Limites et continuité : exemples corrigés

Corrigé des exemples du cours

1) Lorsqu'une fonction n'a pas de trou dans son domaine de définition et pas de bizarrerie d'autre sorte, alors si x s'approche d'une valeur, $f(x)$ s'approche de f de cette valeur. Donc ici $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2+3 = 5$ pour la première fonction et $2^3 - 5\cdot 2 + 3 = 8 - 10 + 3 = 1$ pour la deuxième

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ 1 divisé par un nombre très petit (proche de zéro) donne un nombre très grand; plus x est proche de zéro, plus le résultat est grand, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
Remarque : ∞ n'est pas un nombre réel, mais lorsque l'on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, il faut voir cela comme une notation pour dire que le résultat devient de plus en plus grand, comme une notation plus compacte pour dire "si $x \to 0$ alors $f(x) \to \infty$

3a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'est pas définie; en effet si on s'approche de zéro par des valeurs négatives, le résultat ne sera pas $+\infty$, mais $-\infty$; comme ici rien n'est dit sur la façon dont on s'approche de zéro, on ne peut pas conclure. Dans l'exemple précédent, on avait x^2 donc assurément des valeurs positives; dans les deux sous-cas suivants, on précise la façon dont on s'approche de zéro, ce qui permet les calculs. Mais il n'y a pas que ces deux façons d'approcher zéro; dans les nombres complexes par exemple on pourrait s'approcher de zéro en spirale ou par une droite oblique.

3b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ 3c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Note : les notations 0^- et 0^+ sont très utilisées comme notations plus compactes pour dire que l'on s'approche depuis la gauche resp depuis la droite; on peut les utiliser avec d'autres nombres que zéro : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ mais cela devient un peu confus avec les nombres négatifs $\lim\limits_{x\to -7^-} f(x)$ et dans ce cas il vaut mieux les éviter.

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 1} (x+1) \overset{(3)}{=} 2$
(1) : on factorise $x^2 - 1$
(2) : on simplifie par $(x-1)$, c'est autorisé car dans la définition de la limite, il est précisé *proche de* a, *mais différent de* a.
(3) : comme dans l'exemple 1.
Remarque : la seule différence entre les fonctions $\frac{x^2-1}{x-1}$ et $x+1$ est leur domaine de définition : $\mathbb{R} - \{1\}$ pour la première et $\mathbb{R}$ pour la deuxième. Le graphe de la première

fonction est la même droite que $x+1$ avec juste un trou au point $P(1;2)$. La notion de limite est donc une façon de pouvoir dire exactement où se trouve le trou.

5a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ La fonction $\frac{|x|}{x}$ vaut 1 si x est positif et -1 si x est négatif; elle n'est pas définie en zéro. Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ n'est pas définie (comme dans l'exemple 3a) et :

5b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ 5c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

6a) $\lim\limits_{x\to 3/2} \frac{-5x+2}{2x-3}$ Lorsqu'on s'approche de $\frac{3}{2}$, on a $-5x+2 \to -\frac{11}{2}$ et $2x-3 \to 0$. Vu que l'on ne sait pas de quelle façon on s'approche de $\frac{3}{2}$, on se retrouve dans la même situation qu'à l'exemple 3a, donc la limite n'est pas définie.

Si par contre on précise les choses, on obtient :

6b) Pour $x \to 3/2^-$, on a $2x-3 \to 0^-$ et donc $\frac{-5x+2}{2x-3} \to \frac{-\frac{11}{2}}{0^-} \to +\infty$ et ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 3/2\\ x<3/2}} \frac{-5x+2}{2x-3} = +\infty$ (attention au signe *moins* du numérateur $-\frac{11}{2}$)

6c) Pour $x \to 3/2^+$, on a $2x-3 \to 0^+$ et donc $\frac{-5x+2}{2x-3} \to \frac{-\frac{11}{2}}{0^+} \to -\infty$ et ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 3/2\\ x>3/2}} \frac{-5x+2}{2x-3} = -\infty$ (attention au signe *moins* du numérateur $-\frac{11}{2}$)

7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-5x+2}{2x-3}$ En essayant des valeurs de x très très grandes, on s'aperçoit que la fonction semble se stabiliser autour de la valeur $-\frac{5}{2}$.

Méthode de calcul : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5x+2}{2x-3} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5+\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}} \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5}{2} \overset{(3)}{=} -\frac{5}{2}$

(1) : on divise chaque terme par x

(2) : si $x\to\infty$ alors $\frac{1}{x}\to 0$

(3) : comme dans l'exemple 1

On calcule de même $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-5x+2}{2x-3} = -\frac{5}{2}$ et vu que les deux résultats sont égaux, on peut les écrire en un seul (avec $\pm$) : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-5x+2}{2x-3} = -\frac{5}{2}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Un exemple classique relativement difficile à calculer (application de la géométrie et des formules de trigonométrie). Mais :

- les TI-89 et autres le calculent sans difficultés;
- les formulaires comportent un certain nombre de limites spéciales déjà calculées.

9) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'est pas définie. Une fonction très spéciale : le cosinus est une fonction périodique qui oscille entre -1 et 1; ici on calcule le cosinus de $\frac{1}{x}$, ainsi plus on s'approche de zéro, plus $\frac{1}{x}$ devient grand et plus il y a d'oscillations et donc jamais de stabilisation autour d'un valeur bien définie.