2022

PACI 841
SNI

Luc Marechal

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC
POLYTECH ANNECY-CHAMBÉRY
SYMME

Métrologie

1. Le système international de mesure

- Les unités SI
- Les règles d'écriture

"Si la connerie se mesurait, il servirait de mètre-étalon… Y serait à Sèvres."
– Michel Audiard –

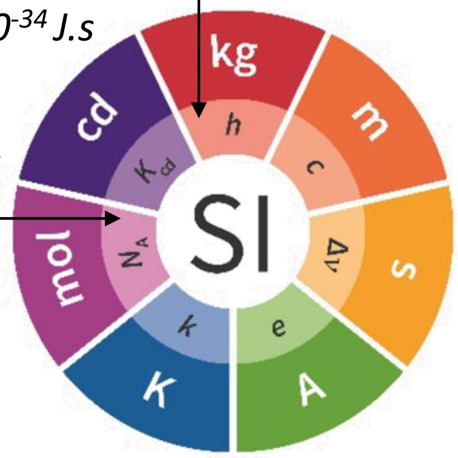
Système S.I.

1948	Étude de l'établissement d'un système pratique d'unités de mesures
1954	Adoption comme unités de base de ce système
1960	Appellation Système International d'unités (S.I.). L'ensemble des unités de mesures est alors réglementé (préfixes, unités dérivées...)
depuis...	Le S.I. a été modifié et étoffé compte-tenu des progrès de la science et des besoins des utilisateurs.
2018	Il a été décidé que le SI serait fondé sur les valeurs numériques fixées d'un ensemble de sept constantes à partir desquelles les définitions des sept unités de base du SI seraient déduites.

Les 7 unités de bases du SI

Constante de Planck,
h = 6,626 070 15 × 10^{-34} J.s

Constante d'Avogadro,
N_A =6,022 140 76 × 10^{23} mol^{-1}



www.bipm.org

- Les constantes sont exprimées avec les unités :
  hertz (Hz), joule (J), coulomb (C), lumen (lm), watt (W)

- Elles sont reliées aux 7 unités de base selon les relations :
  - Hz = s^{-1}
  - J = kg·m²·s^{-2}
  - C = A·s
  - lm = cd·m²·m^{-2} = cd·sr
  - W = kg·m²·s^{-2}

7 unités de base

Grandeur	Symbole de la grandeur	Nom de l'unité (SI)	Symbole de l'unité	Dimension
Longueur	l	mètre	m	L
Masse	m	kilogramme	kg	M
Temps	t	seconde	s	T
Intensité du courant électrique	I	ampère	A	I
Température thermodynamique	T	kelvin	K	θ
Quantité de matière	n	mole	mol	N
Intensité lumineuse	I	candela	cd	J

Analyse dimensionnelle

- Deux grandeurs sont **homogènes** signifie que leurs dimensions sont égales

- L'analyse dimensionnelle permet :
  - de savoir si une expression est homogène
  - de retrouver la dimension d'une grandeur

*La dimension de toute grandeur peut s'exprimer exclusivement à partir des dimensions des **7 unités de base.***

Grandeur	*Nom de l'unité*	*Symbole*	*Dimension*
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Temps	seconde	s	T
Intensité du courant électrique	ampère	A	I
Température thermodynamique	kelvin	K	θ
Quantité de matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	candela	cd	J

Exemples :

a) Vérifier par une analyse dimensionnelle le résultat littéral suivant : $x = \frac{1}{2} g t^2 + v t$ où x est une distance, t un temps, v une vitesse et g l'accélération de la pesanteur

b) *Quelle est la dimension d'une résistance électrique, c'est-à-dire comment se décompose son unité à partir des unités de base ?*

Exemple: Le Volt (symbole V), peut être défini à partir du mètre, du kilogramme, de la seconde et de l'ampère:

$$V = \frac{W}{A} = \frac{N \cdot m \cdot s^{-1}}{A} = \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot s^{-1}}{A} = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$$

Règles d’écriture : unités et symboles

5 N
espace Isaac Newton

5 cm·s⁻¹
espace minuscule

Les règles classiques de l’algèbre s’appliquent pour former les produits et quotients de symboles d’unités.
La multiplication doit être indiquée par un espace ou un point à mi-hauteur centrée.

Nom commun : accordé, minuscule en première lettre

Pluriel des mots composés

Symbole en minuscule sauf si l’unité provient du nom d’un savant - *(exception pour litre : L ou l)*

Les symboles sont invariables et ne sont pas suivi d’un point

Les symboles sont écrits après la valeur numérique avec un espace entre les deux, sauf pour les unités avec division non décimale

Nom composé pour un produit de grandeurs : un trait d’union pour l’unité, un point pour le symbole : dans certains cas, le trait d’union est supprimé, le point aussi.

Nom composé pour un quotient de grandeurs : « par »

Exemples :

a) Un courant de dix ampères
b) Une force de deux newtons et demi
c) Un moment de cinquante newton-mètres
d) Une vitesse de quatre centimètres par seconde
e) Une température de «vingt-quatre degré cinq »
f) Un angle de douze degrés, sept minutes et trois secondes

$\boxed{\text{10 A}}$	*10 Ampères*	$\boxed{\text{10 ampères}}$
2 Newtons 5	$\boxed{\text{2,5 N}}$	*2,5 Newtons*
50 Nm	$\boxed{\text{50 N·m}}$	*50 m·N*
4 cm.s	$\boxed{\text{4 cm·s}^{-1}}$	$\boxed{\text{4 cm/s}}$
24,5 °	*24°C 5*	$\boxed{\text{24,5 °C}}$
$\boxed{\text{12° 7’ 3”}}$	*12,7’*	*12° 7 min 13 s*

Règles d'écriture : nombres et préfixes

	Règle	Exemple
NOMBRE	Le séparateur décimal est la virgule	10,5
	Utiliser les préfixes ou puissance de 10 pour les petits et grands nombres	0,0003 W ▸ $3\text{x}10^{e-4}$ W ou 0,3 mW
	Pour faciliter la lecture, séparer les par tranche de trois à partir de la virgule, pour la partie entière et pour la partie décimale	1234567,89 ▸ 1 234 567,89
PREFIXE	Le préfixe est collé à l'unité	
	Son symbole est collé au symbole de l'unité	
	Éventuelle élision si l'unité commence par une voyelle (mégohm)	

Exemples :

a)	Un courant de dix milliampères	*10 mAmpères*	*10 m.A*	*$\boxed{\text{10 mA}}$*
b)	Une force de deux cent cinquante trois mille newtons et demi	*$\boxed{\text{253 000,5 N}}$*	*253 500 N*	*253000 N 5*
c)	Un moment de cinquante méganewton-mètre	*50 MNm*	*$\boxed{\text{50 MN·m}}$*	*50 M N.m*
d)	Une vitesse de quatre centimètres par nanoseconde	*$\boxed{\text{4 cm/ns}}$*	*4 cmns^{-1}*	*$\boxed{\text{4 cm·ns}^{-1}}$*

Chiffres significatifs

LOI

- Tous les chiffres non nuls sont significatifs
- Les zéros placés en tête ne sont pas significatifs.
- Les zéros encadrés ou en queue sont significatifs.
- La notation en puissance de 10 met en évidence le nombre de chiffres significatifs.
- Multiplication ou division : le résultat doit comporter le même nombre de chiffres significatifs que la mesure qui en a le moins dans le calcul.
- Addition ou soustraction : le résultat doit avoir autant de décimales que la valeur qui en a le moins dans le calcul.

0,0003400

Zéros en tête pas significatifs

Tous les nombres non nuls sont significatifs

Les zéros après nombres non nuls dans une décimale sont significatifs

50,03

Tous les nombres non nuls sont significatifs

Les zéros encadrés sont significatifs

Tous les nombres non nuls sont significatifs

967 000 000	9 chiffres significatifs
9,67 10^8	3 chiffres significatifs
96 700 10^4	5 chiffres significatifs

+	L1 = 3,18 mm L2 = 3,1 mm	L1 + L2 = 3,~~28~~ mm = 3,3
×	D = 0,056 m T = 3,789 s	V = D/T = 0,014~~779~~ m/s

Approximation décimale ou arrondi

REGLE

Règle de Gauss *(norme NF EN ISO 80000-1)*

- Les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 sont arrondis à l'entier inférieur.
- Les chiffres 5, 6, 7, 8 et 9 sont arrondis à l'entier supérieur.
- Si le nombre se termine par un 5 ou par un 5 suivi de zéros, on choisit le nombre se terminant par un chiffre pair.

12,2$\underbrace{5}_{\text{se termine par 5}}$ -> 12,$\underbrace{2}_{\text{chiffre pair}}$

12,3$\underbrace{5}_{\text{se termine par 5}}$ -> 12,$\underbrace{4}_{\text{chiffre pair}}$

Règle 1 : S'il n'y a qu'un seul multiple entier qui soit le plus voisin du nombre donné, c'est alors ce multiple qui est pris comme nombre arrondi.

Règle 2 : S'il existe deux multiples entiers également voisins du nombre donné, le multiple de rang pair est choisi comme nombre arrondi.

nombre	nature de l'approximation	nombre arrondi
12,223	au dixième près	12,2
12,251	au dixième près	12,3
1222,3	À la dizaine près	1220
1227,5	À la dizaine près	1230

nombre	nature de l'approximation	nombre arrondi
9909,50	à l'unité près	9910
9908,50	à l'unité près	9908

2. Exprimer un résultat de mesure

- Concept d’incertitude
- Processus de mesure
- Évaluation des incertitudes

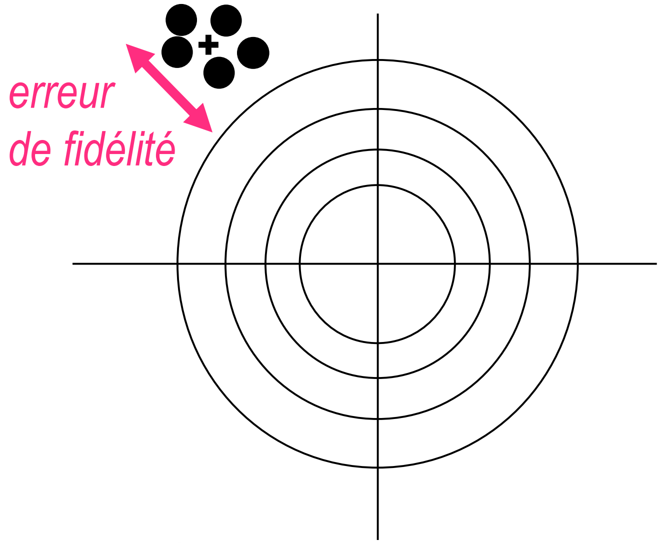
“ Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. ”
– Henri Poincaré –

Mesure & métrologie
Vocabulaire de base

Grandeur	Attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance qui est susceptible d'être distinguée **qualitativement** et mesurée **quantitativement**
Mesurage	Ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer la **valeur d'une grandeur**.
Mesurande	**Grandeur** particulière soumise à un **mesurage**.
Résultat	Valeur attribuée à un mesurande, obtenue par mesurage.
Répétabilité	Étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure. Les conditions de répétabilité sont : • même mode opératoire • même lieu • même observateur • répétition durant une courte période de temps • même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions
Reproductibilité	Étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure. Il faut spécifier les conditions que l'on fait varier, par exemple : • le principe de mesure • la méthode de mesure • l'observateur • l'instrument de mesure • l'étalon de référence • le lieu • les conditions d'utilisation • le temps

Mesure & métrologie

Fidélité (erreur aléatoire)



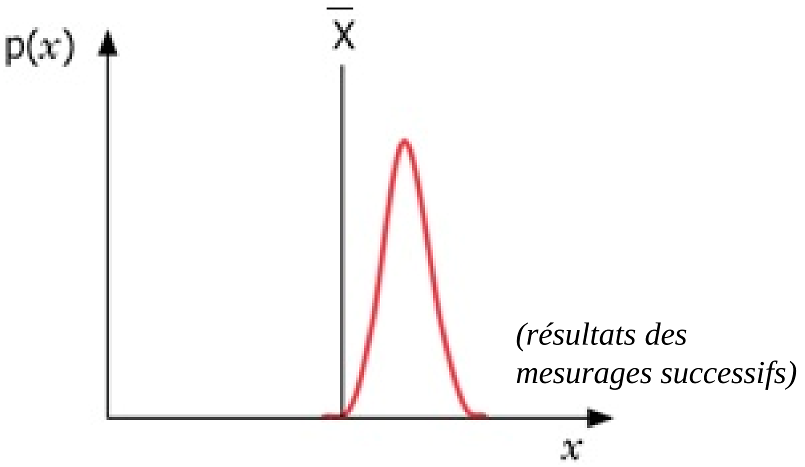
La **fidélité** est la faculté d'un instrument à donner des mesures **répétables**.

Si on effectue N mesures dans des conditions de répétabilité, chaque mesure m_i est en général différente de la valeur moyenne.

Cette différence est une **erreur aléatoire**.

Les erreurs aléatoires sont dues à des fluctuations de la grandeur mesurée ou de la méthode de mesure et peuvent aussi dépendre de l'habilité de l'expérimentateur.

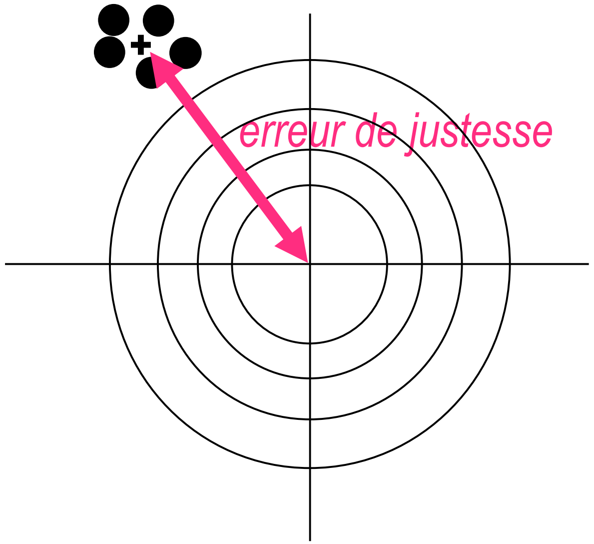
Elles se traduisent par un étalement des mesures autour de la valeur vraie et entachent la fidélité de la mesure.



Quantifie l'étroitesse de la courbe

Si la courbe est étroite > *l'instrument est fidèle*

Mesure & métrologie
Justesse (erreur systématique)

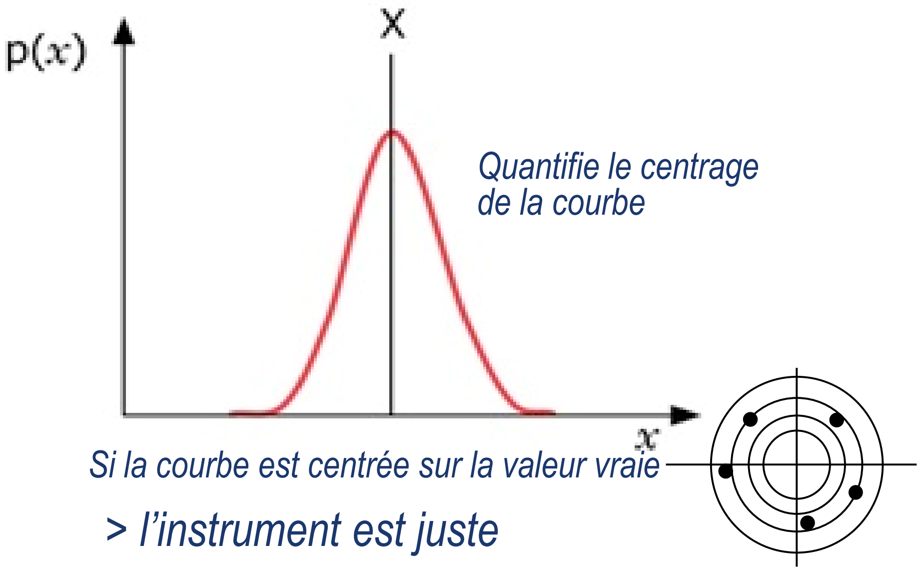


La **justesse** est la faculté d'un instrument à donner des mesures dont la moyenne est proche de la valeur vraie (quantifie la reproductibilité de l'instrument).

Cette erreur est une **erreur systématique**, qui s'ajoute souvent à l'erreur aléatoire de fidélité.

Les erreurs systématiques sont liées à un mauvais réglage de l'instrument de mesure ou à une mauvaise manipulation de l 'expérimentateur.

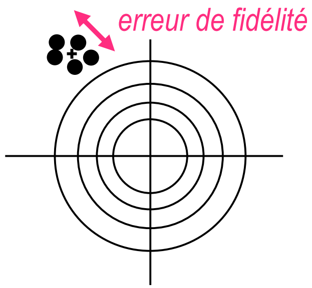
Ce type d'erreur affect toujours le résultat de la mesure dans le même sens, les mesure se répartissant alors autour d'une autre valeur que la valeur vraie affectant la justesse de la mesure.

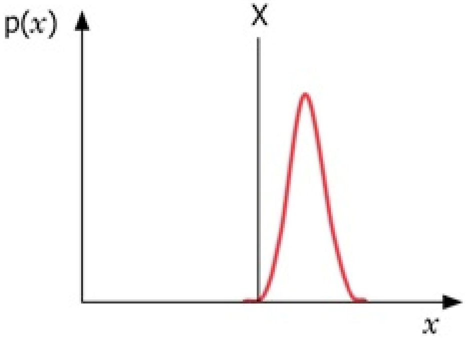


Mesure & métrologie

Concept d'exactitude

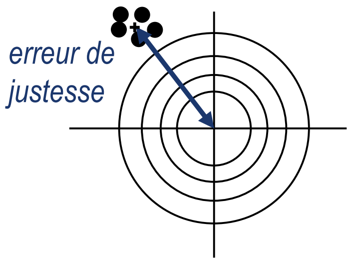
Fidélité

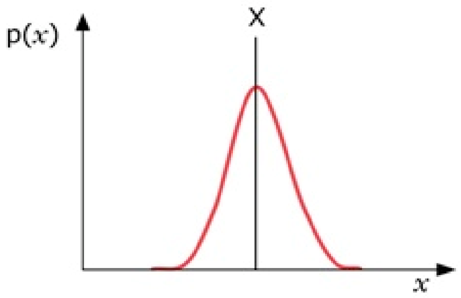




Quantifie l'étroitesse de la courbe

Justesse

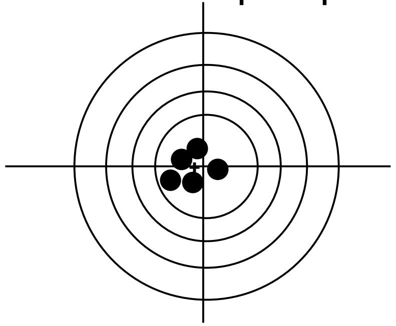




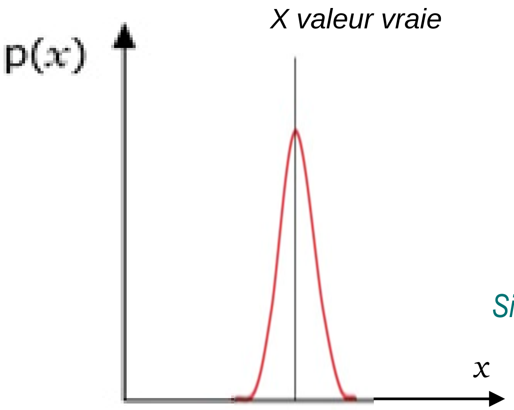
Quantifie le centrage de la courbe

Exactitude

Concept qualitatif qui combine
la justesse et **la fidélité**
(qui sont des concepts quantitatifs).



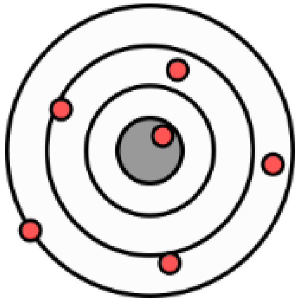
Etroitesse de l'accord entre le résultat d'un mesurage et la valeur vraie du mesurande.



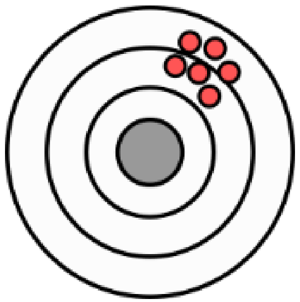
Si la courbe est étroite et centrée sur la valeur vraie
> l'instrument est exact

L'idéal est bien sûr une mesure à la fois juste et fidèle.
Les erreurs les plus difficiles à détecter sont les erreurs systématiques.

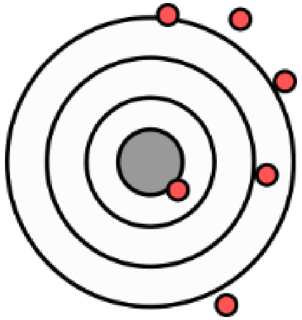
Qualité des instruments de mesure



Juste mais pas fidèle
(valeurs centrées mais dispersées)
Erreurs aléatoires



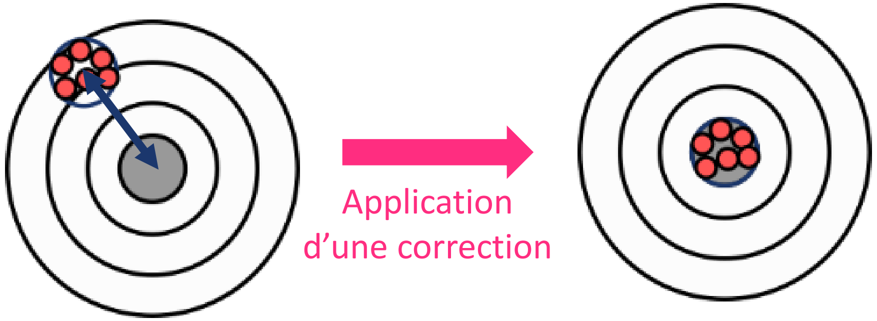
Fidèle, mais pas juste
(valeurs centrées mais resserrées)
Erreurs systématiques



Ni juste, ni pas fidèle
Erreurs aléatoires et systématiques

Exacte = Fidèle et juste
Erreurs faibles

Effet d’une erreur systématique



“ Précision ”

- Le mot **précision** n’existe pas dans la version française du Vocabulaire International de Métrologie (VIM). En effet dans la version anglaise, le VIM parle de « measurement precision » ce qui se traduit dans la version française par « fidélité de mesure ».
- Il est conseillé de ne pas utiliser le mot « précision » afin d’éviter tout malentendu.

  On utilisera plutôt le terme « fidélité de mesure »

~~Les mesures sont précises~~

- **La précision** s’emploie en parlant de capteur.

  C’est l’aptitude d’un appareil à indiquer avec le minimum d’erreur la valeur vraie de la variable mesurée.

$$P = \frac{Erreur\ à\ l'étalonnage\ (\varepsilon)}{Etendue\ de\ mesure\ (E)}$$

- **Classe de précision** : La classe d'un appareil de mesure correspond à la valeur en % du rapport entre la plus grande erreur possible sur l'étendue de mesure.

$$Classe = \frac{Plus\ grande\ erreur\ possible}{Etendue\ de\ mesure} * 100$$

Erreur ou incertitude ?

- **Erreur de mesure** : différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie.

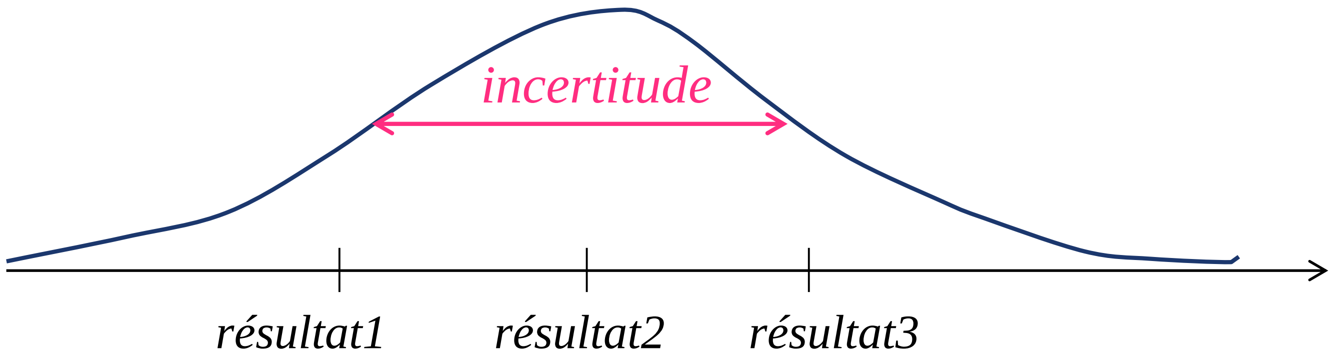
  Or cette valeur est inconnue ! (si elle l’était, il ne serait plus nécessaire de faire des mesures !)

- **Incertitude de mesure** : paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs « qui pourraient raisonnablement » être attribuées au mesurande » . Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type

On peut donc considérer que l’**incertitude est inéluctable lorsque l’on réalise une mesure** et qu’un des rôles de la métrologie est de donner les outils permettant d’appréhender de manière concrète l’importance de l’erreur commise.

Notion d’incertitude

- Le résultat de mesure n’est pas une valeur unique, mais une distribution de valeurs.



- L’incertitude de mesure est le paramètre qui, associé à la moyenne des résultats obtenus par le processus de mesure, caractérise la dispersion de ces résultats :

C’est le doute sur le résultat de la mesure : *u pour « uncertainty »*

Exemple : Le temps de chute d’une masse a été mesuré 20 fois dans des conditions de répétabilité.
On note t le temps de chute moyen et u(t) l’incertitude sur cette valeur moyenne.

Evaluer l'incertitude

- Document de référence :

  Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM 1995)

  Publié en 1999 sous la forme d'une norme française NF ENV 13005

  En développement continu (dernière mise à jour octobre 2012).

- Objectif : exprimer le doute sur le résultat puis le fiabiliser
  - en caractérisant la loi de répartition des résultats des mesures
  - en répétant les mesures
  - en appliquant des corrections

Expression du résultat d'une mesure

$X = (\, x_{moy} \pm U \,)$ unité SI

avec $U = k.u(x)$

U = Incertitude élargie
$u(x)$ = incertitude type sur x

$X = (\, x_{moy} \pm 2.u(x) \,)$ unité SI

on prend par convention
un facteur d'élargissement $k = 2$

$u(x) = 0{,}0128$ -> $0{,}013$
1er chiffre non nul = 1 — 2 chiffres significatifs

$u(x) = 0{,}0428$ -> $0{,}04$
1er chiffre non nul = 4 — 1 chiffres significatifs

LOI **Arrondi de l'incertitude-type**

- 2 chiffres significatifs : si le premier chiffre non nul de $u(x)$ est 1,2 ou 3
- 1 chiffres significatif : si le premier chiffre non nul de $u(x)$ est ≥ 4

Exemples :

d = (21 ± 1) cm
d = (21,0 ± 0,1) cm
d = (21,00 ± 0,01) cm
d = (21,21 ± 0,13) cm

REGLE **Valeur numérique annoncée**

- Un nombre de chiffres significatifs cohérent avec l'incertitude-type
- Même unités pour la valeur et l'incertitude

$t=(1{,}072\cancel{21} \pm 0{,}005\cancel{24})$ s

2. Cohérence avec l'incertitude

1. On garde 1 chiffre significatif

Facteur d'élargissement
Distribution Normale

- U l'incertitude élargie s'obtient en multipliant l'incertitude type $u(x)$ par un facteur d'élargissement k, tel que :

$$\boxed{U = k.u(x)}$$

- k dépend du niveau de confiance demandé :

  Pour un nombre de mesures $N \geq 30$ et un niveau de confiance de 95%, on prend $k = 2$.

  Par contre pour $N < 30$ la valeur de k doit être majorée pour prendre en compte le manque de fiabilité dû au faible nombre de mesures.

Facteur d'élargissement
Distribution Normale

Hypothèse : distribution Normale

L'application de la **loi statistique de Student** permet de calculer le facteur d'élargissement k en fonction à la fois de n et du niveau de confiance $(1\text{-}\alpha)$

Nombre de mesures dans la série	Niveau de confiance (1-α)						
	68.27%	90.00%	95.00%	95.45%	99.00%	99.73%	99.98%
2	1.84	6.31	12.71	18.44	63.66	235.80	761.40
3	1.32	2.92	4.30	4.93	9.93	19.21	42.30
4	1.20	2.35	3.18	3.48	5.84	9.22	19.77
5	1.15	2.13	2.78	2.98	4.60	6.62	12.48
6	1.11	2.02	2.57	2.73	4.03	5.51	9.77
7	1.09	1.94	2.45	2.61	3.71	4.90	7.51
8	1.08	1.90	2.37	2.50	3.50	4.53	6.78
9	1.07	1.86	2.31	2.42	3.37	4.28	6.22
10	1.06	1.83	2.26	2.37	3.25	4.09	5.89
20	1.03	1.73	2.09	2.18	2.86	3.45	4.76
30	1.02	1.70	2.05	2.13	2.76	3.28	4.47
50	1.01	1.68	2.01	2.08	2.68	3.16	4.23
100	1.00	1.66	1.98	2.04	2.63	3.08	4.12
200	1.00	1.65	1.97	2.02	2.60	3.04	4.06
$N \to \infty$	1.00	1.65	1.96	2.00	2.58	3.00	4.00

Facteur d'élargissement

Distribution Normale

niveau de confiance

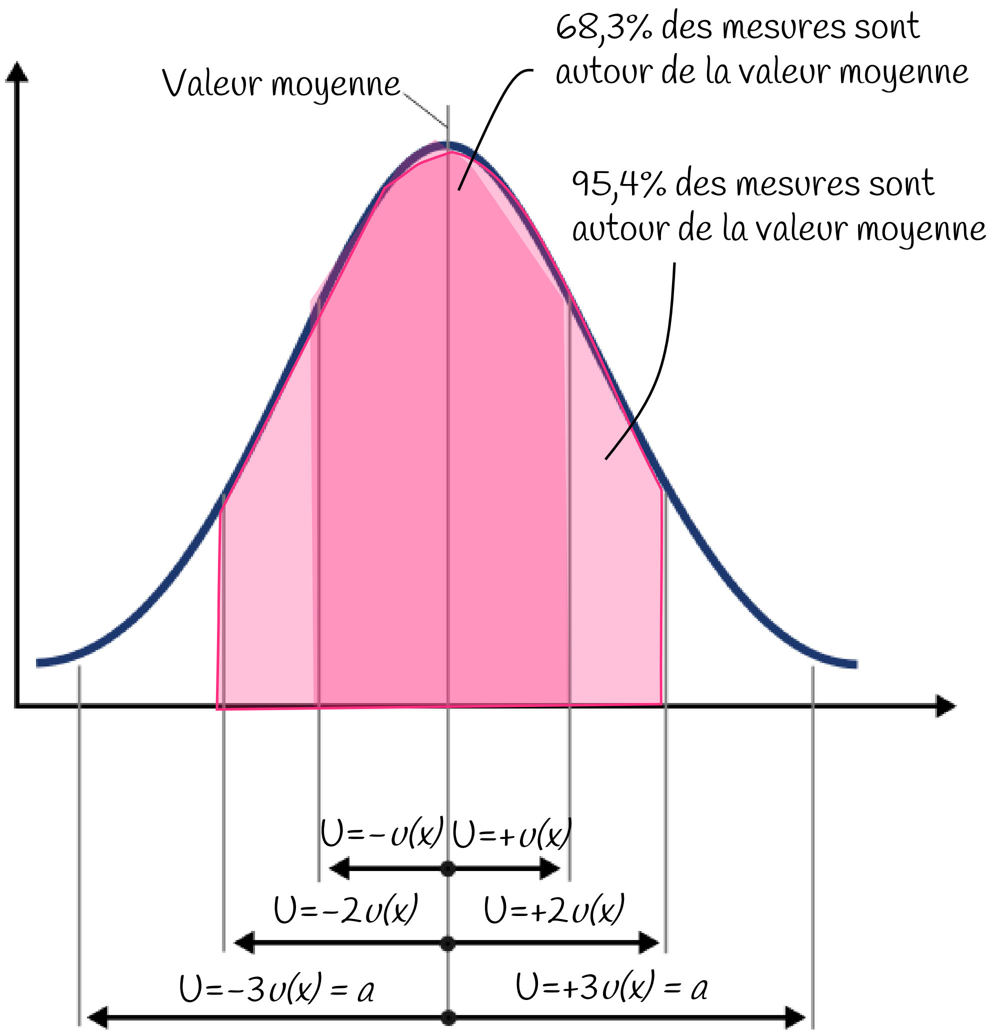
U = 2$u(x)$ correspond à 95% de chance d'avoir la valeur vraie du mesurande comprise entre [$\bar{x}$ - U ; $\bar{x}$ + U] pour une distribution normale

intervalle de confiance

U = 3$u(x)$ correspond à 99% de chance d'avoir la valeur vraie du mesurande comprise entre [$\bar{x}$ - U ; $\bar{x}$ + U] pour une distribution normale

Niveau de confiance (1-α)	Facteur d'élargissement k
68,3 %	1,00
90,0 %	1,64
95,0 %	1,96
95,4 %	2,00
99,0 %	2,58
99,7 %	3,00

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$



Méthode d'évaluation de l'incertitude de mesure

> un paramètre
> une source

L'incertitude issue d'une source d'incertitude sur un paramètre peut être caractérisée par un écart-type. *(On parle d'incertitude ou d'incertitude-type.)*

Evaluation d'une incertitude à partir de la distribution **statistique** des résultats d'une **série de mesurage**.

Cette méthode est utilisée lorsqu'une grandeur est :

- mesurée dans des conditions de **répétabilité**,

ou

- lorsque l'on estime **l'incertitude sur les coefficients d'une droite de régression linéaire**.

type A

Evaluation des incertitudes en admettant des distributions de probabilité d'après **l'expérience acquise** ou d'autres informations (classe de l'appareil de mesure, etc.).

Cette méthode est utilisée lorsqu'il est impossible de faire une étude statistique (cas de la **mesure unique** par exemple).

type B

Incertitude de type A

> un paramètre
> une source

- Cas d'utilisation :
  - Calcul de l'incertitude d'une grandeur mesurée dans des **conditions de répétabilité**
  - Calcul de l'incertitude sur les coefficients d'une droite de **régression linéaire**

- Évaluation de l'incertitude d'une grandeur *x* mesurée *n* fois dans des conditions de répétabilité :

Fonction ECARTYPE sous Excel

L'incertitude type u sur le mesurande x est évaluée par l'écart-type s sur la moyenne de *n* observations estimé par :

$$\boxed{u(x) = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

avec $$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

s est aussi souvent noté σ_{n-1}

Exemple :

Le temps a été mesuré 6 fois dans des conditions de répétabilité.
Les valeurs sont reportées en s : 0,685 ; 0,683 ; 0,687 ; 0,681; 0,689 ; 0,687.
Évaluer l'incertitude sur le temps de chute.

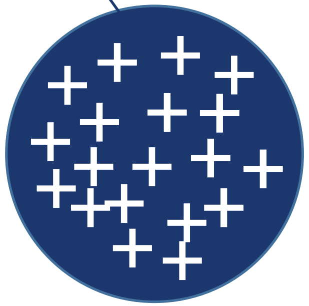
s = 0,0029439.. s ; u(t)= 0,00120185.. s

Rappel écart type

Écart type sur une population

Les données ont été collectées auprès de TOUTE la population

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$



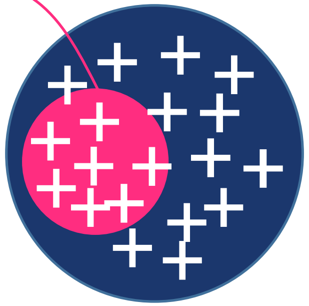
σ : écart type sur la population

μ : moyenne arithmétique sur la population

Écart-type à partir d'un échantillon

Les données ont été collectées auprès d'un échantillon représentatif de la population constitué de *n* individus

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$



s : l'écart type sur l'échantillon
(meilleur estimateur de l'écart type sur la population)

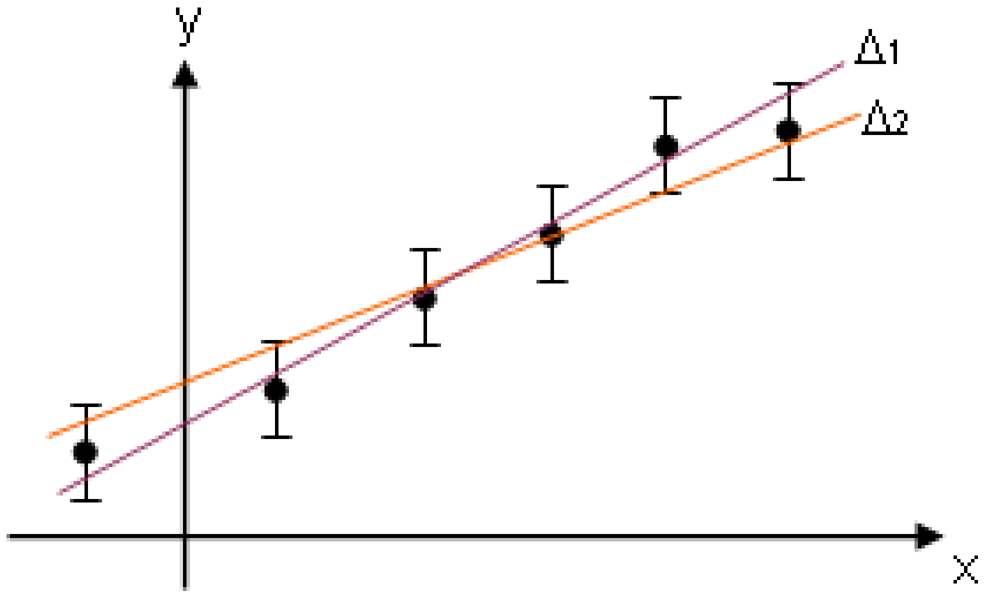
$\bar{x}$: moyenne sur l'échantillon

	Population	Échantillon
Excel	ECARTYPE.PEARSON()	ECARTYPE.STANDARD()
TI	stdDevPop(()	stdDev()

Incertitude de type A

Evaluation de l'incertitude sur les coefficients d'une droite de régression linéaire

- Régression linéaire de type y=*ax*+*b*



Quelle est la « meilleure droite » ?

On voit que le calcul des coefficients a et b est entaché d'incertitudes, incertitudes qu'il va falloir estimer.

L'incertitude sur les coefficients a ou b est évalué par l'écart-type :

$$\boxed{s(a) = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{N\sigma_{Nx}^2}}}$$

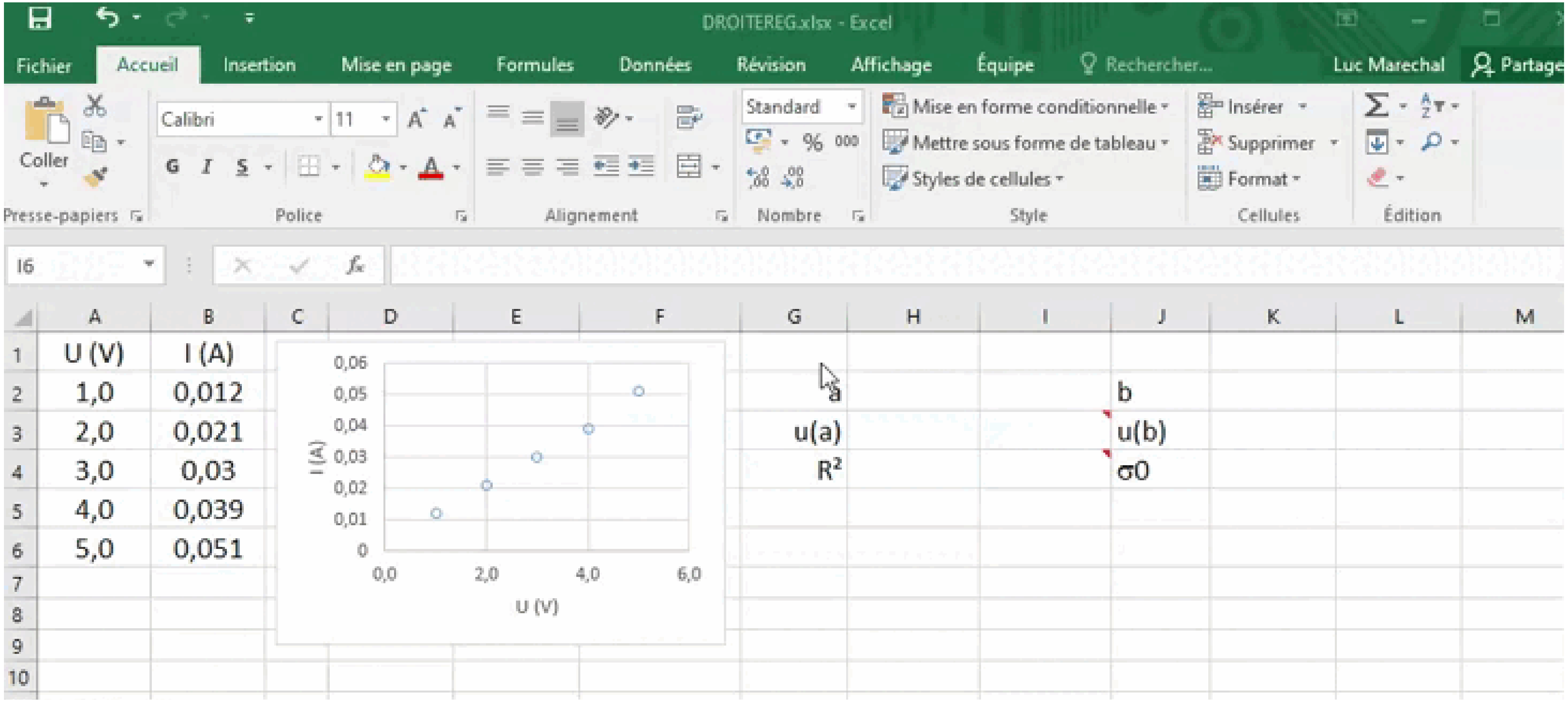
$$\boxed{s(b) = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{N} + \left(1 + \frac{(\bar{x})^2}{\sigma_{Nx}^2}\right)}}$$

avec : ${\sigma_0}^2 = \frac{N}{N-2}(1 - r^2){\sigma_{Ny}}^2$

Incertitude de type A

Evaluation de l'incertitude sur les coefficients d'une droite de régression linéaire

- Fonction **DROITEREG** sur Excel



Incertitude de type A

Evaluation de l’incertitude sur les coefficients d’une droite de régression linéaire

- Fonction **DROITEREG** sur Excel

Il faut sélectionner une matrice 6 cases et faire **insertion / fonction / DROITEREG**
ou taper = DROITEREG(données Y ; données X ; 1; 1) : sélectionner les données Y et X
dans les deux cas, valider avec **CTRL** + **⇧Shift** + **Entrée**

On obtient :

pente : a	-0,0459	9,2133	b
u(a)	0,0006	0,0327	u(b)
R^2	0,9990	0,0466	σ_0

a	b
u(a)	u(b)
R^2	σ_0

ATTENTION, malgré la tentation, n'appuyez pas (ou ne cliquez pas) sur "ENTER", en effet, DROITEREG ne brille pas par sa convivialité:

Le résultat de DROITEREG est une matrice, il est donc indispensable: avant de taper =DROITEREG..., d'avoir sélectionné une plage de cellule au moins aussi grande que cette matrice

Lorsque la formule est saisie, de la valider à l'aide de la combinaison de touches "Shift"+"Ctrl"+"Entrée" (au lieu de "Entrée")!

Incertitude de type A

Exemples

a) Pour mesurer l'épaisseur e d'une rondelle, on a effectué 50 mesures dans des conditions de répétabilité. La valeur moyenne de ces 50 mesures est 4,0325 mm et l'écart type estimé est 0,21536 mm.

$u(e) = 0{,}030\cancel{4}$ mm

b) On fait varier la tension U aux bornes d'une résistance R grâce à une source de tension et on lit le courant I qui traverse la résistance avec un ampèremètre. En déduire la valeur de la résistance R.

- Loi physique : U = R I
- Modélisation par la méthode des moindres carrés, x ? y ?

D2 | {=DROITEREG(B2:B6;A2:A6;1;1)}

	A	B	C	D	E	F
1	U (V)	I (A)				
2	1,0	0,012	a	0,0096	0,0018	b
3	2,0	0,021	u(a)	0,00034641	0,00114891	u(b)
4	3,0 (0,030)	0,03	R^2	0,99610895	0,00109545	σ_0
5	4,0	0,039				
6	5,0	0,051				
7						

$a = \frac{I}{U} = R^{-1}$

$R^{-1} = (0{,}0096 \pm 0{,}0007)\ \Omega^{-1}$

$R = (99 \pm ?)\ \Omega$

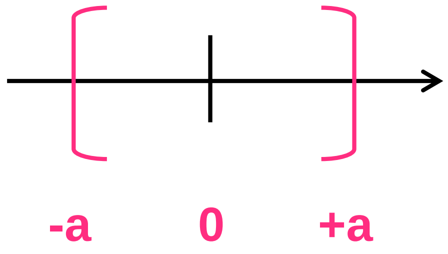
Incertitude de type B

> un paramètre
> une source

Quelles limites ?

Étendue de variations possible de la grandeur

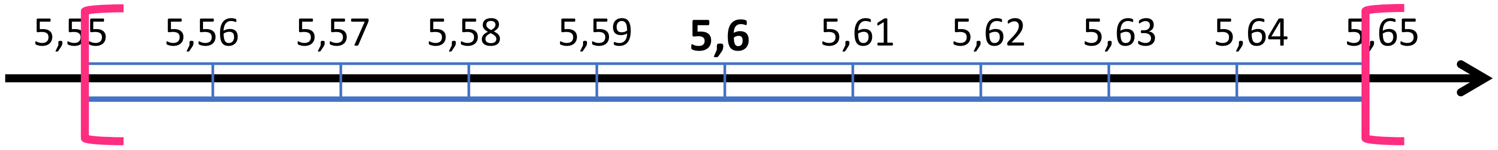
- C'est l'intervalle de valeurs qui comprend, a priori, tous les résultats possibles du mesurage.
- On parle de demi-étendue **a**



Sur les fiches techniques des capteurs, l'étendue correspond à ce qui est appelé « tolérance » ou « précision » ou…

Exemple :

On lit sur un voltmètre à affichage numérique la tension U= 5,6 V.
Du fait du nombre de chiffres significatifs donnés par l'appareil, dans quel intervalle le résultat de la mesure se trouve-t-il a priori ?



Incertitude de type B

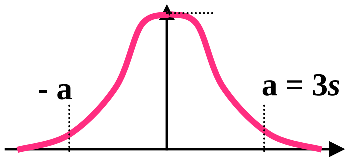
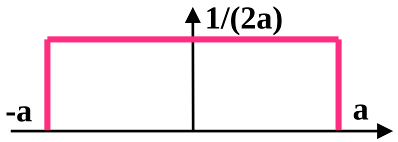
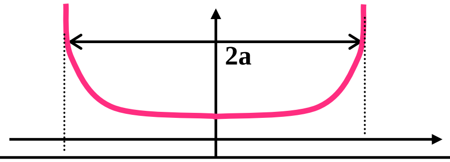
> un paramètre
> une source

Cette méthode est basée sur des données physiques:

- objectives (certificat d'étalonnage, notice constructeur, bibliographie)
- subjectives (expérience et savoir faire de l'opérateur)

On doit s'interroger sur les valeurs extrêmes pouvant raisonnablement être atteintes [-a; +a] et sur la loi de probabilité présumée pour cette mesure, généralement une des trois lois suivantes:

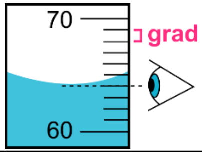
Incertitude évaluée par :

Loi	Fonction de distribution	Utilisation	$u(x)$
Normale		Erreur dépendant d'un nombre important de paramètres, de faible effet individuel. *Ex : données constructeurs*	$\frac{a}{3}$
Uniforme		Résolution d'un indicateur numérique – Hystérésis - Instrument vérifié conforme à une classe	$\frac{a}{\sqrt{3}}$
Dérivée Arc Sinus		Grandeur d'influence variant de façon sensiblement sinusoï-dale entre deux extremums *Ex : température régulée, pot vibrant*	$\frac{a}{\sqrt{2}}$

Incertitude de type B – en pratique

> un paramètre
> une source

En pratique pour un mesurage direct, on se reporte à la documentation de l'appareil de mesure pour déterminer $u(x)$ ou U

Cas		a	u(x)	Exemple
Appareil analogique de classe C de calibre Xmax			$\dfrac{C.\,Xmax}{100}$	Un ampèremètre de classe 2 utilisé sur le calibre 500 mA induit une erreur absolue de 2 x 500/100 = 10 mA.
Appareil numérique		x% VL + y dernier digit VL = Valeur lue dernier digit = Plus petite variation perceptible à l'affichage	$\dfrac{x\%\ VL + y\ \text{dernier digit}}{\sqrt{3}}$	Un voltmètre indique une tension V = 4,816 mV. La notice indique la précision, pour ce calibre, de ±0.5% + 3d. $u(x)$ = (4,824 x 0,5/100 + 3 x 0.001) /$\sqrt{3}$ = 0,0156 ≈ 0.016 mV (on garde 2 chiffres significatif (car 1er chiffre non nul =1) et on arrondi)
Appareil à graduation ou résolution q		$\dfrac{\text{graduation}}{2}$ / $\dfrac{q}{2}$	$\dfrac{graduation}{\sqrt{12}}$ / $\dfrac{q}{\sqrt{12}}$	Une burette graduée tous les 0,2 mL donnera une incertitude type sur la lecture de 0,2/$\sqrt{12}$ = 0,0577 ≈ 0,06 mL (on garde 1 chiffres significatif et on arrondi)
Le constructeur indique une précision sous la forme $\pm\Delta x$ ou une tolérance *t*		Δx / t	$\dfrac{\Delta x}{\sqrt{3}}$ / $\dfrac{t}{\sqrt{3}}$	
Le constructeur fournit l'incertitude-type (cas très rare)			utiliser directement ***u(x)***	

Type A ou Type B ?

> un paramètre
> une source

☑ Conditions de répétabilité ?
☑ Cœfficients de droite de régression linéaire ?

oui → Méthode de type A

☑ Répétabilité : $u(x) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}}$

☑ Droite de régression linéaire : $u(a) = s(a)$
$u(b) = s(b)$

non → Méthode de type B

1) Choisir l'intervalle de variation [-a ;+a]
2) Choisir la loi de probabilité : $u(x) = \frac{a}{3}$; $u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $u(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Cependant….

- *Une méthode de type B se fondant sur une longue expérience peut être préférable à une répétition qui ne respecte pas réellement les conditions de répétabilité.*
- *Et inversement, si on possède trop peu d'information, seules les répétitions répétables permettent d'évaluer correctement l'incertitude.*

Mesurande ou paramètre étudié	Valeur moyenne	Unité	Source d'incertitude	Méthode d'évaluation : type A / type B	Loi choisie : normale, uniforme, …?	S OU valeur de la demi-étendue a	Incertitude u(x)
x							

Exemples

Evaluer l'incertitude

a) Pour mesurer la température d'un liquide, on a utilisé un capteur résistif conditionné avec écran à affichage numérique. On lit sur l'écran : T = 15,3 °C.

méthode de type B ; 2a = 0,1 °C ; loi uniforme ;
$u(T)$=0,05/ √3 = 0,02887 °C

b) Le diamètre interne d'un tube a été mesuré avec un pied à coulisse à vernier :
on lit D = 13,90 mm. Il est gravé sur le vernier : « précision 0,02 mm ».

méthode de type B, 2a = 0,02 mm ; loi normale ;
$u(T)$=0,01/ 3 = 0,0033 mm

c) La longueur d'onde d'un laser est donnée par le constructeur avec une incertitude de 3 % :
λ = 470 nm

méthode de type A ou B,
$u(l)$=0,03 x 470 = 14,1 nm

Composition des incertitudes

Les différentes sources d'erreurs

> un paramètre
> plusieurs sources

Soit x une grandeur mesurée et $u(x)$ l'incertitude type liée à la mesure influencées par plusieurs sources d'erreurs.

On évalue l'incertitude $u_i(x)$ pour chacune des sources.
L'incertitude globale est alors donnée par la relation :

$$\boxed{u^2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x)}}$$

Exemple : $u^2(x) = u_{rép}^2(x) + u_{lec}^2(x) + u_{pré}^2(x)$

Où :
- $u_{rép}(x)$: incertitude type lié à la prise de mesure successive dans des conditions de répétabilité
- $u_{lec}(x)$: incertitude type liée à la lecture sur l'instrument (affichage, graduation …)
- $u_{pré}(x)$: incertitude type liée à la tolérance, précision, classe de l'appareil de mesure

Souvent, une ou plusieurs de ces incertitudes prédominent sur les autres.
D'où la nécessité d'estimer rapidement les ordres de grandeurs des incertitudes types afin de garder les + significatives.

Mesurage direct et indirect

Le type de mesurage, direct ou indirect est important pour le calcul des incertitudes.

Dans le cas de mesurages indirects, l'incertitude du mesurande est calculée à partir des incertitudes des mesurages directs ayant permis de déterminer le mesurande

Mesurage direct

Le mesurande est mesuré directement

Exemple: mesure d'une résistance avec un Ohmmètre.

Mesurage indirect

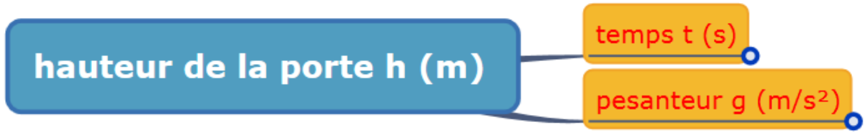
Le mesurande est calculé à partir de plusieurs mesures directes.

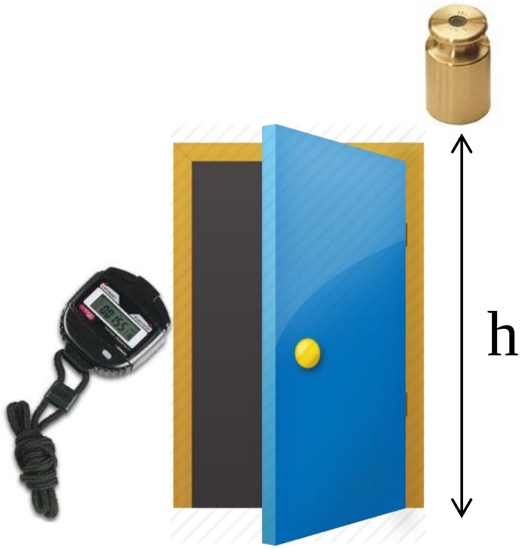
Exemple1 : mesure d'une résistance à partir de la mesure de la tension et du courant. R = U/I

Exemple2 : A partir de la loi physique qui régit la chute d'une masse, on veut déterminer la hauteur de chute h.

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$





Propagation des incertitudes

Si l'incertitude de mesure sur le mesurande y est issue de plusieurs paramètres liés par une relation mathématique du type $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

l'incertitude composée u_c sur y est obtenue à l'aide de la loi de propagation des incertitudes :

$$\boxed{u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} . u(x_i) \right)^2}}$$

(à condition que ces paramètres x_i ne soient pas corrélées)

Propagation des incertitudes
Cas usuels

> plusieurs paramètres
> mesurage indirect

$$y = x_1 + x_2 \text{ ou } y = x_1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

$$y = k.x \quad \Rightarrow \quad u_c(y) = k.u(x)$$

$$y = x_1.x_2 \quad ou \quad y = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

$$y = k.x^n \quad \text{ou} \quad y = k.x^{-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_c(y)}{y} = |n|\frac{u(x)}{x}$$

$$y = k.x_1^{\alpha}.x_2^{\beta}.x_3^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\alpha^2\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$$

Exemples

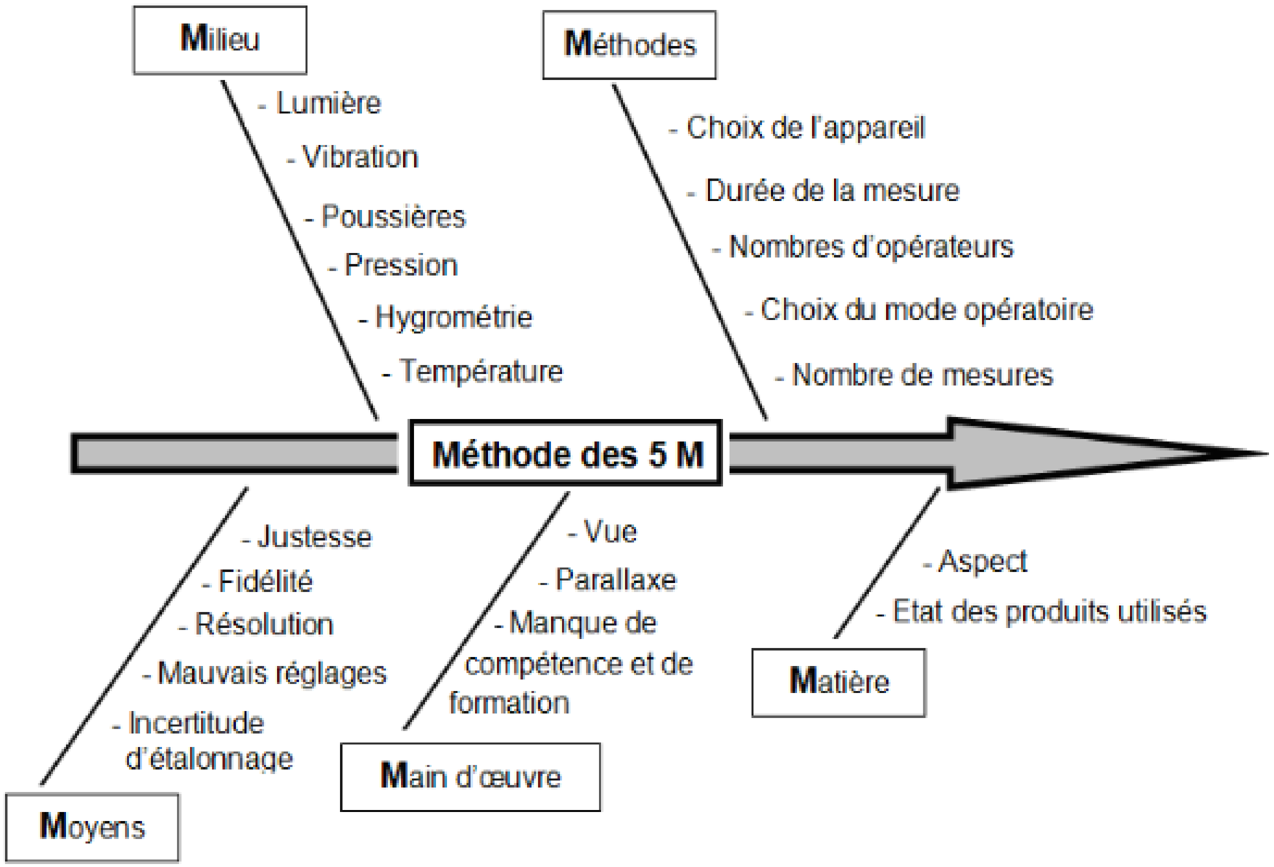
Carré d'un paramètre : $s = a^2$ $\Longrightarrow$ $u(s) = u(a^2) = 2\,a\,.\,u(a)$

Hauteur de porte : $h = \frac{1}{2} g\, t^2 = K.g.t^2$ $\Longrightarrow$ $\left(\frac{u_c(h)}{h}\right)^2 = \left(\frac{u(g)}{g}\right)^2 + 2^2\left(\frac{u(t)}{t}\right)^2$

Identifier les sources d'incertitude

Méthode des 5M

Les sources d'incertitudes sur un paramètre sont les éléments qui apportent un doute sur la valeur du mesurande de ce paramètre.



Identifier les sources d'incertitude

Exemple

Mesure de la longueur L réalisée 10 fois dans des conditions de répétabilité avec un capteur à affichage numérique de type X,XXX et de précision 0,005 m (donnée fiche technique)

Le mesurande x admet 3 sources d'incertitude dues à : (1) la répétabilité, (2) l'affichage, (3) la précision,

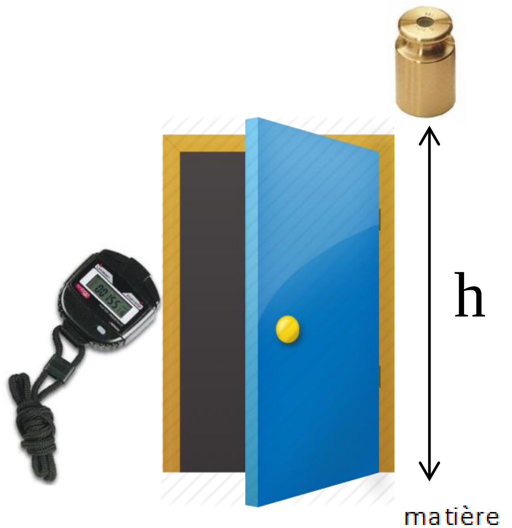
alors $u^2(x) = u^2_{\text{répétabilité}}(x) + u^2_{\text{affichage}}(x) + u^2_{\text{précision}}(x)$

paramètre x	unité	valeur moyenne	source d'incertitude	méthode d'évaluation : type A / type B	*s* OU valeur de la demi-étendue a	loi choisie : normale, uniforme, ...?	*u(x)*	*u²(x)*
longueur L	m	1,32514	répétabilité	A	9,4257E-03		2,9807E-03	8,8844E-06
			aff. numérique	B	5,0000E-03	uniforme	2,8868E-03	8,3333E-06
			précision capteur	B	2,5000E-03	normale	8,3333E-04	6,9444E-07
		1,32514	totale	composition			4,2323E-03	1,7912E-05[1]

$2u(L) = 0{,}084..$ m $\qquad L = (1{,}33 \pm 0{,}08)$ m

Identifier les sources d’incertitude

Exemple



- ***temps t*** : mesure issue du chronomètre

    2 sources d’incertitude sur le paramètre t

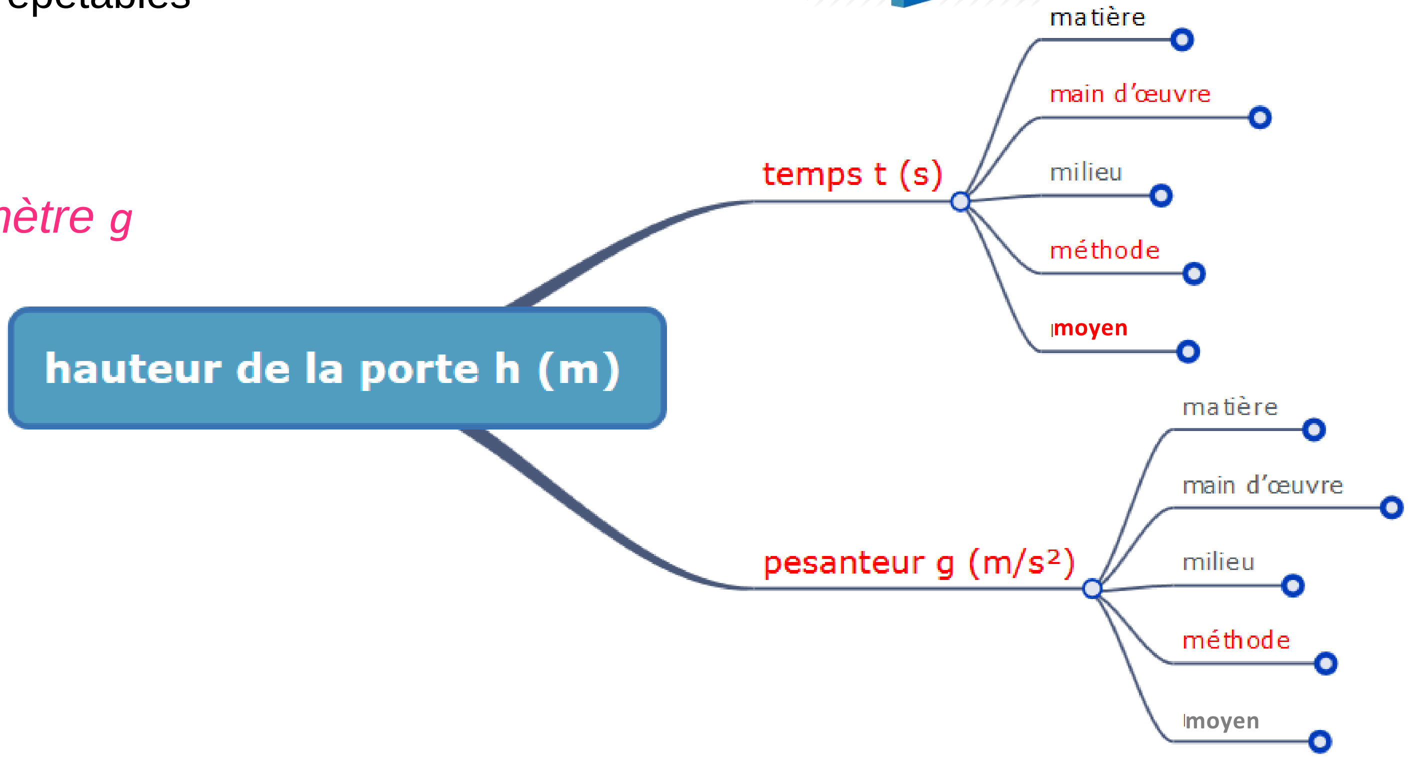
    > caractéristiques du chronomètre Lextronic: “*mesure au 1/1000 e de seconde*”

    ➢ processus de mesure : 3 mesures répétables

- ***accélération de la pesanteur*** *g* :

    1 source d’incertitude sur le paramètre g

    > valeur arrondie $g = 9{,}81$ m.s^{-2}



Analyser les incertitudes prépondérantes

- La source prépondérante d'incertitude permet de savoir sur quelle source de quel paramètre agir pour minimiser l'incertitude globale sur l'expérience.

- Elle correspond au terme le plus grand de la somme issue de la loi de propagation qui permet le calcul final de l'incertitude composée

Exemples

$$\left(\frac{u_c(h)}{h}\right)^2 = \left(\frac{u(g)}{g}\right)^2 + 2^2\left(\frac{u(t)}{t}\right)^2$$

$$= 3{,}46\ 10^{-7} + 1{,}23\ 10^{-5}$$

terme prépondérant

t a deux sources d'incertitude

$u^2(t) = u^2_{source1}(t) + u^2_{source2}(t)$ → agir sur la source prépondérante pour améliorer l'expérience

↓

agir sur la mesure de t pour améliorer la qualité de la mesure de h

Evaluer la qualité d'une mesure

Incertitude relative

Pour avoir une idée de la qualité d'une mesure, on peut calculer son incertitude relative en pourcentage:

$$\boxed{Incertitude\ relative = \frac{U}{|x|}}$$

Exemple :

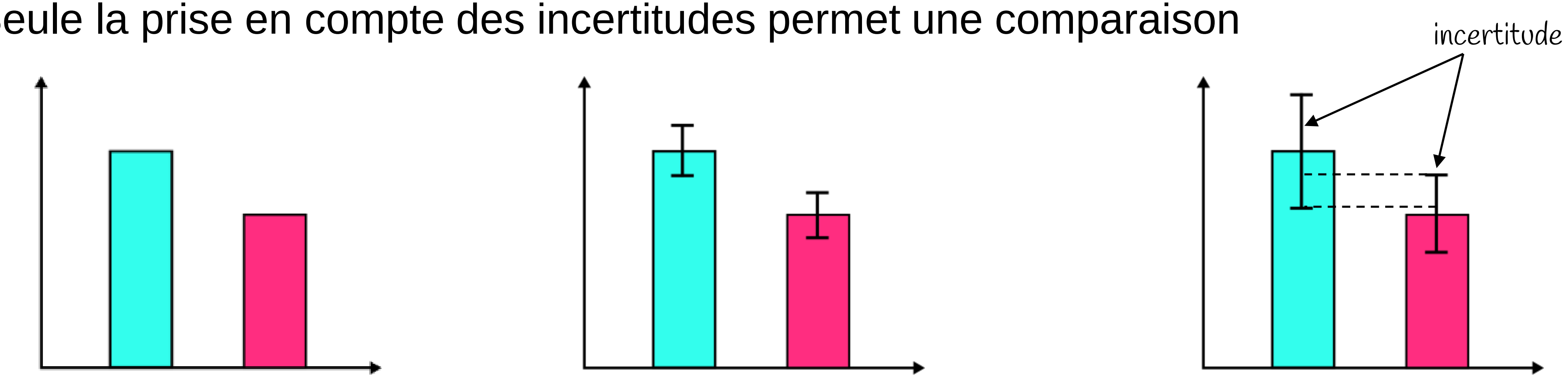
Le résultat de mesure de la longueur d'une pièce est l = (2,52 ± 0,04) m

L'incertitude relative est définit comme $\frac{U(l)}{l} = \frac{0{,}04}{2{,}52}$= 0,016.

On l'exprime souvent en pourcentage : $\frac{U(l)}{l} = 1{,}6\%$ Ce qui signifie que l'on connait l à 1,6 % près

Comparaison de résultats entre eux

- Seule la prise en compte des incertitudes permet une comparaison



Comparaison impossible | Différence significative | Différence non significative

- Comparaison entre valeur expérimentale et valeur théorique :

$$Pourcentage\ d'erreur = \left| \frac{valeur\ exp - valeur\ théo}{valeur\ théo} \right| \text{ x } 100\%$$

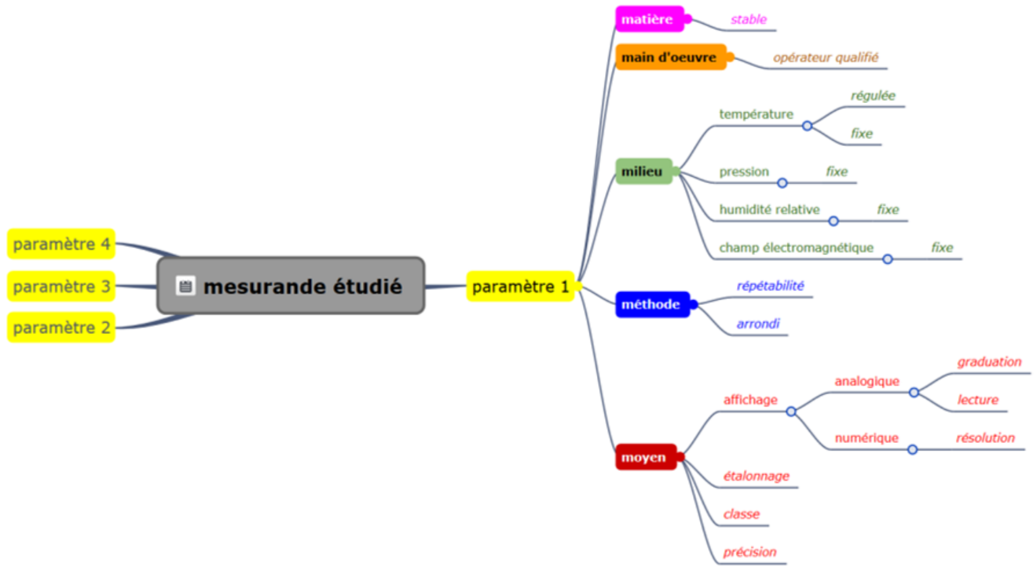
- Ecart relatif :

$$E = \left| \frac{x_{réf} - x}{x_{réf}} \right|$$

si une valeur de référence est connue

Synthèse : démarche de travail

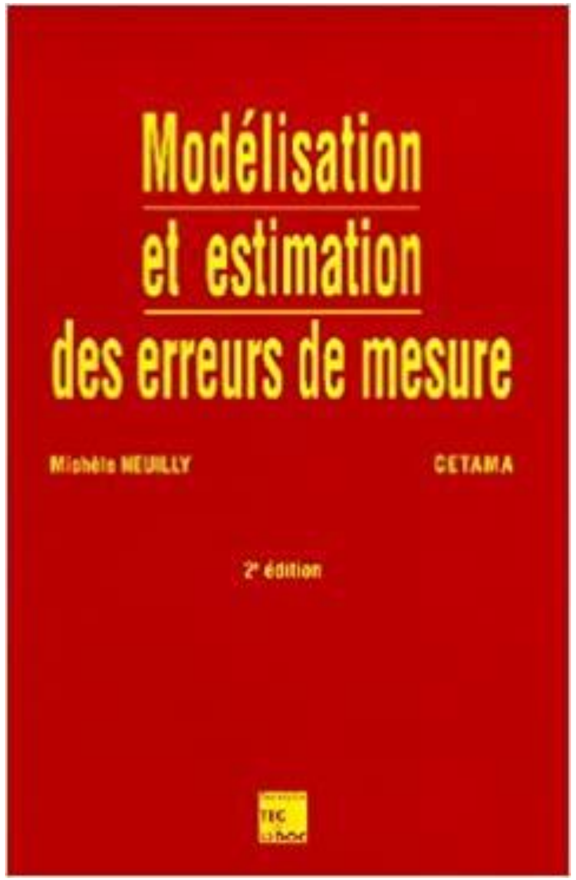
1) Déterminer le mesurande
2) Déterminer les paramètres physiques qui permettent d'accéder à la mesure
3) Identifier les sources d'incertitudes sur chaque paramètre
4) Sur chaque paramètre : évaluer les incertitudes
   - une seule source d'incertitude : méthode de type A ou B
   - plusieurs sources > composition des incertitudes
5) Si plusieurs paramètres : propager les incertitudes
6) Rechercher l'incertitude prépondérante et éventuellement améliorer le processus de mesure
7) Exprimer le résultat … assorti de son incertitude !

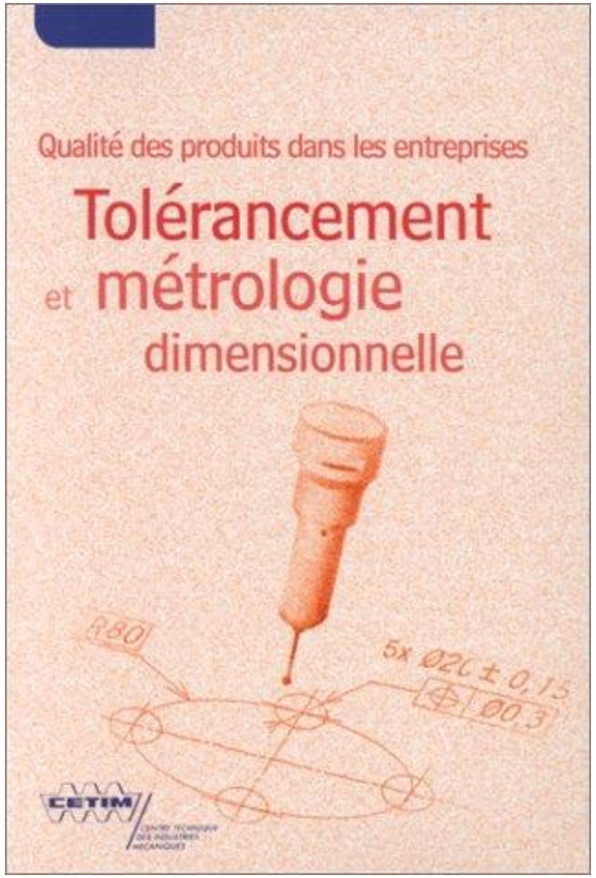


$$X = (\, x_{moy} \pm 2\, u(x) \,) \text{ unité SI}$$

- un ou deux chiffres significatifs pour l'incertitude
- un nombre de chiffres significatifs cohérent pour la valeur numérique annoncée
- les unités pour la valeur et l'incertitude

Relevant books





Contact Information

Université Savoie Mont Blanc

Polytech' Annecy Chambery
Chemin de Bellevue
74940 Annecy
France

https://www.polytech.univ-savoie.fr

Lecturer

Dr Luc Marechal (luc.marechal@univ-smb.fr)
SYMME Lab (Systems and Materials for Mechatronics)

Acknowledgement

Pr Christine Barthod
SYMME Lab (Systems and Materials for Mechatronics)
for the original writing of this lecture

SYMME

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

POLYTECH ANNECY-CHAMBÉRY