PACI841 – Mémo Métrologie – SNI4

Luc Marechal

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC — POLYTECH ANNECY-CHAMBÉRY — SYMME

1. Unités et symboles

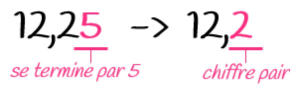
- Symboles en minuscules sauf si l'unité provient d'un savant
- Toujours un espace entre la valeur numérique et le symbole

2. Chiffres significatifs

- Tous les chiffres non nuls sont significatifs
- Les zéros placés en tête ne sont pas significatifs.
- Les zéros encadrés ou en queue sont significatifs.
- La notation x10 met en évidence le nombre de chiffres significatifs.
- Multiplication ou division : le résultat doit comporter le même nombre de chiffres significatifs que la mesure qui en a le moins dans le calcul.
- Addition ou soustraction : le résultat doit avoir autant de décimales que la valeur qui en a le moins dans le calcul.

3. Approximation décimale ou arrondi (Règle de Gauss)

- Les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 sont arrondis à l'entier inférieur.
- Les chiffres 5, 6, 7, 8 et 9 sont arrondis à l'entier supérieur.
- Si le nombre se termine par un 5 ou par un 5 suivi de zéros, on choisit le nombre se terminant par un chiffre pair

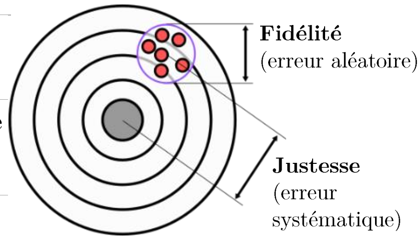


4. Mesure & métrologie : Vocabulaire de base et Définitions

Document de référence	**G**uide to the Expression of **U**ncertainty in **M**easurement (GUM 1995)
Grandeur	Attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance qui est susceptible d'être distinguée **qualitativement** et mesurée **quantitativement**
Mesurage	Ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer la valeur d'une grandeur.
Mesurande	Grandeur particulière soumise à un mesurage.
Résultat	Valeur attribuée à un mesurande, obtenue par mesurage.
Erreur de mesure	Écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie.
Répétabilité	Étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des **mêmes conditions de mesure**. Les conditions de répétabilité sont : • même mode opératoire • même lieu • même observateur • répétition durant une courte période de temps • même instrument de mesure utilisé dans les même condition
Reproductibilité	Étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués **en faisant varier les conditions de mesure**. Il faut spécifier les conditions que l'on fait varier, par exemple : • le principe de mesure • la méthode de mesure • l'observateur • l'instrument de mesure • l'étalon de référence • le lieu • les conditions d'utilisation • le temps
Incertitude de mesure	Paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs « qui pourraient raisonnablement » être attribuées au mesurande. Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type.
Intervalle de confiance	Intervalle qui a le plus de chance de contenir la vraie valeur de la grandeur que l'on mesure.
Incertitude-type	$u(x)$: incertitude exprimée à partir de l'écart-type sur la valeur moyenne. (estimateur s)
Incertitude élargie	**U** : incertitude donnée avec un niveau de confiance de X%
Incertitude relative	$\frac{U}{\lvert x \rvert}$ (pas d'unité)

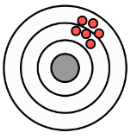
5. Mesure & métrologie

Fidélité (Erreur aléatoire)	Faculté d'un instrument à donner des mesures **répétables**
Justesse (Erreur systématique)	Faculté d'un instrument à donner des mesures dont la moyenne est proche de la valeur vraie (quantifie la reproductibilité de l'instrument).
Exactitude	Concept qualitatif qui combine la justesse et la fidélité

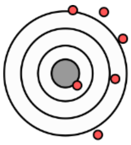


6. Qualité des instruments de mesure

Juste mais pas fidèle
(valeurs centrées mais dispersées)
Erreurs aléatoires

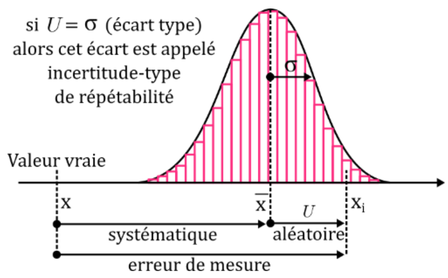


Fidèle, mais pas juste
(valeurs centrées mais resserrées)
Erreurs systématiques



Ni juste, ni fidèle
Erreurs aléatoires et systématiques

Exacte = fidèle et juste
Erreurs faibles



7. Evaluation des incertitudes

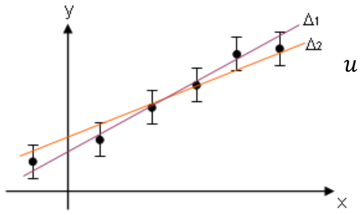
- On fait une série de meure (conditions de répétabilité)
- On estime l'incertitude sur les coefficients d'une droite de régression linéaire

TYPE A

Répétabilité : Incertitude-type $= u(x) = \dfrac{s(x)}{\sqrt{n}}$

avec $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Droite de régression linéaire : $u(a) = s(a) = \sqrt{\dfrac{\sigma_0^2}{N\sigma_{Nx}^2}}$



$u(b) = s(b) = \sqrt{\dfrac{\sigma_0^2}{N}\left(1 + \dfrac{(\bar{x})^2}{\sigma_{Nx}^2}\right)}$

${\sigma_0}^2 = \frac{N}{N-2}(1 - r^2){\sigma_{Ny}}^2$

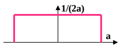
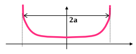
```
DROITEREG(données Y ; données X ; 1; 1)
```

a	b
u(a)	u(b)
R^2	σ_0

- On ne fait qu'une seule mesure

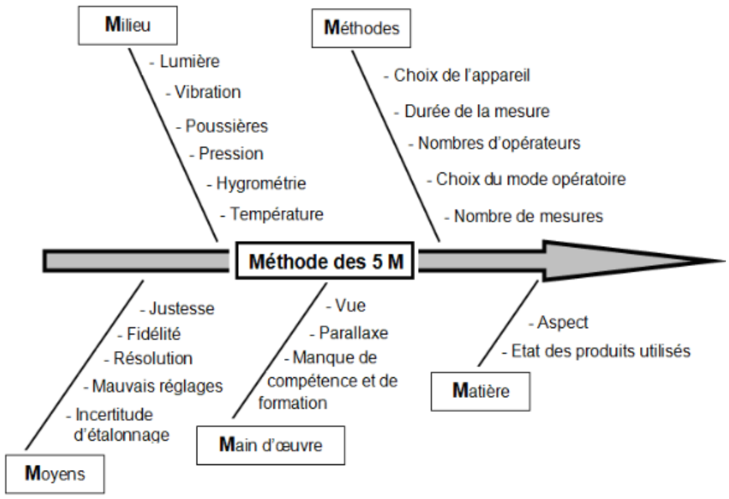
TYPE B

1) Choisir l'intervalle de variation [*-a ;+a*]
2) Choisir la loi de probabilité pour estimer *u(x)* :

Normale	$u(x) = \dfrac{a}{3}$		
Uniforme	$u(x) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$		indic. num
Dérivée arc sinus	$u(x) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$		grand. sinus

Cas courants	***u(x) estimé par***
Appareil analogique de classe C, de calibre Xmax	$\dfrac{C.\,Xmax}{100}$
Appareil numérique VL = Valeur lue Dernier digit = Plus petite variation perceptible à l'affichage	$\dfrac{x\%\ VL + y\ \text{dernier digit}}{\sqrt{3}}$
Appareil à graduée ou résolution *q*	$\dfrac{\textit{graduation}}{\sqrt{12}}$ / $\dfrac{q}{\sqrt{12}}$
Constructeur indique une précision ±*Δx* ou une tolérance *t*	$\dfrac{\Delta x}{\sqrt{3}}$ / $\dfrac{t}{\sqrt{3}}$
Constructeur fournit u(x)	utilise directement u(x)

8. Identifier les sources d'incertitude (méthode des 5M)



- Type A ≥ 30 mesures ⇨ loi normale suffit
- Type A < 30 mesures ⇨ il existe d'autres sources d'incertitude que la répétabilité seule

Mesurande ou paramètre étudié	Valeur moyenne	Unité	Source d'incertitude	Méthode d'évaluation: type A / type B	Loi choisie : normale, uniforme,..?	s ou valeur de la demi-étendue a	Incertitude $u_i(x)$
x			source 1				$u_1(x)$
			source 2				$u_2(x)$
			totale	composition			$u_c(x)$

9. Incertitude Composée : $u_c(x)$

Mesure influencées par plusieurs sources d'erreurs. ⇨ On évalue l'incertitude $u_i(x)$ pour chacune des sources

Incertitude globale composée : $u_c(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x)}$

Exemple : $u^2(x) = u_{rép}^2(x) + u_{lec}^2(x) + u_{pré}^2(x)$

- $u_{rép}(x)$ *: incertitude type lié à la prise de mesure successive dans des conditions de répétabilité*
- $u_{lec}(x)$ *: incertitude type liée à la lecture sur l'instrument (affichage, graduation …)*
- $u_{pré}(x)$ *: incertitude type liée à la tolérance, précision, classe de l'appareil de mesure*

10. Propagation des incertitudes

Cas d'un mesurage indirect.
Mesurande y issu de plusieurs paramètres liés par une relation mathématique du type $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Loi de propagation : $u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}.u(x_i)\right)^2}$

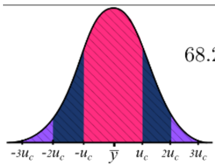
Cas usuels

- $y = x_1 + x_2$ ou $y = x_1 - x_2$ ⇒ $u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$
- $y = k.x$ ⇒ $u_c(y) = k.u(x)$
- $y = x_1.x_2$ ou $y = \frac{x_1}{x_2}$ ⇒ $\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$
- $y = k.x^n$ ou $y = k.x^{-n}$ ⇒ $\frac{u_c(y)}{y} = |n|\frac{u(x)}{x}$
- $y = k.x_1^{\alpha}.x_2^{\beta}.x_3^{\gamma}$ ⇒ $\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\alpha^2\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$

11. Expression du résultat d'une mesure

$\mathbf{X = (\ x_{moy} \pm U\ )}$ **unité SI** , (niveau de confiance)

$U = k.u_c(x)$ Si pas spécifié on suppose k=2 par défaut

Loi	Niveau de confiance ($U = k \times u_c$) $k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
	68.27%	95.45%	99.73%	99.99%

k : facteur d'élargissement. Dépend du niveau de confiance demandé :

- Pour un nombre de mesures N ≥ 30 et un niveau de confiance de 95%, on prend k = 2.
- Par contre pour N < 30 la valeur de k doit être majoré pour prendre en compte le manque de fiabilité dû au faible nombre de mesures.
  On prend alors la valeur de cas issue du tableau de la loi de Student

N	90%	95%	99%
2	6.31	12.7	63.7
4	2.35	3.18	5.84
6	2.02	2.57	4.03
8	1.89	2.37	3.5
10	1.83	2.26	3.25
12	1.79	2.2	3.11
20	1.73	2.09	2.86

Arrondi de l'incertitude-type

- 2 chiffres significatifs : si le premier chiffre non nul de $u(x)$ est 1,2 ou 3
- 1 chiffres significatif : si le premier chiffre non nul de $u(x)$ est ≥ 4

0,0128 -> 0,013
1er chiffre non nul = 1 2 chiffres significatifs

0,0428 -> 0,04
1er chiffre non nul = 4 1 chiffres significatifs

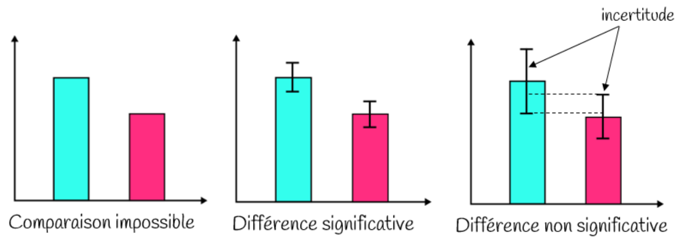
Valeur numérique annoncée

- Un nombre de chiffres significatifs cohérent avec l'incertitude-type
- Même unités pour la valeur et l'incertitude

1 – On note d'abord la valeur de x avec beaucoup de chiffres significatifs, car c'est cette valeur non arrondie qu'il faudra réutiliser pour faire des calculs qui font intervenir *x*.
2 – On note l'incertitude U avec 1 (ou 2) chiffre significatif en utilisant les règles d'arrondis. (Il est inutile d'être plus précis car U est une estimation de l'erreur, elle-même entachée d'incertitude.)
3 – On écrit x avec autant de chiffres après la virgule que U. (Et on écrit *x* et U avec la même puissance de 10.)

12. Comparaison de résultats

Seule la prise en compte des incertitudes permet une comparaison



Ecart relatif : comparaison à une valeur de référence : $E = \left| \frac{x_{réf} - x}{x_{réf}} \right|$

Comparaison entre valeur expérimentale et valeur théorique : $Pourcentage\ d'erreur = \left| \frac{valeur\ exp - valeur\ théo}{valeur\ théo} \right|$ x 100%

Résumé

1. Identifier les incertitudes - Remplir le tableau des sources d'incertitude	Une source ⇨ Type A / Type B Plusieurs sources ⇨ Composition
2. Plusieurs sources d'incertitude pour chaque paramètre - Loi de composition des incertitudes	$u_c(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x)}$
3. Plusieurs paramètres ⇨ répercuter les incertitudes - Loi de propagation	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}.u(x_i)\right)^2}$
4. Ecrire correctement le résultat final - choisir k (par défaut k=2) - pour U : 1 chiffre significatif (voire 2) - pour x on enlève les chiffres noyés dans l'erreur avec les règles d'arrondissage	X = (x ± U) unité avec U = $k.u_c(x)$