Matrices : cours

1. Introduction

On appelle **matrice m × n** un tableau de nombres à m lignes et n colonnes.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & \pi \\ \sqrt{5} & 45 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice 2 × 3.

◇ On note généralement les matrices par des majuscules (ou alors par leurs éléments).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{Notation générale : } A = (a_{ij})$$

a_{53} désignant le coefficient de la 5^e^ ligne et de la 3^e^ colonne (on lit donc *a cinq trois*)
(on met une virgule si les coefficients dépassent 9 : $a_{10,13}$)

Deux cas particuliers de matrices :
1) les vecteurs sont des matrices à 1 colonne;
2) si m = n, on parle de matrice **carrée**,
les éléments a_{11}, a_{22}, a_{33},... formant alors la **diagonale principale**.

2. Opérations

Addition et soustraction

On additionne (respectivement soustrait) les éléments correspondants.
Conséquence : uniquement possible si les dimensions sont les mêmes.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

On multiplie tous les éléments.
Exemple :

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \end{pmatrix}$$

Propriétés : semblables à celles des opérations avec les vecteurs.
On obtient également une structure d'espace vectoriel.

Transposée

On écrit les lignes en colonnes (et donc les colonnes en lignes), la première ligne devenant la première colonne, etc...

Exemple : ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Notation : ${}^tA$ (autres notations : A^t, ${}^TA$ ou encore A^T (comme sur les TI-89 et autres))

$\diamond$ Note : dans les tableurs (Excel, OpenOffice,...) il est possible de copier / coller en transposant (cocher la case ad hoc).

Propriétés de la transposée :

1) ${}^t({}^tA) = A$

2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

3) ${}^t(k \cdot A) = k \cdot {}^tA \quad$ avec $k \in \mathbb{R}$

4) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ (attention : l'ordre change !)

Produit matriciel

On fait pour chaque nouvel élément la somme des produits de chaque élément d'une ligne par chaque élément correspondant d'une colonne (somme-produit ligne par colonne).

1) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \cdots = c_{11}$

2) $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \circ \\ \cdot & \circ \\ \cdot & \circ \\ \cdot & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \circ \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + \cdots = c_{12}$

3) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \diamond & \cdot \\ \diamond & \cdot \\ \diamond & \cdot \\ \diamond & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \diamond & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + \cdots = c_{21}$

4) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \triangleright & \triangleright & \triangleright & \triangleright \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \triangleright \\ \cdot & \triangleright \\ \cdot & \triangleright \\ \cdot & \triangleright \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \triangleright \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} + \cdots = c_{22}$

etc... [*somme sur j des $a_{ij} \cdot b_{jk}$ donne c_{ik}*]

1) 1ère ligne (1ère matrice) *somme-produit* 1ère colonne (2e matrice) *donne* $c_{1,1}$

2) 1ère ligne (1ère matrice) *somme-produit* 2e colonne (2e matrice) *donne* $c_{1,2}$

3) 2e ligne (1ère matrice) *somme-produit* 1ère colonne (2e matrice) *donne* $c_{2,1}$

etc...

Exemple :

Calcul du produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

Calcul du premier élément de la première ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & \cdot \\ 9 & \cdot \\ 11 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 18 + 33 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Calcul du deuxième élément de la première ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} . & 8 \\ . & 10 \\ . & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & 8 + 20 + 36 \\ . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & 64 \\ . & . \end{pmatrix}$$

Calcul complet :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

◇ Remarque : il faut bien évidemment que les dimensions soient compatibles

◇ Conséquence : ce produit n'est généralement pas commutatif

Propriétés

Les propriétés habituelles, sauf :

1) Non commutativité : $A \cdot B \neq B \cdot A$ (en général)

2) Attention avec la transposée : ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ (attention : l'ordre change !)

3) Attention : un produit peut être nul sans que les termes ne le soient.

4) Les éléments neutres de la multiplication matricielle sont les matrices suivantes (appelées **matrices identité**) :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $A \cdot I = I \cdot A = A$ S'il n'y a pas de confusion possible sur les dimensions de la matrice, on note I au lieu de I_n

Exemple de produit nul

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 10 \\ -6 & 3 & -15 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

on a : $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $B \cdot A = \begin{pmatrix} 66 & 2 & -126 \\ -99 & -3 & 189 \\ 33 & 1 & -63 \end{pmatrix}$

Exemple 2 × 2 (moins bien camouflé) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque : les formules de calcul matriciel (en particulier celle du produit) sont généralement implémentées dans les tableurs. Mais vu que leur résultat ne donne pas une seule cellule, mais bien une plage de cellules, leur utilisation est un peu spéciale.

Exemples pour **Excel** dans `05-CalculMatriciel.xls` (avec les fonctions : `TRANSPOSE` : transposition d'une matrice, `PRODUITMAT` : produit de deux matrices et `INVERSEMAT` : calcul de l'inverse d'une matrice). $\longrightarrow$

Dans **OpenOffice**, utiliser l'Assistant Fonctions (la plage nécessaire pour la matrice solution sera sélectionnée automatiquement).

3. Déterminants et inverses des matrices carrées

Déterminant d'une matrice 2 × 2

C'est le nombre donné par :

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Déterminant d'une matrice 3 × 3

C'est le nombre donné par :

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1{\cdot}5{\cdot}9+2{\cdot}6{\cdot}7+3{\cdot}4{\cdot}8-7{\cdot}5{\cdot}3-8{\cdot}6{\cdot}1-9{\cdot}4{\cdot}2 = 45+84+96-105-48-72 = 0$$

Moyen mnémotechnique (règle de Sarrus)

On réécrit à droite les deux premières colonnes de gauche puis on prend positivement le produit des termes en diagonales descendantes et négativement les diagonales montantes.

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} \qquad \begin{array}{c} \oplus \\ \\ \ominus \end{array}$$

◇ Attention : la définition et la règle de Sarrus ne se généralisent pas aux dimensions supérieures (le calcul d'un déterminant 4 × 4 nécessite par exemple de calcul de 4 sous-déterminants 3 × 3,...).

Inverses des matrices carrées

Une matrice A étant donnée; existe-t-il une matrice A^{-1} telle que $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = I$?

Formule de l'inverse dans le cas 2 × 2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}{\cdot}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Note : $ad - bc$: déterminant
et si $\det(A) = 0$, l'inverse n'existe pas.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2{\cdot}3-1{\cdot}4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
De même :
$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration de la formule

Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ étant donnée, cherchons une matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que leur produit donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ autrement dit telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

que l'on désire être égale à la matrice identité; d'où le système :

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ ay+bt=0 \\ cx+dz=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}$$

qui se divise en fait en deux sous-systèmes de 2 équations à 2 inconnues.

Résolution du premier sous-système :

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \frac{d}{ad-bc} \text{ et } z = \frac{-c}{ad-bc}$$

Résolution du deuxième sous-système :

$$\begin{cases} ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow y = \frac{-b}{ad-bc} \text{ et } t = \frac{a}{ad-bc}$$

Chacune des dernières divisions n'étant bien sûr possible que si le déterminant est non nul.

[[**Inverse des matrices n $\times$ n**]]

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\left((-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \right)$ où les D_{ij} sont les sous-déterminants obtenus en supprimant chaque fois la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice de départ

Note : la multiplication par $(-1)^{i+j}$ revient à changer le signe de tous les D_{ij} dont la somme du numéro de ligne et du numéro de colonne donne un nombre impair; autrement dit, tous ceux placés dans les positions $\ominus$ suivantes (disposés en damier).

$$A = \begin{pmatrix} \oplus & \ominus & \oplus & \cdots \\ \ominus & \oplus & \ominus & \cdots \\ \oplus & \ominus & \oplus & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple : calcul de l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

1) Déterminant : $\det A = -14$

2) Les D_{ij} :

$$D_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 5 & 0 \\ \cancel{2} & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 6 \cdot 0 = -15$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ 2 & \cancel{5} & 0 \\ 2 & \cancel{6} & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 = -6$$

Idem pour D_{13}, D_{21}, D_{22}, D_{23},...

La matrice de tous les D_{ij} avant les changements de signes : $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} -15 & \mathbf{-6} & 2 \\ \mathbf{-3} & -4 & \mathbf{6} \\ -10 & \mathbf{-4} & 6 \end{pmatrix}$

3) Après les changements de signes : $(-1)^{i+j}(D_{ij}) = \begin{pmatrix} -15 & \mathbf{6} & 2 \\ \mathbf{3} & -4 & \mathbf{-6} \\ -10 & \mathbf{4} & 6 \end{pmatrix}$

4) Après transposition : ${}^t\Big(\ (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \ \Big) = \begin{pmatrix} -15 & 3 & -10 \\ 6 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

5) D'où finalement l'inverse : $A^{-1} = -\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 3 & -10 \\ 6 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

Propriétés des inverses

1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

2) ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (attention : l'ordre change !)

4) $(A + B)^{-1}$: pas de propriété

4. Application des matrices à la résolution des systèmes d'équations

1) Résolution par déterminants

Les solutions du système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

sont données par : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

Et celles du système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

par : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$ et $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$

$\longrightarrow$

Au dénominateur : le déterminant du système.
Au numérateur : le déterminant du système dans lequel on a remplacé la colonne correspondant à la variable par la colonne des termes constants (1ère colonne pour x, 2e colonne pour y,...).

◇ Conséquence : il faut que le déterminant soit non nul pour avoir une solution unique. Si le déterminant est nul, le système aura soit une infinité de solutions, soit pas de solution.

◇ A noter, le cas des systèmes **homogènes** (= ceux dont la colonne $\vec{b}$ est nulle) : ils admettent bien évidement toujours la solution nulle ($x = 0$, $y = 0$,...). Donc si le déterminant du système est nul, cette solution est unique et si le déterminant est non nul, cette solution fait partie de l'infinité des cas. Le cas *sans solution* ne se présente donc pas pour les systèmes homogènes.

2) Résolution par matrice inverse

Un système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire sous forme d'un produit matriciel.

Par exemple, le système : $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

peut s'écrire sous la forme : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

ou en notation plus compacte : $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Ce qui permet une résolution par matrice inverse :
en multipliant l'équation matricielle $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ par A^{-1} (depuis la gauche),
on obtient : $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Rightarrow I \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

◇ Attention : vu que la multiplication matricielle n'est pas commutative, il est très important (ci-dessus) de multiplier les deux fois depuis la gauche.

Cette méthode de résolution n'est pas particulièrement plus simple que la méthode par combinaisons linéaires, vu qu'elle nécessite le calcul de l'inverse d'une matrice. Elle peut néanmoins se révéler utile dans deux cas :
- si on doit résoudre plusieurs fois le système $A \cdot \vec{x}$ avec des colonnes $\vec{b}$ différentes;
- si on utilise un tableur pour la résolution (voir `01-SystemesDEquations.xls`).

◇ Historiquement : on a d'abord mis en place la théorie des déterminants (dès le 18e siècle) pour la résolution des systèmes d'équations et ce n'est qu'au 19e siècle que l'on a développé la théorie des matrices pour l'écriture synthétique des transformations planes.