

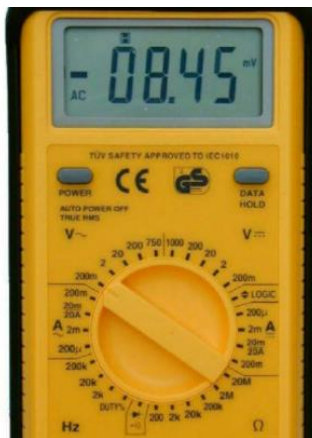
Ex1. Evaluer les incertitudes types

- 1) Pour vérifier le positionnement des plans on a effectué 50 mesures de la distance d dans des conditions de répétabilité. La valeur moyenne de ces 50 mesures est 44,0 mm et l'écart type est 0,1 mm
- 2) La sensibilité d'un capteur est de 1 V/mm, donnée par le constructeur avec une incertitude élargie de 3 %
- 3) Le diamètre interne d'un tube a été mesuré avec un pied à coulisse gradué au pas de 0,02 mm : $D = 13,90$ mm

On remplira pour chaque cas le tableau suivant :

Mesurande ou paramètre étudié	Valeur moyenne	unité	Source d'incertitude	Méthode d'évaluation	Loi choisie	S ou a	Incrtitude type $u(x)$
d	44,0	mm	Répétabilité	Type A	Normale	$s = 0,1$	$u(d) = s/\sqrt{50} = 0,1/\sqrt{50} = 0,0577 \rightarrow u(d) = 0,058$ mm
S	1	V/mm	Incrtitude constructeur	Type B			U incrtitude élargie = $0,03 \times 1$ V/mm $u(S) = U/2$ (car par défaut $k = 2$) $\rightarrow u(S) = 0,03/2 = 0,015$ V/mm
D	13,9	mm	Lecture Instrument gradué	Type B	Uniforme	$2a = 0,02$ mm	$u(D) = a/\sqrt{3} = 0,01/\sqrt{3} = 0,0058$ mm

(Remarque : On arrondira sur U lors de la présentation finale de la mesure)

Ex2. Multimètre 1 mesures

Doc technique :

TENSION AC 200 mV, 2, 20, 200 V $\pm 0,5\% + 10d$ 10-100 μ V-1-10 mV
 750 V (< 1 KHz) $\pm 0,7\% + 10d$ 100 mV
 750 V (> 1 KHz < 5 KHz) $\pm 2,0\% + 10d$ 100 mV
 Protection: 500 V AC rms sur calibres 200 mV - 200 V
 750 V AC rms sur calibre 750 V
 Impédance d'entrée: 10 M Ω , moins de 50 pF
 Type de conversion: TRMS

Exprimer le résultat de la mesure obtenue avec ce multimètre.

La doc technique indique la précision du multimètre (c.a.d l'intervalle dans lequel varient probablement les valeurs)
 Pour le calibre 200 mV : $2a = (m\% \times \text{lecture} + d \text{ dernier digit affiché}) = 0,5\% \times \text{lecture} + 10 d$
 Ici le dernier digit (c.a.d la plus petite variation perceptible à l'affichage) est $d = 0,01$ V

Mesurande ou paramètre étudié	Valeur moyenne	unité	Source d'incertitude	Méthode d'évaluation	Loi choisie	S ou a	Incrtitude type $u(x)$
V	-8,45	mV	Lecture Affichage numérique	Type A	Uniforme	$2a = (0,5/100) \times 8,45 + 10 \times 0,01 = 0,1422$ mV	$u(v) = a/\sqrt{3} = (0,1422/2)/\sqrt{3} = 0,0411$ mV

$U(v) = 2 \cdot u(v)$

(en prenant un facteur d'élargissement $k = 2$ par convention)

$$U(v) = 0,0821 = 0,08 \text{ mV}$$

(max 2 chiffres significatifs pour U(v) mais on arrondi au dixième pour rester cohérent avec les nombre de chiffre après la virgule)

$$V = (-8,45 \pm 0,08) \text{ mV}$$

Remarque : Ici l'incertitude est plus grande que la variation du dernier chiffre affiché sur l'appareil.

Ex3. Multimètre plusieurs mesures

On a réalisé 30 mesures avec le multimètre de l'exercice 2.

Mesure #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Tension (mV)	6,89	6,9	6,89	6,88	6,89	6,9	6,89	6,9	6,87	6,88	6,89	6,89	6,9	6,89	6,9

Mesure #	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Tension (mV)	6,89	6,89	6,89	6,88	6,89	6,9	6,88	6,89	6,9	6,89	6,88	6,89	6,9	6,88	6,89

La valeur moyenne des mesures est = 6,89 mV

Exprimer le résultat obtenu avec ce multimètre.

La mesure est influencée par 2 sources d'erreurs → On évalue l'incertitude $u(v)$ pour chacune des sources :

- $u_{\text{répétabilité}}(v)$: incertitude de répétabilité → Type A
- $u_{\text{lecture}}(v)$: incertitude de lecture → Type B

Mesurande ou paramètre étudié	Valeur moyenne	unité	Source d'incertitude	Méthode d'évaluation	Loi choisie	S ou a	Incrtitude type $u(x)$
V	6,89	mV	Répétabilité	Type A	Normale	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ $s = 0,00802 \text{ V}$	$u_{\text{répétabilité}}(v) = \frac{s}{\sqrt{N}}$ $= \frac{0,00802}{\sqrt{30}}$ $= 0,00146 \text{ mV}$
V	6,89	mV	Afficheur digital	Type B	Uniforme	$2a = (0,5/100) \times 6,89 + 10 \times 0,01 = 0,1345 \text{ mV}$	$u_{\text{lecture}}(v) = 0,0388 \text{ mV}$ Même méthode que dans l' Exercice 2

$$u(v) = \sqrt{u_{\text{répétabilité}}^2(v) + u_{\text{lecture}}^2(v)} = \sqrt{0,00146^2 + 0,0388^2} = 0,0388 \text{ mV}$$

$$U(v) = 2 \cdot u(v)$$

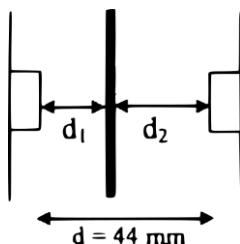
(On prenant un facteur d'élargissement $k = 2$ par convention)

$$U(v) = 0,0777 = 0,08 \text{ mV}$$

(arrondi +1 chiffre significatifs pour U(v) car premier chiffre non nul > 4)

$$V = (6,89 \pm 0,08) \text{ mV}$$

Ex4. Incertitudes composées



Principe de la mesure

Un système de mesure d'épaisseur comporte deux capteurs éloignés d'une distance d.

Chaque capteur i ($i = 1$ et $i = 2$) délivre une tension v_i , proportionnelle à l'écart entre la distance à mesurer et la distance de référence (22,0 mm), soit $v_i = s (d_i - 22,0)$ avec d, en mm, et s sensibilité du capteur exprimée en V/mn.

Données numériques

Pour vérifier le positionnement des plans, on a effectué 50 mesures de la distance d dans des conditions de répétabilité. La valeur moyenne de ces 50 mesures est 44,0 mm et l'écart type sur les mesures est 0,1 mm. La sensibilité des capteurs est de 1 V/mm, donnée par le constructeur avec une incertitude de 3 %. (on supposera $k = 2$). Le voltmètre utilisé pour lire les mesures porte l'indication suivante pour le calibre utilisé : « précision 1 mV ». On a mesuré $v_1 = -300$ mV et $v_2 = -100$ mV.

Calcul des grandeurs mesurées

- Exprimer l'épaisseur e en fonction de d , d_1 et d_2 Exprimer d_i en fonction de s et v_i ,
- Calculer d_1 , d_2 et e .

Sources et calculs d'incertitudes

- Faire la liste des sources d'incertitudes, et calculer les incertitudes types pour chaque grandeur concernée. On veillera à bien préciser les unités.

Mesurande ou paramètre étudié	Valeur moyenne	Unité	Source d'incertitude	Méthode d'évaluation : type A / type B	Loi choisie : normale, uniforme, ...?	S OU valeur de la demi-étendue a	Incertitude $u(x)$
x							

Propagation des incertitudes

- Exprimer l'incertitude sur d_i en fonction de celles sur s et v_i . Calculer $u(d_1)$ et $u(d_2)$.
- Exprimer l'incertitude sur e en fonction des incertitudes sur d , d_1 et d_2 .
- Calculer $u(e)$

Expression du résultat

- Exprimer le résultat de la mesure à l'aide de l'incertitude élargie.

$$1) \quad e = d - (d_1 + d_2)$$

$$d_i = \frac{v_i}{s} + 22,0$$

$$2) \quad d_1 = \frac{-300}{1000} + 22,0 = 21,7 \text{ mm} \quad \Delta s = 1\text{V/mm} = 1000\text{mV/mm}$$

$$d_2 = \frac{-100}{1000} + 22,0 = 21,9 \text{ mm}$$

$$e = 44 - (21,7 + 21,9) = 0,4 \text{ mm}$$

Mesurande ou paramètre étudié	Valeur moyenne	unité	Source d'incertitude	Méthode d'évaluation	Loi choisie	S ou a	Incertitude type $u(x)$
d	44,0	mm	Répétabilité	Type A	Normale	On donne déjà s	$u(d) = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0,1}{\sqrt{50}} = 0.0141 \text{ mm}$
s	1000	mV/mm Δ	Incertitude constructeur	Type B	--	On donne déjà incertitude élargie (3%)	$U = 1000 \times 3\% \text{ mV/mm}$ $u(s) = U/k \quad (k=2)$ $u(s) = 30/2 = 15 \text{ mV/mm}$
V_1	-300	mV	Afficheur digital	Type B	Uniforme	Précision 1mV d'où $2a = 1 \text{ mV}$	$u(v_1) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0.2887 \text{ mV}$
V_2	-200	mV	Afficheur digital	Type B	Uniforme	Précision 1mV d'où $2a = 1 \text{ mV}$	$u(v_2) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0.2887 \text{ mV}$

Δ On arrondi pas maintenant les incertitudes car elles se propagent. On arrondira seulement au moment de la présentation de la mesure finale.

d_i est le résultat d'une opération impliquant 2 paramètres, V_i et s , sur lesquels il y a une incertitude.

→ On utilise donc la loi de propagation des incertitudes : $u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right)^2}$

$$u^2(di) = \left(\frac{\partial di}{\partial v_i} \right)^2 u^2(v_i) + \left(\frac{\partial di}{\partial s} \right)^2 u^2(s) \quad \text{avec : } \frac{\partial di}{\partial v_i} = \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial di}{\partial s} = -\frac{v_i}{s^2}$$

$$u^2(di) = \left(\frac{1}{s} \right)^2 \times u^2(v_i) + \left(-\frac{v_i}{s^2} \right)^2 \times u^2(s)$$

$$u^2(d1) = \left(\frac{1}{1000} \right)^2 \times \left(\frac{0.5}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(-\frac{300}{1000^2} \right)^2 \times 15^2 = 2,0333e-05$$

$$u^2(d2) = \left(\frac{1}{1000} \right)^2 \times \left(\frac{0.5}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{-100}{1000^2} \right)^2 \times 15^2 = 2,3333e-06$$

$$u(d_1) = 0,0045 \text{ mm}$$

$$u(d_2) = 0,0015 \text{ mm}$$

6) e est le résultat d'une opération impliquant 3 paramètres, d et d₁ et d₂, sur lesquels il y a une incertitude.

→ On utilise donc la loi de propagation des incertitudes : $u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right)^2}$

$$u^2(e) = \left(\frac{\partial e}{\partial d} \right)^2 u^2(d) + \left(\frac{\partial e}{\partial d1} \right)^2 u^2(d1) + \left(\frac{\partial e}{\partial d2} \right)^2 u^2(d2)$$

$$u^2(e) = u^2(d) + u^2(d1) + u^2(d2)$$

$$u^2(e) = 0,0141^2 + 0,0045^2 + 0,0015^2$$

$$u(e) = \sqrt{0,0141^2 + 0,0045^2 + 0,0015^2} = 0.0149 \text{ mm}$$

7) $e = (0,40 \pm 0,03) \text{ mm}$ (par défaut $k=2 \rightarrow U = 2 \times 0.0149 = 0.0298 \rightarrow$ arrondi à 0.03)

(Remarque : également possible $e = (0,400 \pm 0,030) \text{ mm}$)