Relazione di laboratorio di Fisica - Anno Accademico: 2016/2017

Studente: **Barco Luca** - **234929**

Componenti del gruppo: **Luca Barco**, **Giulia Bartolotti**, **Antonio Barnaba**

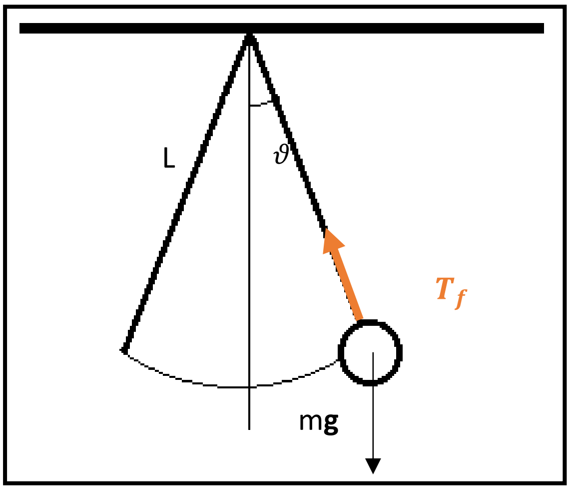
Esperienza: Misura dell'accelerazione di gravità g tramite pendolo semplice.

Scopo dell'esperienza:

- Applicare sperimentalmente il metodo delle misure ripetute e verificare che queste, in presenza di incertezze casuali, si distribuiscono secondo una distribuzione gaussiana
- Misurare indirettamente il valore dell'accelerazione di gravità g attraverso la misurazione diretta del periodo di oscillazione di un pendolo semplice

Richiami teorici

Un pendolo semplice è costituito da un punto materiale (in cui la massa m è concentrata in un solo punto) appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, la cui posizione di equilibrio statico è quella con il filo posto verticalmente. Se viene alterata questa posizione d'equilibrio (ovvero cambia l'angolo che il filo forma con la verticale) il punto inizia ad oscillare seguendo come traiettoria quella di un arco di circonferenza.



Le forze che agiscono sono:

- La Tensione del filo $\mathbf{T_f}$
- La forza peso $\mathbf{F_p}$=m$\mathbf{g}$

L'equazione del moto è:

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T_f} = m\boldsymbol{a}$$

da cui si ottiene che la legge oraria del moto è data dalla soluzione di un'equazione differenziale caratteristica di un moto armonico.

Il moto del punto materiale, perciò, risulta armonico, e in particolare se si considerano piccole oscillazioni (ovvero variazioni dell'angolo Θ≤ 10° circa) il moto è periodico, con legge oraria

$\boldsymbol{\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)}$, dove $\boldsymbol{\vartheta_0}$ e $\boldsymbol{\varphi}$ dipendono dalle condizioni iniziali del moto.

Il periodo di oscillazione **T è** pari a

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

da cui si ricava l'accelerazione di gravità **g** pari a

$$\boldsymbol{g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}}$$

e si osserva che la relazione tra T^2 e L (lunghezza del pendolo) è lineare, ed è data da

$$\boldsymbol{L = \frac{g}{4\pi^2} T^2}$$

la quale disegnata su un piano (L,T^2) è una retta di cui **g** è il coefficiente angolare.

Materiale utilizzato:

- Pendolo semplice:
    - *Supporto in alluminio*
    - *Filo*
    - *Sferetta metallica*

- Cronometro
- Calibro
- Metro a nastro

Sensibilità degli strumenti di misura

	Sensibilità
Cronometro	*0,01 secondi*
Calibro	*0,00002 metri*
Metro a nastro	*0,001 metri*

Determinazione del raggio della massa sferica

Diametro: d=(0.024 ± 0.00002)m

Raggio: r = $\frac{d}{2}$ = (0.0105 ± 0.00002)m

Esperienza A*:* Verifica distribuzione normale e determinazione di g

Effettuo N misure considerando L costante:

- Lunghezza filo: l = (0.475 ± 0.001)m
- Lunghezza pendolo: L= l+r = (0.486 ± 0.001)m
- Numero misure effettuate: N = 100

Il metodo delle misure ripetute prevede di esprimere la grandezza misurata come il valore medio dei dati registrati con un' incertezza pari alla deviazione standard sulla media di questi dati.

In questo caso il valore da ricavare è il tempo che il pendolo impiega per compiere una singola oscillazione (periodo). Chiamiamo con T_m il valore medio del periodo, con s_T la deviazione standard e con s_{Tm} la deviazione standard della media.

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} T_i}{N} \qquad S_T = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(T_i - T_m)^2} \qquad S_{T_m} = \frac{S_T}{\sqrt{N}}$$

Da cui ottengo:

Periodo medio T_m (s)	1,34846
Deviazione Standard S_T (s)	0,03025
Deviazione Standard sulla media s_{Tm} (s)	0,00302

Posso allora esprimere T_m come: $T_m = (1.348 \pm 0.003)s$

Dalla formula del periodo T ricavo l'accelerazione di gravità **g** e la calcolo in funzione dei dati che ho ricavato, sostituendo a T il valore T_m:

$$\boldsymbol{g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}} \qquad\qquad \boldsymbol{g = 10.541 \frac{m}{s^2}}$$

Per il calcolo dell'incertezza di **g**, considero la formula ottenuta dal periodo come una funzione a due variabili e calcolo la somma in quadratura delle derivate parziali della funzione moltiplicate per le incertezze delle variabili.

$$\boldsymbol{g(L,T) = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}}$$

$$\delta_g = \sqrt{\left(\frac{dg}{dL}\delta_L\right)^2 + \left(\frac{dg}{dT}\delta_T\right)^2} \quad \text{dove} \quad \frac{dg}{dL} = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \text{e} \quad \frac{dg}{dT} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3}$$

Sostituendo:

$$\delta_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\delta_L\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^3}\delta_T\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 {\delta_L}^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^3}\right)^2 {\delta_T}^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \frac{L^2}{L^2}{\delta_L}^2 + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^3}\right)^2 \frac{T^2}{T^2}{\delta_T}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 L}{T^2}\right)^2 \frac{{\delta_L}^2}{L^2} + \left(\frac{8\pi^2 L}{T^2}\right)^2 \frac{{\delta_T}^2}{T^2}} = \sqrt{g^2 \frac{{\delta_L}^2}{L^2} + (2g)^2 \frac{{\delta_T}^2}{T^2}} = \sqrt{g^2\left(\frac{{\delta_L}^2}{L^2} + 4\frac{{\delta_T}^2}{T^2}\right)} =$$

$$= |g|\sqrt{\frac{{\delta_L}^2}{L^2} + 4\frac{{\delta_T}^2}{T^2}}$$

In questo modo ottengo:

g (m/s²)	10,541
incertezza su g (m/s²)	0,048

E posso esprimere **g** come:

$$g = (10.54 \pm 0.05)\frac{m}{s^2}$$

Suddivisione dei dati in classi e confronto con la gaussiana

Suddivido i dati raccolti in 8 classi. Per calcolare lo <u>*step*</u> di classe prendo il valore massimo e minimo presenti nella colonna "Periodo" della tabella dei dati, li sottraggo e li divido per 8.

$$step = \frac{max_T - min_T}{8} = 0{,}024$$

Ottengo le seguenti classi, con le rispettive frequenze:

Classe	*Frequenza*
1,274	1
1,298	2
1,322	16
1,346	35
1,37	27
1,394	12
1,418	6
1,442	0
1,466	1

Per poter confrontare i dati raccolti con la curva gaussiana, è necessario riportare sullo stesso grafico entrambe le curve, approssimandole ad istogrammi.

La distribuzione normale (o gaussiana) è una distribuzione di probabilità che ha densità di probabilità pari a:

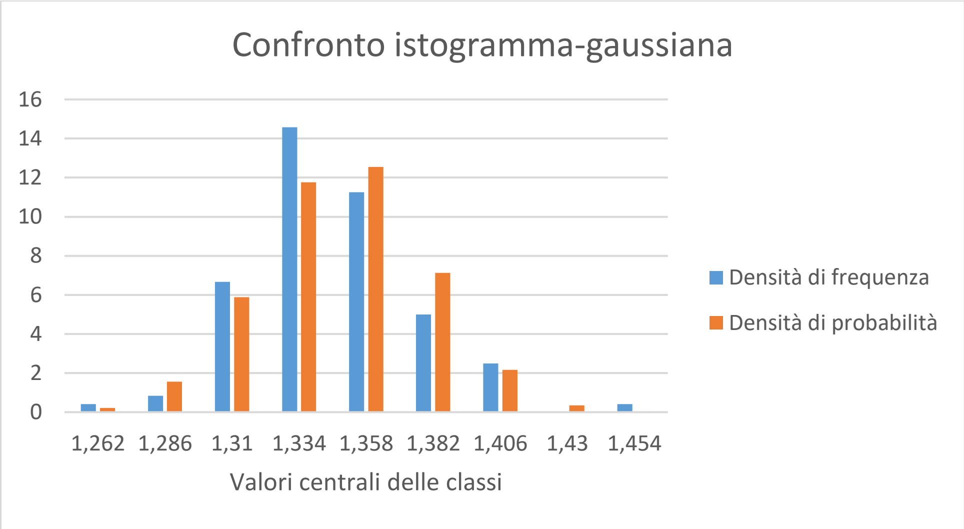
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dove $\mu = \int x\, p(x) dx$ e $\sigma^2 = \int (x-2)^2 p(x) dx$.

Partendo dalla funzione che ci dà la densità di probabilità normale, e sostituendo x=T, otteniamo la funzione:

$$f(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Sostituendo a $\mu=T_m$ e a $\sigma=s_T$ ottengo la densità di frequenza dei dati raccolti (ovvero calcolo la distribuzione di probabilità dei miei dati tenendo conto delle incertezze). Creo un istogramma dove sull'asse delle ascisse ci sono i valori centrali delle classi e su quello delle ordinate la densità di frequenza (istogramma blu) e la densità di probabilità (istogramma arancione, questo coincide con la gaussiana):



Si noti che la densità di frequenza (l'istogramma ottenuto con i dati raccolti) e la densità di probabilità (l'istogramma che rappresenta la distribuzione gaussiana) hanno lo stesso andamento (sono entrambe simmetriche rispetto ad un valore centrale, detto "valore vero", per cui si ha anche un massimo) ma i grafici risultano "sfalsati" di circa una classe.

Ciò è dovuto a errori e incertezze nelle misurazioni e alla loro propagazione nei calcoli che causano delle alterazione dei valori misurati rispetto a quelli "ideali".

Gli errori di cui si parla sono puramente casuali (ovvero errori causati da fattori di varia natura, quali prontezza di riflessi nell'uso del cronometro, attenzione durante la misurazione, posizione di misura non perfettamente allineata al sistema, etc). La presenza di questi errori non altera l'andamento normale dell'istogramma poiché gli errori casuali agiscono sia in un senso che nell'altro nell'alterare i risultati.

Esperienza B: Nuova determinazione di g.

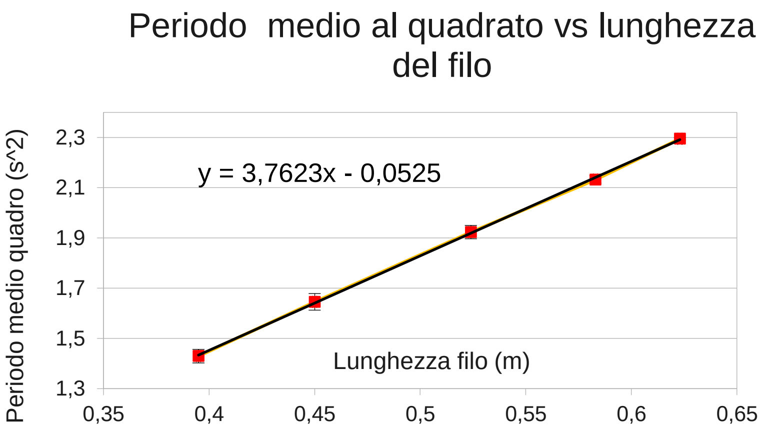
Per la nuova determinazione di g abbiamo eseguito 5 misure del periodo per 5 lunghezze diverse del pendolo, ottenendo 5 valori medi di periodo con i relativi errori

Lunghezza filo (m)	T_m (s)	semiscarto
0,395	1,196	0,023
0,45	1,28	0,03
0,524	1,387	0,026
0,583	1,460	0,016
0,623	1,515	0,005

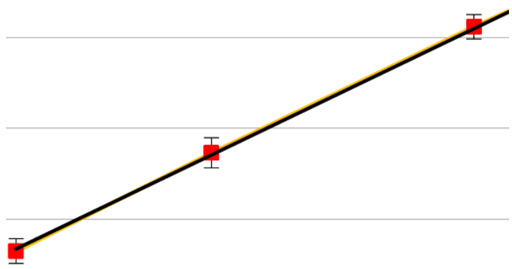
Dalla formula generale del periodo di un pendolo semplice $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ si ricava la relazione lineare tra T^2 ed L (lunghezza del pendolo): $\boldsymbol{T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L.}$

Abbiamo quindi calcolato i quadrati dei valori medi, ricalcolato gli errori, ed eseguito un fit lineare delle coppie $(L\ , T_m^2\ )$.

T_m^2 (s^2)	Errore su Tm^2 (s^2)
1,42945936	0,027
1,64557584	0,033
1,92321424	0,027
2,13276816	0,015
2,29461904	0,005



Per ogni punto nel grafico abbiamo inserito le bande di errore relative a ciascun valore di T^2 ed L (su L praticamente invisibili).



Si può calcolare il valore di g dal coefficiente angolare della retta interpolante i punti, che ha equazione y=Bx+A.

A e B e le loro incertezze si possono calcolare come:

$$A = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ) \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \quad B = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - A - Bx_i)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \; ; \; \sigma_B^2 = \frac{n}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - A - Bx_i)^2 \frac{1}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Otteniamo:

RISULTATI fit	
B	**δ$_B$**
3,7623	0,0362
A	**δ$_A$**
-0,052465124	0,0189

Confrontando il valore di A con il valore atteso 0 (dalla relazione $\boldsymbol{T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L}$ **,** dove il termine noto è proprio zero) da un punto di vista matematico i valori sono molto vicini, ma tenendo conto della barra d'errore di A, notiamo che c'è discrepanza tra i due valori.

Supponendo il nostro valore di A consistente con zero, si può calcolare il valore di g partendo dal parametro B:

$$\boldsymbol{B = \frac{4\pi^2}{g} = 3,7623}$$

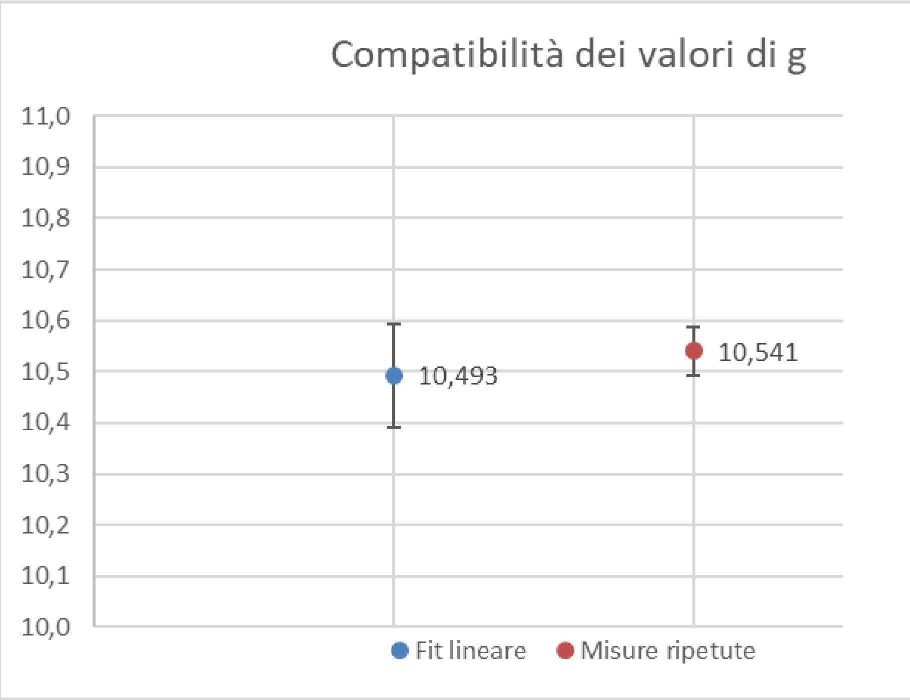
E la sua incertezza, partendo dall'incertezza di B, si può calcolare con un metodo analogo a quello dell'esperienza A:

$$\delta_g = |g|\sqrt{\frac{{\delta_B}^2}{B^2}}$$

Ottenendo:

g (m/s^2)	incertezza su g
10,49	0,10

A questo punto abbiamo confrontato i valori di g ottenuti dalle due esperienze e ne abbiamo valutato la coerenza.



Osserviamo che le bande di errore delle due misure di g si intersecano, perciò possiamo concludere che i valori ottenuti sono tra loro coerenti. Questi, però, non sono vicini al valore g=9.81 m/s^2, e questo è probabilmente dovuto alle imperfezioni con cui sono state eseguite le misurazioni.