# Signal Processing

Enzo Scossa-Romano

24 Juli 2014

## Contents



# 1 DTFT

la discret time fourier trasform é l'equivalente della DFT per sequenze infinite. Solitamente viene definita prima della DFT ed é data da

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \exp^{-i n \omega}, \qquad \omega \in -\pi, \pi \tag{1}$$

Le frequenze sono continue. La relazione tra DFT e DTFT la si può osservare facendo la DTFT di un segnale moltiplicato con una finestra rettangolare.

- eigenvectors of linear convolution
- $2\pi$ periodic

## 2 DFT/FFT: dalla matematica alla pratica

Sequenza di $N$ elementi $x = x(n)_{n=0,...,N-1}$. La DFT é:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp^{-i\,n\,k\frac{2\pi}{N}}, \qquad k = 0..N-1 \tag{2}$$

FFT é il nome dell'algoritmo numerico per calcolare la DFT.

- Sequenza $X$ ha nuovamente $N$ Elementi complessi. $X(k) = |X(k)| \cdot \exp i\phi$ dove $\phi$ rappresenta la fase. La fase é determinata fino a modulo $2\pi$.
- Con il prodotto scalare $< x, y >= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot y(n)^*$ e la Base ortogonale $y_k(n) = e^{i\,n\,k\frac{2\pi}{N}}$ come un Cambiamento di base.
- per la base $y_k$ vale: $y_k = y_{k+lN}$ e $y_{N-k} = y_{-k} = y_k^*$. Il modulo é $|y_k| = N$.
  Una base equivalente é quindi rappresentata da $\{(y_k, y_k^*)\}$ per $k = 0..(N)/2$
- $X(k)$ é la proiezione di $x$ su $y_k$.
- se $x \in \mathcal{R}$ Vale $X(k) = X(N-k)^*$ e $X(N-k) = |X(k)| \cdot \exp i(2\pi - \phi)$
- Nella nuova base il prodotto scalare diventa $< X, Y >= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y(k) \cdot Y(k)^*$. Ne segue Parseval.
- Ogni base $y_k$ é caratterizzata dalla Frequenza

  $$f = |k|/N \in \{0, 1/N, 2/N, ..., (N-1)/N\} \tag{3}$$

  Dalle proprietà sopra elencate si ottengono le seguenti interpretazioni: le frequenze rilevanti sono solamente $N/2$ ($(N-1)/2$ se $N$ dispari) con frequenza massima uguale a $\frac{1}{2}$. Le frequenze $k/N$ e $(k+lN)/N$ sono le stesse. Le basi $y_k$, $y_{N-k}$ o $y_{-k}$ hanno la stessa frequenza.
- La DFT per una sequenza finita ha frequenze discrete e finite. Le frequenze sono determinate dalla discretizzazione del tempo (limite superiore) e date dalla lunghezza del segnale(risoluzione).
- la DFT di un vettore a N dimensioni può essere calcolata per qualsiasi frequenza $\omega_k$. Questo procedimento corrisponde a 0-padding

### 2.1 Relazione tra DTFT e DFT

nella DFT $x(n)$ ha un numero di elementi finiti. Per paragonare le due sequenze il segnale deve essere esteso ad un numero infinito di elementi. Questo può essere fatto in due modi:

1. 0-Padding denominata con $\hat{x}$
2. circular extension. $\tilde{x}(n) = x(n\, mod_N)$. Il segnale esteso all infinito é rappresebtabile da $\frac{1}{N} \sum_k^{N-1} X(k) \exp^{i\omega_k n}$. Ogni segnale (infinito) periodico (periodo finito di lunghezza N) é rappresentabile in questo modo.

The DFT computes the DTFT of a finite segment of an infinite-length signal at a finite number of frequencies; it is thus the operational tool for computing the DTFT, which cannot be computed in full.

**caso 1, DFT approssima la DTFT di $\tilde{x}$**

- la DFT equivale alla DTFT dello spezzone zero padded campionata alle frequenze $\omega_k$
- se nella DFT si utilizza uno 0-padding si aumentala risoluzione della campionatura. Se il segnale infinito é realmente 0 al di furi di $x(n)$ tramite zero padding si aumentano le informazioni ricavate con la DFT.
- Aumentando la lunghezza $T$ del segnale si aumenta la risoluzione della frequenza nella sua DTFT. Analogamente aumentando l'intervallo delle frequenze conosciute si aumenta la risoluzione temporale del segnale.
- la ricostruzione del segnale con la DFT sarà periodico(se esteso all infinito)

**caso 2: DFT equivalente alla DTFT di $\tilde{x}$**

- In questo caso la DTFT é una sommatoria di funzioni delta. Al massimo in $N$ punti é diversa da zero. in quei punti diverge.
- la relazione tra DFT e DTFT é

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k}^{N-1} \frac{2\pi}{N} X(k) \cdot \delta(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{N}) \tag{4}$$

**caso3: relazione tra DTFT di $\tilde{x}$ e $x$ 0-padded**

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n) \exp^{-i\omega n} && (5)\\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(lN+n) \exp^{-i\omega(lN+n)} && (6)\\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp^{-i\omega n} \exp^{-i\omega Nl} && (7)\\
&= \hat{X}(\omega) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp^{-i\omega Nl} && (8)
\end{aligned}$$

$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp^{-i\omega N l}$ é uguale a 0 se $\omega N = 2\pi k$ altrimenti a

Spesso il segnale reale $x(n)$ é infinito e non periodico. **Si é interessati alla DTFT del segnale ma questo non si può calcolare**. Quello che viene fatto é prendere uno spezzone del segnale infinito di lunghezza N $x_N(n)$. Perndere lo spezzone equivale a moltiplicare il segnale con una finestra; il segnale viene trasformato in un segnale infinito $\tilde{x}_N(n)$ 0-padded. Con la DFT si può ottenere un'approssimazione della DTFT del segnale $\tilde{x}_N(n)$ in n punti. Per ricollegarsi alla DTFT del segnale originale é necessario capire la relazione tra le DTFT dei due segnali infiniti $x(n)$ e $\tilde{x}_N(n)$ .

## 2.2 Dalla sequenza matematica al segnale reale

Fino ad adesso tutte le discussioni su FFT sono matematiche. Per passare ad un segnale fisico bisogna considerare la durata totale $T$ in secondi della sequenza $x$ o in modo equivalente la sampling rate $Fs$ oppure ancora il lasso di tempo $\Delta t$ tra due elementi della sequenza. La relazione tra queste grandezze é:

$$Fs = \frac{N}{T} = \frac{1}{\Delta t}\,. \tag{9}$$

Le considerazioni Matematiche sono come se la durata fosse $T = N$ , $Fs = 1$ e $\Delta t = 1$
La frequenza corrispondente a $k$ si ottiene moltiplicando per $Fs$

$$f_k = \frac{|k| \cdot Fs}{N} = \frac{|k|}{N \cdot \Delta t} = \frac{|k|}{T} \tag{10}$$

le frequenze sono spaziate equidistantemente con distanza $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T}$ la frequenza max $f_{k=N/2} = \frac{Fs}{2}$ ha periodo $\frac{2T}{N} = \frac{2}{Fs}$, la minima con $f_1 = \Delta f = \frac{1}{T}$ ha periodo $T$. Da notare che $\Delta f$ dipende solo da $T$.

# 3 Convoluzione

la convoluzione é un operazione ($C^n \times C^n \mapsto C^n$) tra due sequenze. Differenziamo due tipi di convoluzioni

## 3.1 convoluzione lineare per sequenze infinite

definita nel seguente modo

$$(h * x)(n) = \sum_s h(s) \cdot x(n-s) \tag{11}$$

la somma é infinita da $-\inf$ fino a $+\infty$.
La convoluzione é bilineare e simmetrica (rappresentabile con un tensore $T \in \Lambda^1_2$.

- se le sequenze sono finite possono essere 0-padded
- il risultato é sempre definito per sequenze infinite
- se una delle due sequenze é periodica il risultato sarà periodico
- il tensore $T$ nella base $\delta_i$ é rappresentato da $T^n_{i,j} = \delta_{n-(i+j)}$
- La si può comporre con una inversione del tempo R e un shift di n elementi $S(n)$.
  Inversione del tempo $y = Rx$ con $y(n) = x(-n) = R^n_j x(j) = \delta^n_{j+n} x(j)$. segue che R nelle base standard é rappresentato da $\delta^n_{j+n}$
  shift del tempo $y = S_l x$ con $y(n) = x(n-l) = (S_l)^n_j x(j) = \delta^n_{j-(n-l)} x(j)$. Segue che $S_l$ nelle base standard é rappresentato da $\delta^n_{j-(n-l)}$
- nella base $v_\omega(n) = \exp^{-i\omega \cdot n}$ otteniamo

  $$T(v_\omega, v_{\omega'}) = \sum_k \exp^{-i\omega \cdot k} \exp^{-i\omega' \cdot (n-k)} = \sum_k \exp^{-i(\omega-\omega')\cdot k} \exp^{-i\omega' \cdot n} = v_\omega \tag{12}$$

  se $\omega = \omega'$ altrimenti 0.

- nella base di furrier DTFT (infinita) questa operazione é diagonalizzata, vale quindi:

$$DTF[(h * x)(n)](k) = H(k) \cdot X(k) \tag{13}$$

Da notare che se si definisce operazionalmente la stessa operazione nella base di fourier si ottiene la stessa proprietà nella base 'euclidea'.

### 3.2 convoluzione ciclica per sequenze finite e infinite periodiche

definita nel seguente modo per sequenze finite di lunghezza N

$$(h \circledast_N x)(n) = \sum_{s=0}^{N-1} h(s) \cdot x(n-s)_{mod_N} \tag{14}$$

La sommatoria in questo caso é finita. Si possono calcolare infiniti elementi $n$, ma in ogni caso il risultato ha periodo N.

La domanda fondamentale consiste nel determinare quando le due definizioni sono equivalenti.

- nel caso $x(n)$ sia N-periodico sostituendo la sequenza $h$ (infinita) con $h_N$ (periodica)

$$h_N(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h(n+sN) \tag{15}$$

  si ottiene $(h_N \circledast_N x)(n) = (h * x)(n)$. Ricordare che il risultato é periodico in entrambi i casi.

- se $h$ é diverso da zero per soli finiti elementi, schegliendo N sufficientemente grande si ottiene $h_N = h$.
- nel caso che $h$ e $x$ siano finiti di lunghezza $M$ e $L$ abbiamo che la convoluzione lineare delle sequenze 0-padded é uguale alla convoluzione ciclica nel caso in cui $N = M + L - 1$
- nella base di furrier DFT/FFT(infinita) questa operazione é diagonalizzata
- si sceglie la sequenza più lunga (M). si pone $N = 2M$. si 0-pad entrabi le sequenze alla lunghezza $N$. la convoluzione 0 padded é ugusale alla convoluzione lineare(con sequenze 0-padded) per gli indici $n \in 0..N$. lineare é altrimenti 0, la circolare periodica.

## 4 Windowing

Windowing é un procedimento per ottenere da sequenze infinite generiche sequenze Infinite con solo $N$ elementi dieversi da 0. La sequenza si può quindi trattare analogamente come sequenza infinita zero padded che a sua volta viene poi trattata con FFT che calcola i valori equivalenti ad una sequenza finita periodicizzata.
il procedimento é il seguente:

$$x_w(n) = w(n) \cdot x(n) \tag{16}$$

vale

$$X_w(\omega) = (W * X)(\omega) \tag{17}$$

### 4.1 Energia

## 5 Zero padding

Zero padding una sequenza significa aggiungere 0 alla fine di questultima. calcolando la DTDT di una sequenza zero padded si ottengono le seguenti proprietà

- aggiungere zeri all'inizio piuttosto che alla fine ha come unico effetto nella DTFT del segnale uno shift nella fase
- ...

## 6 Energia e Spettri

Per gli spettri ci sono molte definizioni e alcune differenze. Bisogna differenziare tra sequenze discrete finite, discrete infinite, continue finite e continue infinite

- nel caso di sequenze discrete infinite (DTFT) e continue (FT) si parla di densità per lo spettro
- nel caso di sequenze discrete finite (DFT) e continue finite/ periodiche(FT) lo spettro é sotto forma di serie
- casi con spettri discreti possono essere trasformati in casi continui con appropriate estensioni.
- quando si parla di autospectrum si intende la DFT FT o DTFT della correlazione
- quando si parla di powerspectrum si l'onesided autospectrum
- quando si parla di (amplitude) spectrum si intende la DFT FT o DTFT della sequenza
- quando si parla di Energispectrum si intende la DFT FT o DTFT della correlazione

### 6.1 Energia matematica

L'energia di una sequenza lunga $N$ punti o infinita é definita come:

$$E_m[x] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot x(n)^* = |x|^2 \tag{18}$$

Con parseval vale

- *sequenza infinita; DTFT*

$$E[x]_m = < x, x > = < X, X > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\,\omega \tag{19}$$

- *sequenzafinita;DFT*

$$E[x]_m = < x, x > = \frac{1}{N} < X, X > = \frac{1}{N} \sum_k |X(k)|^2 \tag{20}$$

## 6.2 Deterministic correlation and autocorrelation per sequenze infinite

la correlazione deterministica tra due sequenze(infinite) é definita come

$$(x \star y)(n) = \sum_k x(k)y^*(k-n) \qquad \text{shift e prodotto scalare} \tag{21}$$

La autocorrelazione di una sequenza $x$

$$a_x(n) = \sum_k x(k)x^*(k-n) \tag{22}$$

che si può scrivere come convoluzione tra $x(n)$ e $x^*(-n)$. da notare che vale $a_x(0) = E[x]_m$. La DTFT della autocorrelazione é reale e simmetrica (anche per sequenze complesse) e definisce in modo generale il concetto di **Powerspectrumdensity**(one sided).

$$A_x(\omega) = |X(\omega)|^2 \;= \frac{1}{2}S(\omega), . \tag{23}$$

la inversa DTFT per tempo $t = 0$ da come risultato, equivalentemente a parseval

$$E[x]_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} S(\omega)\, d\omega, . \tag{24}$$

## 6.3 Autospectrum per sequenze finite o infinite (con N elementi non-0)

Analogamente a quanto fatto per le sequenze infinite , utilizzando le definizioni circolari si può definire energia **powerspectrum** per sequenze finite $x(n)$. Denotiamo $\hat{x}$ una qualunque estensione di $x$ finita (0-padded) di lunghezza $Nz$.

$$E[\hat{x}]_m = a_{\hat{x}}(0) \qquad \text{convoluzione circolare} \tag{25}$$

e

$$\frac{1}{2}S_{\tilde{x}}(\omega_k) = |X(k)|^2 = A_{\hat{x}}(k) \tag{26}$$

Definiamo $\tilde{x}(n)$ la sequenza infinita 0-padded di $x$. Valgono le seguenti proprietà:

L'uguaglianza

$$a_{\tilde{x}}(n) = a_{\hat{x}}(n)\text{lineare, circolare} \tag{27}$$

é valida se $Nz >= 2N - 1$. Per l'elemento $a(n = 0)$ l'uguaglianza é sempre valida (vedi anche prodotto scalare)

$$E[\tilde{x}]_m = a_{\tilde{x}}(0) = a_{\hat{x}}(0) = E[\hat{x}]_m \tag{28}$$

quindi anche (parseval o inverse DTFT)

$$E[\tilde{x}]_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} S_{\tilde{x}}(\omega)\, d\omega = E[\hat{x}]_m = \frac{1}{Nz}\sum_k^{Nz/2} S_{\hat{x}}(\omega_k)\, . \tag{29}$$

$$E[\tilde{x}]_m \overset{f=\frac{n_s\omega}{2\pi}}{=} \frac{1}{n_s}\int_0^{\frac{n_s}{2}} S_{\tilde{x}}(\omega_f)\, df = E[\hat{x}]_m = \frac{1}{n_s}\sum_k^{Nz/2} S_{\hat{x}}(\omega_k)\Delta f\, . \tag{30}$$

Per lo spettro vale che il caso finito é una campionatura del caso infinito se $Nz >= 2N-1$.(da dft e dtft definizione)

$$S_{\tilde{x}}(\omega_k) = S_{\hat{x}}(\omega_k) \tag{31}$$

## 6.4 Calcolo di $p^2_{rms}$, power spectral density (PSD), Energy spectral density (ESD)

partiamo da un segnale continuo $p(t)$ diverso da 0 per un intervallo finito $T$ (esempio un rumore di n secondi). $p^2_{rms}$ é definito nel seguente modo:

$$p^2_{rms} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p^2(t)dt \tag{32}$$

l'integrale si può estendere a infinito nel caso di una sequenza infinita. La discretizzazione del segnale porta al segnale finito $p(n)$ (senza windowing). L'integrale lo si può approssimare con

$$p^2_{rms} \approx \frac{1}{T}\sum_{n}^{Nz}\hat{p}^2(n)\Delta t = \frac{1}{T}E[\hat{p}]_m\Delta t = \frac{1}{T}a_{\hat{p}}(0)\Delta t = \frac{E[\hat{p}]_m}{N} = \frac{a_{\hat{p}}(0)}{N} \tag{33}$$

per qualsiasi estensione (finita/infinita) $\hat{p}(n)$. Attenzione $T$ rimane lo stesso per qualunque estensione $\hat{p}$. $prms$ é indipendente dallo time scaling (frequenza).

$$p^2_{rms} = \frac{\Delta t^2}{T}\int_0^{\frac{n_s}{2}} S_{\tilde{x}}(\omega_f)\, df = \frac{\Delta t^2}{T}\sum_{k}^{Nz/2} S_{\hat{x}}(\omega_k)\Delta f\,. \tag{34}$$

relazione tra prms e autocorrelation / energia autocorrelation autopowerspectrum
caso segnale con finiti elementi diversi da 0 tramite windowing($p^2_{rms}(t)$)