Angewandter Elektromagnetismus

5. Semester – Dr. Jasmin Smajic

Autoren: Luca Loop

https://github.com/Luca-ET/ElMag

V1.0.20241005

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Vektorfelder

1.1.1 Divergenz

$$\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

Die Divergenz beschreibt die **Quellendichte** eines Skalarfeldes.
Interpretiert man ein Vektorfeld als Strömungsfeld, so gibt die Divergenz für jede Stelle die Tendenz an, ob ein Teilchen in der Nähe zu diesem Punkt hin- bzw. von diesem Punkt wegfliesst.
Es sagt damit aus, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz grösser als Null) oder Senken (Divergenz kleiner als Null) hat.
Ist die Divergenz überall gleich Null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei.

1.1.2 Rotation

$$\nabla \times \vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{F}) = \det \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z = \begin{pmatrix} (F_3)_y - (F_2)_z \\ (F_1)_z - (F_3)_x \\ (F_2)_x - (F_1)_y \end{pmatrix}$$

Interpretiert man ein Vektorfeld als Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort an, wie schnell und um welche Achse ein mitschwimmender Körper rotieren würde.
Ein Vektorfeld, dessen Rotation überall null ist, nennt man wirbelfrei.

1.1.3 Vektorpotential

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
$$\varphi = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Das Vektorpotential $A(r)$ ist eine Hilfsgrösse um den Umgang mit der magnetischen Flussdichte $B(r)$ zu vereinfachen.

1.2 Vektorfeldoperatoren

1.2.1 Nalbla-Operator ∇

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

Der Nabla-Operator ∇ ist ein Operator, um Divergenz, Rotation oder den Gradient darzustellen.

1.2.2 Laplace-Operator Δ

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$\Delta \vec{F} = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\vec{F}))$$
$$\Delta \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F})$$

Der Laplace-Operator Δ ist ein Operator, um die Divergenz seines Gradienten zuzuordnen.

1.2.3 Rechenregeln

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ "Gradientenfeld ist wirbelfrei"
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$ "Feld der Rotation ist quellenfrei"
- $\operatorname{div}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div} \vec{v}$
- $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{v} + f \operatorname{rot} \vec{v}$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta\vec{v}$

1.2.4 Laplace-Operator Koordinatentransformation

- Laplace-Operator in kartesischen-Koordinaten

$$\Delta U(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Laplace-Operator in zylinder-Koordinaten

$$\Delta U(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

- Laplace-Operator in sphärischen-Koordinaten

$$\Delta U(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

1.3 Differentialrechnung

1.3.1 Ableitungsregeln

Potenzen:	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
Linearität:	$f(x) = c \cdot x^2$	$f'(x) = c \cdot 2x$
Summe:	$(u(x) + v(x) - w(x))'$	$u'(x) + v'(x) - w'(x)$
Konstanten:	$c = \text{konst}$	$c' = 0$

Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$ ➛ als Produkt schreiben

$u(x) \cdot \left(\frac{1)}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$

Kettenregel $g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

Umkehrfunktion $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

1.3.2 Ableitung elementarer Funktionen

f	D_f	f'	$D_{f'}$	f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\arcsin x$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\arccos x$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert x \rvert}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$A^{1)}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$A^{1)}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$B^{2)}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$B^{2)}$	$\coth x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$a^x, a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcosh} x$	$[1,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1,\infty)$
$\ln\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\operatorname{artanh} x$	$(-1,1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1,1)$
$\log_a x$ $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

1) $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.