Formulaire pour techniciens

Table des matières

Notions de base

Opérations avec les fractions

Addition : $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{?}{12} + \frac{?}{12} + \frac{?}{12} = \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{25}{12}$

Soustraction : $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{?}{12} - \frac{?}{12} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$

Multiplication : $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ (que l'on pourrait aussi simplifier avant)

Division : $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ (que l'on pourrait aussi simplifier avant)

Puissances et racines : $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$ $\qquad \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Algèbre

Règles des exposants

$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$a^p a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a^p)^q = a^{pq}$
$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq a^{bc}$
$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 + b^2$ (pas de formule)	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Racines carrées

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (pas de formule pour $\sqrt{a+b}$)

$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ (pas de formule pour $\sqrt{a-b}$)

En particulier : $\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$

Valeurs absolues

$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$ $\qquad$ Exemples : $|7| = 7$ $\qquad |-7| = 7$

Propriétés :

$|-a| = |a|$, mais $\neq a$ (car on ne sait pas si a est positif ou négatif).

$\sqrt{a^2} = |a|$ $\qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Pas d'égalités pour $|a+b|$ et $|a-b|$

Note : $-(a-b) = -a + b = b - a$, ainsi $|b-a| = |a-b|$

Equations du deuxième degré

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$); on calcule son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

• si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

ou en résumé $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

• si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

• si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution (dans $\mathbb{R}$)

Factorisation des polynômes du deuxième degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$);on calcule le discriminant et les solutions de l'équation associée et on a :

• si $\Delta > 0$, alors $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

• si $\Delta = 0$, alors $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

• si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ est indécomposable

$\diamond$ Ne pas oublier le facteur a dans les cas (I) et (II).

Polynômes : théorème de divisibilité

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel. Alors :

$P(x)$ est divisible (sans reste) par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$.

Polynômes : différentes méthodes de factorisation

[A essayer dans cet ordre]

1. Mises en évidence.
2. Identités remarquables.
3. Polynômes du 2e degré, polynômes bicarrés,...

(4.) Complétion du carré.

(5.) Théorème de divisibilité.

Inégalités

$a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$

$a < b \;\Rightarrow\; a - c < b - c$

$$a < b \;\Rightarrow\; \begin{cases} k \cdot a < k \cdot b & \text{si } k \text{ est positif} \\ k \cdot a > k \cdot b & \text{si } k \text{ est négatif} \end{cases}$$

[Lorsqu'on multiplie (ou divise) une inégalité par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité; rien de particulier pour les nombres positifs.]

Pour b positif, on a :

$|a| < b \iff -b < a < b$

$|a| > b \iff a < -b$ ou bien $b < a$

2. Géométrie

Droites remarquables dans les triangles

Bissectrices : bissectrices des angles (existent aussi dans les autres polygones)(leur intersection : centre du cercle inscrit)(aussi dans les autres polygones (si elles se coupent)).
Médiatrices : médiatrices des côtés (droite perpendiculaire à un segment par son milieu)(existent aussi dans les autres polygones)(leur intersection : centre du cercle circonscrit)(aussi dans les autres polygones (si elles se coupent)).
Médiane : droite issue d'un sommet et arrivant au milieu du côté opposé (n'existe que dans les triangles)(leur intersection : centre de gravité).
Hauteur : droite issue d'un sommet et arrivant perpendiculairement sur le côté opposé (leur intersection : orthocentre).

Quelques longueurs, aires et volumes

Cercle / disque : longueur : $\mathcal{C} = 2\pi r$, aire : $\mathcal{A} = \pi r^2$
$\diamond$ Pour les portions de cercle utiliser les proportions ($37° \longrightarrow \frac{37}{360}$ du tout)
Trapèze : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(B+b)h$ (B : grande base, b : petite base)
Triangle (trois formules pour l'aire) :
1) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (et donc aussi $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$)
2) $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p : demi-périmètre : $p = \frac{a+b+c}{2}$)
3) $\mathcal{A} = p \cdot \rho$ (p : demi-périmètre, ρ rayon du cercle inscrit dans le triangle)
Sphère / boule : aire : $\mathcal{A} = 4\pi r^2$, volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cylindre circulaire droit : volume : $\mathcal{V} = \pi r^2 h$
Cône circulaire droit : volume : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Pythagore en 3D : $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$

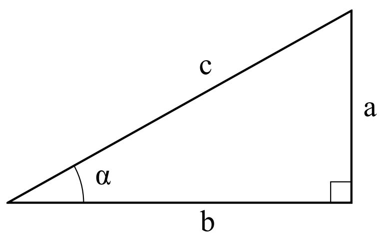
3. Trigonométrie

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

Le sinus : $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$

Le cosinus : $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$

La tangente : $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$



Définition des autres fonctions

$\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Identités fondamentales

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

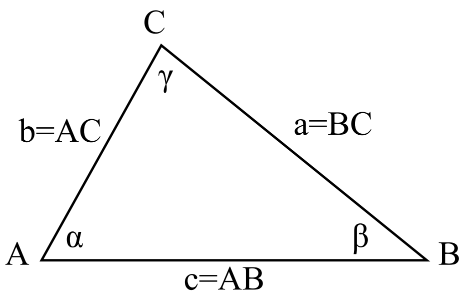
Angles remarquables

α (rad)	α (deg)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	$0°$	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	∞

Théorème du sinus
(triangles quelconques)

$\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma} = 2R$

(R : rayon du cercle circonscrit)



Théorème du cosinus
(triangles quelconques)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

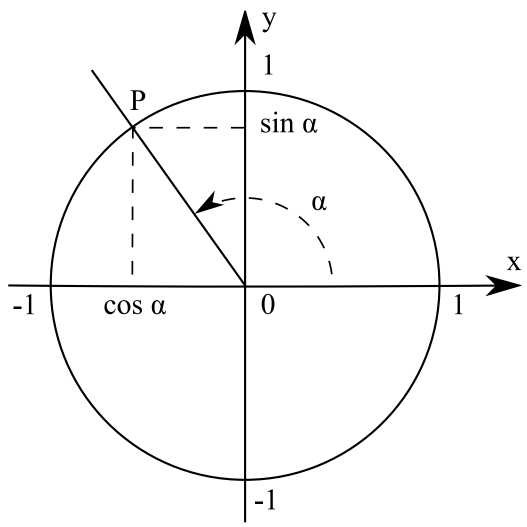
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Coordonnées d'un point du plan

cartésiennes : $P(x; y)$ polaires : r et θ ou ρ et θ

avec les relations : $x = r \cos \theta$ et $y = \sin \theta$

Donc dans le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1, centré à l'origine des axes), $P(x; y)$ a pour coordonnées : $x = \cos \alpha$ et $y = \sin \alpha$.



◇ Pour les formules de passage coord. cartésiennes ↔ coord. polaires : voir partie `Vecteurs`.

Signes et quadrants

quadrant	α (rad)	α (deg)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
I	0 à $\frac{\pi}{2}$	$0°$ à $90°$	$+$	$+$	$+$
II	$\frac{\pi}{2}$ à π	$90°$ à $180°$	$+$	$-$	$-$
III	π à $\frac{3\pi}{2}$	$180°$ à $270°$	$-$	$-$	$+$
IV	$\frac{3\pi}{2}$ à 2π	$270°$ à $360°$	$-$	$+$	$-$

Relations entre les fonctions de certains angles (ou formules de réduction au premier quadrant)

$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$ $\quad\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$ $\quad\tan(\alpha+2\pi)=\tan\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$

Formules d'addition et de soustraction

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\quad\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\quad\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\quad\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Formules de duplication et de bissection

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad\sin^2(\frac{\alpha}{2})=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\quad\cos^2(\frac{\alpha}{2})=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\quad\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\tan(\frac{\alpha}{2})=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

Equivalences (utiles pour la résolution des équations)

(Avec chaque fois k dans $\mathbb{Z}$)

$$\sin\alpha=\sin\beta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\alpha=\beta+2k\pi\\ \text{ou}\\ \alpha=\pi-\beta+2k\pi\end{cases} \qquad \cos\alpha=\cos\beta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\alpha=\beta+2k\pi\\ \text{ou}\\ \alpha=-\beta+2k\pi\end{cases}$$

$\tan\alpha=\tan\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha=\beta+k\pi$

$$\sin x=a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}x=\arcsin(a)+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=\pi-\arcsin(a)+2k\pi\end{cases} \qquad \cos x=a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}x=\arccos(a)+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=-\arccos(a)+2k\pi\end{cases}$$

$\tan x=a \;\Leftrightarrow\; x=\arctan(a)+k\pi$

4. Vecteurs

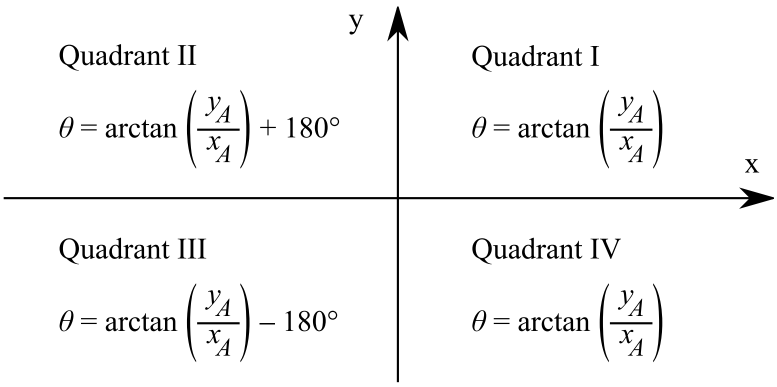
Coordonnées polaires / cartésiennes

Pour passer des coordonnées **polaires** aux coordonnées **cartésiennes** :
$x_A = r\cos\theta$
$y_A = r\sin\theta$

Et pour passer des coordonnées **cartésiennes** aux coordonnées **polaires** :
Calcul de r : $r = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2}$ (Pythagore) [**3D** : $r = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2 + (z_A)^2}$]
Calcul de θ :

- si $x_A = 0$, on a $\theta = 90°$ ou $-90°$ (selon le signe de y_A)
- si le point est dans un des quadrants I ou IV (x_A positif), alors $\theta = \arctan(\frac{y_A}{x_A})$
- si le point est dans un des quadrants II ou III (x_A négatif), alors $\theta = \arctan(\frac{y_A}{x_A}) + 180°$

[Ou $\theta = \arctan(\frac{y_A}{x_A}) - 180°$ (ce que l'on préfère généralement pour le quadrant III)]



◇ Attention : ces formules de passage coordonnées cartésiennes ↔ coordonnées polaires ne sont valables que dans des systèmes orthonormés.

Vecteur unitaire (ou unité)

C'est un vecteur de norme égale à 1
Vecteur unitaire (ou unité) dans une direction donnée : diviser le vecteur par sa norme :
$\vec{a}$ donne $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

Rotation de 90° dans le plan

Vecteur : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tourné de 90° : $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ tourné de −90° : $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

Produit scalaire

Avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$, on a : $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$ [**3D** : $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$]
et aussi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha$ où α est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Propriétés ⟶

Propriétés du produit scalaire

Propriétés standard (par rapport à l'addition et la multiplication) : voir les formulaires.

1a) $\vec{a} \perp \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

1b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \text{ ou } \vec{b} = \vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$

[Attention : ne pas mélanger 0 (nombre) et $\vec{0}$ (vecteur nul)]

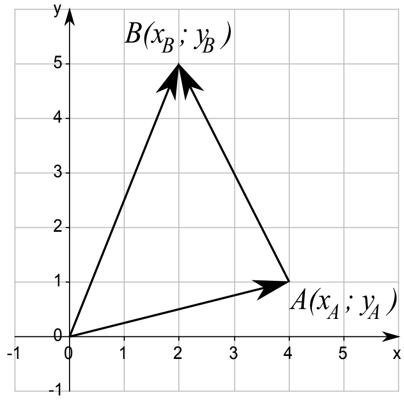
2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

Composantes et points

Avec les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

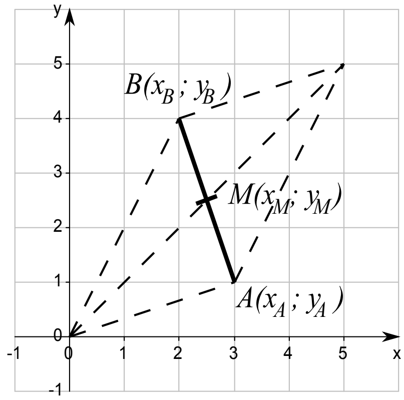
on a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

ainsi que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



Coordonnées du milieu d'un segment

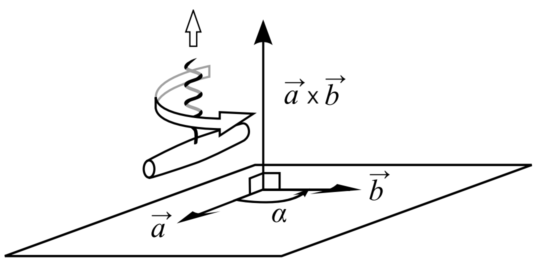
Avec les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,
on a pour le milieu M de AB :
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$
Ou en coordonnées : $(x_M; y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$



Produit vectoriel

Définition de $\vec{a} \times \vec{b}$ par ses caractéristiques :

1) Norme : $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin\alpha|$
2) Direction : $\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$.
[Donc nécessite généralement la 3e dimension.]
3) Sens : par la règle du tire-bouchon.
(ou la règle des trois doigts de la main droite)



Propriétés

Propriétés standard : voir formulaires

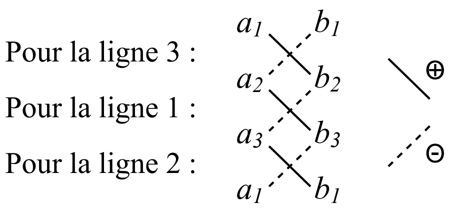
1a) Si $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{b}$ alors $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (car $\sin\alpha = 0$)
1b) Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, alors soit $\vec{a} = \vec{0}$, soit $\vec{b} = \vec{0}$, soit $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{b}$
2) Anti-commutativité : $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (Attention !)

Calcul $\longrightarrow$

Définition par les composantes

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Moyen mnémotechnique : on réécrit en bas la ligne du haut puis on prend positivement le produit des termes en diagonales descendantes et négativement les diagonales montantes (en prenant chaque fois les termes des autres lignes que la ligne considérée).



5. Matrices

Transposée

On renverse par rapport à la diagonale principale : la première ligne devenant la première colonne, etc...

Propriétés de la transposée

1) ${}^t({}^tA) = A$
2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
3) ${}^t(k \cdot A) = k \cdot {}^tA$ avec $k \in \mathbb{R}$
4) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ (attention : l'ordre change !)

Produit matriciel

On fait pour chaque nouvel élément la somme des produits de chaque élément d'une ligne par chaque élément correspondant d'une colonne (somme-produit ligne par colonne).

1) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \circ \\ \cdot & \circ \\ \cdot & \circ \\ \cdot & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \circ \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \cdots = c_{11}$ $a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + \cdots = c_{12}$

etc... [*somme sur j des $a_{ij} \cdot b_{jk}$ donne c_{ik}*]

Propriétés du produit matriciel

1) Non commutativité : $A \cdot B \neq B \cdot A$ (en général)
2) Attention avec la transposée : ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ (attention : l'ordre change !)
3) Attention : un produit peut être nul sans que les termes ne le soient.

Matrices identité

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc (selon la dimension considérée)

Déterminant d'une matrice 2 × 2

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Déterminant d'une matrice 3 × 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Moyen mnémotechnique (règle de Sarrus)
On réécrit à droite les deux premières colonnes de gauche puis on prend positivement le produit des termes en diagonales descendantes et négativement les diagonales montantes.

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} \qquad \begin{array}{c} \searrow \oplus \\ \nearrow \ominus \end{array}$$

Inverse d'une matrice 2 × 2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ (note : $ad - bc$: déterminant)

Inverse des matrices n × n

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\Big((-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \Big)$ où les D_{ij} sont les sous-déterminants obtenus en supprimant chaque fois la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice de départ

Propriétés des inverses

1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
2) ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$
3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (attention : l'ordre change !)
4) $(A + B)^{-1}$: pas de propriété

6. Matrices et vecteurs

Valeurs propres et vecteurs propres

1) On détermine les valeurs propres λ d'une matrice A en résolvant l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ (avec I : matrice identité)
2) On calcule ensuite les vecteurs propres associés à chaque valeur propre en résolvant chaque système $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

Matrices associées à diverses transformations planes

Symétrie d'axe Ox

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Symétrie d'axe Oy

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale sur Ox

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale sur Oy

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Homothétie de rapport k

$$H = k \cdot I = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Affinités

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle α
(autour de l'origine)

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Cisaillements

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation composée

$M = R_\alpha \cdot S_x \cdot R_{-\alpha}$ [Attention à l'ordre des matrices.]

7. Nombres complexes

Unité imaginaire : i tel que $i^2 = -1$
Addition : $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$
Soustraction : $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$
Multiplication : $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
(Note : en fait appliquer la distributivité et utiliser le fait que $i^2 = -1$)
Conjugué : $\overline{a+bi} = a-bi$
Pour la division : amplifier par le conjugué :

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \cdots$$

Forme trigonométrique (ou polaire) de $z = a+bi$:
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ où r est le module et θ l'argument de z :
$r = \sqrt{a^2+b^2}$ et θ est tel que $\tan\theta = \frac{b}{a}$ (év. $\pm 180°$: voir partie *Vecteurs*)
(év. $\pm 180°$: voir diagramme dans la partie *Vecteurs* de ce formulaire)

Propriétés

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \mathrm{cis}(\theta_1-\theta_2)$

$z^n = (r \cdot \mathrm{cis}\,\theta)^n = r^n \cdot \mathrm{cis}(n \cdot \theta)$

Racines n-ièmes

Les n racines n-ièmes du nombre complexe $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ sont données par :

$$\sqrt[n]{r\,\mathrm{cis}\,\theta} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta+k\cdot 360°}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}\right) \quad \text{avec } k = 0,1,2,...,(n-1)$$

8. Logarithmes

Logarithmes de base a : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ (avec $x > 0$, $a > 0$ et $a \neq 1$)
Logarithmes décimaux ou de base 10 : $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$
Logarithmes naturels ou népériens ou de base e : $\ln x = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x$
avec e = 2.71828182845904523536028747135 27...

Propriétés

1) $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$
3) $\log_a a^n = n$
4) $a^{\log_a x} = x$
5) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
6) $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
7) $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a u$
8) $\log_a \sqrt[v]{u} = \frac{1}{v} \cdot \log_a u$
9) Attention : rien pour $\log_a(u + v)$ ni pour $\log_a(u - v)$

Formule du changement de base

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ où b est à choisir astucieusement

En particulier pour le calcul à la machine : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ou aussi : $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

Intérêts composés

Pour un capital initial C_0 placé à t%, on aura après n années : $C_n = (1 + \frac{t}{100})^n \cdot C_0$

9. Fonctions et graphiques

Domaine de définition d'une fonction : ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul de la fonction est possible.

Parité

Une fonction f est dite **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x.
(fonction paire $\Longleftrightarrow$ graphe symétrique par rapport à l'axe des y)
Une fonction f est dite **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x.
(fonction impaire $\Longleftrightarrow$ graphe symétrique par rapport à l'origine $(0; 0)$)

$\diamond$ Note : la vérification de quelques valeurs prises au hasard ne permet de démontrer qu'une fonction est paire ou impaire; par contre elle permet d'affirmer le cas échant qu'elle n'est **pas** paire ou **pas** impaire.

Périodicité

Une fonction f est dite périodique de période T si $f(x + T) = f(x)$ pour tout x.

10. Droites et pentes

Deux formes principales pour l'équation d'une droite :

Equation cartésienne standard : $ax + by + c = 0$

Equation explicite : celle où y a été explicité : $y = mx + h$ (avec m : pente de la droite et h : ordonnée à l'origine (= valeur que prend y lorsque $x = 0$)).

Remarque : les droites verticales ne peuvent pas s'écrire sous la forme $y = mx + h$ vu que leur pente est infinie; on les écrit sous la forme $x =$ constante (qui est en fait un cas particulier de la forme générale).

Pente d'un segment : $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

[Note : $m_{AB} = \tan\alpha$ où α est l'angle par rapport à l'axe Ox]

Pentes de deux droites parallèles : $m' = m$

Pentes de deux droites perpendiculaires : $m' = -\dfrac{1}{m}$ (ou bien $m \cdot m' = -1$)

Equation explicite d'une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h : $y = mx + h$

Droite de pente m donnée et passant par le point A donné : $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = m$

Droite par deux points A et B donnés : $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

11. Paraboles (d'axe vertical)

Trois façons d'écrire leur équation :

• Forme $y = a(x - h)^2 + k$ (équation rapportée au sommet) :
- le coefficient a est en rapport avec la *forme*, la *largeur* de la parabole;
- le signe de a (positif ou négatif) donne le sens de la parabole : ouverte vers le haut $\cup$ ou vers le bas $\cap$);
- les coefficients h et k sont les coordonnées du sommet de la parabole : $S(h; k)$; h est lié au déplacement latéral du graphe et k au déplacement vertical.

• Forme $y = ax^2 + bx + c$: c'est la forme développée de l'équation; le coefficient a est le même que ci-dessus.

• Forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$: c'est la forme factorisée de l'équation (possible uniquement si $\Delta \geq 0$)(x_1 et x_2 étant les abscisses des intersections avec l'axe Ox).

Note : le coefficient a est le même dans les trois formes de l'équation; si a est positif, la parabole est ouverte vers le haut $\cup$ et le sommet est un minimum; si a est négatif, la parabole est ouverte vers le bas $\cap$ et le sommet est un maximum.

Points particuliers des paraboles

• **Intersection avec l'axe des y (axe vertical) :** on l'obtient en posant $x = 0$ dans l'équation de la parabole; donc point $(0; c)$ dans le cas d'une équation donnée sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.

• **Intersection(s) avec l'axe des x (axe horizontal) :** ce sont les points où la fonction s'annule, donc les solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; on les obtient de façon habituelle (avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$); ils n'existent pas toujours. Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution et la parabole est tangente à l'axe des x.
Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution et donc pas d'intersection (la parabole est entièrement au-dessus ou au-dessous de l'axe des x).

• **Sommet de la parabole :** il est sur l'axe de symétrie de la parabole, donc exactement au milieu de x_1, x_2 (si ces deux solutions existent).
Coordonnées du sommet :
- si l'équation est donnée sous la forme $y = a(x - h)^2 + k$: sommet $S(h; k)$
- si l'équation est donnée sous la forme $y = ax^2 + bx + c$: abscisse du sommet : $h = x_S = -\frac{b}{2a}$ et l'ordonnée $k = y_S$ s'obtient en remplaçant la valeur de x_S dans l'équation de la parabole : $y_S = a(x_S)^2 + b(x_S) + c$
◇ Le sommet est un minimum ($\cup$) si $a > 0$ et un maximum ($\cap$) si $a < 0$

• **Axe de la parabole :** droite verticale par le sommet; son équation : $x = x_S$

Passages d'une forme à l'autre des équations

• Pour passer à la forme $y = ax^2 + bx + c$ à partir des deux autres, il suffit d'effectuer le développement algébrique.

• Pour passer à la forme $y = a(x - h)^2 + k$: il suffit de déterminer les coordonnées $h = x_S$ et $k = y_S$ du sommet.

• Pour passer à la forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$: il suffit de factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$ (possible uniquement si $\Delta \geq 0$).

12. Limites et continuité

f est **continue** en $x = a \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Autrement dit :

si la limite à gauche est égale à la limite à droite et à la valeur de la fonction.

Intuitivement : si on peut faire le dessin sans lever le crayon.

13. Asymptotes

Attention : méthodes uniquement valables pour des **fractions rationnelles** (= un polynôme divisé par un autre polynôme)

Asymptotes verticales des fractions rationnelles : si la fraction rationnelle est **simplifiée**, il y a une asymptote verticale pour chaque trou du domaine de définition. On calcule généralement encore les limites à gauche et à droite pour savoir si la fonction part à $-\infty$ ou à $+\infty$.

Asymptotes horizontales et obliques des fractions rationnelles
Comportement à l'infini : il dépend des degrés des polynômes du numérateur (dessus) et du dénominateur (dessous) :

Si (degré du haut) $<$ (degré du bas) alors $y = 0$ est asymptote horizontale.

Si (degré du haut) $=$ (degré du bas) alors $y = \frac{a}{b}$ est asymptote horizontale (a et b étant les coefficients des termes du plus haut degré de chacun des polynômes).

Si (degré du haut) $>$ (degré du bas) alors pas d'asymptote horizontale (mais éventuellement une oblique, si on est dans le cas particulier ci-dessous).

Si (degré du haut) $=$ (1 + degré du bas) il y a alors une asymptote oblique que l'on trouve en effectuant la division avec reste des polynômes (voir méthode ci-dessous).

Méthode (asymptotes obliques des fractions rationnelles) :

Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes et $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ la fraction rationnelle considérée; en effectuant la division, on obtient un polynôme quotient $Q(x)$ et un reste $R(x)$, autrement dit $N(x) : D(x) = Q(x)$ reste $R(x)$ ou aussi $N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ ou encore $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$. Mais, vu que le degré du reste est strictement plus petit que le degré du diviseur (et que $Q(x)$ est de degré 1), cela signifie que l'on est dans le cas d'une équation de droite + un terme qui tend vers 0 lorsque x tend vers infini; ce qui signifie que le polynôme quotient $Q(x)$ donne l'équation de l'asymptote oblique.

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{2x^3+3x^2-7}{x^2-3x+11}$;

on effectue la division : $(2x^3 + 3x^2 - 7) : (x^2 - 3x + 11) = 2x + 9$, reste $5x - 106$

La fonction peut donc s'écrire : $f(x) = \frac{2x^3+3x^2-7}{x^2-3x+11} = 2x + 9 + \frac{5x-106}{x^2-3x+11}$

L'asymptote est donc $y = 2x + 9$

(le reste fournit la partie qui devient nulle lorsque x tend vers $\pm\infty$)

Résumé $\longrightarrow$

Résumé : Fractions rationnelles : méthode de recherche des asymptotes :
1) Asymptotes verticales : dans les trous du domaine de définition (si f simplifiée)
2) Calculer les limites à gauche et à droite de ces asymptotes verticales
3) Comportement à l'infini : les valeurs relatives des degrés du numérateur et du dénominateur indiquent s'il y a une asymptote horizontale, oblique ou pas d'asymptote
4) Déterminer le cas échéant l'équation de cette asymptote

14. Dérivées

Propriétés principales de la dérivation

1) Dérivée d'une somme : $(f+g)' = f' + g'$

2) Dérivée du produit d'une fonction par un nombre :

$$(a \cdot f)' = a \cdot f' \quad \text{(où } a \text{ est un nombre)}$$

3) Dérivée d'un produit : $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

4) Dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Dérivées des fonctions usuelles

$a' = 0$ (dérivée d'un nombre seul)(mais attention $(a \cdot f)' = a \cdot f'$)
$x' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (valable pour n'importe quel $n \in \mathbb{R}$)
$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\quad$ (Attention, pour la trigo :
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\quad$ x en radians)
$(e^x)' = e^x$ $\quad$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Dérivée des fonctions composées

Formule : $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
ou plus explicitement avec l'autre notation : $\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$

Exemple 1 :
$(\sin(4x^3+7))' = \cos(4x^3+7) \cdot (4x^3+7)' = \cos(4x^3+7) \cdot (4 \cdot 3x^2) = 12x^2 \cos(4x^3+7)$
Explication de la structure de l'exemple ci-dessus : $(\sin(\quad))' = \cos(\quad) \cdot (\quad)'$
[la dérivée du sinus d'un *truc*, c'est le cosinus du *truc* fois la dérivée du *truc*]

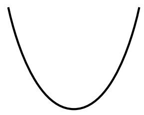
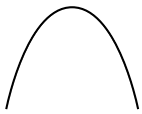
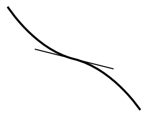
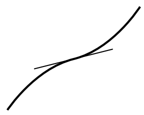
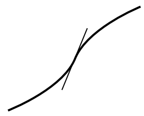
Exemple 2 :
$((4x^3+7)^{17})' = 17(4x^3+7)^{16} \cdot (4x^3+7)' = 17(4x^3+7)^{16} \cdot (4 \cdot 3x^2) = 204x^2(4x^3+7)^{16}$
Explication de la structure de l'exemple ci-dessus : $((\quad)^{17})' = 17(\quad)^{16} \cdot (\quad)'$

Croissance et décroissance des fonctions

f croissante $\iff$ f' positive

f décroissante $\iff$ f' négative

Tableau des cas

						
Signe de f '	– 0 +	+ 0 –	– (–) –	– – –	+ (+) +	+ + +
Signe de f "	+ (+) +	– (–) –	+ 0 –	– 0 +	– 0 +	+ 0 –
Var. de f	↘ ↗	↗ ↘	↘ ↘	↘ ↘	↗ ↗	↗ ↗
Concav. de f	∪ ∪	∩ ∩	∪ ∩	∩ ∪	∩ ∪	∪ ∩
	minimum	maximum	pt d'infl. à tangente oblique (ou horizontale)	pt d'infl. à tangente oblique	pt d'infl. à tangente oblique (ou horizontale)	pt d'infl. à tangente oblique

Note : la deuxième dérivée ne change pas de signe pour les maximums ni pour les minimums, elle peut éventuellement s'annuler également en ces points (dans ce cas l'extremum est généralement plus *plat*).

Autre façon de résumer :

Pour avoir un extremum (max ou min),

il faut que la **première** dérivée s'annule **et** change de signe.

Pour avoir un point d'inflexion,

il faut que la **deuxième** dérivée s'annule **et** change de signe.

Plan d'étude des fonctions

0) Voir si des transformations algébriques permettent de reformuler la fonction (pour simplifier le calcul des zéros, des dérivées, des asymptotes,...)(attention à ne pas modifier le domaine de définition par des simplifications).
Premier calcul des dérivées si elles sont compliquées (et deuxième calcul indépendant un peu plus tard comme vérification).

1) Domaine de définition.

2) Parité (symétrie), [périodicité].

3) Zéros de la fonction [et étude du signe].

4) Valeurs et limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes, limites à gauche et à droite des asymptotes verticales, [position de la courbe par rapport à ses asymptotes obliques ou horizontales].

5) Calcul des dérivées et de leurs zéros; maxima, minima, points d'inflexion, intervalles de croissance et de décroissance, concavité (en relation avec le point 8).

[6)] Continuité de la fonction et de ses dérivées, nature des points de discontinuité, comportement aux bornes du domaine de définition.

7) Valeur aux points importants, pente de la tangente aux points d'inflexion,...

8) Tableau des variations.

9) Graphe.

10) Résumé final et vérification de la cohérence des résultats.

Note : l'ordre des différentes parties est en fait peu important; ce qui est essentiel, c'est de ne rien oublier et de présenter correctement les informations obtenues, d'où l'importance du tableau des variations et du résumé final (si les résultats sont trop disséminés).

Equation de la tangente à une courbe

$\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) \Rightarrow \cdots \Rightarrow y = (x-a)f'(a) + f(a)$

Problèmes d'extremums sous conditions

1) Ecrire la fonction dont on cherche l'extremum
2) Utiliser les contraintes pour réduire à un le nombre des variables
3) Trouver l'extremum en annulant la dérivée
4) Vérifier la nature de l'extremum
(souvent facile par la nature géométrique du problème)

15. Primitives et intégrales

Propriétés principales de l'intégration

1) Primitive d'une somme : $\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

2) Primitive du produit d'une fonction par un nombre :

$$\int (a \cdot f)\,dx = a \cdot \int f\,dx \quad \text{(où } a \text{ est un nombre)}$$

3) Primitive d'un produit et d'un quotient : difficile (pas au programme)

Primitives des fonctions usuelles $\longrightarrow$

Primitives des fonctions usuelles

$\int a\,dx = ax + C$ (primitive d'un nombre seul)

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (pour $n \neq -1$) $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$ $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$

Primitives de certaines fonctions composées simples

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ (où F est une primitive de f)

En particulier : $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (ax+b)^{n+1} + C$ (pour $n \neq -1$)

Et pour le cas $n = -1$: $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$

De la même façon, on a par exemple : $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

Primitives des fonctions composées

Exemple 1 : pour calculer $\int x^2\cos(4x^3+7)\,dx$, on remarque que le terme x^2 provient de la dérivée intérieure; on suppose alors que la primitive est de la forme $\sin(4x^3+7)$ et on pose $\int x^2\cos(4x^3+7)\,dx = k \cdot \sin(4x^3+7)$
On dérive : $(k \cdot \sin(4x^3+7))' = k \cdot \cos(4x^3+7) \cdot (3 \cdot 4x^2) = 12kx^2\cos(4x^3+7)$
d'où (par comparaison avec l'égalité de départ) : $k = \frac{1}{12}$
Et ainsi : $\int x^2\cos(4x^3+7)\,dx = \frac{1}{12}\sin(4x^3+7) + C$

Exemple 2 : pour calculer $\int 5x^2(4x^3+7)^6\,dx$, on remarque que le terme x^2 provient de la dérivée intérieure; on suppose alors que la primitive est de la forme $(4x^3+7)^7$ et on pose $\int 5x^2(4x^3+7)^6\,dx = k \cdot (4x^3+7)^7$
On dérive : $(k \cdot (4x^3+7)^7)' = 7k \cdot (4x^3+7)^6 \cdot (3 \cdot 4x^2) = 84kx^2(4x^3+7)^6$
d'où (par comparaison avec l'égalité de départ) : $k = \frac{5}{84}$
Et ainsi : $\int 5x^2(4x^3+7)^6\,dx = \frac{5}{84}(4x^3+7)^7 + C$

Théorème fondamental du calcul intégral

Si F est une primitive de f, alors l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe représentative de $f(x)$ et deux bornes a et b est donnée par :

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (Attention : c'est une aire algébrique)

Aire entre deux courbes

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx$$

Volumes de révolution

$$\mathcal{V} = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Longueur d'un arc de courbe

$$\ell = \int_a^b \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right)dx$$