v1.2

Matlab-Übungen zu
Deterministische Signale und Systeme
3. Übung

1. Aufgabe

Die Fouriertransformation ist durch die Beziehung

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{1}$$

gegeben. Diese Gleichung lässt sich so nicht direkt in ein Matlab-Programm umsetzen, da eine unendliche Zeitachse auf eine unendliche Frequenzachse abgebildet wird und der Rechner naturgemäß seine Probleme mit solch großen Zahlen wie ∞ hat. Um dieses Problem zu umgehen, beschränken wir uns auf Funktionen endlicher Amplitude und endlicher zeitlicher Ausdehnung (also auf Impulse).

Ein weiteres Problem ist, dass die Funktionen nur durch eine endliche Anzahl von Stützstellen dargestellt werden können.

Eine implementierbare Form von Gleichung (1) hat also die Form

$$X(j\omega_n) = \int_{T_1}^{T_2} x(t)\, e^{-j\omega_n t}\, dt \tag{2}$$

wobei ω_n nun eine endliche Anzahl von Stützstellen $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_N$ repräsentiert.

1.1. Das Integral in Gleichung (2) muss in geeigneter Weise angenähert werden, da nur Funktionswerte von $x(t)$ an endlich vielen Stützstellen vorhanden sind. Matlab stellt hierfür u. a. die Funktion `trapz` bereit, die ein Integral mit der Trapezmethode löst. Zuerst werden wir uns die Funktionsweise dieser Funktion an einem Beispiel verdeutlichen.

(1.1.1) Stellen Sie die Zahlendarstellung von Matlab durch Eingabe von `format short eng` um. Wie das entsprechende Zahlenformat aufgebaut ist und welche weiteren Eingaben `format` verarbeitet, entnehmen Sie bitte den entsprechenden Hilfeseiten.

Erzeugen Sie nun einen Spaltenvektor `t`, der eine »Zeitachse« im Intervall $[0, 2\pi]$ in Schritten von $\pi/180$ enthält.

(1.1.2) Erzeugen Sie eine Matrix, die aus drei Spaltenvektoren besteht, die die Funktionen $\sin(t)$, e^{jt} und $1(t)$ enthält.

(1.1.3) Bestimmen Sie das Integral der drei Funktionen über den Zeitbereich in `t` mithilfe der Funktion `trapz`.

Schreiben Sie eine Funktion `ftrans`, die eine Zeitachse als Spaltenvektor, ein Signal als Zeilenvektor und eine Frequenzachse als Zeilenvektor übergeben bekommt und die Fouriertransformierte des Signals an den übergebenen Frequenzpunkten zurückliefert. Benutzen Sie zur Integration die Funktion `trapz`.

Legen Sie zunächst, um die Funktion testen zu können, einen Zeitachsenvektor `t` an, der das Intervall $[0, 1\,\mathrm{s})$ mit einer Auflösung von 0,01 s enthält (`t` muss ein Spaltenvektor sein). Erzeugen Sie weiterhin einen Zeilenvektor, der die entsprechenden Signalwerte eines Rechteckimpulses der Amplitude 1 und Länge 0,5 s in der Mitte des gegebenen Zeitbereichs enthält. Erzeugen Sie als drittes noch den Vektor für die Frequenzachse mit $-100 \leq \omega \leq 100$ und einer Auflösung von 0,1.

Plotten Sie Betrag und Phase der Transformierten des Rechteckimpulses. Entspricht das Ergebnis der erwarteten (analytischen) Lösung?

1.3. Wir haben aus Gründen der Implementierbarkeit festgelegt, dass wir uns auf ein Signal endlicher zeitlicher Ausdehnung beschränken. Ein zeitbegrenztes Signal ist im (Fourier-) Frequenzbereich aber immer unendlich breit, wodurch bei der Berechnung eines eingeschränkten Frequenzbereichs ein Fehler entsteht. Diese Energiedifferenz soll nun bestimmt werden.

Der Satz von Parseval besagt, dass die Energie eines Impulses im Zeit- und im Frequenzbereich gleich groß sein muss. Als Gleichung ausgedrückt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega. \tag{3}$$

Berechnen Sie die Abweichung der Energie des Impulses und seiner Transformierten aus Aufgabe 1.2. Welche Möglichkeiten haben Sie, diese Differenz zu veringern?

1.4. Überprüfen Sie die Lösungen aus den Aufgaben 1–3 der 3. DSS-Übung unter Verwendung Ihrer Transformationsfunktion.

2. Aufgabe

Der einfachste Ansatz zur numerischen Differentiation ist der Übergang »zurück« zum Differenzenquotienten. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, diesen zu bilden.

Der einfachste Ansatz ist das Bilden des Vorwärtsdifferenzenquotienten gemäß

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{4}$$

wobei Δx genau dem Abstand zwischen zwei Abtastpunkten entspricht.

Eine weitere Möglichkeit ist das Bilden des zentralen Differentenquotienten gemäß

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}. \tag{5}$$

2.1. Speichern Sie die Werte für $-5 \leq x \leq 5$ mit einem Abstand von 0,1 aufsteigend in einem Zeilenvektor `x`. Speichern Sie anschließend die Funktion $f(x) = x^2$ in einem Zeilenvektor `f`. Stellen Sie mit den gespeicherten Variablen die Funktion $f(x)$ graphisch dar.

2.2. Schreiben Sie die Funktion `vdiffquot`, die die Parameter `x` und `f` übergeben bekommt und als Rückgabewert die Ableitung von `f`, berechnet nach Gleichung 4, zurückgibt.

2.3. Schreiben Sie die Funktion `zdiffquot`, die auch die Parameter `x` und `f` übergeben bekommt und als Rückgabewert die Ableitung von `f`, berechnet nach Gleichung 5, zurückgibt.

2.4. Wenden Sie nacheinander die Funktionen `vdiffquot` und `zdiffquot` auf die Funktion $f(x)$ an und stellen Sie das jeweilige Ergebnis gemeinsam mit $f(x)$ in einem Diagramm dar.

2.5. Berechnen Sie den Betrag des Fehlerquadrates $e_v^2(x) = \left|\frac{d}{dx}f(x) - f_v'(x)\right|^2$, wobei $f_v'(x)$ die in 2.2 berechnete Ableitung meint. Berechnen Sie nach dem gleichen Schema auch den Fehler des zentralen Differentenquotienten gegenüber den tatsächlichen Werten. Stellen Sie die beiden Fehler logarithmisch dar, indem sie zum Plotten die Funktion `semilogy` verwenden. Haben Sie eine Idee worauf die Unterschiede in den beiden Fehlern beruhen?

3. Aufgabe

3.1. Schreiben Sie eine Funktion `fakultaet`, die die Fakultät einer übergebenen Zahl berechnet. Arbeiten Sie dabei mit dem Prinzip der Rekursion (`fakultaet` ruft sich selbst auf). Überprüfen Sie die korrekte Arbeitsweise der Funktion mit Werten von denen Sie auch von Hand noch die Fakultät berechnen können, etwa 3!, 4!, 5! und 6!.

3.2. Berechnen Sie mit dieser Funktion die Fakultät von 10, 23, 42, 99 und 101.