Matrices et vecteurs : cours

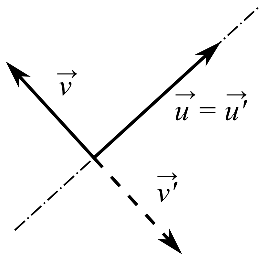
1. Notion de valeur propre et de vecteur propre

En allemand : der Eigenwert, der Eigenvektor
En anglais : eigenvalue, eigenvector

Définition : le nombre λ est une **valeur propre** d'une matrice carrée A s'il existe un vecteur $\vec{u}$ (non nul) tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ et le vecteur $\vec{u}$ est alors dit **vecteur propre** associé à la valeur propre λ
Note : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ (= les multiples de $\vec{u}$) sont aussi vecteurs propres

Utilité :
- pour déterminer des directions privilégiées
- pour *voir* l'effet géométrique
- pour recréer un système d'axes dans des directions particulières (meilleures)

Exemple : symétrie axiale :
- une direction de vecteurs propres dans la direction de l'axe avec une valeur propre égale à 1
- une direction de vecteurs propres dans la direction perpendiculaire à l'axe avec une valeur propre égale à -1



Méthode de calcul
1) On détermine les valeurs propres en résolvant l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ (avec I : matrice identité)
2) On calcule ensuite les vecteurs propres associés à chaque valeur propre en résolvant chaque système $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

Exemple avec $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

1) Calcul des valeurs propres :

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (8-\lambda)(7-\lambda) - 1 \cdot 2 = 56 - 8\lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 54 \;\Rightarrow\; \lambda = 6 \text{ ou } \lambda = 9$$

2a) Vecteurs propres associés à la valeur propre 6 : on cherche tous les vecteurs $\vec{u}$ tels que $A\vec{u} = 6\vec{u}$. Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 8x+2y \\ x+7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8x+2y = 6x \\ x+7y = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y = 0 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

d'où une infinité de solutions liées par $y = -x$, autrement dit, tous les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$, autrement dit, tous les multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2b) Vecteurs propres associés à la valeur propre 9 : on cherche tous les vecteurs $\vec{u}$ tels que $A\vec{u} = 9\vec{u}$. Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 9x \\ x + 7y = 9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

d'où une infinité de solutions liées par $x = 2y$, autrement dit, tous les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la forme $\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$, autrement dit, tous les multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

◇ Note : on obtiendra toujours un système avec une **infinité** de solutions vu que les multiples d'un vecteur propre sont aussi des vecteurs propres.

◇ En deux dimensions, les solutions seront presque toujours de l'une des trois formes suivantes : (1) $ax = by$; (2) $x = 0$ et y quelconque; (3) $y = 0$ et x quelconque.

◇ En particulier, si on trouve $x = 0$ et $y = 0$ comme **seule** solution, cela signifie qu'il y a une erreur (résolution fausse, ou plus généralement valeurs propres fausses).

[Note : davantage de détails dans l'annexe 6 à la fin du chapitre.]

2. Représentations graphiques

◇ Idée générale du sujet : utiliser les matrices comme opérateurs sur les vecteurs

◇ Vocabulaire 1 : une fonction vectorielle est dite **linéaire** si
$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ et $f(k \cdot \vec{u}) = kf(\vec{u})$ (avec k élément de $\mathbb{R}$)

A une dimension, les seules fonctions linéaires sont les fonctions du type $f(x) = 5x$.
A plusieurs dimensions, les seules fonctions linéaires sur des vecteurs sont les multiplications par une matrice.
D'où la quasi-équivalence des termes *matrices* et *transformations linéaires.*
Conséquences importantes de la linéarité :
1) la somme vectorielle (donc le parallélisme) est conservé par les transformations;
2) $\vec{0}$ est toujours transformé en $\vec{0}$, donc les translations ne peuvent pas être exprimées par des matrices (sauf par l'utilisation astucieuse d'une dimension supplémentaire :
ce sont les coordonnées homogènes (utilisées en CSS3)).

◇ Vocabulaire 2 : on appelle **noyau** (Ker) d'une application linéaire : l'ensemble des vecteurs envoyés sur $\vec{0}$

Applications des transformations linéaires : morphing (quelquefois), raccords de photos (PanoramaMaker), transformations d'images, déplacements d'une représentation (informatique) d'objet (dessin, *canvas* HTML5, CSS3, jeux, CAO,...), fractals (IFS),...

Convention :

Pour associer des matrices à des transformations planes (ou spatiales), on peut procéder de deux façons :

1) multiplication *point · matrice* : $(x_A, y_A) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

2) multiplication *matrice · vecteur* : $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

(où le vecteur est celui qui va de l'origine au point considéré)

Dans la plupart des livres, c'est la deuxième option qui est choisie (ce que nous ferons aussi ici); elle a l'avantage de s'écrire dans le même ordre qu'une fonction agissant sur le vecteur. [En fait, une simple transposition permet de passer d'un modèle à l'autre.]

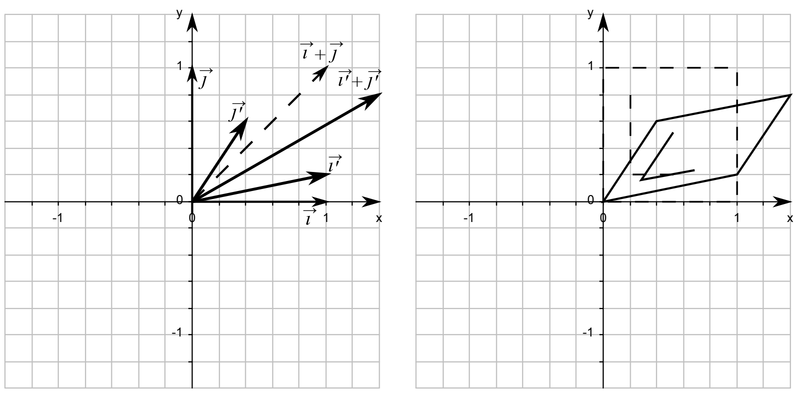
Action d'une matrice sur le carré unité

Action sur $\vec{\imath}$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ donne la première colonne de la matrice

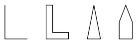
action sur $\vec{\jmath}$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ donne la deuxième colonne de la matrice

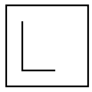
On voit donc que les deux colonnes d'une matrice indiquent directement son action sur les vecteurs unités.

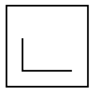
Exemple :
Action de la matrice
$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$
sur le carré unité :



Remarque 1 : vu que le parallélisme est conservé, le transformé du carré unité sera toujours au moins un parallélogramme (jamais un quadrilatère quelconque).
$[A \cdot (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = A \cdot \vec{\imath} + A \cdot \vec{\jmath}]$
[Le quadrillage devient un réseau de parallélogrammes.]
Rappel : le point $(0; 0)$ reste en $(0; 0)$ et donc les rotations (en particulier) se font toujours autour de ce point-là et non par miracle autour d'un autre point que l'on aurait choisi.

Remarque 2 : pour préciser quel côté du parallélogramme provient de quel côté du carré on ajoute généralement un ”L” ou un petit dessin dans le coin en bas à gauche du carré unité : 

La matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donnera donc : 

tandis que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donnera : 

(Note : cette dernière matrice est celle de la symétrie axiale à 45°, avec $A \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ et $A \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath}$)

Note : quand le ”L” se transforme en ”⅃”, le déterminant de la matrice est négatif (dans les autres cas, il est positif).

◇ Voir aussi les fichiers Excel : `06-TransformationsLineaires1.xls`,
`06-TransformationsLineaires2.xls` et `06-TransformationsLineaires3.xls`
et les *canvas* HTML5 : `TransformeMatrices.htm` et `TransformeImage.htm`
sous `\zDivers\CanvasHTML5`

3. Matrices associées à diverses transformations planes

Symétrie d'axe Ox

$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\vec{\imath} \to \vec{\imath}' = \vec{\imath}$

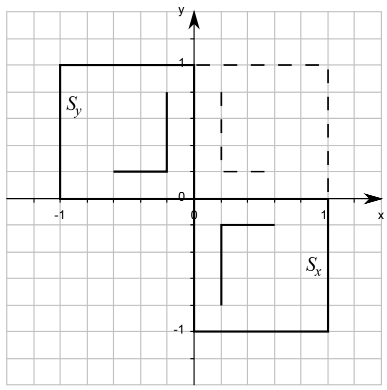
et $\vec{\jmath} \to \vec{\jmath}' = -\vec{\jmath}$

Symétrie d'axe Oy

$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{\imath} \to \vec{\imath}' = -\vec{\imath}$

et $\vec{\jmath} \to \vec{\jmath}' = \vec{\jmath}$



Projection orthogonale sur Ox

$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\imath} \to \vec{\imath}' = \vec{\imath}$

et $\vec{\jmath} \to \vec{\jmath}' = \vec{0}$

Projection orthogonale sur Oy

$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{\imath} \to \vec{\imath}' = \vec{0}$

et $\vec{\jmath} \to \vec{\jmath}' = \vec{\jmath}$

Note : leurs déterminants sont nuls.
Donc pas d'inverse.
Pourquoi ?

Homothétie de rapport k (compressions, étirements)

Plus simple par multiplication : $\vec{u} \to \vec{u}\,' = k \cdot \vec{u}$

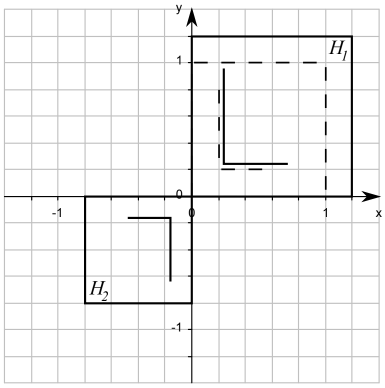
Mais si on a vraiment besoin d'une matrice :

$H = k \cdot I = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

$\vec{\imath} \to \vec{\imath}\,' = k \cdot \vec{\imath}$ et $\vec{\jmath} \to \vec{\jmath}\,' = k \cdot \vec{\jmath}$

Les deux exemples ci-contre :

$H_1 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix}$ et $H_2 = \begin{pmatrix} -0.8 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}$

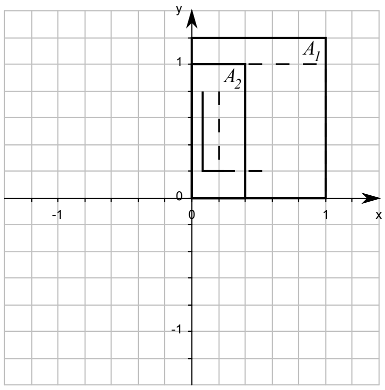


Affinités (compressions, étirements : selon une direction)

Matrices générales : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

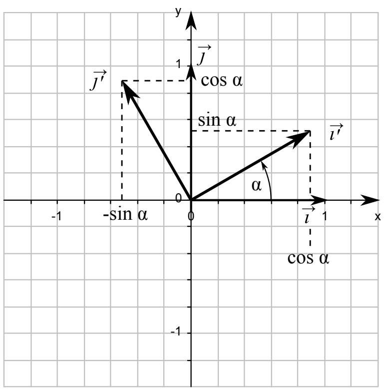
Les deux exemples ci-contre :

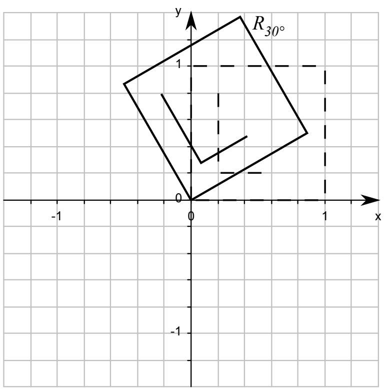
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Rotation d'angle α (autour de l'origine)

$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$



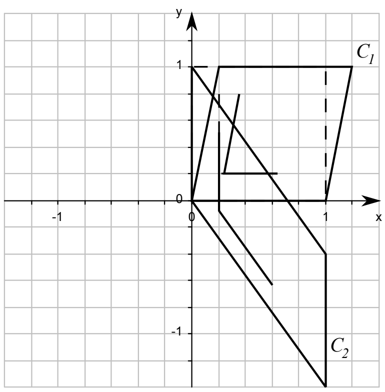


Cisaillements

Matrices générales : $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Les deux exemples ci-contre :

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.4 & 1 \end{pmatrix}$

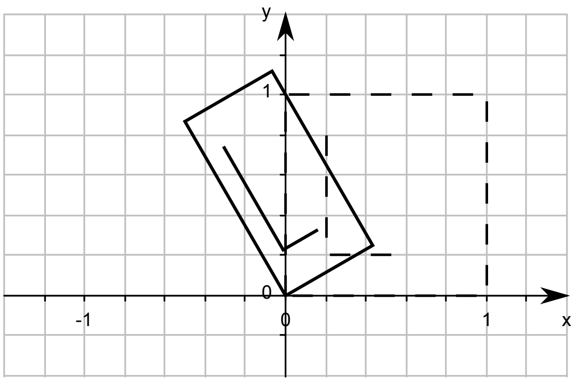


Transformation composée (1)

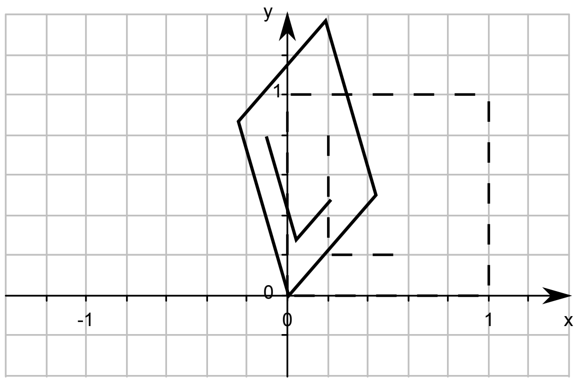
La multiplication des matrices permet d'obtenir une matrice qui effectue en une seule étape le 'travail' de deux matrices successives; mais attention à l'ordre : si on calcule $M = A \cdot B$, c'est bien la matrice B qui agira en premier. En effet, si on applique le calcul sur un vecteur, on obtient : $M \cdot \vec{u} = (A \cdot B) \cdot \vec{u} = A \cdot (B \cdot \vec{u})$

Exemples avec une rotation R de 30° et une affinité A de rapport 0.5

Affinité d'abord, rotation ensuite : $R \cdot A$



Rotation d'abord, affinité ensuite : $A \cdot R$



Transformation composée (2)

Exemple :

Déterminer la matrice d'une symétrie dont l'axe fait un angle α avec l'axe Ox

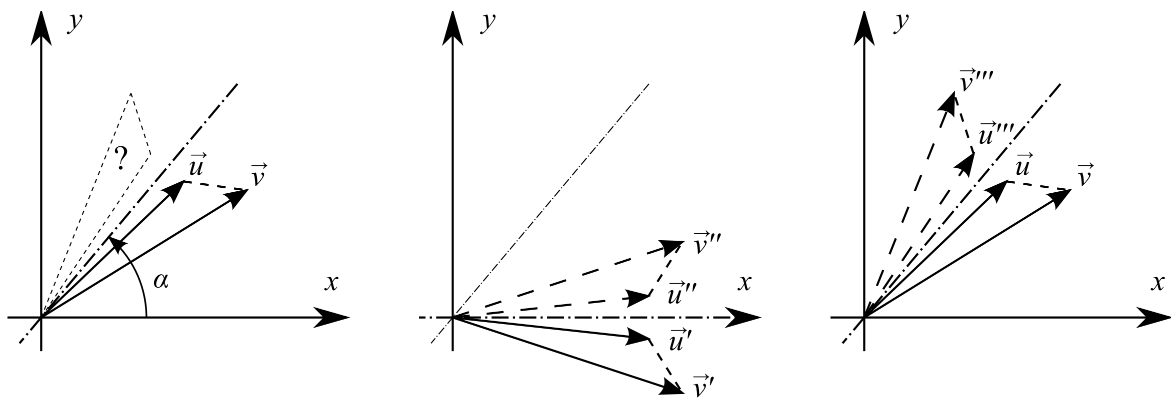
1) par une rotation d'angle $-\alpha$, on ramène le problème sur l'axe Ox : $R_{-\alpha} \cdot \vec{u}$

2) on effectue ensuite la symétrie d'axe Ox : $S_x \cdot (R_{-\alpha} \cdot \vec{u})$

3) puis on revient à la situation de départ par une rotation d'angle $+\alpha$:

$$R_\alpha \cdot (S_x \cdot (R_{-\alpha} \cdot \vec{u}))$$

et finalement, on calcule la matrice $M = R_\alpha \cdot S_x \cdot R_{-\alpha}$ qui a le même effet que la suite de transformations. [Attention à l'ordre des matrices.]



Note : on utilise une méthode un peu analogue lorsque l'on désire faire tourner un objet par rapport à un point différent de l'origine $(0; 0)$: on déplace l'objet à l'origine par une translation vectorielle, puis on fait tourner l'objet par une transformation matricielle, et finalement on redéplace l'objet par la translation réciproque de la première (vecteur opposé).

4. En 3 dimensions

[Souvent dans les théories mathématiques, le passage de 2 dimensions à 3 est plus difficile que les passages de 3 à 4, puis à 5 dimensions,...]

Application : projections et ombres

Lorsqu'on désire représenter en deux dimensions (dessin, écran,...) un objet (ou une scène) calculé en 3 dimensions, une méthode efficace consiste à simplement supprimer une des dimensions; on effectue alors en fait une projection perpendiculaire à la feuille ou l'écran.
Mais dès que l'on désire obtenir une projection particulière (cavalière, dimétrique, isométrique,...) ou une perspective artistique (avec des points de fuite), il faut avoir recours aux matrices.
C'est aussi le cas lorsqu'on désire dessiner des ombres autrement que par ray-tracing.

Application : transformations d'objets

Pour les symétries, les homothéties et les affinités, les matrices en 3D sont analogues à celles de 2D.

Rotations dans l'espace (faciles autour des axes principaux, difficiles autrement). La rotation autour de l'axe des z par exemple s'obtient directement à partir de la rotation dans le plan : la composante z ne change pas et les autres varient exactement comme dans le plan; d'où la matrice $R_{z,\alpha}$ ci-dessous.

$$R_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les autres axes de façon analogue :

$$R_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad R_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Remarque : en 2D, une rotation n'admet pas de valeurs propres (pourquoi ?); en 3D, une rotation admet une valeur propre réelle égale à 1 et deux valeurs propres complexe; les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 1 donnent la direction de l'axe de rotation (ce qui donne donc une façon de déterminer cet axe).

5.$^\diamond$ Quelques notes supplémentaires

1. Le polynôme que l'on obtient en calculant les valeurs propres d'une matrice $P(x) = \det(A - xI)$ s'appelle **polynôme caractéristique** de cette matrice. Il vérifie la propriété $P(A) = 0$, autrement dit, si on remplace x par la matrice, on obtient la matrice nulle (ce qui permet notamment de simplifier le calcul des puissances).
Le polynôme caractéristique peut aussi s'écrire :

$P(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (x - \lambda_n)^{\alpha_n}$
où les λ_i sont les valeurs propres et les α_i leurs multiplicités respectives.
On appelle **polynôme minimal** d'une matrice le polynôme de plus petit degré qui s'annule pour cette matrice. Il comporte les mêmes termes que le polynôme caractéristique (écrit sous la forme ci-dessus) mais avec (éventuellement) des multiplicités plus petites.

2. Si une matrice n × n admet n vecteurs propres linéairement indépendants, on peut diagonaliser la matrice par un changement de base : $P^{-1} \cdot A \cdot P$ (où P est la matrice dont les colonnes sont les n vecteurs propres).

3. Coordonnées homogènes : en ajoutant une dimension supplémentaire fictive, il est possible d'utiliser les matrices pour effectuer des translations (ce qui permet de n'avoir que des transformations matricielles dans les calculs). Une matrice 3×3 permet alors de faire toutes les transformations planes usuelles (par exemple en CSS3) et une matrice 4×4 toutes les transformations usuelles de l'espace (par exemple : jeux video).
Note : cette dimension supplémentaire permet aussi d'accéder facilement au dessin en perspective artistique (= à points de fuite).
Pour davantage de détails voir : `23-SupplCoordHomogenes.pdf`

En CSS3 (et aussi dans les *canvas* HTML5), on n'utilise en fait que les deux premières lignes d'une matrice 3×3 (la troisième étant toujours égale à [0, 0, 1]).
Pour davantage de détails voir : `http://www.w3.org/TR/css3-2d-transforms`
et `http://www.w3.org/TR/SVG/coords.html#TransformMatrixDefined`
Mais néanmoins toujours se souvenir des points suivants :
1) en informatique, l'origine des axe est en général en haut à gauche (et non en bas à gauche comme en maths);
2) bien souvent, on ne se préoccupe pas de la convention faite ici en page 2 et donc la matrice agit sur un point écrit après (même si mathématiquement c'est incorrect) (conséquence : les rotations sont dans l'autre sens); [en fait, les matrices sont simplement transposées]
3) bien souvent les matrices n'agissent pas sur des objets mais déplacent le système d'axes; on peut alors utiliser des instructions `pushMatrix` et `popMatrix` qui permettent de mettre en mémoire une position et de la reprendre plus tard.

4. Autre application : les fractals de type IFS (Iterated Fonction System) et leur généralisation de type *Flame*. Voir par exemple le logiciel *Apophysis*.

6. Annexe sur le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres

6.1 La méthode résumée

1) On détermine les valeurs propres λ d'une matrice A en résolvant l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ (avec I : matrice identité)
2) On calcule ensuite les vecteurs propres associés à chaque valeur propre en résolvant chaque système $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

6.2 Le pourquoi des choses

La définition des valeurs et vecteurs propres d'une matrice A dit que l'on cherche des nombres λ et des vecteurs $\vec{u}$ tels que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. On peut déjà faire deux remarques :
1) Le vecteur nul **est** une solution possible (mais il est exclu dès le départ).
2) Si un vecteur $\vec{u}$ est solution, alors tous les multiples de $\vec{u}$ sont également solutions.

Venons-en maintenant à la résolution de l'équation vectorielle $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Lorsqu'on passe en composantes, on obtient un système de n équations à n inconnues. Mais ce système est toujours un système *homogène*, c'est-à-dire un système où les équations n'ont pas de terme constant (elles se terminent toutes par '$= 0$').

En deux dimensions, par exemple, on obtient le système $\begin{cases} ax + by - \lambda x = 0 \\ cx + dy - \lambda y = 0 \end{cases}$

Or les systèmes homogènes ont une particularité par rapport à leurs solutions : ils admettent toujours la solution nulle ($x = 0$ **et** $y = 0$) et s'ils ont une autre solution, alors tous les multiples de cette solution sont aussi des solutions. En particulier le cas 'pas de solution' ne se présente pas pour de tels systèmes. Et le cas qui nous intéresse ici est donc le cas 'infinité de solutions'.
Dans le chapitre sur les matrices, on a vu que le déterminant d'une matrice permettait de savoir si un système admet une seule solution ou non (le cas d'une seule solution étant celui du déterminant non nul). Or ici on veut qu'il y ait une infinité de solutions, donc il faut que le déterminant du système soit nul et c'est pour cela que l'on commence par chercher les nombres λ tels que $\det(A - \lambda I) = 0$

Remarque : on a bien $A\vec{u} = \lambda\vec{u} \ \Rightarrow \ A\vec{u} - \lambda\vec{u} = \vec{0}$, mais si on veut mettre $\vec{u}$ en évidence, il faut tout écrire matriciellement, en utilisant le fait que $\lambda\vec{u} = \lambda I\vec{u}$ (où I est la matrice identité de dimension adéquate).

En résumé / conclusion :
On cherche donc bien les valeurs de λ pour lesquelles le système obtenu admet une infinité de solutions tout en sachant que pour les autres valeurs que l'on pourrait donner à λ le système n'admettra que la solution nulle ($x = 0$ et $y = 0$).

Autrement dit : lorsque λ **est** une valeur propre (et seulement dans ce cas-là) le système admet une infinité de solutions (ce qui est correct).
Si λ n'est pas une valeur propre le système admet uniquement la solution nulle (ce qui signifie qu'on a fait une erreur quelque part).

6.3 Conséquences pour les solutions que l'on obtient

Lorsqu'on résout les systèmes d'équations pour trouver les vecteurs propres :
1) si on obtient des valeurs numériques non nulles pour x et/ou y, c'est qu'on s'est trompé à quelque part;
2) si on obtient la seule solution $x = 0$ **et** $y = 0$, on s'est également trompé.

On **doit** absolument obtenir une infinité de solutions.
En deux dimensions, ces solutions peuvent se présenter de différentes façons :
1) $x = 0$ et y qui disparaît des équations
2) $y = 0$ et x qui disparaît des équations
3) une équation qui donne $0 = 0$ et l'autre qui donne une relation entre x et y (par exemple $3x = 5y$)
4) les deux équations qui donnent la même relation entre x et y (après simplification éventuelle)
Tout autre cas est suspect ou alors dénote une résolution incomplète.

6.4 Comment exprimer les vecteurs propres

Lorsqu'on a résolu les systèmes d'équations, il faut encore exprimer les solutions trouvées sous forme de vecteurs, puisqu'on cherchait des **vecteurs** propres. En deux dimensions, on a généralement une direction de vecteur propre pour chaque valeur propre. Il suffit donc de donner **un** vecteur pour chaque valeur propre et de dire que les autres sont leurs multiples.
Deux cas se présentent :
1) si les solutions obtenues sont du type $x = 0$ et y quelconque, il suffit de donner un vecteur du type $\begin{pmatrix} 0 \\ 42 \end{pmatrix}$ (ou avec n'importe quoi à la place de 42).
En général, on donne plutôt le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
[Méthode analogue dans le cas où $y = 0$ et x quelconque.]
2) si les solutions sont données par une relation entre x et y, il faut essayer de trouver un vecteur satisfaisant à cette relation; le plus simple, c'est de poser $x = 1$ et de calculer la valeur de y correspondante, mais il est plus joli d'essayer de trouver des valeurs entières.

Exemple : avec $3x = 5y$
a) si on pose $x = 1$, on obtient $y = \frac{3}{5}$ d'où les vecteurs multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}$
b) si on pose astucieusement $x = 5$, on obtient $y = 3$, d'où les vecteurs multiples de $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (qui sont bien évidemment les mêmes)
Note : les machines à calculer donnent généralement des vecteurs unités, autrement dit des vecteurs propres de norme 1
Pour l'exemple, on obtiendrait donc la valeur numérique correspondant à $\begin{pmatrix} 5/\sqrt{34} \\ 3/\sqrt{34} \end{pmatrix}$