventouses*

Très courant dans les applications de pick and place (packaging, manutention).

Fonctionne en utilisant un vide industriel (effet venturi).

Inconvénients envisageables : éventuelles traces laissées sur les produits après la pose. Les surfaces perforées ou sales sont à éviter.

$$f = pA$$

où f est la force de levage, p est la pression négative, et A est la surface effective totale des ventouses.

c. *Choix du préhenseur*

Le choix du préhenseur s'effectue à partir de critères liés aux procédés, aux pièces à manipuler et aux objectifs économiques.

Les critères liés aux procédés :

- Quelle est la tâche à réaliser (palettisation, picking, maintien ...) ?
- Quel est le type de support pour la prise et la dépose (stable, mobile) ?
- Quel est le temps de cycle désiré (temps d'ouverture, de fermeture, accélération) ?
- Quelle est la précision de positionnement désirée ?
- Quel est l'environnement dans lequel l'installation se trouve (corrosif, toxique, humide, poussiéreux, salle blanche) ?

Les critères liés à l'objet à manipuler :

- La taille de la pièce permet de dimensionner la taille des pinces, la zone à libérer autour de la pièce, le couple sur le préhenseur et le robot
- La forme de la pièce ajoute des contraintes sur la prise et l'adaptabilité du préhenseur (présence de courbes, angles, surfaces planes, position du centre de gravité)
- Le poids de la pièce et du préhenseur doit être intégré à la charge totale du le-

vage. La force de serrage doit maintenir la pièce lors des accélérations et arrêts d'urgence

- L'état de surface de la pièce peut éliminer rapidement certaines techniques de préhension (salissure, fragilité, pièces esthétiques)

Les critères au niveau de la cellule :

- Le temps de cycle
- Le taux de service
- La productivité moyenne de la cellule robotisée
- Le nombre de pièces géométriques différentes en production
- Le nombre de pièces géométriques à manipuler dans un cycle
- Le nombre de pièces ou de produits introduits à l'année
- Le nombre de cellules robotisées identiques

Les critères au niveau du préhenseur :

- Le type de préhenseur possible (vide, pneumatique, électrique, magnétique)
- La flexibilité requise nécessitant un changeur d'outils ou un préhenseur adaptatif.
- La possibilité d'un préhenseur existant (sur étagère ou à adapter)
- La nécessité de concevoir un nouveau préhenseur (temps de conception et de mise au point)
- La séquence de manipulation des différentes pièces dans le cycle
- Le mode opératoire pour changer de pièce ou de produit

Exercices

2.1 Documentation technique

D'après la fiche technique du bras robot TX200 de Stäubli, déterminer :

- Le nombre d'axes
- La charge maximale transportable
- La répétabilité de positionnement
- Le poids
- Le rayon d'action
- La vitesse angulaire maximale des deux premiers axes
- Les butées mécaniques du poignet
- Modes de fixation
- Le volume de travail

2.2 Caractéristiques de robots

Sur une ligne montage de voiture, peut on utiliser un Kuka KR30 pour manipuler un châssis ?
Donnez un modèle de robot KUKA, ABB et Kawasaki qui ont une charge de travail pouvant aller jusqu'à 15 Kg.

2.3 Répétabilité et Justesse

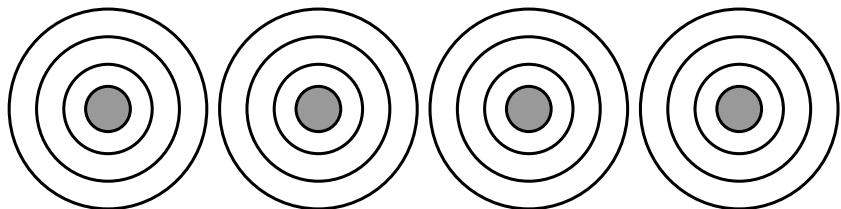
Pourquoi la justesse est-elle généralement inférieure à la répétabilité ?

Pourquoi la justesse n'est pas constante partout dans l'espace de travail ?

Pour un robot, pourquoi la répétabilité est elle beaucoup plus importante que la justesse ?

Illustrez un système :

- non juste et non répétable
- juste, mais non répétable
- répétable, mais non juste
- juste et répétable



2.4 Répétabilité

Quel est l'ordre de grandeur de la répétabilité d'un bras robotisé ?

2.5 Résolution

Pourquoi la résolution des axes linéaires est généralement plus élevée que celle des axes de révolution ?

2.6 Architecture

Quels sont les éléments qui composent un robot ? (En français et anglais)

2.7 Préhenseur

On monte en bout d'un bras, une pince parallèle Schunk modèle EGP 40-N-S-B, avec un coefficient de friction de 0.15. Peut on soulever sans danger une pièce de 0.8 kg avec une accélération de $12m/s^2$?

2.8 Charge

Quelle valeur d'accélération faut il ne pas dépasser pour soulever une pièce de 28 kg avec un bras robot RX160-HD ?

2.9 QCM

Un robot sériel est une structure à chaîne cinématique fermée.

V | F

En général, un robot angulaire est plus précis qu'un robot cartésien.

V | F

En général, un robot parallèle est plus rigide qu'un robot sériel.

V | F

Un robot redondant possède plus de degrés de liberté que de moteurs.

V | F

2.10 Structure

For a robot unit to be considered a functional industrial robot, typically, how many degrees of freedom would the robot have?

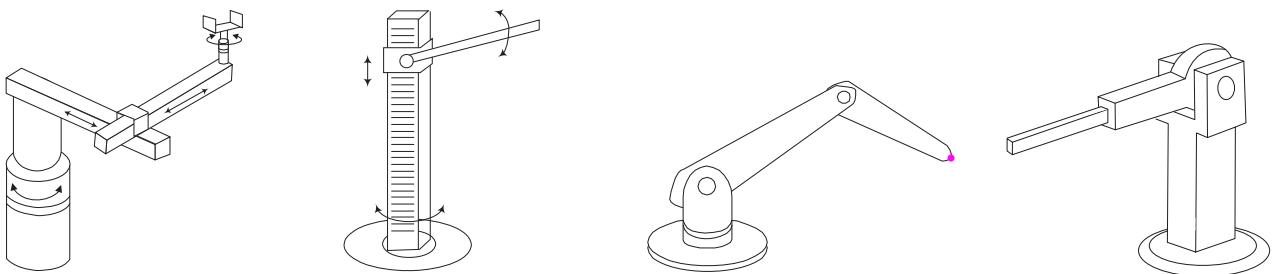
2.11 Structure

Indiquer les robots à architecture parallèle



2.12 Workspace

Dessinez l'espace de travail approximatif pour les robots suivants. Supposez que les dimensions de la base et des autres parties de la structure des robots sont celles indiquées.



Troisième partie

Rappel Mathématiques

1 Conventions

(\mathcal{R}_i)	Repère numéro i
P	Point
${}^i P$	Coordonnées de P dans le repère i
\vec{v} ou v	Vecteur
${}^i v$	Coordonnées de \vec{v} dans le repère i
\vec{OP} ou OP	Vecteur
${}^i(OP)$	Coordonnées de \vec{OP} dans le repère i
$\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$	Produit vectoriel
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	Produit scalaire
${}^0 R_{01}$	Rotation du repère 0 vers le repère 1 exprimé dans 0
${}^0 T_1$	Matrice homogène du repère 0 vers le repère 1 exprimée dans 0
c_α	$\cos(\alpha)$
s_α	$\sin(\alpha)$

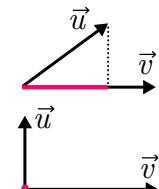
2 Outils mathématiques

2.1 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteur est un **nombre réel**. Il est obtenu par la projection d'un vecteur sur l'autre. Il permet de modéliser le travail de la force \vec{u} suivant le déplacement \vec{v} .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

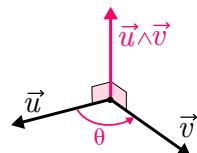
en particulier si $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



2.2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un **vecteur perpendiculaire** aux deux autres.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$



La direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donne au triplet $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ une orientation directe (donnée par la règle des trois doigts de la main droite (Figure.20)).

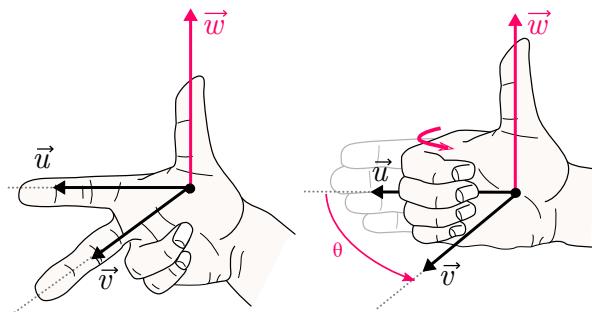
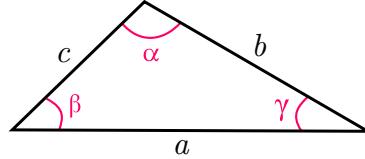


FIGURE 20 – Règle de la main droite

2.3 Formules d'Al Kashî ou Loi des cosinus

La formule d'Al-Kashi, ou loi des cosinus est une généralisation de la relation de Pythagore aux triangles quelconques. Elle est donc valable pour tous les triangles.

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$



2.4 Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

2.5 Fonction ATAN2

La fonction $\text{atan}(\theta)$, où $\theta = y/x$, renvoie un angle dans la plage de $(-\pi/2, \pi/2)$. Elle ne fait pas la différence entre des directions diamétralement opposées.

La fonction $\text{atan}2$ à deux arguments est définie pour tout $(x,y) \neq 0$ et donne un unique angle θ sur $]-\pi, \pi]$ tel que :

$$\text{atan}2(y, x) = 2\text{atan}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+x}}$$

$$\text{avec } \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

La fonction utilise le signe de x et y pour choisir le quadrant approprié pour l'angle θ

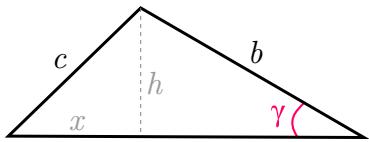
Exercices

2–1 Trigonométrie

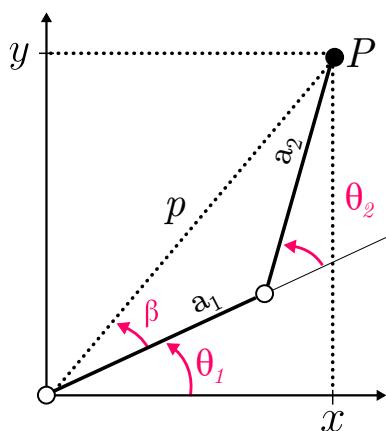
Soit le triangle quelconque de cotés : a, b, c .

Exprimez x en fonction de a, b et γ .

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle de gauche, exprimez c^2 en fonction de a, b et γ . Comment s'appelle cette formule ?



1–1 Géometrie



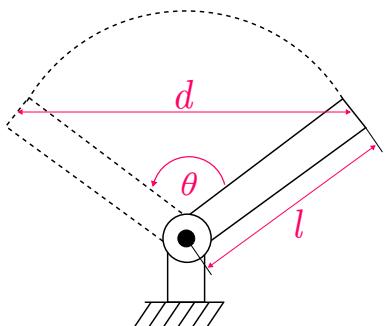
En utilisant la loi des cosinus, exprimer l'angle θ_2 en fonction des coordonnées du point $P = [x, y]^T$, de a_1 et de a_2 . En utilisant l'angle β et en l'exprimant en fonction des coordonnées du point $P = [x, y]^T$, de a_1 et de a_2 , trouver l'angle θ_1 .

1–2 Géometrie

En reprenant la figure de l'exercice 1–1, et en considérant les angles θ_1 et θ_2 connus, exprimer les coordonnées x et y du point P .

En considérant $a_1 = 1$ et $a_2 = 1$, donner les coordonnées du point P , pour $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

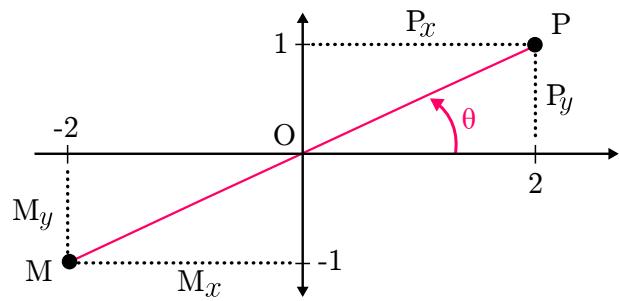
1–3 Géometrie



En utilisant la loi des cosinus, montrer que la distance d est donnée par : $d = l\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$.

Avec un contrôleur 10 bits et avec $l = 1m$, $\theta = 90^\circ$, quelle est la résolution d'un segment linéaire ? et d'un segment de rotation ?

1-4 fonction atan2



En utilisant les fonctions atan et atan2 et les coordonnées du point P, calculer l'angle θ .

Faire de même avec les coordonnées du point M.

Qu'en déduisez vous ?

Quatrième partie

Orientation dans l'espace

Objectifs :

- Comprendre le changement de base
- Établir une matrice de passage
- Calculer les coordonnées d'un objet dans différents repères
- Connaître les différentes conventions de rotations
- Déterminer les angles de rotation d'un objet pour 2 orientations différentes

Pré-requis :

- Savoir projeter un vecteur sur un système d'axes
- Connaître ce qu'est le déterminant d'une matrice
- Savoir faire un produit de matrices

Modules recommandés :

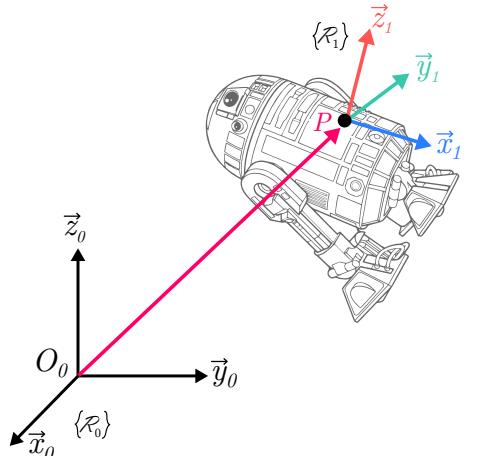
- MATHS500

1 Repérage d'un solide dans par rapport à un repère

Un solide est complètement décrit dans l'espace par sa **pose** c.a.d. sa **position** ET son **orientation**, par rapport à un référentiel (*repère*).

$\{\mathcal{R}_0\} = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe
 $\{\mathcal{R}_1\} = (P, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: repère (1) associé au solide.

POSE = Position + Orientation



1.1 Position

La position est définie par les coordonnées du point P dans le repère (θ) :
 $\vec{O_0P} = P_x \cdot \vec{x}_0 + P_y \cdot \vec{y}_0 + P_z \cdot \vec{z}_0$

notation – On note le vecteur $\overrightarrow{O_0P}$ sous forme d'une « matrice colonne » :

$${}^0\mathbf{P} = {}^{(0)} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad \text{exprimée donc dans le repère } (\theta)$$

1.2 Orientation (déterminée par une matrice)

Pour définir l'orientation de (1) par rapport à (0), on utilise la **matrice de changement de base**, ou **matrice de passage** de $\{\mathcal{R}_0\}$ à $\{\mathcal{R}_1\}$ notée ${}^0\mathbf{R}_1$:

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \leftarrow {}^1\vec{x}_0 \\ \leftarrow {}^1\vec{y}_0 \\ \leftarrow {}^1\vec{z}_0 \end{array} \quad \text{avec } \begin{cases} \vec{x}_1 = r_{11} \cdot \vec{x}_0 + r_{21} \cdot \vec{y}_0 + r_{31} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 = r_{11} \end{cases}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 ${}^0\vec{x}_1 \quad {}^0\vec{y}_1 \quad {}^0\vec{z}_1$

Cette matrice matrice de rotation s'appelle aussi **matrice des cosinus directeurs** (les éléments r_{ij}).

Les colonnes sont les coordonnées des vecteurs unitaires \vec{x}_1 , \vec{y}_1 , \vec{z}_1 exprimés dans la base $\{\mathcal{R}_0\}$.

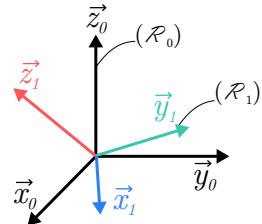


FIGURE 21 – Rotation de 2 repères

Remarque : ${}^0({}^0\mathbf{R}_1)$ est exprimée dans (0).

Si ce n'est pas précisé on omettra l'indice de la base pour alléger l'écriture et on notera : ${}^0\mathbf{R}_1$

a. Changement de repère d'un vecteur

La matrice de passage permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur dans le repère $\{\mathcal{R}_0\}$ à partir de ses coordonnées données dans le repère $\{\mathcal{R}_1\}$.

Soit un vecteur \vec{p} avec

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{p} &= \begin{pmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{pmatrix} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (0)} \\ {}^1\mathbf{p} &= \begin{pmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{pmatrix} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (1)} \end{aligned}$$

si les origines de $\{\mathcal{R}_0\}$ et $\{\mathcal{R}_1\}$ sont confondues (rotation pure entre les repères) on alors :

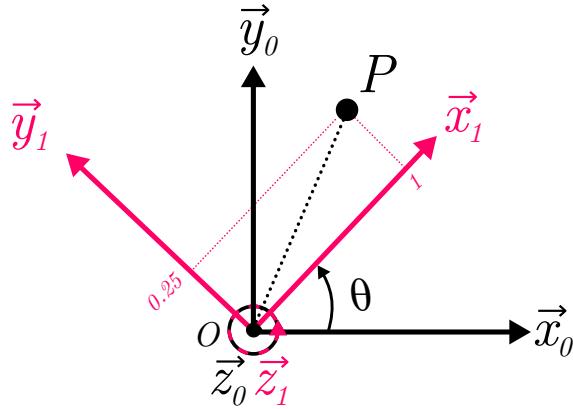
$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\mathbf{p} \quad ({}^0\mathbf{R}_1 \text{ est exprimée dans (0)})$$

et inversement :

$${}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{p} \quad ({}^1\mathbf{R}_0 \text{ est exprimée dans (1)})$$

Exemple : Coordonnées d'un vecteur dans 2 bases différentes

Soit le point P dont les coordonnées sont connues dans le repère $\{\mathcal{R}_1\}$ par : ${}^1\mathbf{p} = (1, 0.25, 0)^T$. On cherche à déterminer les coordonnées de ce même point dans le repère $\{\mathcal{R}_0\}$ sachant que le repère $\{\mathcal{R}_1\}$ est défini par une rotation de $\{\mathcal{R}_0\}$ autour de z_0 par un angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Les coordonnées des vecteurs de base de $\{\mathcal{R}_1\}$ dans $\{\mathcal{R}_0\}$ sont :

$$\vec{x}_1 = {}^{(0)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_1 = {}^{(0)} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_1 = {}^{(0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage de $\{\mathcal{R}_0\}$ à $\{\mathcal{R}_1\}$ s'écrit alors : ${}^0\mathbf{R}_1 = {}^{(0)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les coordonnées du point P dans $\{\mathcal{R}_0\}$ sont : ${}^0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{(0)} \begin{bmatrix} 0.53 \\ 0.88 \\ 0 \end{bmatrix}$

b. Ambiguités de la représentation matricielle

L'interprétation d'une matrice de rotation peut donner naissance à plusieurs ambiguïtés. La modification des coordonnées d'un vecteur peut correspondre à une rotation de ce vecteur, ou à une rotation du repère.

$${}^0\mathbf{p} = {}^{(0)} \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (0)}$$

Soit un vecteur \vec{p} avec

$${}^0\mathbf{p}' = {}^{(0)} \begin{bmatrix} {}^0p'_x \\ {}^0p'_y \\ {}^0p'_z \end{bmatrix} \text{ les coordonnées de ce vecteur ayant subit une rotation d'angle } \theta, \text{ ex}$$

alors :

$${}^0\mathbf{p}' = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^0\mathbf{p}$$

et inversement :

$${}^0\mathbf{p} = ({}^0\mathbf{R}_1)^T \cdot {}^0\mathbf{p}'$$

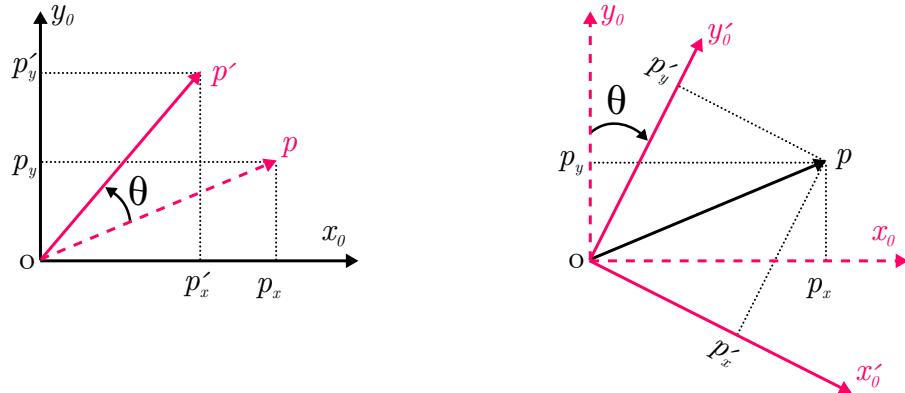


FIGURE 22 – Rotation d'un vecteur en 2D et Changement de base d'un vecteur

Dans l'exemple de la Figure.22 :
$$\begin{pmatrix} {}^{(0)}p'_x \\ {}^{(0)}p'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{(0)}p_x \\ {}^{(0)}p_y \end{pmatrix}$$

Il faut bien noter que dans cette formulation, les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{p}' , ainsi que la matrice de rotation ${}^0\mathbf{R}_1$ doivent être exprimés dans une même base, pour faire le calcul.

Il faut aussi bien comprendre qu'une rotation d'un vecteur selon un angle θ est exactement identique à effectuer une rotation du repère selon un angle $-\theta$. En effet, soit le repère est fixe et le vecteur tourne de θ , soit le vecteur est fixe et le repère de tourne d'un angle de $-\theta$, le résultat de l'un par rapport à l'autre est strictement identique.

En résumé, la matrice de rotation ${}^i\mathbf{R}_j$ de $\{\mathcal{R}_i\}$ à $\{\mathcal{R}_j\}$:

- permet d'exprimer l'orientation du repère $\{\mathcal{R}_j\}$ par rapport au repère $\{\mathcal{R}_i\}$.
- permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur dans le repère $\{\mathcal{R}_i\}$ à partir de ses coordonnées données dans le repère $\{\mathcal{R}_j\}$.
- est un opérateur qui permet la rotation d'un vecteur **dans le même** système de coordonnée.

L'angle de la rotation est :

- **positif** dans le cas d'une rotation dans le **sens trigonométrique** (*i.e* anti-horaire)
- **négatif** dans le cas d'une rotation dans le **sens horaire**

c. Propriétés des matrices de changement de base

Propriété 1 : La matrice de rotation est orthogonale.

La transposée de la matrice de rotation est égale à son inverse :

$$({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} = ({}^0\mathbf{R}_1)^T$$

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{12}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1$$

$$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$$

Propriété 2 : Rotation inverse.

Produit scalaire des lignes 2 à 2 et des colonnes = 0. (par exemple : $r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1$)

Les lignes (resp. colonnes) représentent des vecteurs perpendiculaires 2 à 2 (produit scalaire nul) :
 $(\vec{x}_0 \perp \vec{y}_0, \vec{x}_0 \perp \vec{z}_0, \vec{y}_0 \perp \vec{z}_0, \vec{x}_1 \perp \vec{y}_1, \dots)$

$${}^1\mathbf{R}_0 = ({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} = ({}^0\mathbf{R}_1)^T$$

Propriété 3 : Matrice identité

$${}^0\mathbf{R}_1 \cdot ({}^0\mathbf{R}_1)^T = I$$

(avec I la matrice (3x3) identité)

Propriété 4 : Déterminant

$$\det {}^0\mathbf{R}_1 = \det {}^1\mathbf{R}_0 = 1$$

Propriété 5 : La composition des rotations est réalisée par multiplication de matrices de rotations

$${}^0\mathbf{R}_k = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\mathbf{R}_2 \cdots {}^{k-2}\mathbf{R}_{k-1} \cdot {}^{k-1}\mathbf{R}_k$$

Propriété 6 : La composition des rotations n'est pas commutative

$${}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\mathbf{R}_2 \neq {}^1\mathbf{R}_2 \cdot {}^0\mathbf{R}_1$$

1.3 Matrices de rotation élémentaires

Les *rotations élémentaires* sont réalisées autour d'un seul axe du repère.

L'angle de la rotation est positif dans le sens trigonométrique 

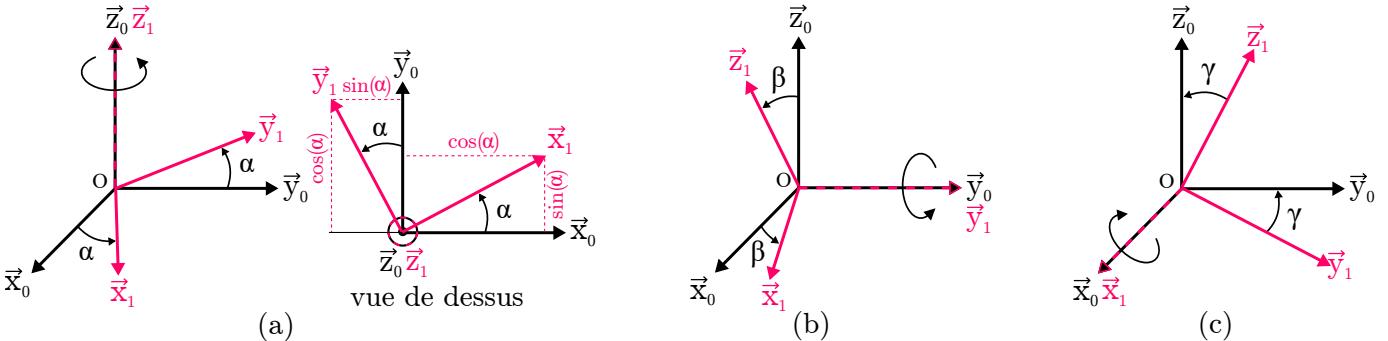


FIGURE 23 – (a) $\mathbf{R}_z(\alpha)$: Rotation autour de l'axe z . (b) $\mathbf{R}_y(\beta)$: Rotation autour de l'axe y . (c) $\mathbf{R}_x(\gamma)$: Rotation autour de l'axe x .

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

1.4 Composition de matrices de rotation

Soit 3 repères $\{\mathcal{R}_0\} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\{\mathcal{R}_1\} = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $\{\mathcal{R}_2\} = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ayant la même origine O . Le vecteur \mathbf{p} décrivant la position d'un point dans l'espace peut être exprimée respectivement dans chaque repère par ${}^0\mathbf{p}$, ${}^1\mathbf{p}$, ${}^2\mathbf{p}$.

on a donc :

$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p}$$

et

$${}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}$$

mais aussi :

$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}$$

donc on a :

$${}^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2$$

Remarque : ${}^0\mathbf{R}_1$ et ${}^0\mathbf{R}_2$ représentent des rotations par rapport au repère $\{\mathcal{R}_0\}$ alors que ${}^1\mathbf{R}_2$ représente une rotation par rapport au repère $\{\mathcal{R}_1\}$. On peut interpréter la rotation globale comme une succession de rotation en 2 étapes :

- Une rotation qui emmène $\{\mathcal{R}_0\}$ en $\{\mathcal{R}_1\}$;
- puis une rotation qui emmène $\{\mathcal{R}_1\}$ en $\{\mathcal{R}_2\}$.

Exemple : ordre de multiplication des matrices de rotation

Supposons que la matrice de rotation R représente une rotation d'angle β autour de l'axe y suivit d'une rotation d'angle α autour de l'axe z

Calculez R :

$$R = R_y(\beta) R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\beta c_\alpha & -c_\beta s_\alpha & s_\beta \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ -s_\beta c_\alpha & s_\beta s_\alpha & c_\beta \end{bmatrix}$$

Supposons maintenant que la matrice de rotation R' représente une rotation d'angle α autour de l'axe z suivit d'une rotation d'angle β autour de l'axe y

Calculez R' :

$$R = R_z(\alpha) R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que $R \neq R'$

a. *Rotation par repère fixe / repère courant*

Deux cas se présentent pour combiner deux rotations :

- soit on effectue la seconde rotation par rapport au repère résultant de la première rotation, appelé **repère courant**. Dans ce cas, la composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations :

$${}^0R_2 = {}^0R_1 {}^1R_2$$

- soit on effectue les deux rotations par rapport à un unique repère, le **repère fixe**. Dans ce cas, la composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations :

$${}^0R_2 = {}^0({}^1R_2) {}^0R_1$$

Remarque : Dans le cas d'une combinaison de rotations par repère fixe, la deuxième rotation est réalisée par rapport au repère fixe. C'est déroutant et inapproprié d'utiliser la notation 1R_2 pour la décrire. Dans ce cas on précise explicitement le repère fixe dans lequel cette rotation est définie.

Exemple : ordre de multiplication des matrices de rotation

Soit (\mathcal{R}') et (\mathcal{R}'') les repères résultant des deux rotations successives du repère fixe (\mathcal{R}) . Dans les deux, le repère (\mathcal{R}') résulte de la rotation 0R_1 de (\mathcal{R}) autour d'un axe lié au repère fixe (\mathcal{R}) . Ensuite, les deux cas précédents donnent :

- repère courant : (\mathcal{R}'') résulte de la rotation de (\mathcal{R}') autour d'un axe lié à (\mathcal{R}') ;
- repère fixe : (\mathcal{R}'') résulte de la rotation de (\mathcal{R}') autour d'un axe lié à (\mathcal{R}) ;

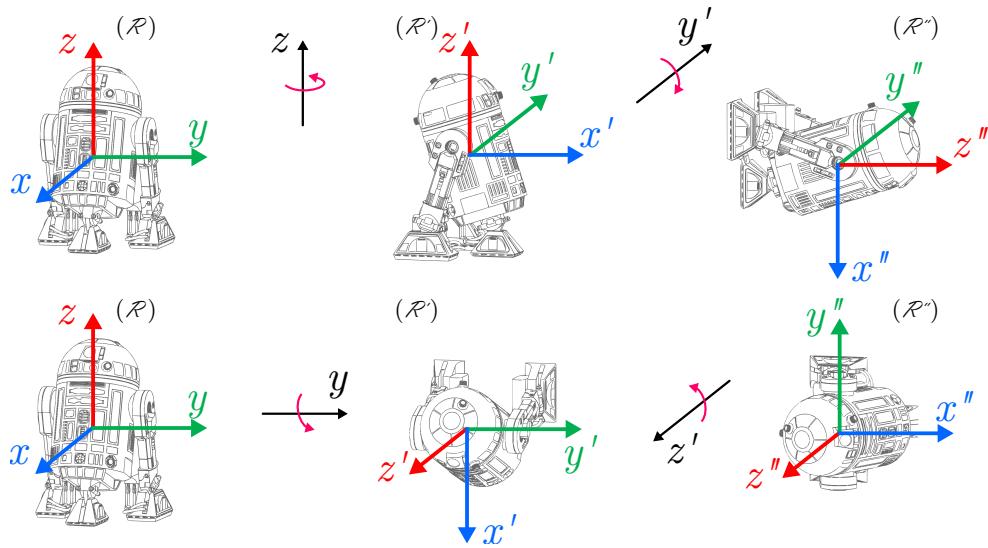


FIGURE 24 – Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**.

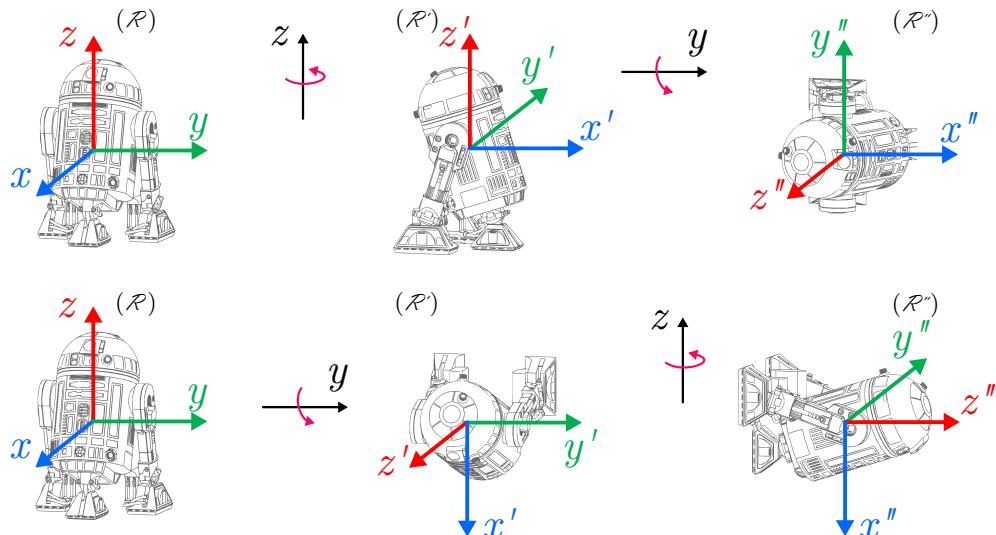


FIGURE 25 – Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**. On vérifie bien que l'ordre des rotations R_z suivie de R_y ne donne pas le même résultat que R_y suivie de R_z .

b. Remarques

Les matrices de rotation donnent une description *redondante* de l'orientation d'un corps. En effet, la matrice de rotation R est constituée de 9 éléments liés par seulement 6 relations indépendantes (contraintes d'orthogonalité et normalité) :

$$\begin{array}{ll} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 & r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 & r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1 \\ r_{12}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1 \end{array}$$

Par conséquent, 3 paramètres linéairement indépendants sont suffisants pour décrire l'orientation d'un corps. Ces trois rotations peuvent alors être définies de différentes manières (à condition que deux rotations consécutives ne soient pas autour du même axe) :

Pour exprimer de cette manière l'orientation d'un solide, ou de l'organe terminal d'un robot, on peut choisir, parmi diverses possibilités que l'on trouve sur la plupart des robots industriels comme par exemples :

- Angles d'Euler
- Angles nautique appelés aussi Angles de Cardan ou de Bryant (Roll Pitch Yaw)
- Quaternions

2 Angles d'Euler ZYZ

C'est une succession de 3 rotations élémentaires appelées *précession*, *nutation* et *rotation propre*. Chaque nouvelle rotation étant effectuée par rapport à un repère ayant tourné. Il existe plusieurs conventions (12 ordres de rotation différents ! xyx, xyz, xzx, xzy, yxy, yxz, yzx, yzy, zxy, zxz, zyx, zyz). Mais pour les angles d'Euler, le principe consiste à utiliser le même axe de rotation pour les première et troisième transformations. Les deuxième et troisième rotations sont réalisées autour d'axes issus de la rotation précédente. La convention présentée ici est **ZYZ** :

- $R_z(\varphi)$: la précession φ , autour de l'axe z_0 , fait passer de $\{\mathcal{R}_0\}$ à (\mathcal{R}') (avec $-\pi \leq \varphi \leq \pi$),
- $R_{y'}(\theta)$: la nutation θ , autour de l'axe y' , fait passer de (\mathcal{R}') à (\mathcal{R}'') (avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$),
- $R_{z''}(\psi)$: la rotation propre ψ , autour de z'' , fait passer de (\mathcal{R}'') à $\{\mathcal{R}_1\}$ (avec $-\pi \leq \psi \leq \pi$).

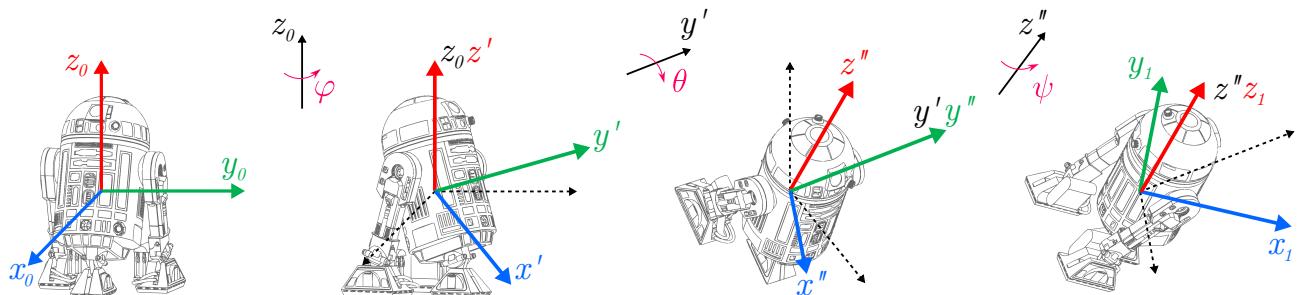


FIGURE 26 – Euler ZYZ

La matrice de rotation équivalente à une orientation donnée par les angles d'Euler (**rotation par repère courant**, ici dans le cas ZYZ) est obtenue par **post-multiplication** des matrices de rotation élémentaires :

$$\mathbf{R}_{ZYZ} = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_{y'}(\theta) \mathbf{R}_{z''}(\psi)$$

$$\mathbf{R}_{ZYZ} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{ZYZ} = \begin{bmatrix} C_\varphi C_\theta C_\psi - S_\varphi S_\psi & -C_\varphi C_\theta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\theta \\ S_\varphi C_\theta C_\psi + C_\varphi S_\psi & -S_\varphi C_\theta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix}$$

Réciproquement, on peut obtenir les angles d'Euler à partir des cosinus directeurs (les composantes de la matrice \mathbf{R})

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Pour la convention ZYZ on a :

- une résolution inverse est indéterminée quand $\theta = 0$ ou π .
- Si $r_{33} \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} \text{si } \theta \in [0, \pi] & \quad \left| \begin{array}{l} \varphi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \theta = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{array} \right. \\ \text{si } \theta \in [-\pi, 0] & \quad \left| \begin{array}{l} \varphi = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \theta = \text{atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \text{atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

2.1 Blocage de Cardan (Gimbal Lock)

Quel que soit l'ordre des rotations choisi, la représentation d'une rotation par les angles d'Euler possède toujours une *singularité* quand la première et la dernière rotation ont lieu selon la même direction (*blocage de Cardan* ou *gimbal lock*).

Par exemple, cela se voit sur la convention ZYZ quand sur Y, $\theta = 0^\circ$ ou 180° , ou sur la convention YXZ lorsque sur X, $\theta = 90^\circ$.

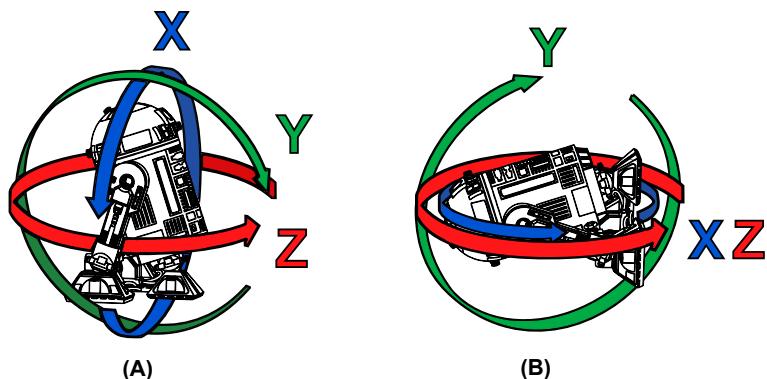


FIGURE 27 – (A) L'orientation de l'objet est complètement défini dans l'espace avec 3 degrés de libertés. (B) Blocage de Cardan : deux des trois axes de rotations sont coïncidents, un degré de liberté est perdu. Que l'on tourne suivant X ou Z cela aura le même résultat. On ne peut plus orienter librement l'objet en 3D dans l'espace.

Mathématiquement cela peut se montrer avec les angles d'Euler.

$$R_{ZYX} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $\theta = 0$, la composition des matrices de rotation devient :

$$R_{ZYX} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) & 0 \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut changer les valeurs de φ et ψ mais l'axe de rotation reste dans la direction Z. La troisième colonne et la troisième ligne de la matrice ne changeront pas. On a donc perdu un degré de liberté.

Remarques : Quelques exemples de robots industriels et leur convention :

- robots Kawasaki, Adept et Stäubli : zyz
- robots Bosch : yxz
- robots FANUC et KUKA : convention xyz
- robots ABB : convention xyz
- logiciels CATIA et SolidWorks : convention zxz

3 Angles de Cardan / Tait-Bryant / RPY / Nautiques

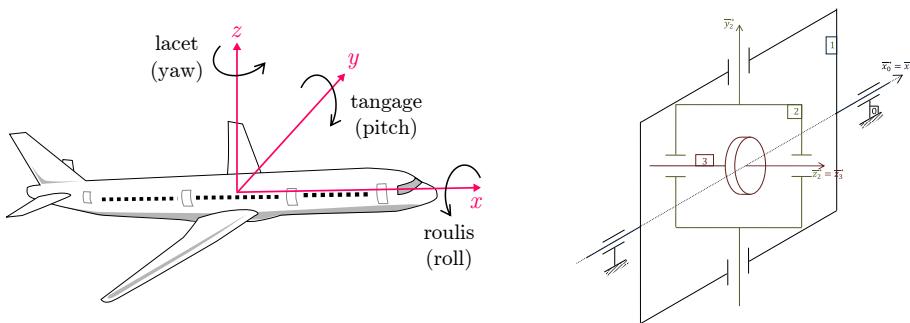


FIGURE 28 – Angle de Cardan ou de Bryant

Très utilisés en aéronautique et navigation les angles *Roll-Pitch-Yaw* (Roulis-Tangage-Lacet) sont en fait une version des rotations avec les angles d'Euler **ZYX** s'effectuant autour d'**axes fixes** suivant :

- Roll (roulis) ψ , autour de l'axe x_0 , fait passer de $\{\mathcal{R}_0\}$ à (\mathcal{R}') (avec $-\pi \leq \psi \leq \pi$),
- Pitch (tangage) θ , autour de l'axe y_0 , fait passer de (\mathcal{R}') à (\mathcal{R}'') (avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$),
- Yaw (lacet) φ , autour de l'axe z_0 , fait passer de (\mathcal{R}'') à $\{\mathcal{R}_1\}$ (avec $-\pi \leq \varphi \leq \pi$).

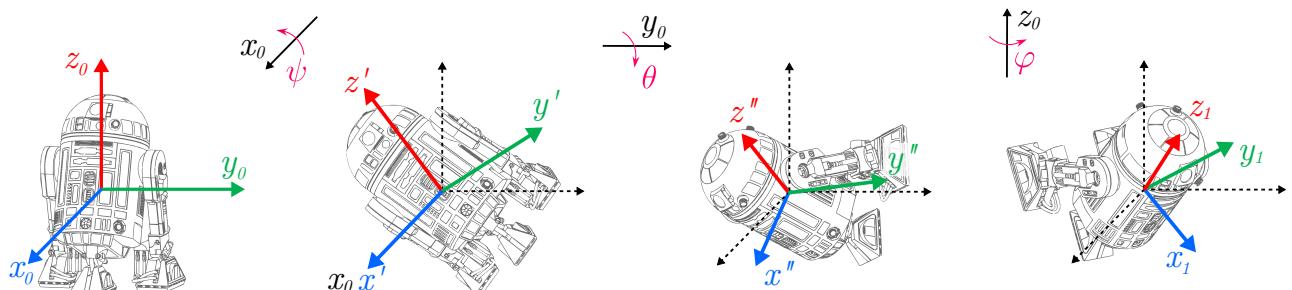


FIGURE 29 – Angles Roll-Pitch-Yaw

Attention à l'ordre car les rotations s'effectuent en **repère fixe** !

La matrice de rotation équivalente à une orientation donnée par les RPY est obtenue par **pré-multiplication** des matrices de rotation élémentaires :

$$\mathbf{R}_{XYZ} = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\psi)$$

$$\mathbf{R}_{XYZ} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{XYZ} = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

Réiproquement, connaissant la matrice des cosinus directeurs \mathbf{R}_{XYZ} , il est possible de calculer les angles de cardan :

$$\text{si } r_{11} \neq 0 \text{ } (\theta \text{ et } \varphi \neq \frac{\pi}{2}) \text{ et } r_{33} \neq 0 \text{ } (\theta \text{ et } \psi \neq \frac{\pi}{2}) \quad \left| \begin{array}{l} \varphi = \arctan 2(r_{21}, r_{11}) \\ \theta = \arctan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi = \arctan 2(r_{32}, r_{33}) \end{array} \right.$$

4 Orientation déterminée par un vecteur et un angle

On peut décrire l'orientation d'un repère par rapport à un autre grâce à une seule rotation d'angle θ autour d'un vecteur unitaire, \vec{u} qui n'est pas nécessairement un axe d'un repère.

La matrice de rotation est issue de la formule de Rodrigues :

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \mathbf{I} \cos \theta + \sin \theta \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{u})} + (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T$$

avec $\mathbf{S}_{(\mathbf{u})} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$, la matrice antisymétrique associée au vecteur \mathbf{u} .

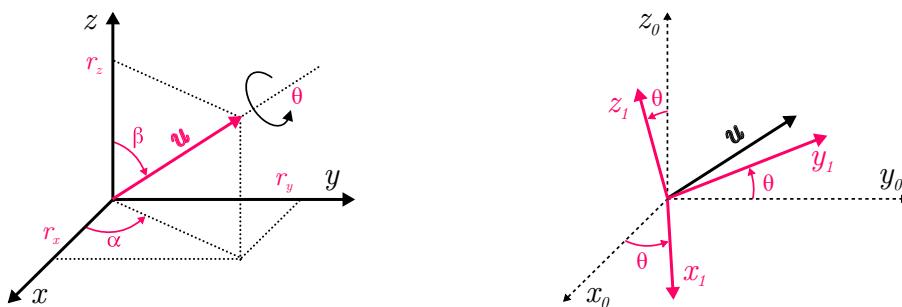


FIGURE 30 – Rotation par un vecteur et un angle

On trouve aussi la relation sous cette forme matricielle :

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{bmatrix}$$

où sous une forme compacte :

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & u_x u_y(1 - c_\theta) - u_z s_\theta & u_x u_z(1 - c_\theta) + u_y s_\theta \\ u_x u_y(1 - c_\theta) + u_z s_\theta & u_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & u_y u_z(1 - c_\theta) - u_x s_\theta \\ u_x u_z(1 - c_\theta) - u_y s_\theta & u_y u_z(1 - c_\theta) + u_x s_\theta & u_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix}$$

Remarque : Si \mathbf{u} est un axe de rotation de $\{\mathcal{R}_1\}$ par rapport à $\{\mathcal{R}_0\}$ alors : ${}^0\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{u} = {}^0\mathbf{u}$ (vecteur invariant de la rotation)

autrement dit, \mathbf{u} est un vecteur propre de la matrice de rotation.

Rappel : Les vecteurs propres d'une matrice sont les vecteurs dont la direction reste inchangée après multiplication par la matrice. Ils sont associés aux à une valeur propre.

$$R(-\theta, -\mathbf{u}) = R(\theta, \mathbf{u})$$

- Une rotation d'un angle $-\theta$ autour de l'axe u ne peut pas être distinguée d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe \mathbf{u} .
- La représentation angle/axe n'est pas unique !

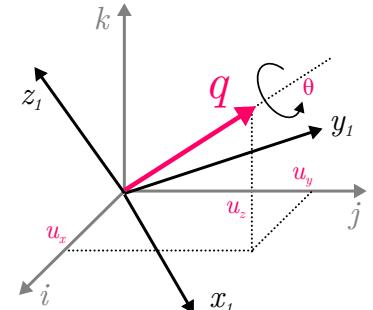
5 Orientation déterminée par les quaternions

Un quaternion est un vecteur $\mathbf{q} = (w, x, y, z)^T$ composé de quatre paramètres qui décrivent une **rotation unique** d'angle $\theta \in [0, \pi]$ autour d'un axe de vecteur unitaire \vec{u} .

Le premier paramètre est un nombre réel les trois autres sont les composantes de $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ dans l'espace complexe.

$$\mathbf{q} = \underbrace{w}_{\text{Re}(q)} + \underbrace{x.\mathbf{i} + y.\mathbf{j} + z.\mathbf{k}}_{\text{Im}(q)} = w + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} w = \cos(\theta/2) \\ x = u_x \sin(\theta/2) \\ y = u_y \sin(\theta/2) \\ z = u_z \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$



a. Propriétés

Formule fondamentale : $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk}^2 = -1$

Quaternion : $\mathbf{q} = [w, x, y, z]^T$

Quaternion conjugué : $\bar{\mathbf{q}} = [w, -x, -y, -z]^T$

Quaternion inverse : $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}$

Norme : $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

Non commutativité : $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \neq \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\cos(\theta) = 2x^2 - 1$$

Les quaternions ont été inventés en 1843 par Sir William Rowan Hamilton dont l'objectif était de généraliser les nombres complexes à trois dimensions.

La matrice de rotation correspondante est définie par :

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2(w^2 + x^2) - 1 & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) \\ 2(xy + wz) & 2(w^2 + y^2) - 1 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & 2(w^2 + z^2) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} w = \frac{\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}}{2} \\ x = sgn(r_{32}-r_{23}) \frac{\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{33}}}{2} \\ y = sgn(r_{13}-r_{31}) \frac{\sqrt{1-r_{11}+r_{22}-r_{33}}}{2} \\ z = sgn(r_{21}-r_{12}) \frac{\sqrt{1-r_{11}-r_{22}+r_{33}}}{2} \end{array} \right.$$

Remarques : Les quaternions sont rarement utilisés comme moyen de communication entre l'usager est le contrôleur du robot, car ils ne sont pas très intuitifs. Cependant ils restent des outils puissant car ils évitent le phénomène de *Gimbal Lock*.

Le langage de programmation de robots ABB, RAPID, est probablement le seul à utiliser le quaternion.

b. Rotation d'un vecteur v par un quaternion unitaire q

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{v}_q \otimes \mathbf{q}^{-1}$$

où \mathbf{v}_q est un vecteur quaternion pure de dimension 4 : $\mathbf{v}_q = [0, v]^T = [0, v_x, v_y, v_z]$ et l'opérateur \otimes est le produit Hamiltonien défini par :

$$Q_1 \otimes Q_2 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2 \end{bmatrix}^T \quad \text{avec } Q_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{bmatrix} \text{ et } Q_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Exemple : Rotation relative décrite avec des quaternions

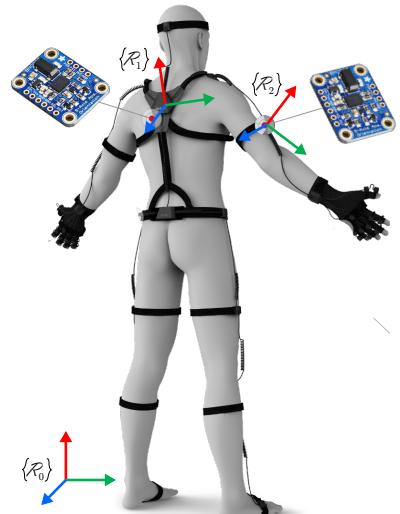
On utilise 2 centrales inertielles Bosch BNO55, placées au niveau de la colonne vertébrale et sur un bras. Le repère global est noté 0, les repères associés aux capteurs 1 et 2 respectivement.

Le capteur 1 nous donne un quaternion q qui décrit le passage 0 → 1, et le capteur 2, un quaternion r qui décrit le passage 0 → 2.

Le quaternion p décrit le passage 1 → 2.

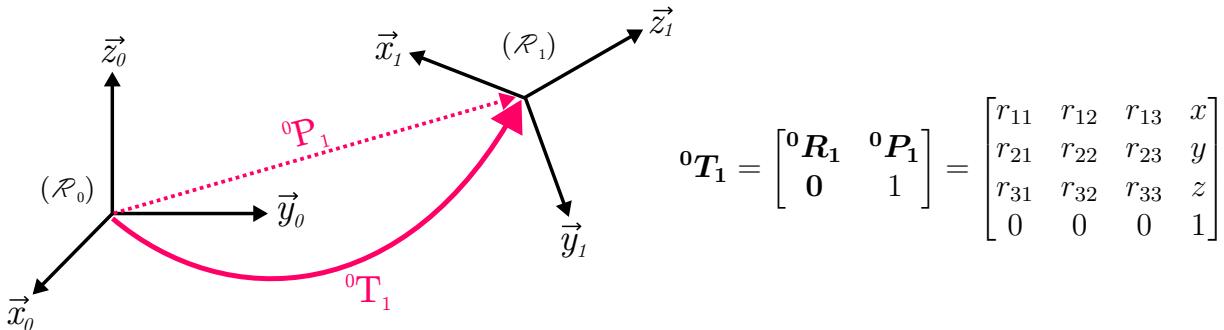
Comme $r = p \otimes q$, on a alors :

$$p = q^{-1} \otimes r$$



6 Matrice de passage homogène

Les matrices de *passage homogènes* (4X4) permettent de décrire le passage d'un repère à un autre, en combinant une translation et une rotation.



R : matrice (3x3) des rotations donnant l'orientation du solide dans un repère fixe $\{\mathcal{R}_0\}$.

P : matrice (3x1) des translations donnant la position du solide dans un repère fixe $\{\mathcal{R}_0\}$.

Remarque : Les coordonnées homogènes d'un vecteur de l'espace sont de la forme : $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$.

On trouvera aussi souvent les notations suivantes pour les cosinus directeurs **s**, **n**, **a** et le vecteur de translation **P** tel que :

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matrice Rot.} & \text{Vecteur Trans.} \\ \text{Trans. Persp.} & \text{Scaling Factor} \end{bmatrix}$$

a. Transformation d'un vecteur

Soit un vecteur $\tilde{\mathbf{v}}^\dagger$ avec

$$\begin{aligned} {}^i\tilde{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} {}^{(i)}\begin{bmatrix} {}^iV_x \\ {}^iV_y \\ {}^iV_z \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (i)} \\ {}^j\tilde{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} {}^{(j)}\begin{bmatrix} {}^jV_x \\ {}^jV_y \\ {}^jV_z \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ ses coordonnées exprimées dans le repère (j)} \end{aligned}$$

alors :

$${}^i\tilde{\mathbf{v}} = {}^i\mathbf{T}_j \cdot {}^j\tilde{\mathbf{v}}$$

La matrice de transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ permet de calculer les coordonnées d'un vecteur dans le repère $\{\mathcal{R}_i\}$ à partir de ses coordonnées dans le repère $\{\mathcal{R}_j\}$.

†. Par la suite pour éviter de surcharger l'écriture et si l'on sait que les *transformations homogènes* sont en jeu, on omettra le ~ sur le vecteur

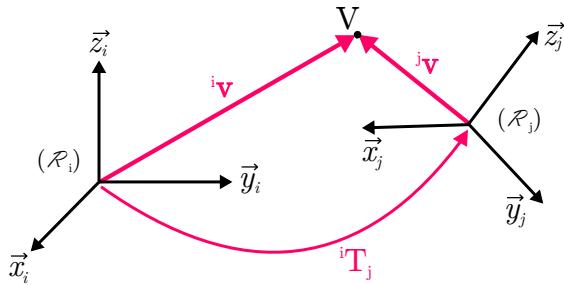


FIGURE 31 – Expression d'un vecteur \mathbf{V} dans différents repères

En résumé, La matrice de transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ de $\{\mathcal{R}_i\}$ à $\{\mathcal{R}_j\}$:

- représente la transformation du repère $\{\mathcal{R}_i\}$ vers le repère $\{\mathcal{R}_j\}$
- peut être interprétée comme la représentation du repère $\{\mathcal{R}_j\}$ exprimée dans le repère $\{\mathcal{R}_i\}$
- permet de calculer les coordonnées d'un vecteur dans le repère $\{\mathcal{R}_i\}$ à partir de ses coordonnées dans le repère $\{\mathcal{R}_j\}$.

6.1 Propriétés des matrices de passage homogènes

La propriété de l'orthogonalité ne s'applique pas donc en général :

$$\mathbf{T}^{-1} \neq \mathbf{T}^T$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

a. Composition des transformations

Soit deux transformations représentées par leurs matrices homogènes :

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_2 & {}^1\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \text{ alors :}$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 & {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{P}_2 + {}^0\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \neq {}^1\mathbf{T}_2 {}^0\mathbf{T}_1$$

Si $\{\mathcal{R}_0\}$ est modifié par k transformations consécutives avec chaque transformation i définie par rapport au repère courant (\mathcal{R}_{i-1}) . La composition de transformations successives par rapport au *repère courant* est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de transformation en suivant l'ordre donné des transformations (Fig.32).

$${}^0\mathbf{T}_k = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \dots {}^{k-1}\mathbf{T}_k$$

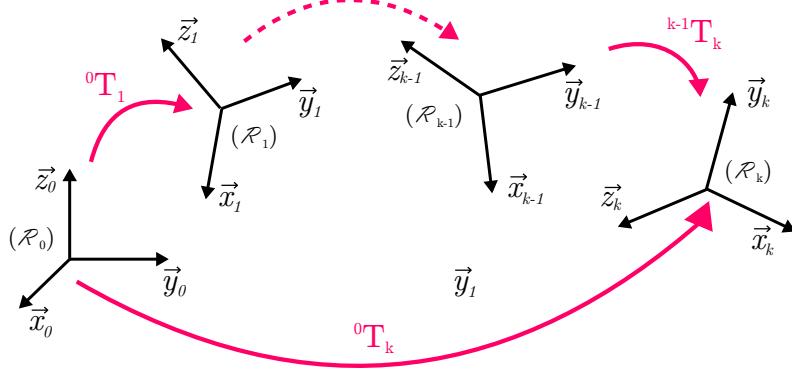


FIGURE 32 – Transformations consécutives. (source : adaptée de [1])

En résumé :

- La **multiplication par la droite** (*postmultiplication*) de la transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ indique que la transformation est définie par rapport au **repère courant** $\{\mathcal{R}_j\}$;
- La **multiplication par la gauche** (*premultiplication*) indique que la transformation est définie par rapport au **repère fixe** $\{\mathcal{R}_i\}$.

Problèmes

4.1 Matrices de rotation

Soit la matrice de rotation suivante :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quel type de rotation représente R, quel est l'axe de rotation et quel est l'angle de rotation ?

4.2 Matrices de rotation

Soit la matrice de rotation suivante. Trouvez x, y et z :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.433 & -0.500 & z \\ x & 0.866 & -0.433 \\ 0.866 & y & 0.500 \end{bmatrix}$$

4.3 Matrices de rotation

La transformation linéaire suivante est elle une rotation ?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 Rotation of coordinate frame

A coordinate frame X_1, Y_1, Z_1 is rotated into a configuration X_2, Y_2, Z_2 in such a way that $X_2 = -Y_1$, $Y_2 = Z_1$, $Z_2 = -X_1$. Find the matrix representation of the rotation in X_1, Y_1, Z_1 coordinates. Compute the direction of the axis and the angle of rotation.

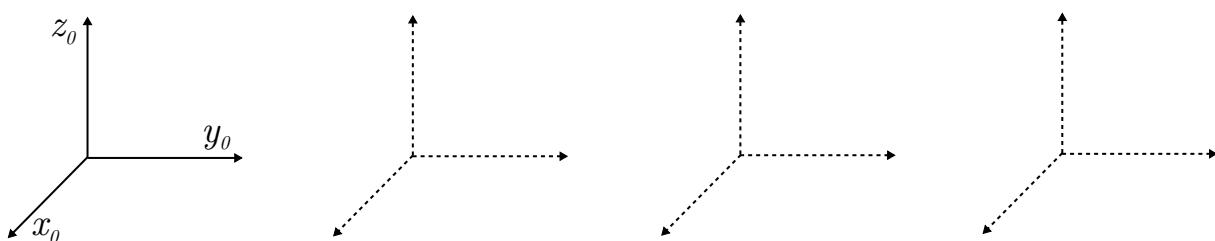
4.5 Angles d'Euler et rotation finie

Le repère $\mathbf{R}_3(O_3; \vec{x}_3; \vec{y}_3; \vec{z}_3)$ est défini par rapport au repère $\mathbf{R}_0(O_0; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$ par les angles d'Euler suivants : $\psi = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

1. Déterminer la matrice de passage 0R_3 .
2. Montrer que la rotation autour de \vec{e} de $\frac{\pi}{2}$ avec $\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$, conduit à la même matrice.

4.6 Angles de Cardans

1. Trouver la matrice de rotation représentée par les angles de Cardans suivants la séquence peu originale : un Roulis (Roll) de $\frac{\pi}{2}$, suivit d'un Lacet (Yaw) de $-\frac{\pi}{2}$, suivit d'un Tangage (Pitch) de $\frac{\pi}{4}$. (On donnera le détail du calcul et les matrices de rotations élémentaires).
2. Dessiner sur le schéma suivant les repères obtenus pour chaque rotation intermédiaire calculées précédemment.

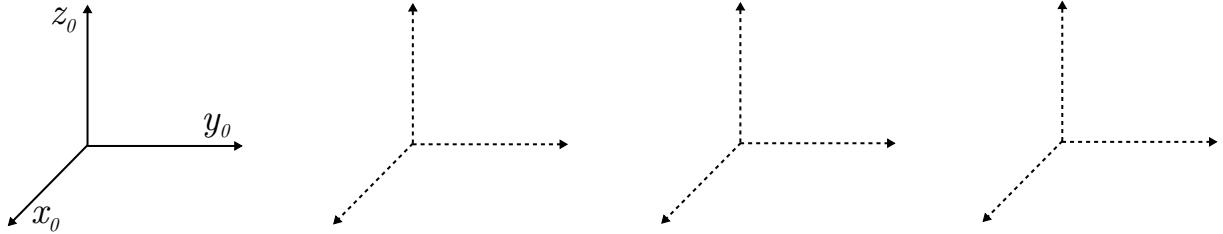


4.7 Angles d'Euler ZXZ

1. Trouver la matrice de rotation représentée par les angles d'Euler suivants la séquence ZXZ : précession $\varphi = \pi/2$, nutation $\theta = -\pi/2$, rotation propre $\psi = \pi/4$.

(On donnera le détail du calcul et les matrices de rotations élémentaires).

2. Dessiner sur le schéma suivant les repères obtenus pour chaque rotation intermédiaire calculées précédemment.



4.8 Matrices homogènes

Soit la matrice de transformation homogène suivante :

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 2 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Donner la matrice ${}^1\mathbf{T}_0$.
2. Soit ${}^0\mathbf{V} = [4, 5, 6]^T$. Avec $\theta = 45^\circ$, calculer ${}^1\mathbf{V}$.

4.9 Inversion de matrices homogènes

Soit la matrice homogène de transformation suivante :

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.43 & 0.86 & 5.0 \\ 0.87 & -0.50 & 0.00 & -4.0 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quel est la valeur de l'élément (2,4) de la matrice ${}^B\mathbf{T}_A$?

4.10 Rotation de repères

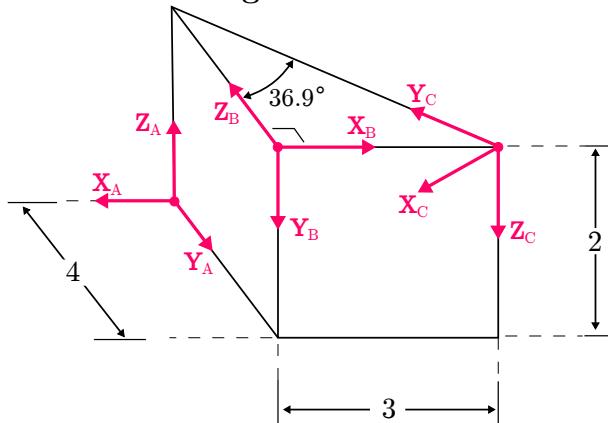
Trouver les nouvelles coordonnées homogènes du point $P(1,2,3,1)^T$ par rapport au repère de référence après une rotation de 30° autour de l'axe z , suivie d'une rotation de 60° autour de l'axe y .

4.11 Nautical angles

Work out the Roll, Pitch, and Yaw angles from the following rotation matrix :

$${}^B\mathbf{R}_G = \begin{bmatrix} 0.53 & -0.84 & 0.13 \\ 0.0 & 0.15 & 0.99 \\ -0.85 & -0.52 & 0.081 \end{bmatrix}$$

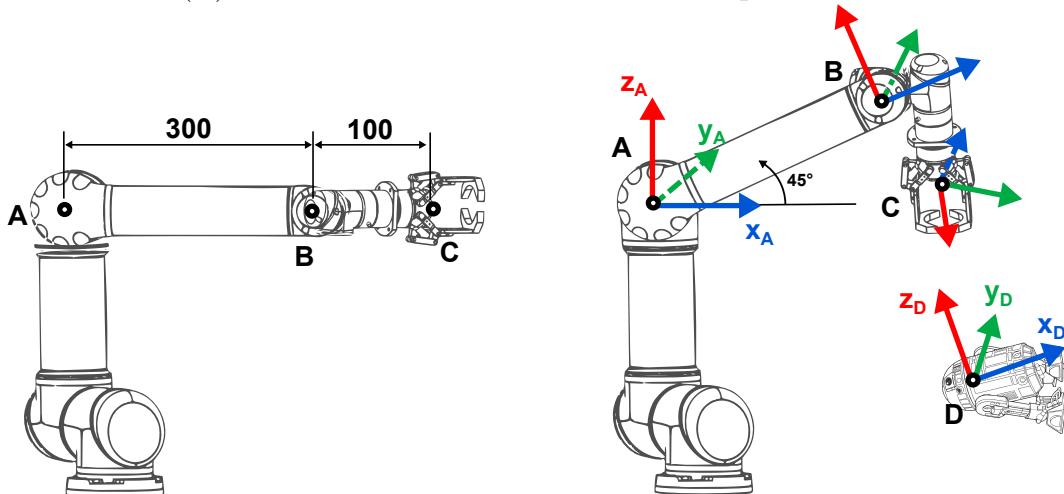
4.12 Matrices homogènes de transformation



Donner les valeurs des matrices ${}^A\mathbf{T}_C$, ${}^B\mathbf{T}_C$ et ${}^C\mathbf{T}_A$.

4.13 Matrices homogènes de transformation

Une caméra (C) est montée en bout d'un bras robotique.



En position repos les repères $\{\mathcal{A}\}$, $\{\mathcal{B}\}$ et $\{\mathcal{C}\}$ possèdent la même orientation. Dans la configuration présentée, le repère $\{\mathcal{C}\}$ est orienté tel qu'il a effectué une rotation dans le repère mobile de 30° suivant l'axe y puis de 170° suivant x.

Les coordonnées de la caméra par rapport à l'objet sont : $C = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 300 \end{bmatrix}_{(D)}$

L'orientation de la caméra par rapport à l'objet est donnée par la matrice de rotation :

$${}^D\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9962 & 0.0872 \\ 0 & -0.0872 & -0.9962 \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice homogène : ${}^A\mathbf{T}_D$

Donnez les coordonnées de l'objet dans le repère $\{\mathcal{A}\}$.

4.14 Matrices de rotation

Un ingénieur a fait les calculs de matrice de rotation suivantes. Discutez de la validité des résultats :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.9801 & -0.1987 \\ -0.9553 & 0.0595 & 0.6896 \\ 0.2957 & 0.1896 & 0.9363 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.9801 & -0.1987 \\ -0.9553 & 0.0595 & 0.2896 \\ 0.2957 & 0.1896 & 0.9363 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.9801 & 0.1987 \\ -0.9553 & 0.5950 & -0.2896 \\ 0.2957 & 0.1896 & -0.9363 \end{bmatrix}$$

4.15 Composition des Matrices de rotation

Soit les matrices de passage suivantes :

$${}^A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8290 & 0.5592 \\ 0 & -0.5592 & 0.8290 \end{bmatrix} \quad {}^C\mathbf{R}_D = \begin{bmatrix} 0.5592 & 0 & 0.8290 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ -0.8290 & 0 & 0.5592 \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{R}_D = \begin{bmatrix} 0.9931 & 0.0793 & 0.0868 \\ -0.0868 & 0.9924 & 0.0872 \\ -0.0793 & -0.0941 & 0.9924 \end{bmatrix}$$

Donnez ${}^A\mathbf{R}_C$

4.16 Repères

Given the following homogeneous transform matrix :

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -1.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 8.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.0 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 & 10.0 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 & -20.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

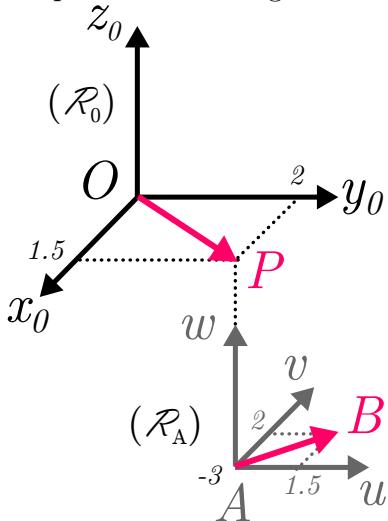
$${}^3\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & -3.0 \\ 0.43 & 30.750 & -0.500 & -3.0 \\ 0.250 & 0.433 & 0.866 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Draw the frames to show their arrangement qualitatively, and solve for 2T_3 .

4.17 Repères relatifs et absolus

Soit les 2 repères présentés dans la figure ci dessous.

La position de l'origine A est à $(1.5, 2, -3)$ par rapport à O.



Donnez la matrice de passage homogène qui représente l'orientation du repère par rapport à X. Calculez les coordonnées du vecteur P dans les 2 repères.

4.18 Composition de matrices de rotation

Soit les séquences de rotation suivantes. Écrire le produit de matrices donnant la rotation résultante (n'effectuez pas de calculs).

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z du repère courant ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe Y_0 du repère global.

Soit la séquence de rotation suivante :

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe X du repère courant.

Soit la séquence de rotation suivante :

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z du repère courant ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe X du repère courant ;
- Rotation d'un angle α autour de l'axe Z_0 du repère global.

Soit la séquence de rotation suivante :

- Rotation d'un angle φ autour de l'axe X_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle θ autour de l'axe Z_0 du repère global ;
- Rotation d'un angle ψ autour de l'axe X du repère courant ;
- Rotation d'un angle α autour de l'axe Z_0 du repère global.

4.19 Rotation matrix associated to an axis/angle representation

A rigid body is rotated first by an angle $\theta = \pi/3$ around the unit vector $r = (1/\sqrt{3}) \cdot [111]^T$ and then by an angle $\varphi = -\pi/3$ around the fixed y-axis.

Work out the rotation matrix representing the final orientation of the body.

4.20 Euler angles sequences

An initial orientation \mathbf{R}_i and a final orientation \mathbf{R}_f are defined by

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_f = \mathbf{I}$$

Find the two sequences of ZYZ Euler angles that represent the rotation from \mathbf{R}_i to \mathbf{R}_f .

4.21 Rotation vecteur et angle

Given the following matrix

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ a & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

determine, if possible, a value $a > 0$ such that the identity $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \theta) = A$ holds, where $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \theta)$ is the rotation matrix associated to an axis-angle representation of the orientation. Provide then all unit vectors \mathbf{r} and associated angles $\theta \in (-\pi, +\pi]$ that are solutions to this equation.

Cinquième partie

Modèle Géométrique Direct et Inverse

Objectifs :

- Construire le schéma cinématique d'un système robotique
- Définir les variables articulaires d'un robot
- Établir le modèle géométrique d'un robot avec la convention Denavit-Hartenberg

Pré-requis :

- Connaître les fonctions et formules trigonométriques classiques
- Établir le schéma cinématique d'un système mécanique

Modules recommandés :

- MECA655

1 Convention DH-KK : Denavit-Hartenberg modifiée (appelée aussi Khalil-Kleinfinger)

Initialement introduite en 1955 par Jacques Denavit et Richard S. Hartenberg, la méthode DH permet de normaliser, simplifier et rationaliser la modélisation géométrique d'un robot. Par la suite Khalil et Kleinfinger ont proposé une amélioration. **C'est cette convention dite "DH modifiée" qui est présentée ici.**

1.1 Règles de paramétrage

- Les segments sont numérotés dans l'ordre croissant, de la base (0) à l'effecteur (n).
- Le repère \mathcal{R}_i ($O_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i$) est associé au segment i .
- L'axe \vec{Z}_i correspond à l'axe de l'articulation i . (pivot ou glissière).
- L'axe \vec{X}_i correspond à la perpendiculaire commune entre \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} . ($\vec{X}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{Z}_{i+1}$).
- L'axe \vec{Y}_i est placé de façon à créer un repère orthogonal direct. ($\vec{Y}_i = \vec{Z}_i \wedge \vec{X}_i$).
- L'origine O_i est située à intersection de \vec{X}_i et \vec{Z}_i .

Le segment i possède 2 axes : Z_i et Z_{i+1} . L'axe Z_i est lié à l'articulation i et l'axe Z_{i+1} est lié à l'articulation $i + 1$.

a. Effecteur pince

Si l'effecteur est une **pince** le repère est défini ainsi :

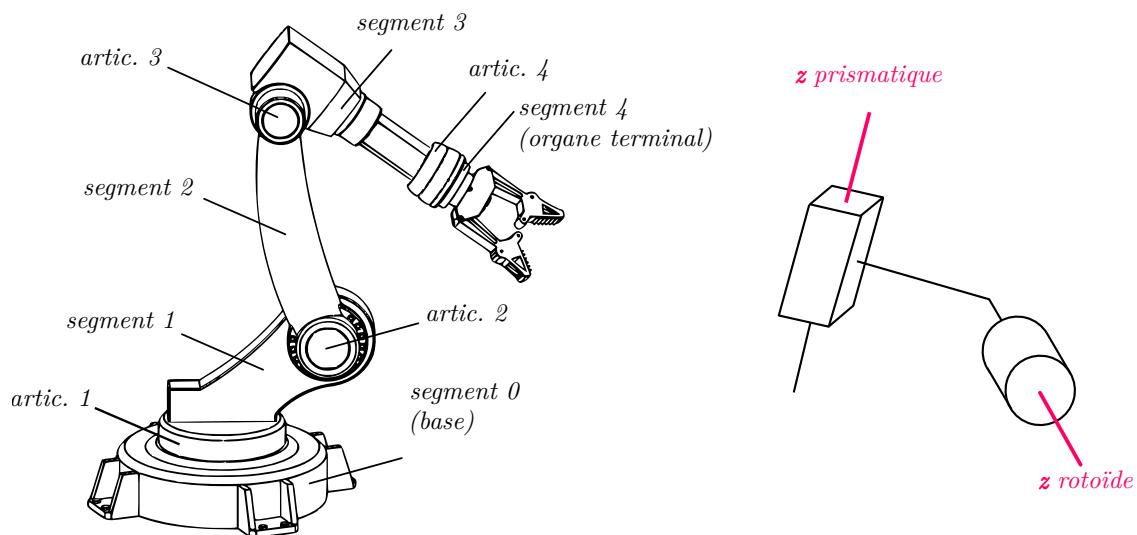


FIGURE 33 – Numérotation des segments et liaisons. Définition des axes Z_i .

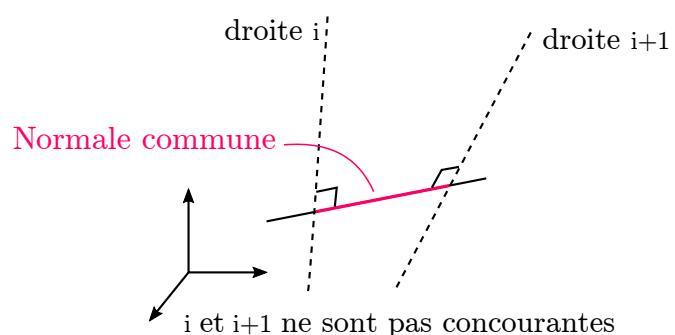


FIGURE 34 – La **normale commune** entre deux droites est la droite qui contient le segment de distance minimale entre les deux droites.

- Origine O_e : au centre de la pince
- \vec{Z}_e : en direction de l'objet à attraper.
- \vec{Y}_e : orthogonal à \vec{Z}_e , dans le plan de glissement des becs de la pince.
- \vec{X}_e : orthogonal au deux autres axes pour avoir un repère orthogonal direct ($\vec{X}_e = \vec{Y}_e \wedge \vec{Z}_e$).

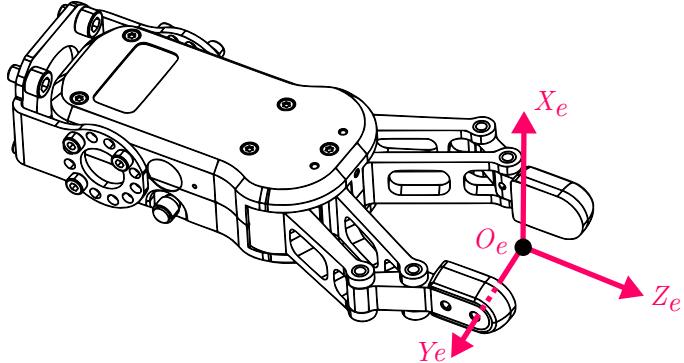


FIGURE 35 – Définition du repère d'un effecteur de type pince.

1.2 Paramétrage avec la convention DH-KK

a. Paramètres

Le positionnement de tous les systèmes de coordonnées sert à trouver les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés. Ceux ci seront utilisés pour calculer les matrices de transformation homogènes de chaque articulation et, enfin, la matrice de transformation homogène totale (la solution du problème de cinématique direct).

Le passage de $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$ à $\{\mathcal{R}_i\}$ (Fig.36) s'exprime en fonction des quatre paramètres DH modifiés suivants : \mathbf{a}_{i-1} (excentricité), α_{i-1} (torsion), \mathbf{d}_i (longueur), θ_i (angle).

\mathbf{a}_{i-1} : Distance de \mathbf{Z}_{i-1} vers \mathbf{Z}_i , le long de \mathbf{X}_{i-1} .
 α_{i-1} : Angle entre \mathbf{Z}_{i-1} et \mathbf{Z}_i , autour de l'axe \mathbf{X}_{i-1} .

\mathbf{d}_i : Distance de \mathbf{X}_{i-1} vers \mathbf{X}_i , le long de \mathbf{Z}_i .
 θ_i : Angle entre \mathbf{X}_{i-1} et \mathbf{X}_i , autour de l'axe \mathbf{Z}_i .

Symbol	Name	Description
\mathbf{a}_{i-1}	Link Length	$\mathbf{Z}_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } \mathbf{X}_{i-1}]{\perp, \text{distance}} \mathbf{Z}_i$
α_{i-1}	Twist Angle	$\mathbf{Z}_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } \mathbf{X}_{i-1}]{\odot \text{ rotation}} \mathbf{Z}_i$
\mathbf{d}_i	Joint Offset	$\mathbf{X}_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } \mathbf{Z}_i]{\perp, \text{distance}} \mathbf{X}_i$
θ_i	Joint Angle	$\mathbf{X}_{i-1} \xrightarrow[\text{@ } \mathbf{Z}_i]{\odot \text{ rotation}} \mathbf{X}_i$

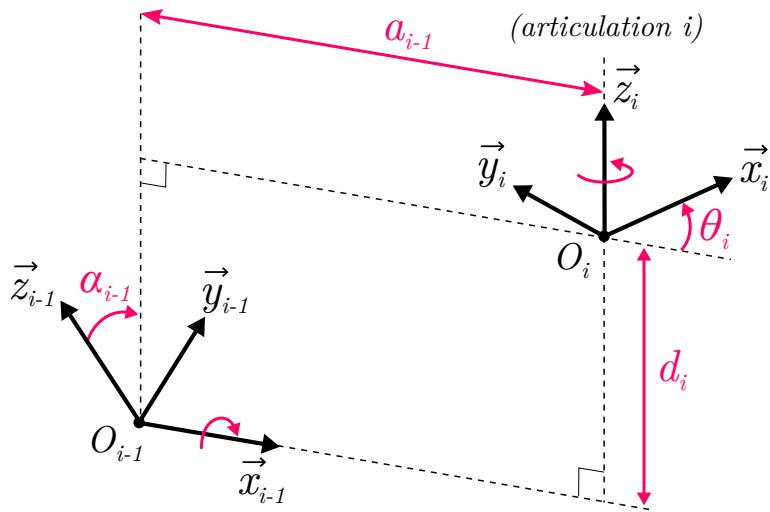


FIGURE 36 – Paramètres de la convention DH-KK.

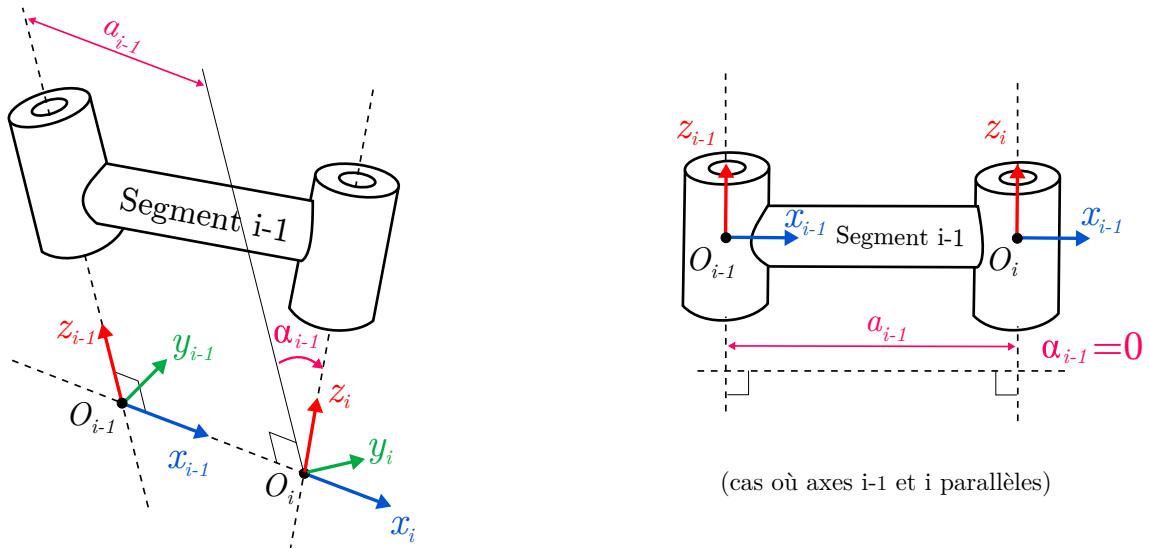


FIGURE 37 – Paramétrage d'un segment (convention DH-KK).

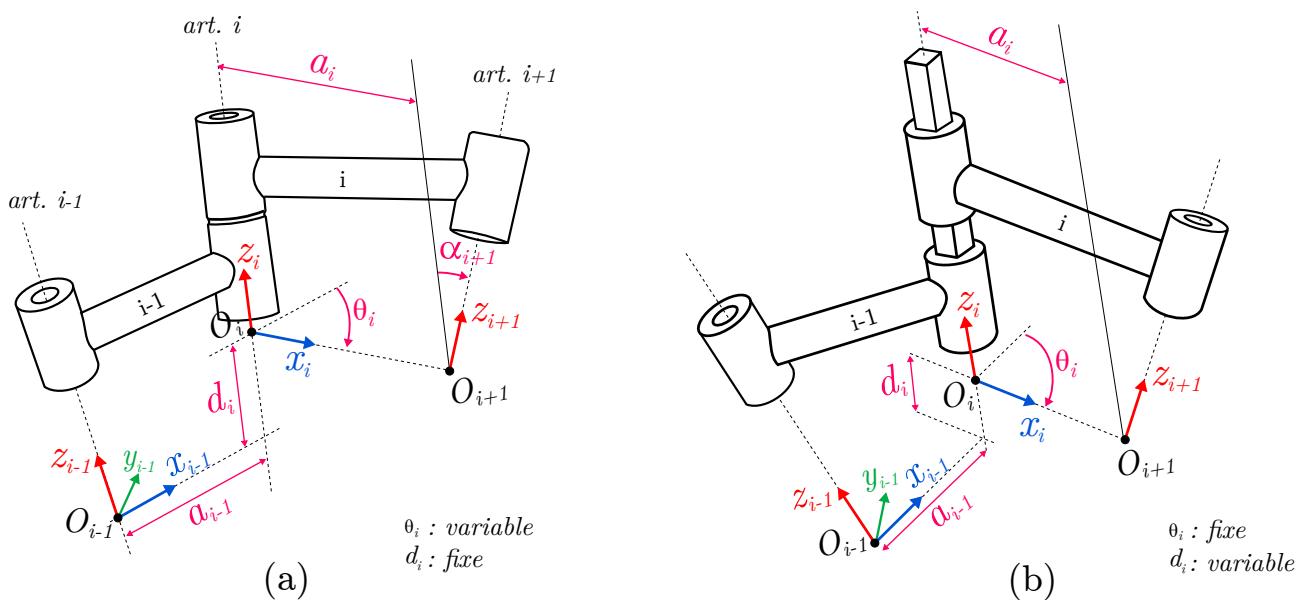


FIGURE 38 – Paramétrage (a) d'une liaison pivot, (b) d'une liaison glissière. (convention DH-KK)

b. Algorithme du paramétrage

1. Numérotation des segments et des articulations de 1 à n.
2. Placement de Z_i le long de l'axe des articulations i .
3. Identification de la normale commune entre Z_i et Z_{i+1} .
4. Placement de l'origine du repère O_i à l'intersection de la normale commune a_i et de l'axe Z_i .
 - Si Z_i et Z_{i+1} sont concourants, O_i est située au point d'intersection.
 - Si Z_i et Z_{i+1} sont parallèles, le choix de l'origine Z_i est arbitraire (on choisit généralement une solution qui donne $d_i=0$).
 - De même si il s'agit d'une articulation prismatique, la liberté est donnée quand à la position de l'origine du repère.
5. Placement de X_i le long de la normale commune a_i et dirigé de Z_i vers Z_{i+1} .
 - Si Z_i et Z_{i+1} s'intersectent, X_i est perpendiculaire au plan contenant les deux axes et le choix de la direction de X_i est libre.
6. Placement de Y_i pour obtenir un trièdre direct avec Z_i et X_i soit $Y_i = Z_i \wedge X_i$.
(Généralement on ne représente pas les axes Y_i pour ne pas encombrer le schéma)
7. Assignation du repère de Base $\{\mathcal{R}_0\}$:
Le repère de base est lié au segment 0.
Le repère est placé arbitrairement mais le choix le plus simple consiste à prendre $\{\mathcal{R}_0\}$ confondu avec (\mathcal{R}_1) quand $q_1 = 0$. (On a alors $a_0=0$ et $\alpha_0=0$, $d_1=0$ si l'articulation est rotatoire et $\theta_1=0$ si l'articulation est prismatique)
8. Assignation du repère de l'organe terminal n :
Si l'articulation n est rotatoire, la direction de x_n est choisie le long de x_{n-1} quand $\theta_n = 0$ et l'origine du repère n est choisie telle que $r_n = 0$.
Si l'articulation n est prismatique, la direction de x_n est choisie telle que $\theta_n = 0$ et l'origine du repère n est définie à l'intersection de x_{n-1} et z_n tel que $r_n = 0$.
9. Remplissage du tableau des paramètres

	segment i	σ_i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
0T_1	1					
1T_2	2					
...	...					
${}^{n-1}T_n$	n					

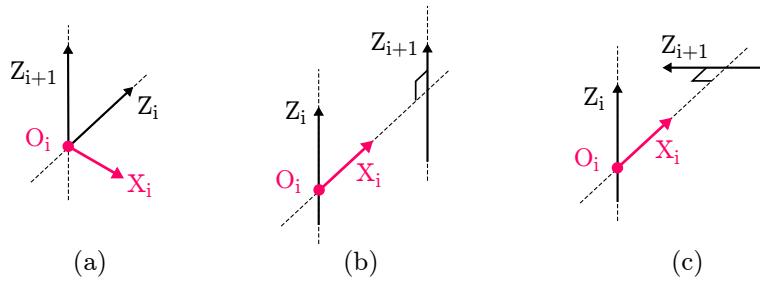


FIGURE 39 – (a) \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} s'intersectent. (b,c) \vec{Z}_i et \vec{Z}_{i+1} sont parallèles.

c. Variables articulaires : q_i

Le nombre de variables articulaires est égale au nombre d'axes du robot.

$$q_i = (1 - \sigma_i)\theta_i + \sigma_i d_i$$

avec :

- $\sigma_i = 0$ si i est une articulation rotatoire.
- $\sigma_i = 1$ si i est une articulation prismatique.

La variable articulaire q_i , associée à l'articulation i , est soit θ_i , soit d_i , selon que cette articulation est respectivement de type rotatoire ou prismatique.

autrement dit :

- si l'articulation est une rotation alors $q_i = \theta_i$ est variable, α_i , a_i , d_i sont constants.
- si l'articulation est une translation alors $q_i = d_i$ est variable, α_i , a_i , θ_i sont constants.

d. Matrice de passage homogène Denavit-Hartenberg

La matrice de transformation homogène (position et orientation) entre 2 repères adjacents $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$, $\{\mathcal{R}_i\}$ peut être décomposée en 4 transformations élémentaires :

$\mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1})$: Translation le long de \mathbf{X} d'une distance a .

$\mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1})$: Rotation autour de \mathbf{X} d'un angle α .

$\mathbf{Trans}_{z_i}(d_i)$: Translation le long de \mathbf{Z} d'une distance d .

$\mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$: Rotation autour de \mathbf{Z} d'un angle θ .

$$\mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1}) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Trans}_{z_i}(d_i) = \begin{bmatrix} I & \vec{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i) = \begin{bmatrix} R & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le produit des matrices de passage successives donne l'expression de la matrice de transformation qui amène le repère $\{\mathcal{R}_{i-1}\}$ au repère $\{\mathcal{R}_i\}$:

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(a_{i-1}) \cdot \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Trans}_{z_i}(d_i) \cdot \mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soit :

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i & {}^{i-1}\mathbf{O}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sous-matrice (3x3) supérieure gauche est la rotation ${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Rot}_{z_i}(\theta_i)$.

La dernière colonne (3 premières composantes) est le vecteur de translation des origines ${}^{i-1}\mathbf{O}_i = \vec{O}_{i-1}O_i$.

e. Remarques

La transformation inverse ${}^i\mathbf{T}_{i-1}$ est donnée par :

$${}^i\mathbf{T}_{i-1} = \mathbf{Rot}_{z_i}(-\theta_i) \cdot \mathbf{Trans}_{z_i}(-d_i) \cdot \mathbf{Rot}_{x_{i-1}}(-\alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Trans}_{x_{i-1}}(-a_{i-1})$$

$${}^i\mathbf{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T & -a_{i-1} C\theta_i \\ a_{i-1} S\theta_i & -d_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si une chaîne contient deux ou plusieurs articulations parallèles consécutives, la composition des matrices de transformation entre elles peut être réduite à une matrice de transformation équivalente en utilisant la somme des variables jointes.

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\mathbf{T}_{i+1} &= {}^{i-1}\mathbf{T}_i {}^i\mathbf{T}_{i+1} = \\ &\mathbf{Rot}(\vec{x}_{i-1}, \alpha_i) \mathbf{Trans}(\vec{x}_{i-1}, d_i) \mathbf{Rot}(\vec{z}_i, \theta_i) \mathbf{Trans}(\vec{z}_i, d_i) \mathbf{Trans}(\vec{x}_i, d_{i+1}) \mathbf{Rot}(\vec{z}_i, \theta_{i+1}) \mathbf{Trans}(\vec{z}_i, r_{i+1}) \end{aligned}$$

$${}^{i-1}\mathbf{T}_{i+1} = \begin{bmatrix} C(\theta_i + \theta_{i+1}) & -S(\theta_i + \theta_{i+1}) & 0 & a_i + d_{i+1} C\theta_i \\ C\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & -S\alpha_i & d_{i+1} C\alpha_i S(\theta_i) - (d_i + r_{i+1}) S\alpha_i \\ S\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & S\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i & d_{i+1} S\alpha_i S(\theta_i) + (d_i + r_{i+1}) C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformation inverse à pour expression :

$${}^{i+1}\mathbf{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} C(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & S\alpha_i S(\theta_i + \theta_{i+1}) & -a_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) - d_{i+1} C\theta_{i+1} \\ -S(\theta_i + \theta_{i+1}) & C\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & S\alpha_i C(\theta_i + \theta_{i+1}) & a_i S(\theta_i) + d_{i+1} S\theta_{i+1} \\ 0 & -S\alpha_i & C\alpha_i & -(d_i + r_{i+1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

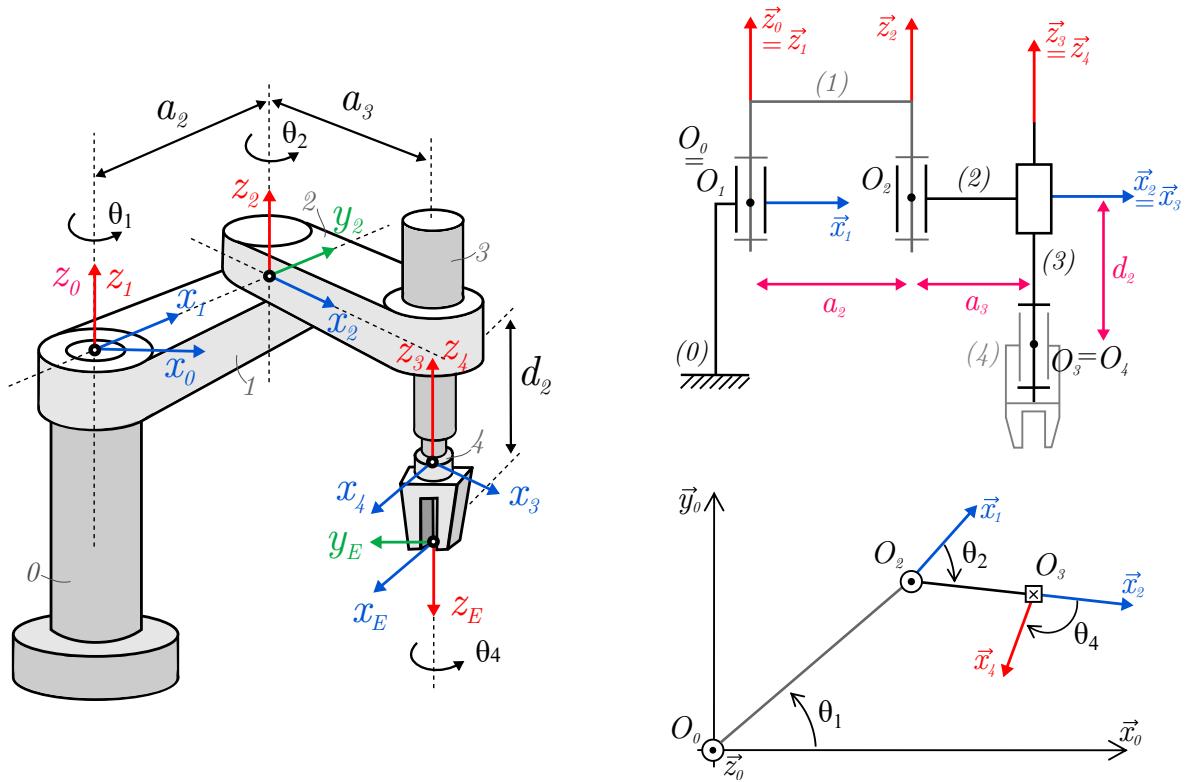
f. Comparaisons des paramètres de Denavit-Hartenberg classiques et modifiés

La méthode de Denavit-hartenberg "originale" est bien adaptée pour des structures ouvertes simples, mais présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots à structures fermées ou arborescentes. La variante dite "modifiée" permet de définir les paramètres à partir de deux solides seulement (trois axes caractéristiques de liaison) au lieu de trois pour la convention DH classique.

A l'origine, dans la convention de Denavit-Hartenberg (non modifié), l'axe \vec{z}_i du repère $\{\mathcal{R}_i\}$ est confondu avec l'axe $i+1$ (et non i du robot). Les paramètres de Denavit-Hartenberg non modifiés, sont plus pratiques que les originaux et peuvent être facilement généralisés au cas de structures mécaniques complexes. Le tableau suivant récapitule les différences entre les 2 conventions.

Paramètres	Convention originale DH	Convention modifiée DH-KK
axe de liaison	z_{i-1} pour l'articulation i	z_i pour l'articulation i
longueur : a_i	distance de O_i à l'intersection de z_{i-1} et x_i , le long de x_i	distance de z_i à z_{i+1} , le long de x_i
torsion : α_i	angle de z_{i-1} à z_i , autour de x_i	angle de z_i à z_{i+1} , autour de x_i
longueur : d_i	distance de O_{i-1} à l'intersection de z_{i-1} et x_i , le long de z_{i-1}	distance de x_{i-1} à x_i , le long de z_i
angle : θ_i	angle de x_{i-1} à x_i , autour de z_{i-1}	angle de x_{i-1} à x_i , autour de z_i
$i-1\mathbf{T}_i$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$i\mathbf{T}_{i-1}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -a_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -d_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -d_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i C\alpha_{i-1} & S\theta_i S\alpha_{i-1} & -a_{i-1} C\theta_i \\ -S\theta_i & C\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & a_{i-1} S\theta_i \\ 0 & -S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

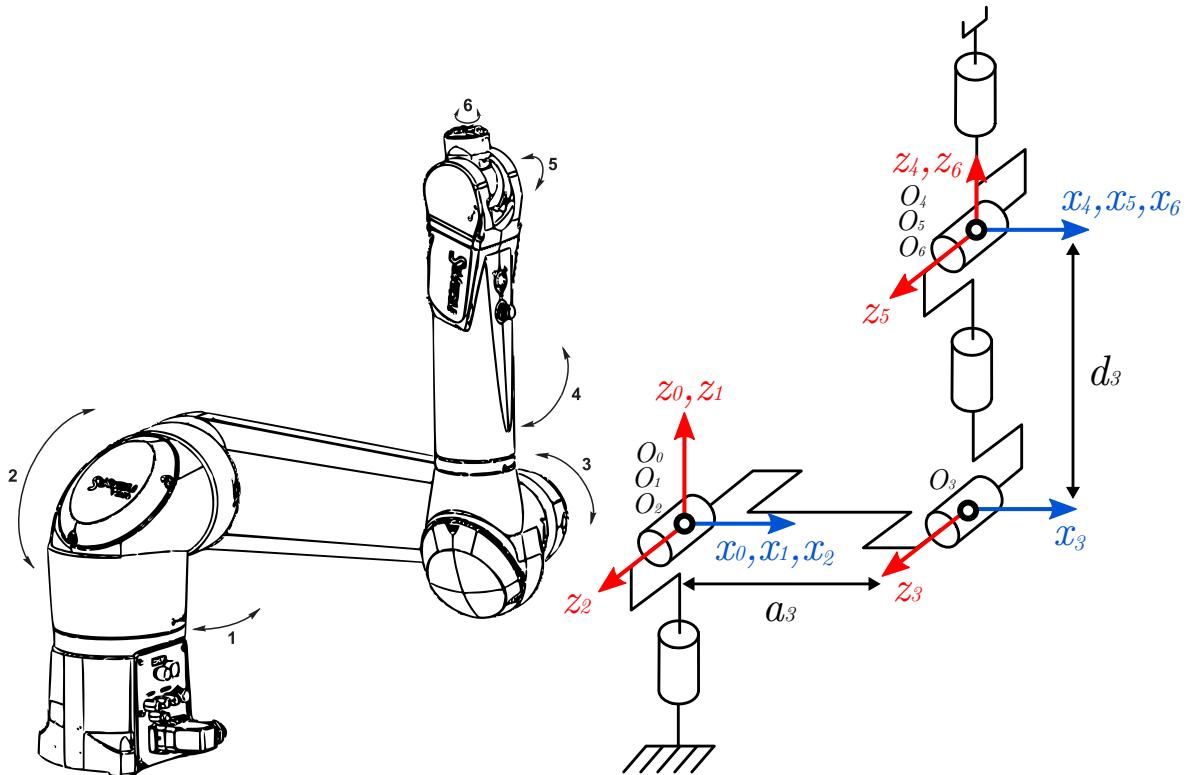
Exemple : Paramétrage du robot Scara



On le verra plus tard, ce tableau nous servira pour établir les matrices de transfert du Modèle Géométrique Direct (MGD).

Exemple : Paramétrage du robot Stäubli RX-90

Le porteur du robot (articulations 1, 2 et 3) est du type RRR, le poignet est du type rotule, c'est-à-dire, est tel que les articulations 4, 5 et 6 sont de type rotoïde dont les axes se coupent en un même point.



Remarque : Il n'y a pas de véritable segment entre les liaisons 1 et 2 (d'ailleurs l'information de distance entre les deux n'est pas connue). Un peu comme pour un poignet de type rotule, les 2 liaisons sont considérées comme confondues dans le carter du robot. On peut donc établir l'origine des articulation 0, 1 et 2 au même point.

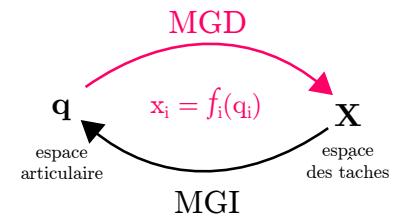
TABLEAU 3 – Tableau des paramètres DHKK - Robot Stäubli RX-90

i	σ_i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	0	θ_1
2	0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_2
3	0	a_3	0	0	θ_3
4	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_3	θ_4
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_5
6	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_6

2 Modèle Géométrique Direct (MGD)

Le MGD est l'ensemble des relations qui donne la **pose** de l'organe terminal \mathbf{X} (*les coordonnées opérationnelles*) en fonction de la configuration du robot définie par les variables articulaires \mathbf{q} des différentes liaisons.

On note q_i la variable articulaire associée à la liaison i . Dans le cas d'une articulation rototoïde, q_i représente l'angle de rotation, et dans le cas d'une articulation prismatique, q_i représente la distance de déplacement (Figure 40) :



$$q_i = \begin{cases} \theta & \text{pour une liaison rototoïde} \\ a_i & \text{pour une liaison prismatique} \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = f(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \text{position de l'effecteur dans } \{\mathcal{R}_0\} \\ \text{orientation de } (\mathcal{R}_n) \text{ par rapport à } \{\mathcal{R}_0\} \end{bmatrix}$$

avec \mathbf{q} le vecteur des variables des liaisons du robot, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$,

et $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}_{(0)}$

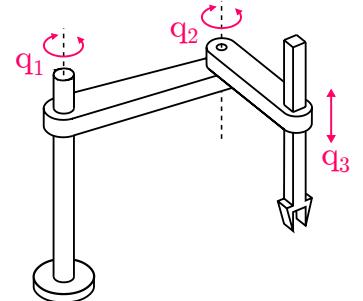


FIGURE 40 – Variables articulaires associées aux liaisons

Le contenu du vecteur \vec{X} peut être défini de plusieurs façons, suivant la représentation choisie :

- Avec la position cartésienne et les cosinus directeurs pour l'orientation :

$$\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, s_x, s_y, s_z, n_x, n_y, n_z, a_x, a_y, a_z]^T$$

- Avec la position cartésienne et les angles RPY pour l'orientation :

$$\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, \varphi, \theta, \psi]^T$$

Avec le MGD dans le cas d'un robot série, si les variables des articulations sont connues, la pose de l'effecteur peut être calculée d'une **manière unique** en utilisant la matrice de transformation homogène ${}^0\mathbf{T}_n$ définie par :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n)$$

En résumé : Le calcul du MGD conduit à identifier la matrice de transformation entre le repère de référence $\{\mathcal{R}_0\}$ et celui de l'effecteur $\{\mathcal{R}_n\}$ en identifiant les paramètres de la matrice ${}^0\mathbf{T}_n$:

$${}^0\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec P_x, P_y, P_z coordonnées du point P dans $\{\mathcal{R}_0\}$.

Pour l'obtenir, on multiplie les matrices de transformation homogènes ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ en partant de la dernière afin de définir des matrices intermédiaires \mathbf{U}_i utiles pour l'élaboration du modèle géométrique inverse (MGI).

$$\mathbf{U}_i = {}^i\mathbf{T}_{i+1} \mathbf{U}_{i+1}$$

2.1 Repère global (WORLD) - Repère de l'Outil (TOOL)

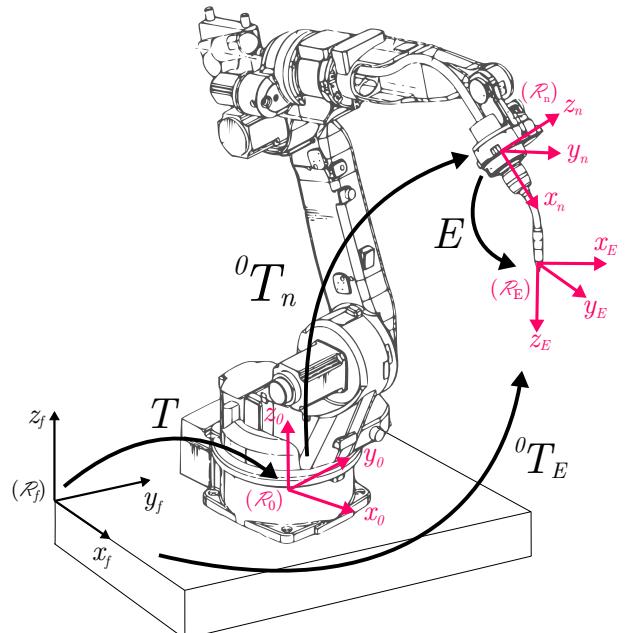
Généralement on définit un repère global (WORLD frame) (\mathcal{R}_f) qui peut être différent du repère de base $\{\mathcal{R}_0\}$ associé au bâti du robot. Un repère associé à l'outil (TOOL frame) (\mathcal{R}_E) est aussi souvent utilisé (pratique lorsque l'on change souvent d'outil avec des dimensions différentes).

Les commandes de programmation de certains robots font apparaître :

- $Z = {}^f\mathbf{T}_0$: la matrice de transformation qui définit $\{\mathcal{R}_0\}$ dans le repère de référence (\mathcal{R}_f)
- $E = {}^n\mathbf{T}_E$: la matrice de transformation qui définit (\mathcal{R}_E) dans le repère du terminal (\mathcal{R}_n)

Le repérage de l'outil est définie directement dans le repère global par :

$${}^n\mathbf{T}_E = Z \ {}^0\mathbf{T}_n(q) E$$



Exemple : MGD du robot Scara

A partir du tableau des paramètres DHKK on peut calculer les matrices de transfert :

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_4 &= I_4 \\ U_3 &= {}^3T_4 U_4 = {}^3T_4 \end{aligned}$$

$$U_2 = {}^2T_3 U_3 = {}^2T_3 {}^3T_4 = {}^2T_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & a_3 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = {}^1T_2 U_2 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 = {}^1T_4 = \begin{bmatrix} C(\theta_2 + \theta_4) & -S(\theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 C\theta_2 + a_2 \\ S(\theta_2 + \theta_4) & C(\theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1 U_1 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 = {}^0T_4 \\ &= \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & -S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 C(\theta_1 + \theta_2) + a_2 C(\theta_1) \\ S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & a_3 S(\theta_1 + \theta_2) + a_2 S(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Toutes les rotations se font selon l'axe z. L'angle d'orientation θ_z vaut alors : $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4$ selon la direction z_0 . (avec $\theta_4 < 0$ pour notre cas)

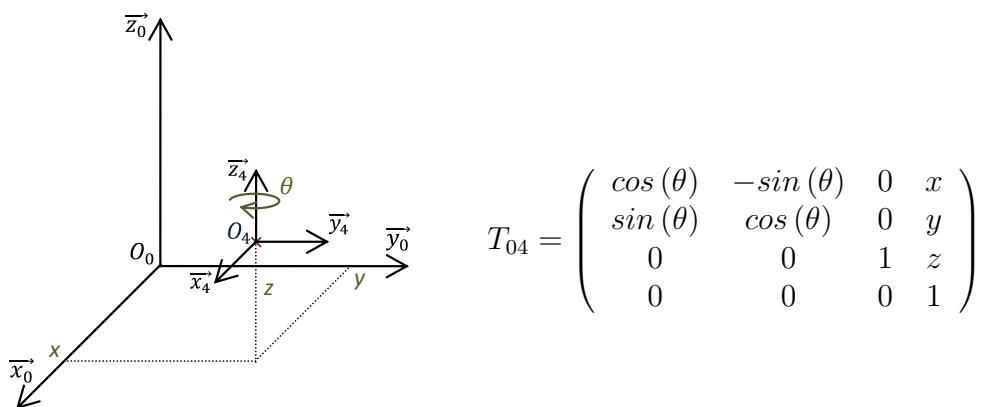


FIGURE 41 – Coordonnées Opérationnelles

Donc MGD :
$$\begin{cases} x = a_2 \cos(\theta_1) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = a_2 \sin(\theta_1) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ z = -d_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 \end{cases}$$

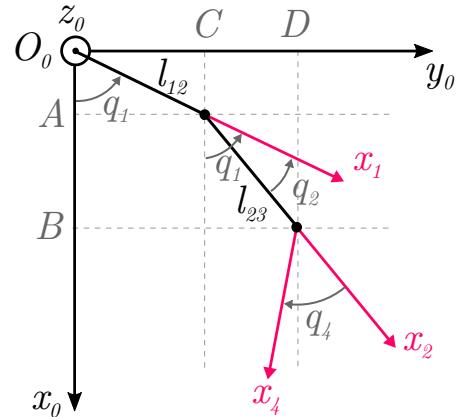
On peut vérifier aisément (car c'est un cas simple) géométriquement à l'aide de la vue de dessus :

$$\begin{aligned} O_oA &= l_{12} \cos(q_1) \\ AB &= l_{23} \cos(q_1 + q_2) \\ O_oB &= x = l_{12} \cos(q_1) + l_{23} \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_oC &= l_{12} \sin(q_1) \\ CD &= l_{23} \sin(q_1 + q_2) \\ O_oD &= y = l_{12} \sin(q_1) + l_{23} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= q_3 \text{ (translation selon l'axe } \vec{z}) \\ \theta &= q_1 + q_2 + q_4 \end{aligned}$$

avec q_2 et $q_4 < 0$.



Exemple : MGD du robot Stäubli RX-90

A partir du tableau des paramètres DHKK on peut calculer les matrices de transfert :

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & a_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{U}_6 &= \mathbf{I}_6 \\
 \mathbf{U}_5 &= {}^5\mathbf{T}_6 \\
 \mathbf{U}_4 &= {}^4\mathbf{T}_6 = {}^4\mathbf{T}_5 \mathbf{U}_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 C\theta_6 & -C\theta_5 S\theta_6 & -S\theta_5 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ S\theta_5 S\theta_6 & -S\theta_5 S\theta_6 & C\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{U}_3 &= {}^3\mathbf{T}_6 = {}^3\mathbf{T}_4 \mathbf{U}_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 C\theta_5 S\theta_4 C\theta_6 & -C\theta_4 C\theta_5 S\theta_6 & -C\theta_4 S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 C\theta_6 & -S\theta_5 S\theta_6 & C\theta_5 & d_3 \\ -S\theta_4 S\theta_5 S\theta_6 - C\theta_4 S\theta_6 & S\theta_4 C\theta_5 S\theta_6 & S\theta_4 S\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{U}_0 &= {}^0\mathbf{T}_6 = {}^0\mathbf{T}_1 \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_x &= C_1(C_{23}(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6) - S_1(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\
 S_y &= S_1(C_{23}(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6) + C_1(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\
 S_z &= S_{23}(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_{23} S_5 C_6 \\
 n_x &= C_1(-C_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6) + S_1(S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6) \\
 n_y &= S_1(-C_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6) - C_1(S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6) \\
 n_z &= -S_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) - C_{23} S_5 S_6 \\
 a_x &= -C_1(C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_1 S_4 S_5 \\
 a_y &= -S_1(C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - C_1 S_4 S_5 \\
 a_z &= -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5 \\
 P_x &= -C_1(S_{23} d_3 - C_2 a_3) \\
 P_y &= -S_1(S_{23} d_3 - C_2 a_3) \\
 P_z &= C_{23} d_3 + S_2 a_3
 \end{aligned}$$

2.2 Poignet sphérique

Énormément de robots possèdent un poignet **sphérique**. C'est à dire que les axes des trois dernières articulations s'intersectent en un point.

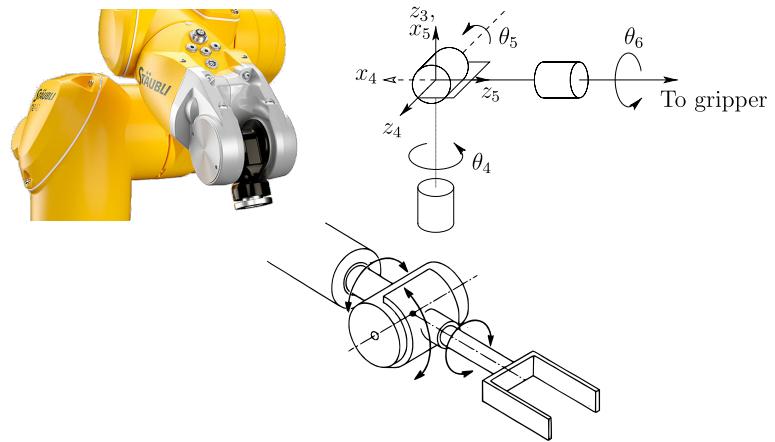


FIGURE 42 – poignet sphérique

TABLEAU 4 – Tableau des paramètres DHKK - Poignet sphérique

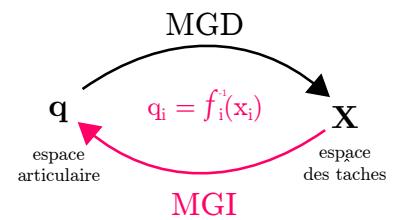
i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_4
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

$$\begin{aligned}
 {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3T_6 &= {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4c6 & c4s5 & c4s5d_6 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 & s4s5 & s4s5d_6 \\ -s5c6 & s5s6 & c5 & c5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3 Modèle géométrique inverse (MGI)

Le modèle géométrique inverse est le problème qui permet de connaître toutes les solutions possibles pour les variables articulaires \mathbf{q} correspondant à une situation de l'organe terminal \mathbf{X} donné, ce qui peut se représenter par la relation :

$$\mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{X}) \text{ (si c'est possible)}$$



Les équations du problème à résoudre sont, en général, non linéaires (il y'a des *sinus* et *cosinus*). Le problème peut avoir des solutions multiples (exemple Fig.43) voire un nombre infini de solutions (robots redondants cinématiquement) et même n'avoir aucune solution admissible (à cause de la structure cinématique du manipulateur). Le MGI est donc souvent difficile, voire parfois quasi-impossible, de l'inverser directement.

Il n'existe pas de méthode systématique pour déterminer le modèle géométrique inverse. Cependant, 2 méthodes prédominent :

- Géométrique (résolution de triangle)
- Analytique (Inversion de MGD)

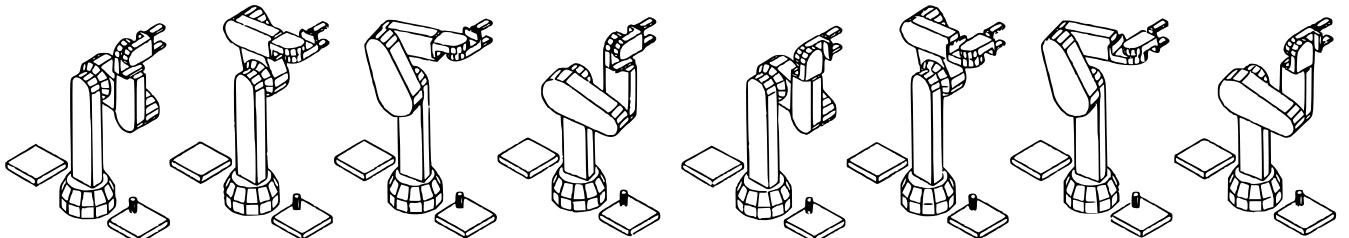


FIGURE 43 – Exemple de solutions du MGI pour un robot 6R. La position et l'orientation de l'organe terminal est exactement la même pour les 8 possibilités présentées. (Source [5])

3.1 Méthode géométrique

Cette méthode n'est intéressante que pour des cas de structures simples.

Elle consiste à utiliser les relations trigonométriques d'un triangle quelconque. On essaie alors de ramener le problème à la résolution de triangles, en partant souvent de l'effecteur, pour remonter jusqu'à la base du robot.

Exemple : MGI du robot Scara

Les coordonnées *opérationnelles* x, y, z sont les coordonnées du point O_4 par rapport au repère de base $\{\mathcal{R}_0\} = (O_0, x_0, y_0, z_0)$

On pose $\mathbf{p} = [p_x, p_y]^T = \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_3$.

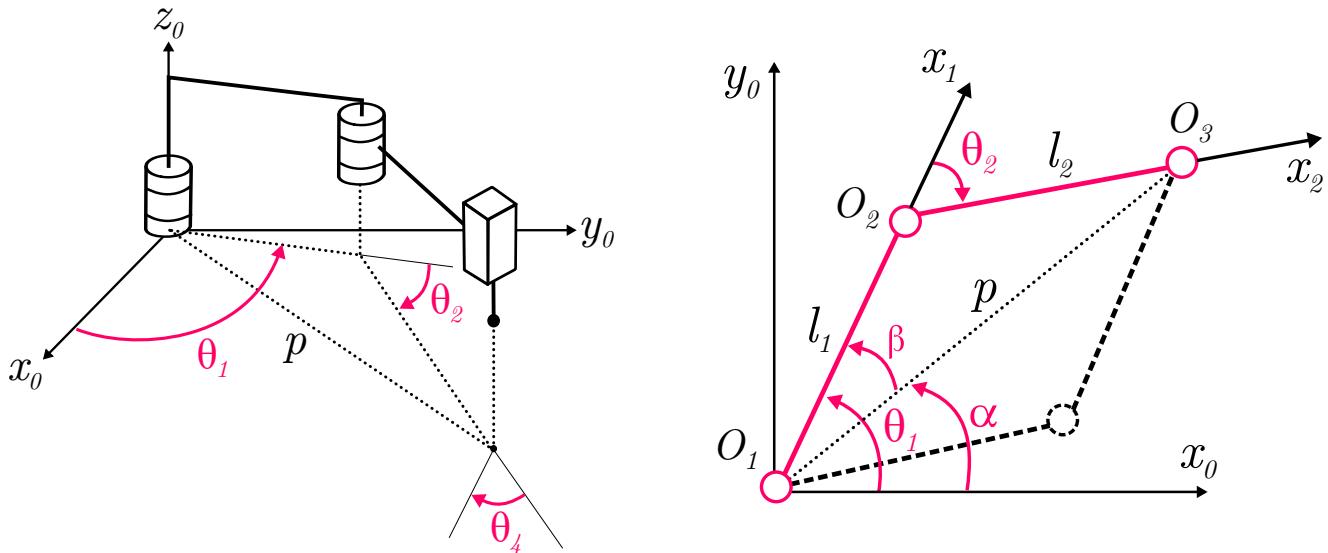


FIGURE 44 – Projection suivant le plan $(O_1; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$

Remarque : Il ya deux configurations possibles qui permettent d'obtenir position de l'organe terminal dans cette position : la configuration "bras haut" ($\theta_2 \in (0, \pi)$) et la configuration "bras bas" ($\theta_2 \in (-\pi, 0)$).

- Calcul de θ_1

Il faut considérer les angles α et β

$$\theta_1 = \alpha + \beta \text{ en configuration "bras haut"}$$

$$\theta_1 = \alpha - \beta \text{ en configuration "bras bas"}$$

α dépend du signe de p_x, p_y , on calcule donc : $\alpha = \arctan 2(p_x, p_y)$

$$l_2^2 = l_1^2 + p^2 - 2l_1 p \cos(\beta) \quad (\text{Al Kashi dans le triangle } O_1 O_2 O_3)$$

$$l_2^2 = l_1^2 + p_x^2 + p_y^2 - 2l_1 \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \cos(\beta)$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \right), \text{ avec } \beta \in (0, \pi) \text{ pour garantir l'existence des triangles}$$

$$\theta_1 = \varepsilon \arccos \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \right) + \arctan 2(p_x, p_y)$$

($\varepsilon = -1$ ($\theta_2 < 0$) pour la configuration "bras haut",
 $\varepsilon = +1$ ($\theta_2 > 0$) pour la configuration "bras bas")

- Calcul de θ_2

$$p^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi - \theta_2) \quad (\text{Al Kashi dans le triangle } O_1O_2O_3)$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_2) \quad (\text{car } \cos(\pi - \theta_2) = -\cos(\theta_2))$$

$$\theta_2 = \varepsilon \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

sous réserve que $|l_1^2 - l_2^2| < p < l_1^2 + l_2^2$

- Calcul de θ_4

$$\theta_4 = \theta - \theta_1 + \theta_2$$

$$\theta_4 = \theta - \varepsilon \arccos \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \right) + \arctan 2(p_x, p_y) + \varepsilon \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

On définit donc le repère de l'organe terminal dans le repère de travail avec 2 configurations possibles suivant la valeur de ε :

$$\begin{cases} q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \\ q_3 = -z \\ q_4 = \theta - \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

On le voit, le calcul du MGI avec la méthode géométrique s'avère fastidieux même pour un robot possédant une géométrie simple.

Workspace

En prenant en compte les limites physiques des liaisons (encadrement des variables articulaires $q_{i_{min}} < q_i < q_{i_{max}}$, on définit le volume de travail.

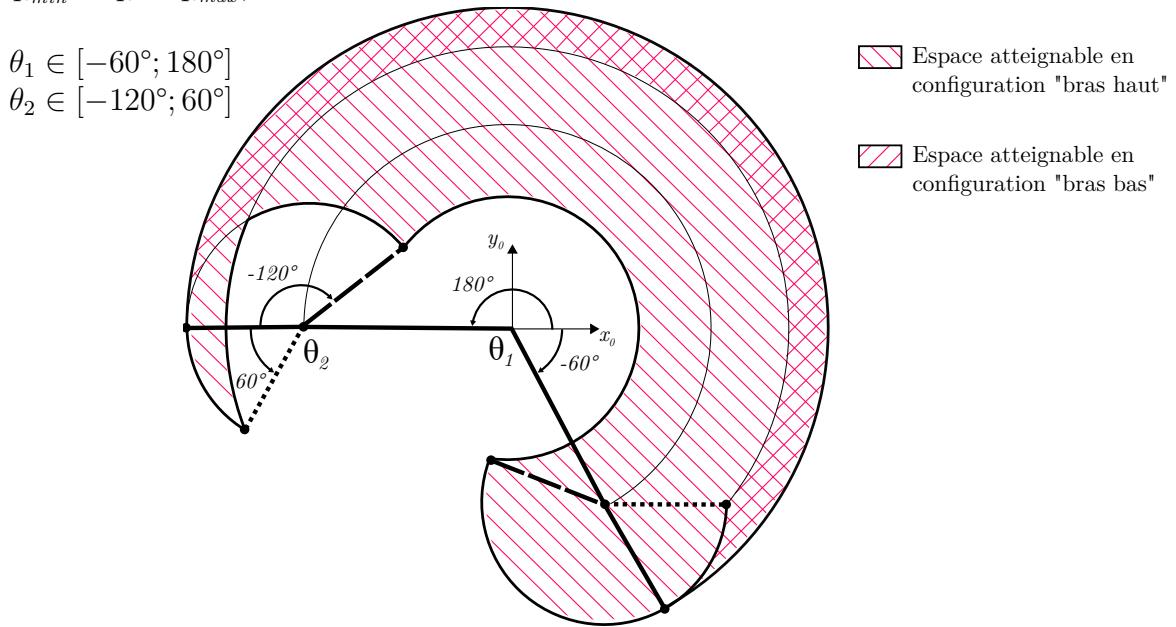


FIGURE 45 – espace de travail dans le plan $(O_1; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$

3.2 Méthode de Paul

Dans le cas de robots à géométrie simple (pour lesquels la plupart des distances a_{i-1} et d_i sont nulles et les angles α_{i-1} et θ_i égaux à $0, \pm\pi/2$) on peut obtenir le MGI par la méthode de Paul. Elle nécessite de connaître le MGD au préalable.

\mathbf{U}_0 est la matrice de transformation décrivant l'orientation et la position désirées :

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour un robot à 6 ddl, il s'agit à résoudre le système d'équations suivant dont les q_i sont solutions :

$$\mathbf{U}_0 = {}^0T_1{}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6$$

La méthode consiste à pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation précédente par les matrices ${}^iT_{i-1}$ pour i variant de 1 à 6. Cela permet d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires q_i recherchées.

Le terme de droite est fonction des variables q_2, \dots, q_6 et son expression analytique a été obtenue lors du calcul du MGD. Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de U_0 et de la variable q_1 . Une identification terme à terme des deux membres de l'équation permet de réduire le problème à un système d'une ou de deux équations fonction de q_1 uniquement.

Le même procédé est utilisé pour trouver q_2 en pré-multippliant l'expression précédente par 2T_1 : Le terme de droite est fonction des variables q_3, \dots, q_6 dont éléments ont déjà été calculés lors du calcul du MGD. Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de U_0 et de la variable q_2 et ainsi de suite jusqu'à q_6 .

Résumé de la Méthode de Paul :

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1{}^1T_2{}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n \\ {}^1T_0U_0 &= {}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5 \dots {}^{n-1}T_n \\ {}^2T_1U_1 &= {}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5 \dots {}^{n-1}T_n \\ &\vdots \\ {}^{n-1}T_{n-2}U_{n-2} &= {}^{n-1}T_n \\ \text{avec } U_i &= {}^iT_n = {}^iT_{i-1}U_{i-1} \end{aligned}$$

Pour un robot à 6 d.d.l on a :

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1{}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \\ {}^1T_0U_0 &= {}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \rightarrow \text{identification de } q_1 \\ {}^2T_1U_1 &= {}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \rightarrow \text{identification de } q_2 \\ {}^3T_2U_2 &= {}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \rightarrow \text{identification de } q_3 \\ {}^4T_3U_3 &= {}^4T_5{}^5T_6 \rightarrow \text{identification de } q_4 \\ {}^5T_4U_4 &= {}^5T_6 \rightarrow \text{identification de } q_5 \\ {}^5T_6U_6 &= I_6 \rightarrow \text{identification de } q_6 \end{aligned}$$

$$\text{avec } U_i = {}^iT_6 = {}^iT_{i-1}U_{i-1}$$

La résolution des équations précédentes nécessite de l'intuition, mais l'utilisation de cette méthode sur un grand nombre de robots industriels a montré que seuls quelques types d'équations fondamentales sont rencontrés. Les solutions de ces équations sont présentées dans le tableau 5, certains types ont une solution évidente, d'autres nécessitent quelques développements.

Type	Equation	Solution
Type 1	$X.r_i = Y$	$r_i = \frac{Y}{X}$
Type 2	$X.\sin(\theta_i) + Y.\cos(\theta_i) = Z$	Si $X = 0$ et $Y \neq 0$: $\theta_i = \text{atan}2(\pm\sqrt{1 - (\cos(\theta_i))^2}, \cos(\theta_i))$ Si $Y = 0$ et $X \neq 0$: $\theta_i = \text{atan}2(\sin(\theta_i), \pm\sqrt{1 - (\sin(\theta_i))^2})$ Si $X \neq 0$, $Y \neq 0$ et $Z \neq 0$: $\theta_i = \text{atan}2(-Y, X)$ $\theta'_i = \theta_i + \pi$
Type 3	$X1.\sin(\theta_i) + Y1.\cos(\theta_i) = Z1$ $X2.\sin(\theta_i) + Y2.\cos(\theta_i) = Z2$	cf doc Solution équations TYPE pour Méthode de Paul
Type 4	$X1.r_j.\sin(\theta_i) = Z1$ $X2.r_j.\cos(\theta_i) = Z2$	cf doc Solution équations TYPE pour Méthode de Paul

TABLEAU 5 – *Solutions aux types d'équations rencontrés avec la méthode de Paul.* (r_i : prismatic joint variable, θ_i : revolute joint variable)

3.3 Méthode de Piper (pour les manipulateur à poignet sphérique)

Dans la pratique, les manipulateurs possédant un poignet de type rotule (ou sphérique) sont très répandus. Le centre du poignet est à l'intersection des axes de rotation concourants des trois dernières liaisons pivots du robot. L'origine du repère R6 lié au dernier corps peut être directement positionnée au centre de la rotule. Pour les bras à 6 DDL, il existe donc un découplage entre la position de ce point et l'orientation de l'effecteur :

- Le porteur donne la position du centre poignet. Ce point ne dépend donc que des trois premières variables articulaires q_1 , q_2 et q_3 .
- Le poignet donne l'orientation de l'organe terminal (pince, outil) qui ne dépend que des trois dernières variables articulaires q_4 , q_5 et q_6 .

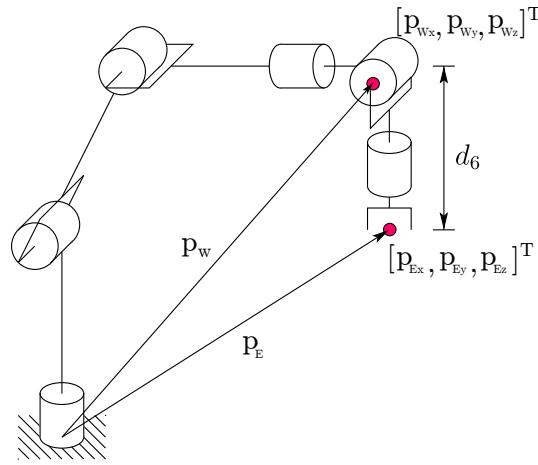


FIGURE 46 – Découplage Cinématique

Rappel :

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^0P_6 = {}^0\mathbf{T}_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

La position du centre du poignet P_W est définie juste par un offset de d_6 par rapport à la position de la pince.

$$\begin{bmatrix} P_{Wx} \\ P_{Wy} \\ P_{Wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{Ex} - d_6 r_{13} \\ P_{Ey} - d_6 r_{23} \\ P_{Ez} - d_6 r_{33} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, sur la base de ce découplage cinématique, le problème se sépare en deux problèmes à 3 équations et 3 inconnues et peut être résolu selon les étapes suivantes :

a. Position du poignet

Comme la position du poignet est confondue avec l'origine des repères 4, 5 et 6 on a :

$${}^0P_6 = {}^0P_4$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On utilise ensuite la méthode de Paul pour terminer la résolution, en multipliant successivement à gauche les membres de l'équation par 1T_0 puis 2T_1 . L'identification terme à terme des deux matrices permet de déterminer successivement les variables q_1 puis q_2 puis q_3 . Les membres de droite étant connus grâce au MGD.

$${}^1T_0 \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_1 {}^1T_0 \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2T_3 {}^3T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Orientation du poignet

$${}^0R_6 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$$

$${}^3R_0 \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = {}^3R_6$$

Les membres de gauche ne dépendent que de q_1, q_2 et q_3 . Comme ils sont connus grâce à la position du poignet, il ne reste donc plus qu'à identifier successivement les variables q_4, q_5 et q_6 en comparant terme à terme les matrices après multiplication à gauche par 4R_3 puis 5R_4 . Les membres de droite étant connus grâce au MGD.

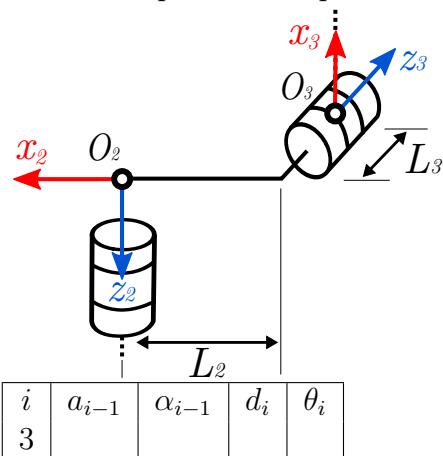
$${}^4R_3 {}^3R_0 \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = {}^4R_6$$

$${}^5R_4 {}^4R_3 {}^3R_0 \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} = {}^5R_6$$

Problèmes

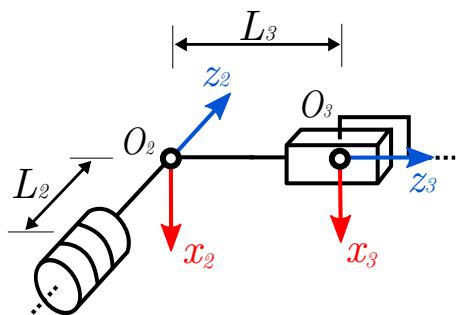
5.1 Paramétrage DHKK ...R2R3...

Donner les paramètres pour la matrice de passage de 2 vers 3.



5.2 Paramétrage DHKK ...R2P3...

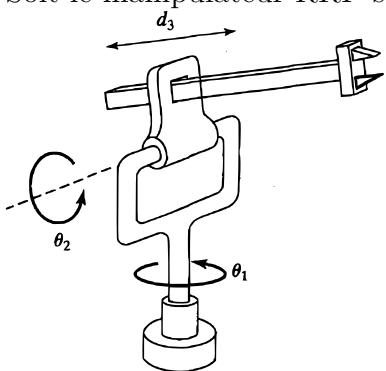
Donner les paramètres pour la matrice de passage de 2 vers 3.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
3				

5.3 Modèle géométrique direct

Soit le manipulateur RRP suivant :



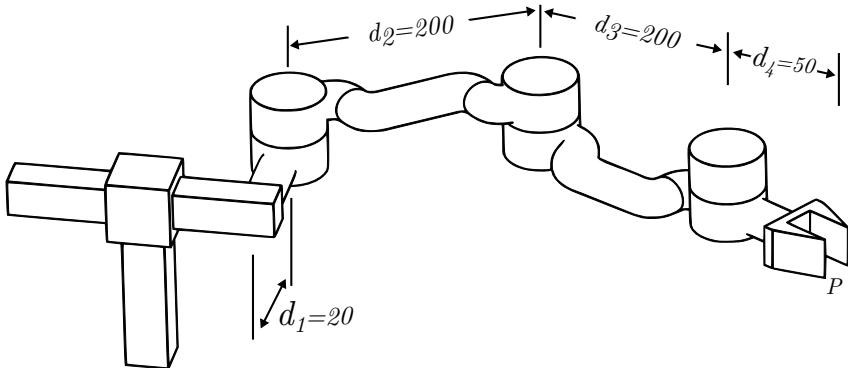
Dessiner le schéma cinématique du manipulateur.

En supposant que sur le schéma cinématique, la liaison glissière est parallèle au sol, dans cette configuration $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, donner le paramétrage DHKK.

Donner la matrice homogène de transformation 0T_3 .

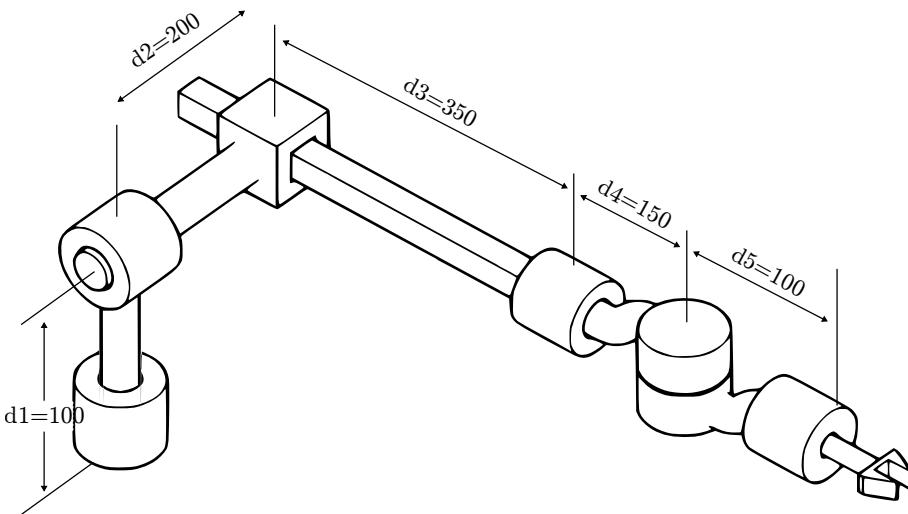
5.4 Modèle géométrique direct PRRR

Consider the 4-dof robot made by a 3R planar arm mounted on a rail. Give an assignment of the DHKK frames for the 4-dof robot and provide the table of parameters. Finally, find the homogeneous transformation between the world frame and Tool frame.



5.5 Modèle géométrique direct robot Stanford

Paramétrer le robot Stanford avec la convention DHKK et donner la position du robot pour la configuration suivante [$q_1=\pi/2, \dots$]



5.6 Modèle géométrique direct

Deux ingénieurs a et b ont calculé la matrice homogène de transformation d'un robot dans la configuration suivante :

$${}^0\mathbf{T}\mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^0\mathbf{T}\mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sans refaire le calcul de la matrice homogène de transformation, expliquer quelle matrice est correcte.

5.7 Paramétrage DHKK

Soit le robot formé de 4 articulations rototoïdes et dont le tableau de paramétrage est donné :

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	$a_1 > 0$	$\frac{\pi}{2}$	$d_1 > 0$	q_1
2	$a_2 > 0$	$\frac{\pi}{2}$	0	q_2
3	0	$-\frac{\pi}{2}$	$d_3 > 0$	q_3
4	$a_4 > 0$	$\frac{\pi}{2}$	0	q_4

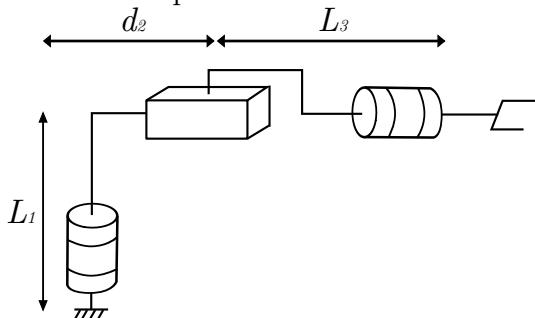
Dessiner le schéma cinématique de ce robot avec les repères dans les 2 configurations suivantes :

$$q_A = 0 \text{ et } q_B = (0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Donner la position \mathbf{p} de l'origine du repère 4.

5.8 MGI méthode de Paul

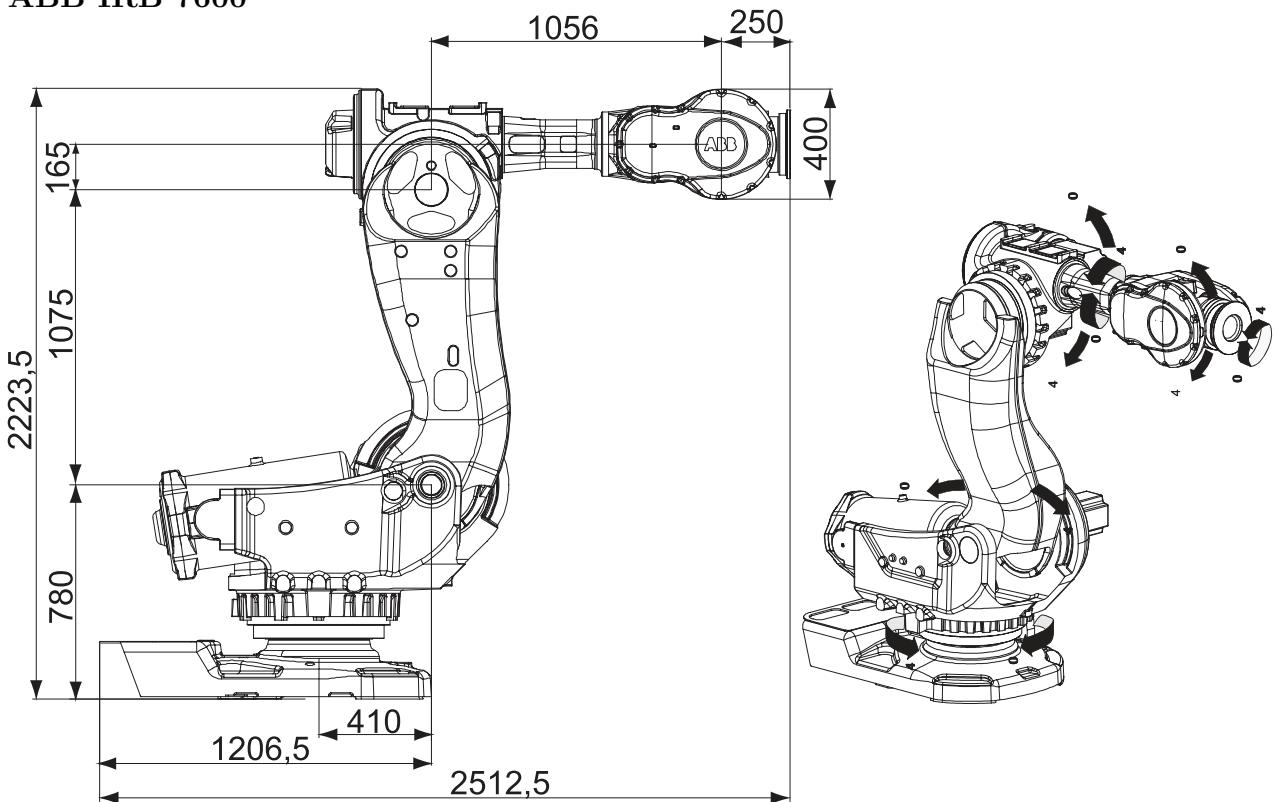
Soit le manipulateur RPR suivant :



Etablir le MGD du manipulateur.

En utilisant la méthode de Paul, donner le MGI du manipulateur.

5.9 ABB IRB 7600



Dessiner le schéma cinématique et paramétrier de l'IRB 7600 dans sa position de repos donnée par le constructeur.