Modulazione AM

Luca Di Liello
Università degli studi di Trento / Professore temporaneo presso IIS Galileo Galilei
luca.diliello@alumni.unitn.it
last edit: 23/11/2018 - 23:13

Abstract

Introduzione alla modulazione AM con segnali sinusoidali.

1 Introduzione

La modulazione AM (Amplitude Modulation) è una delle tecniche classiche per la trasmissione di un segnale analogico. Essa si basa, come indica il nome, sulla modifica dell'ampiezza di un segnale detto portante. La *portante* avrà quindi un ampiezza che varierà nel corso del tempo in funzione dell'ampiezza di un altro segnale, detto *modulante*. La modulazione AM richiede che la frequenza del segnale portante sia molto maggiore della frequenza del segnale modulante, altrimenti si avrebbero degli effetti indesiderati sulla qualità della trasmissione.

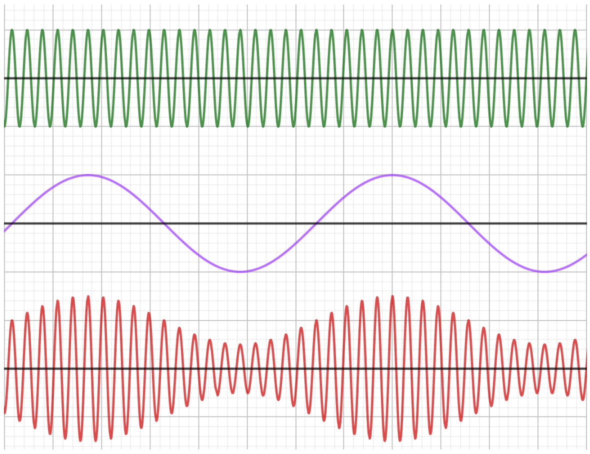

Figure 1: $\omega_p >> \omega_m$

2 Modulazione

Le figura 1 mostra il caso in cui le frequenze della portante e della modulante sono sufficientemente differenti per garantire una corretta modulazione. La figura 2 mostra invece cosa accade nel caso di frequenze troppo simili.

In questa semplice trattazione supporremo che il segnale modulante sia anch'esso un segnale sinusoidale, caratterizzato dall'equazione:

$$m(t) = V_m * cos(\omega_m t + \phi)$$

Come al solito, la pulsazione angolare sarà pari a:

$$\omega = 2\pi F$$

Dato che non lavoreremo con le fasi, è comodo porre $\phi = 0$. Il segnale portante è molto simile al segnale modulante:

$$p(t) = V_p * cos(\omega_p t)$$

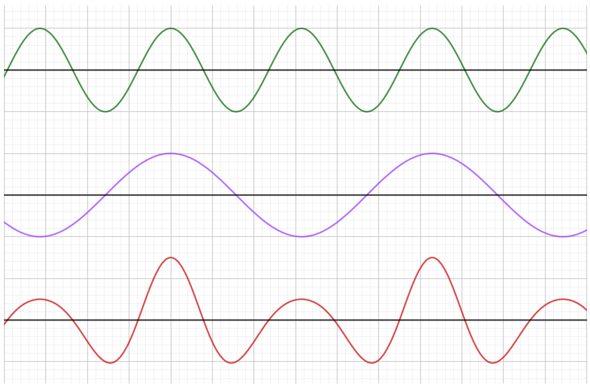

Figure 2: $\omega_p \approx \omega_m$

Ora la domanda che sorge spontanea è: come unire questi due segnali? La modifica dell'ampiezza del segnale portante non è così semplice come una somma o un prodotto dei segnali! L'equazione seguente mostra come viene creato il segnale modulato:

$$s(t) = (V_p + K_a * V_m * cos(\omega_m t))cos(\omega_p t)$$

Da questa formula si possono dedurre i passaggi necessari a modulare la portante:

- Si parte con $p(t)$ e $m(t)$, rispettivamente portante e modulante
- $m(t)$, che è $V_m * cos(\omega_m t)$, viene moltiplicato per una costante K_a
- $K_a * V_m * cos(\omega_m t)$ viene sommato con V_p
- Infine si moltiplica tutto per $cos(\omega_p t)$

I primi 3 passaggi hanno uno scopo ben preciso: il segnale modulante deve essere trasformato in un segnale completamente positivo. Ricordo che il coseno assume valori tra -1 e 1! La figura 3 mostra come avviene la modulazione se il segnale $m(t)$ viene prima ridotto in ampiezza e poi spostato verso l'alto di V_p. La figura 4 mostra invece cosa succede se si esegue direttamente la moltiplicazione dei due segnali senza preoccuparsi dei valori negativi che $m(t)$ può assumere. Perché tutta questa necessità di rendere il modulante completamente positivo? Semplicemente perché le oscillazione del coseno nella parte negativa andrebbero a creare perturbazioni non volute come quelle di figura 4, dove la "cresta" del segnale risultante non segue più l'andamento del segnale modulato.

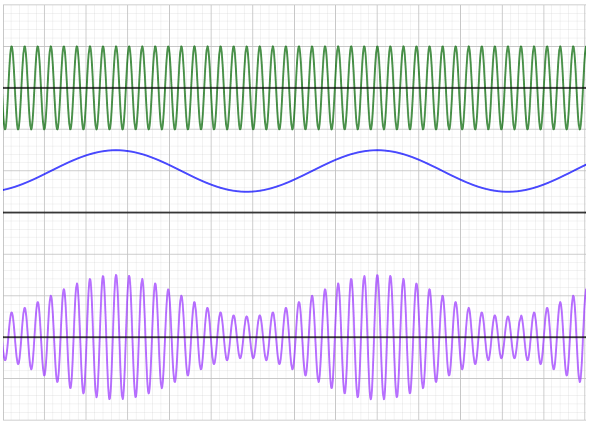

Figure 3: Modulazione rendendo $m(t)$ sempre positivo

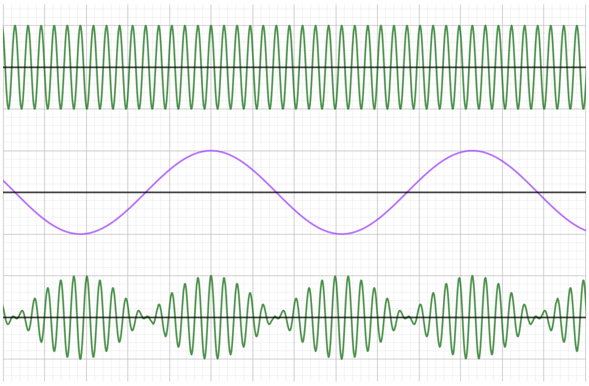

Figure 4: Modulazione senza modifica di $m(t)$

2.1 Parametri della modulazione

Ritornando al nostro segnale modulato:

$$s(t) = (V_p + K_a * V_m * cos(\omega_m t))cos(\omega_p t)$$

possiamo raccogliere V_p ed ottenere:

$$s(t) = V_p(1 + K_a * \frac{V_m}{V_p} * cos(\omega_m t))cos(\omega_p t)$$

Ora, ponendo un nuovo parametro $m_a = K_a * \frac{V_m}{V_p}$, infine otteniamo:

$$s(t) = V_p(1 + m_a * cos(\omega_m t))cos(\omega_p t)$$

Questo parametro m_a è detto coefficiente di modulazione e deve essere necessariamente:

$$m_a \leq 1$$

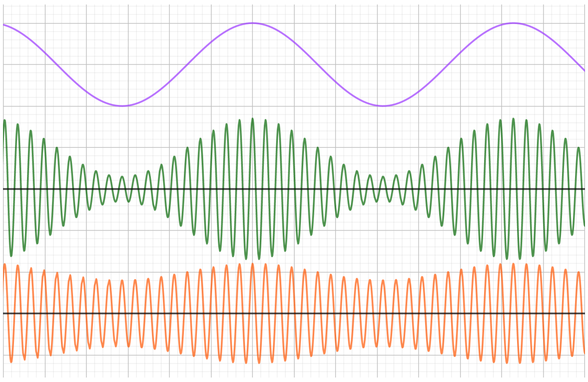

Figure 5: m_a grande (sopra) e m_a piccolo (sotto)

m_a è chiamato indice di modulazione. La figura 5 mostra un segnale modulato con diversi valori di m_a.

3 La serie di Fourier

Spesso in telecomunicazioni, per esigenze di progettazione, è comodo lavorare nel dominio delle frequenze. La serie di Fourier è una funzione matematica che permette di estrarre le componenti sinusoidali che formano un certo segnale $f(t)$. Il grafico tensione-frequenza che si sostituisce a quello solito tensione-tempo, mostra le varie componenti che vanno a formare un certo segnale. Data la complessità della trasformata di Fourier (che richiede la conoscenza degli integrali), verrà trattata solo tramite alcuni semplici esempi. L'unica formula di cui ci serviremo è quella generale per indicare un segnale come composizione di "armoniche" (sinusoidi) a diversa frequenza. La componente a frequenza più bassa è chiamata $fondamentale$ ed è quella con ampiezza maggiore. Se il segnale è periodico, il numero di componenti è limitato, altrimenti può tendere verso l'infinito. In generale vale la seguente formula, dove C_k sono le ampiezza (complesse) delle componenti:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k * \sin(w_k t)$$

Un buon esempio per capire come le sinusoidi possono comporre un segnale è utilizzare l'onda quadra. L'onda quadra, se analizzata con gli algoritmi di Fourier, risulta essere composta da tutte le armoniche a frequenza dispari $(1, 3, 5, ...)$ con ampiezze man mano decrescenti. La scomposizione dell'onda quadra è:

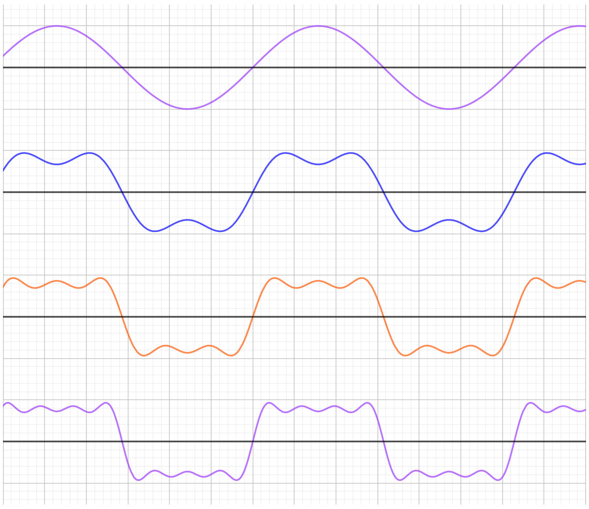

Figure 6: Approssimazione dell'onda quadra con 1,3,5,7 armoniche

$$q(t) = \sum_{f \in \{1,3,5,7,...\}} \frac{1}{f} * \sin(2\pi f t)$$

Nella figura 6 è mostrata l'approssimazione con man mano sempre più componenti.

4 Lo spettro della modulazione AM

Per analizzare il nostro segnale modulato:

$$s(t) = V_p(1 + m_a * cos(\omega_m t))cos(\omega_p t)$$

dobbiamo riprendere la seconda formula trigonometrica di Werner:

$$cos(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}[cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)]$$

Possiamo così eseguire i seguenti passaggi matematici:

$$s(t) = V_p(1 + m_a * cos(\omega_m t))cos(\omega_p t) =$$

$$V_p cos(\omega_p t) + V_p * m_a * cos(\omega_m t) * cos(\omega_p t) =$$

$$V_p cos(\omega_p t) + \frac{1}{2} V_p * m_a * cos((\omega_m - \omega_p)t) +$$

$$\frac{1}{2} V_p * m_a * cos((\omega_m + \omega_p)t)$$

Ora, come si può vedere in figura 7, il segnale risulta formato da 3 onde sinusoidali, rispettivamente a frequenza $f_p - f_m$, f_p e $f_p + f_m$. La banda di questo segnale è l'intervallo di frequenze da esso occupate: essendo $f_p - f_m$ la minore e $f_p + f_m$ la maggiore, la banda B è data da:

$$B = (f_p + f_m) - (f_p - f_m) = 2f_m$$

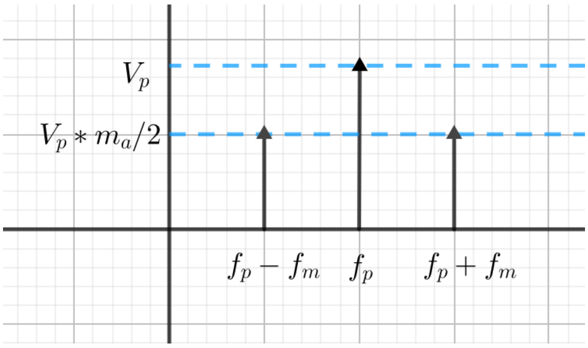

Figure 7: Spettro in frequenza di una modulazione AM

5 Potenza della modulazione AM

La potenza utilizzata dal segnale modulato è semplicemente la somma delle potenze delle sue 3 componenti. Come visto nel capitolo precedente, il segnale modulato è la somma pesata di 3 sinusoidi, rispettivamente alle frequenze $f_p - f_m$, f_p e $f_p + f_m$. La potenza totale sarà quindi data da:

$$P_{tot} = P_p + P_{bi} + P_{bs}$$

sapendo che con bi si intende la banda inferiore e con bs quella superiore. Ora, sapendo che la portante non contiene informazione e che le due bande laterali trasportano invece la stessa informazione, possiamo calcolare il rendimento η:

$$\eta = \frac{P_{bi}}{P_{tot}}$$

Cerchiamo ora di trovare una relazione tra i rendimento η e l'indice di modulazione m_a. Sappiamo che data una resistenza generica R, la potenza di un segnale sinusoidale applicato a R è

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R}, \quad V_{eff} = \frac{V_{picco}}{\sqrt{2}}$$

Quindi le potenze delle nostre 3 componenti saranno:

$$P_p = \frac{(\frac{V_p}{\sqrt{2}})^2}{R}$$

$$P_{bi} = \frac{(\frac{V_p * m_a}{2 * \sqrt{2}})^2}{R}$$

$$P_{bs} = \frac{(\frac{V_p * m_a}{2 * \sqrt{2}})^2}{R}$$

le quali, sostituite nella:

$$\eta = \frac{P_{bi}}{P_p + P_{bi} + P_{bs}}$$

e applicando un po' di semplificazioni, daranno luogo ad una semplice soluzione:

$$\eta = \frac{m_a^2}{2 * m_a^2 + 4}$$

Provando alcuni valori di m_a come 0.2, 0.5 e 1.0 si noterà che maggiore è l'indice di modulazione m_a, maggiore sarà il rendimento. Con il massimo m_a possibile, cioè 1.0, si ottiene un rendimento di $\frac{1}{6} = 16.6\%$.

Per incrementare ulteriormente il rendimento, sono necessari alcuni trucchetti::

- Trasmettere solo le bande laterali ed evitare di trasmettere la portante. Questa tecnica è chiamata modulazione AM DSB (double side band).

- Trasmettere solo una delle due bande laterali, portando così il rendimento ad un teorico 100%. Questa tecnica è chiamata modulazione AM SSB (single side band).

6 Demodulazione

La demodulazione o rivelazione è un'operazione che consente di estrarre, da un segnale modulato in ampiezza, l'informazione in bassa frequenza (il nostro segnale originario $m(t)$). Normalmente questa parte è realizzata tramite un circuito nonlineare, come un diodo seguito da un filtro passabasso, i quali insieme sono in grado di ricostruire con buona approssimazione il segnale originario.

Intuitivamente, il diodo si occupa di eliminare tutta la parte negativa del segnale modulato grazie alla sua proprietà di permettere il passaggio della corrente in un solo verso, mentre il filtro passabasso (composto da una resistenza ed un condensatore) "riempie" gli spazi tra le oscillazioni ad alta frequenza. Questo grazie alla capacità del condensatore di immagazzinare cariche sulla cresta dell'onda sinusoidale e di rilasciarle subito dopo, per riempire il buco tra la cresta attuale e quella successiva.