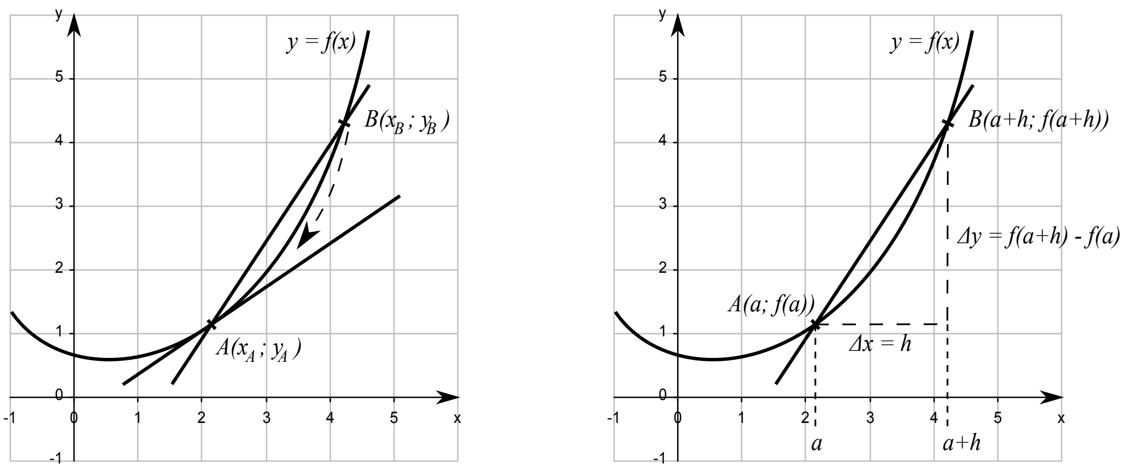
Dérivées : cours

1. Introduction

Tangente à une courbe (en un point A) [dessin de gauche] : c'est une droite qui est la position limite des sécantes AB lorsque B se rapproche de A.

Remarque : il est faux de dire que la tangente est une droite qui coupe une courbe en un seul point. En effet, l'axe d'une parabole ne la coupe qu'en un seul point et n'est bien évidemment pas une tangente. De plus, il est fort possible qu'une tangente à une courbe coupe cette courbe à un autre endroit que le point de tangence. La notion de tangence (comme beaucoup d'autres notions en calcul différentiel et intégral) est une notion **locale**. C'est la droite la plus proche de la courbe : celle qui localement représente le mieux la courbe.



Calcul de la pente de la tangente [dessin de droite]

Pente de la sécante AB : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

D'où la pente de la tangente (par passage à la limite) : $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Le nombre obtenu s'appelle **nombre dérivé** de $f(x)$ au point d'abscisse a ou encore **accroissement instantané (ou local)** de $f(x)$ en a.

Exemple avec $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

Pente de la tangente en $A(a; f(a))$, point quelconque du graphe de la fonction :

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(3(a+h)^2-5(a+h)+7\right)-\left(3a^2-5a+7\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(3(a^2+2ah+h^2)-5(a+h)+7\right)-\left(3a^2-5a+7\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3a^2+6ah+3h^2-5a-5h+7-3a^2+5a-7}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{6ah+3h^2-5h}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(6a-5+3h) = 6a-5$

Dans l'exemple précédent, on a donc obtenu une fonction $a \to 6a-5$ qui en chaque point $(a; f(a))$ de la fonction $f(x)$ donne la pente de la tangente au graphe : cette fonction est la **dérivée** de $f(x)$. La dérivée est donc une fonction qui en chaque point de la fonction de départ donne la pente de la tangente.
On note généralement cette nouvelle fonction $f'(x)$.

Ainsi $f(x) = 3x^2 - 5x + 7 \;\Rightarrow\; f'(x) = 6x - 5$

Remarque : on réserve en général la notation f' à une dérivation par rapport à x; lorsque la fonction comporte plusieurs variables ou lorsqu'on ne dérive pas par rapport à la variable x, on utilise la notation plus précise : $\frac{d}{dz}$; on écrira par exemple $\frac{d(z^3)}{dz}$ ou $\frac{d}{dz}(7z^2 - 3z + 4)$ [En fait, $\frac{df}{dx}$ est une écriture abrégée pour $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$]
En physique, on utilise quelquefois un point sur la fonction pour indiquer une dérivation par rapport au temps (en cinématique) : $v = \dot{r}$ ou même pour des vecteurs : $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

2. Propriétés principales de la dérivation

1) Dérivée d'une somme : $(f + g)' = f' + g'$

2) Dérivée du produit d'une fonction par un nombre :

$$(a \cdot f)' = a \cdot f' \quad \text{(où } a \text{ est un nombre)}$$

3) Dérivée d'un produit : $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

4) Dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

3. Dérivées des fonctions usuelles

$a' = 0$ (dérivée d'un nombre seul)(mais attention $(a \cdot f)' = a \cdot f'$)
$x' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (valable pour n'importe quel $n \in \mathbb{R}$)
$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ (Attention, pour la trigo :
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\qquad$ x en radians)
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ $\qquad$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Exemple : $(3x^2 - 5x + 7)' = 3(x^2)' - 5(x)' + (7)' = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x - 5$

◇ Attention à ne jamais écrire un signe "=" entre une fonction et sa dérivée.
Dans certains exercices, il sera quelquefois nécessaire de transformer l'écriture de la fonction avant de la dériver; on écrira alors : $f(x) = \cdots = \cdots \;\Rightarrow\; f'(x) = \cdots$

4. Dérivée des fonctions composées

Formule : $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
ou plus explicitement avec l'autre notation : $\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$

Exemple 1 :
$(\sin(4x^3+7))' = \cos(4x^3+7) \cdot (4x^3+7)' = \cos(4x^3+7) \cdot (4 \cdot 3x^2) = 12x^2 \cos(4x^3+7)$
Explication de la structure de l'exemple ci-dessus : $(\sin(\quad))' = \cos(\quad) \cdot (\quad)'$
[la dérivée du sinus d'un *truc*, c'est le cosinus du *truc* fois la dérivée du *truc*]

Exemple 2 :
$((4x^3+7)^{17})' = 17(4x^3+7)^{16} \cdot (4x^3+7)' = 17(4x^3+7)^{16} \cdot (4 \cdot 3x^2) = 204x^2(4x^3+7)^{16}$
Explication de la structure de l'exemple ci-dessus : $((\quad)^{17})' = 17(\quad)^{16} \cdot (\quad)'$

[[**Exemple 3**]] [pour les exponentielles, utiliser de préférence la forme exp(), afin de ne pas mélanger avec les fonctions puissance (x^n)] :
$\left(\mathrm{e}^{4x^3+7}\right)' = (\exp(4x^3+7))' = \exp(4x^3+7) \cdot (4x^3+7)' = \exp(4x^3+7) \cdot (4 \cdot 3x^2) = 12x^2 \exp(4x^3+7) = 12x^2\mathrm{e}^{4x^3+7}$

⋄ On pourrait donc réécrire tout le formulaire ci-dessus.
Par exemple : $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ou $(\sin u)' = u' \cos u$

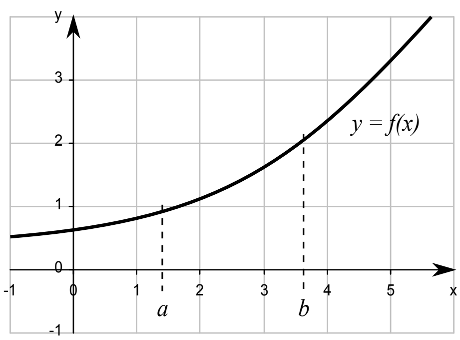
5. Application des dérivées : équation de la tangente à une courbe

Se rappeler que la dérivée $f'(a)$ en un point $(a; f(a))$ d'une courbe donne la pente de la tangente. Il suffit alors d'utiliser la formule donnant l'équation d'une droite de pente donnée par un point donné :
$\frac{y-y_A}{x-x_A} = m \Rightarrow \frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) \Rightarrow \cdots \Rightarrow y = (x-a)f'(a) + f(a)$

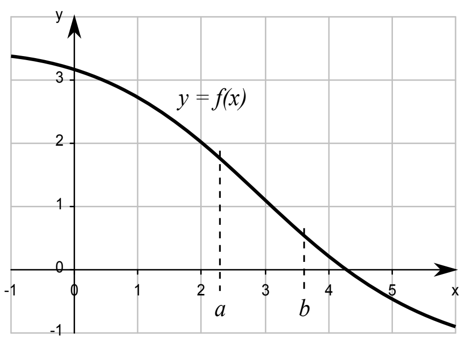
[Voir exemple à la fin de la dernière page]

6. Application des dérivées : croissance et décroissance des fonctions

Définitions :
Une fonction est dite **croissante** sur un intervalle si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
Elle est dite **décroissante** si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ [Attention : les deux fois $a < b$!]



Fonction croissante



Fonction décroissante

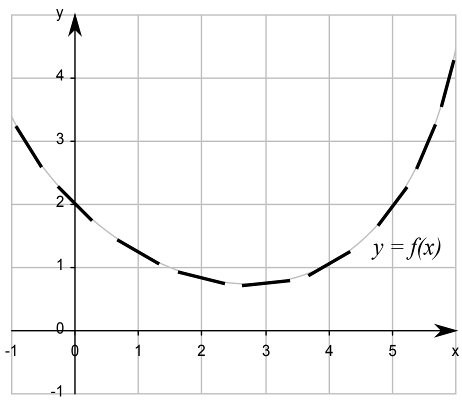
Relation avec la dérivée :
Considérons la dérivée : $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$; si la fonction est croissante, alors $h > 0 \Rightarrow f(a) < f(a+h)$ et $h < 0 \Rightarrow f(a) > f(a+h)$ autrement dit les deux termes du quotient seront chaque fois de même signe et donc le quotient, et par là la dérivée, sera positif. On montre de même que si une fonction est décroissante, alors sa dérivée est négative. Le signe de la dérivée permet ainsi de déterminer les intervalles où la fonction est croissante et ceux où elle est décroissante.

En résumé :
f croissante $\iff$ f' positive
f décroissante $\iff$ f' négative

Si on prend les dérivées de chaque fonction dans les assertions ci-dessus, on obtient :
f' croissante $\iff$ f'' positive
f' décroissante $\iff$ f'' négative

Mais que signifie f' croissante, respectivement f' décroissante ?

f' croissante signifie que si l'on va dans la direction positive de l'axe des x, la pente de la tangente (les petits traits sur le graphique) augmente et donc que la courbe est tournée dans le sens $\cup$.



Inversement, si f' est décroissante (et donc f'' négative), cela signifie que la courbe est tournée dans le sens $\cap$.
Ainsi le signe de la deuxième dérivée d'une fonction permet de savoir dans quel sens est tournés la concavité de la fonction. Il permet aussi de déterminer la nature des extremums de la fonction.

Quelques définitions

[Voir aussi figure page suivante]

Un point $A(a; f(a))$ est un **maximum** (local) d'une fonction, si pour tout x proche de a, on a $f(x) < f(a)$; autrement dit, c'est (localement) le point le plus haut.

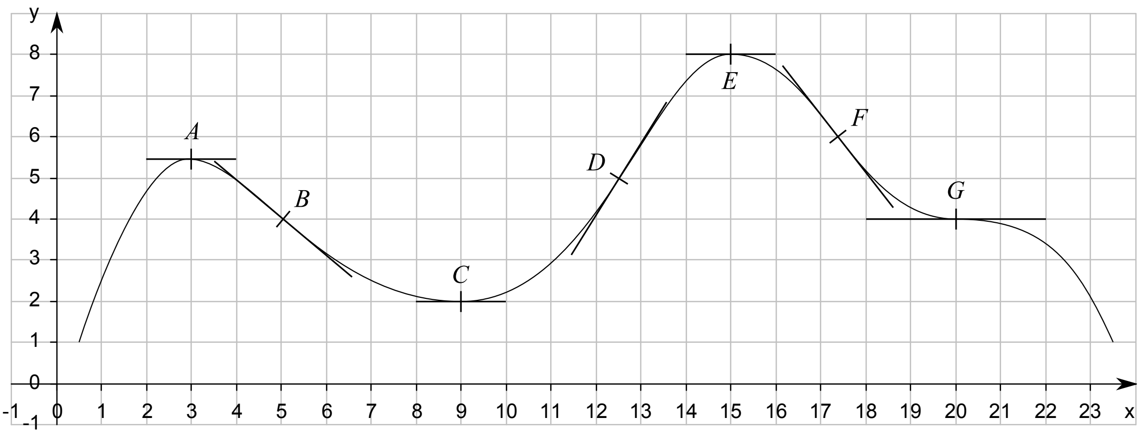
Un point $A(a; f(a))$ est un **minimum** (local) d'une fonction, si pour tout x proche de a, on a $f(x) > f(a)$; autrement dit, c'est (localement) le point le plus bas.

Un maximum est dit **absolu** s'il n'y a pas d'autre point plus haut. Dans le cas contraire, il est dit **relatif**. Définitions analogues pour les minimums.

On appelle **extremum** d'une fonction un point qui est soit un maximum, soit un minimum.

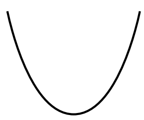
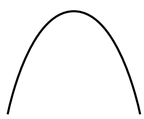
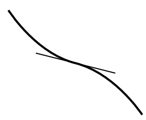
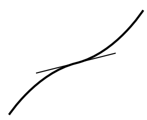
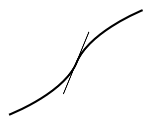
Un point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** d'une fonction si en ce point la concavité de la fonction change; autrement dit si de $\cap$, elle devient $\cup$ (ou l'inverse). C'est aussi un point où une courbe traverse sa tangente.

On distingue les points d'inflexion à tangente horizontale (appelés aussi **paliers**) et les points d'inflexion à tangente oblique.



A : maximum relatif; B, D, F : points d'inflexion à tangente oblique
C : minimum relatif; E : maximum (absolu ?)
G : point d'inflexion à tangente horizontale (ou palier)

Tableau des cas

						
Signe de f '	– 0 +	+ 0 –	– (–) –	– – –	+ (+) +	+ + +
Signe de f "	+ (+) +	– (–) –	+ 0 –	– 0 +	– 0 +	+ 0 –
Var. de f	↘ ↗	↗ ↘	↘ ↘	↘ ↘	↗ ↗	↗ ↗
Concav. de f	∪ ∪	∩ ∩	∪ ∩	∩ ∪	∩ ∪	∪ ∩
	minimum	maximum	pt d'infl. à tangente oblique (ou horizontale)	pt d'infl. à tangente oblique	pt d'infl. à tangente oblique (ou horizontale)	pt d'infl. à tangente oblique

Note : la deuxième dérivée ne change pas de signe pour les maximums ni pour les minimums, elle peut éventuellement s'annuler également en ces points (dans ce cas l'extremum est généralement plus *plat*)

Autre façon de résumer :
Pour avoir un extremum (max ou min),
    il faut que la **première** dérivée s'annule **et** change de signe.
Pour avoir un point d'inflexion,
    il faut que la **deuxième** dérivée s'annule **et** change de signe.

7. Application des dérivées : les études de fonctions

Les **études de fonctions** sont des exercices purement scolaires dans lesquels on cherche à dessiner le graphe d'une fonction en déterminant ses caractéristiques principales par les différentes méthodes vues précédemment. Dans la pratique, on a rarement besoin de toutes les caractéristiques d'une fonction; dans certains cas, on cherchera uniquement le maximum, dans d'autres uniquement les asymptotes... Pédagogiquement, c'est néanmoins très pratique de regrouper toutes ces recherches en un seul exercice centré autour d'une seule fonction. Pour effectuer cette étude, on suit généralement un plan qui contient les éléments suivants (dans un ordre qui, lui, dépend souvent de l'auteur du manuel ou du formulaire).

Plan d'étude des fonctions

0) Voir si des transformations algébriques permettent de reformuler la fonction (pour simplifier le calcul des zéros, des dérivées, des asymptotes,...)(attention à ne pas modifier le domaine de définition par des simplifications).
Premier calcul des dérivées si elles sont compliquées (et deuxième calcul indépendant un peu plus tard comme vérification).

1) Domaine de définition.

2) Parité (symétrie), [périodicité].

3) Zéros de la fonction [et étude du signe].

4) Valeurs et limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes, limites à gauche et à droite des asymptotes verticales, [position de la courbe par rapport à ses asymptotes obliques ou horizontales].

5) Calcul des dérivées et de leurs zéros; maxima, minima, points d'inflexion, intervalles de croissance et de décroissance, concavité (en relation avec le point 8).

[6)] Continuité de la fonction et de ses dérivées, nature des points de discontinuité, comportement aux bornes du domaine de définition. $\longrightarrow$

7) Valeur aux points importants, pente de la tangente aux points d'inflexion,...

8) Tableau des variations.

9) Graphe.

10) Résumé final et vérification de la cohérence des résultats.

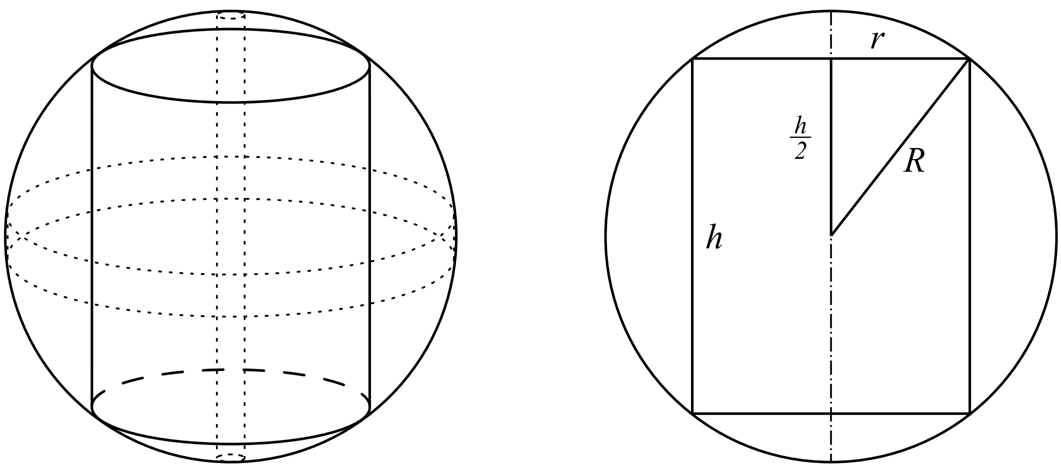
Note : l'ordre des différentes parties est en fait peu important; ce qui est essentiel, c'est de ne rien oublier et de présenter correctement les informations obtenues, d'où l'importance du tableau des variations et du résumé final (si les résultats sont trop disséminés).

8. Application des dérivées : problèmes d'extremums sous conditions

Appelés aussi **problèmes d'optimisation**. Trouver le maximum ou le minimum d'une fonction en tenant compte du fait qu'elle est limitée par des conditions.

Méthode :
1) Ecrire la fonction dont on cherche l'extremum
2) Utiliser les contraintes pour réduire à un le nombre des variables
3) Trouver l'extremum en annulant la dérivée
4) Vérifier la nature de l'extremum
(souvent facile par la nature géométrique du problème)

Exemple-exercice : déterminer les proportions du cylindre de plus grand volume que l'on puisse inscrire dans une sphère.



1) On cherche donc les valeurs de h (hauteur) et r (rayon) qui rendent maximal le volume $\mathcal{V} = \pi r^2 h$ d'un cylindre inscrit dans une sphère de rayon R (fixe).

2) Mais les variables h et r ne peuvent pas varier n'importe comment : elles sont liées par le fait que le cylindre est *coincé* dans la sphère. Dans le dessin de droite (en coupe),

on voit facilement que $R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$ (Pythagore). Il faut alors utiliser cette relation pour éliminer une des variables de l'équation du volume. Laquelle ? Si on remplace h dans l'équation, on obtiendra des racines; si on remplace r (ou plutôt r^2) on obtiendra des fractions (à cause de $\frac{h}{2}$). Mais sachant que l'on devra dériver à la prochaine étape, il vaut mieux éviter les racines. L'astuce serait bien sûr aussi de remplacer $\frac{h}{2}$ par une autre variable.
On a donc : $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow \mathcal{V} = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$
3) Que l'on dérive par rapport à h : $\frac{d\mathcal{V}}{dh} = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2$
Attention : on ne dérive pas R^2 : c'est une constante (par rapport à la variable h).
On annule la dérivée : $\pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}R^2 = h^2 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{3}}R = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ (la valeur négative étant bien évidemment à exclure pour une longueur).
En remplaçant cette valeur de h dans la contrainte $R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$, on trouve $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$
4) On a donc trouvé une valeur de h pour laquelle la dérivée de $\mathcal{V}$ s'annule; mais est-on bien sûr qu'il s'agit d'un maximum ? Dans certains problèmes, il peut être nécessaire de calculer la deuxième dérivée pour étudier la croissance et la décroissance de la fonction. Mais ici, l'aspect géométrique du problème permet de conclure. A l'aide du dessin de droite, on voit facilement que lorsque $h = 0$, le volume est nul, ce qui est également le cas lorsque h est le plus grand possible ($h = R$); entre ces deux valeurs, le volume est bien évidemment positif. La fonction $\mathcal{V}(h)$ est donc une fonction qui part de zéro et qui retourne à zéro après avoir pris des valeurs positives; vu qu'elle est continue et n'a qu'un seul point à dérivée nulle, ce point est un maximum !

9.$^\diamond$ Autres application des dérivées

1) Les développements limités ou comment approximer des fonctions par des polynômes.
(Voir supplément : `24-SupplDeveloppLim.pdf`)

2) Les équations différentielles : où l'on cherche une fonction à partir de conditions sur sa ou ses dérivée(s); l'outil de travail des physiciens pour - entre autres - trouver l'équation d'un mouvement à partir des équations des forces en action.
(Voir supplément : `25-SupplEqDifferentielles.pdf`)

(5.) Exemple pour le paragraphe 5

Equation de la tangente au point d'abscisse 5 de la parabole $f(x) = x^2 - 6x + 7$
Pour $x = 5$, on a : $f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 7 = 2$ donc le point $(5; 2)$
On dérive l'équation de la parabole : $f'(x) = 2x - 6$
Pour $x = 5$, on a : $f'(5) = 2 \cdot 5 - 6 = 4$
On cherche donc l'équation de la droite de pente 4 passant par le point $(5; 2)$
Autrement dit : $\frac{y-2}{x-5} = 4 \Rightarrow y - 2 = 4(x - 5) \Rightarrow y = 4x - 18$