Dérivées : exercices

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^9$

2) $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^7$

3) $f(x) = 3^7 \cdot \sqrt{x}$

4) $f(x) = 5 \cdot \sqrt[7]{x}$

5) $f(x) = 4\sqrt{7x}$

6) $f(x) = 5x^3 - \sqrt{7}\,x^2 + \frac{\pi}{4}x - 9$

7) $f(x) = ax^2 + bx + c$

8) $f(x) = a\sin x - b\cos x$

9) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

10) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x^3}$

11) $f(x) = x^3\,\sin x$

12) $f(x) = 3\cos^2 x$

13) $f(x) = (x^2 - 3)(2x + 5)$

14) $f(x) = (x^4 - 3x^3 + 5x - 1)^2$

15) $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

16) $f(x) = 7\mathrm{e}^x$

[[17)]] $f(x) = 7\mathrm{e}^{2x}$

[[18)]] $f(x) = 7\mathrm{e}^{4x}$

19) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

20) $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{x^2 + 1}$

21) $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{x - 3}$

22) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 2}$

23) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - \dfrac{x}{x^2 + 1}$

24) $f(x) = \sin(2x^3 - 3)$

25) $f(x) = (2x^3 - 3)^3$

26) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3}$

27) $f(x) = \sqrt{(2x^3 - 3)^3}$

28) $f(x) = \sin((2x^3 - 3)^3)$

29) $f(x) = (x^3 - 5x^2 + 2x - 3)^7$

30) $f(x) = \cos^5 x$

31) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

32) $f(x) = (2x^2 + 1)^3(3x^2 - 2)^2$

[[33)]] $f(x) = \mathrm{e}^{2x^3 - 3}$

[[34)]] $f(x) = 7\mathrm{e}^{-2x}$

[[35)]] $f(x) = 7\mathrm{e}^{x^2}$

[[36)]] $f(x) = 2^x$

[[37)]] $f(x) = x^x$

38) $f(x) = \ln(2x^3 - 3)$

39) $f(x) = \ln(\cos x)$

40) $f(x) = \ln(5x)$

[[41)]] $f(x) = \log x$

[[42)]] $f(x) = \log_2(2x^3 - 3)$

43) $f(x) = \dfrac{1}{(2x^3 - 3)^5}$

[[44)]] $f(x) = \dfrac{(4x - 2)^2}{(5x + 3)^3}$

45) Calculer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ en son point d'abscisse 3. [Note : voir éventuellement le dessin sur la dernière page.]

46) Déterminer une équation de la parabole de sommet $S(3; -5)$ ayant en $P(0; ?)$ une tangente de pente -18. [Note : voir éventuellement le dessin sur la dernière page.]

47) Déterminer l'équation d'une fonction polynomiale du 3e degré dont le graphe est symétrique par rapport à l'origine et admet un maximum (relatif) en $(2; 3)$ (et donc par symétrie un minimum en $(-2; -3)$).

Solutions

1) $f'(x) = 27x^8$ **2)** $f'(x) = 7\sqrt{3} \cdot x^6$
3) $f'(x) = \frac{3^7}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, que l'on peut aussi écrire $\frac{3^7}{2\sqrt{x}}$
4) $f'(x) = \frac{5}{7}x^{-\frac{6}{7}}$, que l'on peut aussi écrire $\frac{5}{7\cdot\sqrt[7]{x^6}}$
5) $f'(x) = 2\sqrt{7}x^{-\frac{1}{2}}$, que l'on peut aussi écrire $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{x}}$ **6)** $f'(x) = 15x^2 - 2\sqrt{7}x + \frac{\pi}{4}$
7) $f'(x) = 2ax + b$ **8)** $f'(x) = a\cos x + b\sin x$ **9)** $f'(x) = -6x^{-3}$, que l'on peut aussi écrire $-\frac{6}{x^3}$ **10)** $f'(x) = \frac{-3x^2-10x+6}{x^4}$, que l'on peut aussi écrire $-\frac{3}{x^2} - \frac{10}{x^3} + \frac{6}{x^4}$, ou encore $-3x^{-2} - 10x^{-3} + 6x^{-4}$ **11)** $f'(x) = 3x^2\,\sin x + x^3\,\cos x$
12) $f'(x) = -6\sin x\cos x$ **13)** $f'(x) = 6x^2 + 10x - 6$
14) $f'(x) = 2(x^4 - 3x^3 + 5x - 1)(4x^3 - 9x^2 + 5)$ **15)** $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$
16) $f'(x) = 7\mathrm{e}^x$ **17)** $f'(x) = 14\mathrm{e}^{2x}$ **18)** $f'(x) = 28\mathrm{e}^{4x}$ **19)** $f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$
20) $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+1)^2}$ **21)** $f'(x) = \frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$ **22)** $f'(x) = \frac{-6x+5}{(3x^2-5x+2)^2}$
23) $f'(x) = 6x^2 + 6x - \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 6x^2 + 6x + \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$
24) $f'(x) = 6x^2\cos(2x^3 - 3)$ **25)** $f'(x) = 18x^2(2x^3 - 3)^2$
26) $f'(x) = 3x^2(2x^3 - 3)^{-\frac{1}{2}}$, que l'on peut aussi écrire $\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-3}}$
27) $f'(x) = 9x^2\sqrt{2x^3 - 3}$ **28)** $f'(x) = 18x^2(2x^3 - 3)^2\cos((2x^3 - 3)^3)$
29) $f'(x) = 7(3x^2 - 10x + 2)(x^3 - 5x^2 + 2x - 3)^6$ **30)** $f'(x) = -5\sin x\cos^4 x$
31) $f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0$ **32)** $f'(x) = 12x\,(2x^2+1)^2(3x^2-2)(5x^2-1)$
33) $f'(x) = 6x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x^3-3}$ **34)** $f'(x) = -14\mathrm{e}^{-2x}$ **35)** $f'(x) = 14x\mathrm{e}^{x^2}$
36) $f'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x$ **37)** $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$ **38)** $f'(x) = \frac{6x^2}{2x^3-3}$
39) $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ ♡**40)** $f'(x) = \frac{1}{x}$ **41)** $f'(x) = \frac{1}{x\ln 10}$
42) $f'(x) = \frac{6x^2}{(2x^3-3)\ln 2}$ **43)** $f'(x) = -30x^2(2x^3 - 3)^{-6}$ **44)** $f'(x) = \frac{(4x-2)(-20x+54)}{(5x+3)^4}$
45) $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$ **46)** $y = 3(x - 3)^2 - 5 = 3x^2 - 18x + 22$
47) $f(x) = -\frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{4}x$

Quelques aides et indications

2) Ne pas dériver $\sqrt{3}$: c'est un nombre.

3) Ne pas dériver 3^7 : c'est un nombre; transformer $\sqrt{x}$ en puissance fractionnaire.

5) Ne pas essayer de dériver directement $\sqrt{7x}$ (c'est une fonction composée); séparer en deux parties : $\sqrt{7x} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{x}$ (et continuer comme pour les exercices 2 et 3).

9) A transformer en puissance négative.

10) Diviser membre à membre : $\frac{3x^2+5x-2}{x^3} = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{2}{x^3} = \cdots$ et transformer en puissances négatives.

12) A dériver comme un produit : $3\cos^2 x = (3\cos x)(\cos x)$

13) à 15) Lorsqu'on a à dériver un produit de fonctions, il est quelquefois plus simple d'effectuer le produit avant de dériver et d'autres fois plus simple de dériver directement. Mais il faut aussi se souvenir que bien souvent la dérivation n'est qu'une première étape

du problème et qu'il faudra souvent ensuite chercher le signe de cette dérivée ou tout au moins voir pour quelles valeurs elle s'annule. Et dans ces cas, il est souvent pratique d'avoir une dérivée sous forme déjà plus ou moins factorisée.
Donc essayer de conserver une factorisation au 14, mais pas nécessaire pour le 13 et le 15, vu qu'on obtiendra une fonction du deuxième degré (donc $\Delta = \cdots$).

14) A dériver comme un produit.
$((\cdots)^2)' = ((\cdots)\cdot(\cdots))' = (\cdots)'(\cdots) + (\cdots)(\cdots)' = 2(\cdots)'(\cdots)$

15) On a bien : $(f\cdot g\cdot h)' = (f\cdot g)'\cdot h + f\cdot g\cdot h' = f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$, mais c'est plus simple d'effectuer le produit avant de dériver.

17) A dériver comme un produit : $7\mathrm{e}^{2x} = (7\mathrm{e}^{x})(\mathrm{e}^{x})$

18) A dériver comme un produit : $7\mathrm{e}^{4x} = (7\mathrm{e}^{2x})(\mathrm{e}^{2x})$

(et utiliser le résultat de l'exercice précédent)
30) A dériver comme une puissance 5 : $((\cdots)^5)' = 5(\cdots)^4(\cdots)'$

32) Essayer de conserver la factorisation le plus possible; en particulier faire des mises en évidence finale. (Voir aussi la remarque pour les exercices 13 à 15.)

33) à 35) A écrire sous forme exp() et à dériver comme fonctions composées; attention à ne pas utiliser la règle des puissances ($(x^n)' = \cdots$), mais bien la règle des exponentielles : $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ ou plus précisément pour les fonctions composées : $(\mathrm{e}^u)' = u'\cdot \mathrm{e}^u$ ou avec l'autre notation : $(\exp u)' = u'\cdot \exp u$

36) et 37) Utiliser une propriété des logarithmes pour transformer l'exponentielle de base 2 (resp. x) en une exponentielle de base e.

40) Pourquoi la dérivée de cette fonction est-elle la même que celle de la fonction $\ln x$? (Réponse ci-dessous dans les corrigés.)

41) et 42) A transformer en logarithme naturel en utilisant la formule de changement de base.

43) A transformer en puissance négative.

44) Essayer de conserver la factorisation le plus possible; en particulier faire des mises en évidence finale. (Voir aussi la remarque pour les exercices 13 à 15.)

Quelques corrigés

3) $f(x) = 3^7 x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3^7}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3^7}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

4) $f(x) = 5x^{\frac{1}{7}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{7}x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{5}{7}x^{-\frac{6}{7}}$

5) $f(x) = 4\sqrt{7}\cdot\sqrt{x} = 4\sqrt{7}\cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 4\sqrt{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = 2\sqrt{7}x^{-\frac{1}{2}}$

10) $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{x^3} = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{2}{x^3} = 3x^{-1} + 5x^{-2} - 2x^{-3}$
$\Longrightarrow\ f'(x) = (-1)\cdot 3\cdot x^{-2} + (-2)\cdot 5\cdot x^{-3} - (-3)\cdot 2\cdot x^{-4} = -3x^{-2} - 10x^{-3} + 6x^{-4}$
(que l'on pourrait encore mettre au même dénominateur).

11) $f'(x) = (x^3)'(\sin x) + (x^3)(\sin x)' = (3x^2)(\sin x) + (x^3)(\cos x)$

12) $f'(x) = (3\cos x)'(\cos x) + (3\cos x)(\cos x)' = (-3\sin x)(\cos x) + (3\cos x)(-\sin x) =$
$-3\sin x\cos x - 3\sin x\cos x = -6\sin x\cos x$

13) $f'(x) = 2x(2x+5) + (x^2-3)\cdot 2 = 6x^2 + 10x - 6$ ou bien effectuer d'abord

15) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$

19) $f'(x) = \frac{1(x-3)-(x-2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{-1}{(x-3)^2}$

20) $f'(x) = \frac{(-2x)(x^2+1)-(5-x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-12x}{(x^2+1)^2}$

21) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x-3)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-3)(x-3)-(x^2-3x+2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$

22) $f(x) = \frac{1}{3x^2-5x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0\cdot(3x^2-5x+2)-1\cdot(6x-5)}{(3x^2-5x+2)^2} = \frac{-6x+5}{(3x^2-5x+2)^2}$
Mais plus simple en considérant $f(x)$ comme une fonction composée :
$f(x) = (3x^2-5x+2)^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1)\cdot(\cdots)^{-2}\cdot(\cdots)' = \cdots$

23) $f'(x) = 6x^2 + 6x - \frac{1(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = 6x^2 + 6x - \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 6x^2 + 6x + \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

25) $f'(x) = 3(2x^3-3)^2(6x^2) = 18x^2(2x^3-3)^2$

26) $f(x) = (2x^3-3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(2x^3-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6x^2 = 3x^2(2x^3-3)^{-\frac{1}{2}}$

27) $f(x) = (2x^3-3)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(2x^3-3)^{\frac{1}{2}}\cdot 6x^2 = 9x^2\sqrt{2x^3-3}$

28) $f'(x) = \cos((2x^3-3)^3)\cdot((2x^3-3)^3)' = \cos((2x^3-3)^3)\cdot(3(2x^3-3)^2\cdot(2x^3-3)') =$
$\cos((2x^3-3)^3)\cdot(3(2x^3-3)^2\cdot 6x^2) = 18x^2(2x^3-3)^2\cos((2x^3-3)^3)$

30) $f'(x) = ((\cos x)^5)' = 5(\cos x)^4(\cos x)' = 5(\cos x)^4(-\sin x) = -5\sin x\cos^4 x$

32) $f'(x) = ((2x^2+1)^3)'(3x^2-2)^2 + (2x^2+1)^3((3x^2-2)^2)'$
$= 3(2x^2+1)^2(4x)(3x^2-2)^2 + (2x^2+1)^3\cdot 2\cdot(3x^2-2)^1\cdot 6x$
$= (12x)(2x^2+1)^2(3x^2-2)^2 + (12x)(2x^2+1)^3(3x^2-2)$
$= (12x)(2x^2+1)^2(3x^2-2)((3x^2-2)+(2x^2+1)) = 12x\,(2x^2+1)^2(3x^2-2)(5x^2-1)$
Note : structure de la mise en évidence ci-dessus : $(12x)\,a^2b^2 + (12x)\,a^3b = 12x\,a^2b(b+a)$
avec $a = (2x^2+1)$ et $b = (3x^2-2)$

36) On a $2 = \mathrm{e}^{\ln 2} \Rightarrow 2^x = (\mathrm{e}^{\ln 2})^x = \mathrm{e}^{((\ln 2)\cdot x)}$

et ainsi $(2^x)' = (\mathrm{e}^{((\ln 2)\cdot x)})' = (\ln 2)\cdot\mathrm{e}^{((\ln 2)\cdot x)} = (\ln 2)\cdot 2^x$

37) Comme ci-dessus : $x = \mathrm{e}^{\ln x} \Rightarrow x^x = (\mathrm{e}^{\ln x})^x = \mathrm{e}^{(x\cdot(\ln x))}$
Mais avec une différence importante : ici la fonction intérieure $(x\cdot(\ln x))$ n'est plus un produit *nombre fois fonction*, mais bien un produit de deux fonctions qu'il faut dériver comme tel.
Dérivons séparément : $(x\cdot(\ln x))' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 = 1 + \ln x$
Et ainsi $(x^x)' = (\mathrm{e}^{(x\cdot(\ln x))})' = (1+\ln x)\cdot\mathrm{e}^{(x\cdot(\ln x))} = (1+\ln x)\cdot x^x$

40) $(\ln(5x))' = \frac{1}{5x}\cdot(5x)' = \frac{1}{5x}\cdot 5 = \frac{1}{x}$
On peut s'étonner que cette dérivée soit la même que celle de $\ln x$, mais cela provient d'une propriété des logarithmes qui fait que : $\ln(5x) = \ln 5 + \ln x$ et en dérivant des deux côtés : $(\ln(5x))' = (\ln 5)' + (\ln x)' \Rightarrow (\ln(5x))' = 0 + (\ln x)'$

41) On a $f(x) = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$ (Rappel : $\ln 10$ est un *nombre*)

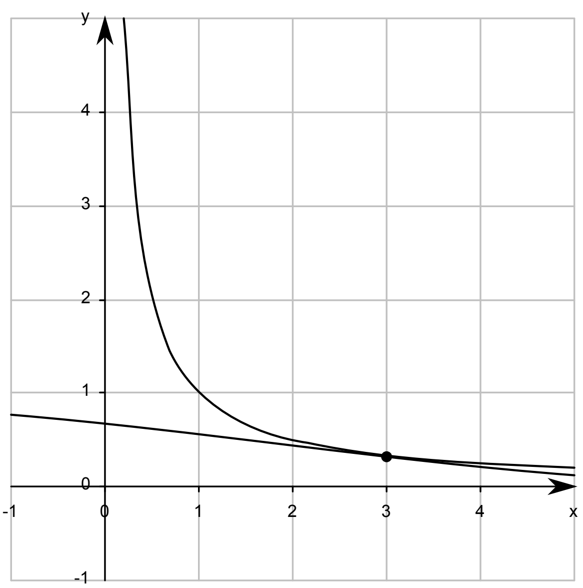
43) $f(x) = (2x^3-3)^{-5} \Rightarrow f'(x) = (-5)(2x^3-3)^{-6}(6x^2) = -30x^2(2x^3-3)^{-6}$

44) $f'(x) = \frac{2\cdot 4\cdot(4x-2)(5x+3)^3-(4x-2)^2\cdot 3\cdot 5\cdot(5x+3)^2}{(5x+3)^6} = \frac{8\cdot(4x-2)(5x+3)^3-15\cdot(4x-2)^2(5x+3)^2}{(5x+3)^6}$
$= \frac{(4x-2)(5x+3)^2[8(5x+3)-15(4x-2)]}{(5x+3)^6} = \frac{(4x-2)(5x+3)^2(-20x+54)}{(5x+3)^6} = \frac{(4x-2)(-20x+54)}{(5x+3)^4}$
Note : structure de la mise en évidence ci-dessus : $8ab^3 - 15a^2b^2 = ab^2(8b-15a)$ avec $a = (4x-2)$ et $b = (5x+3)$

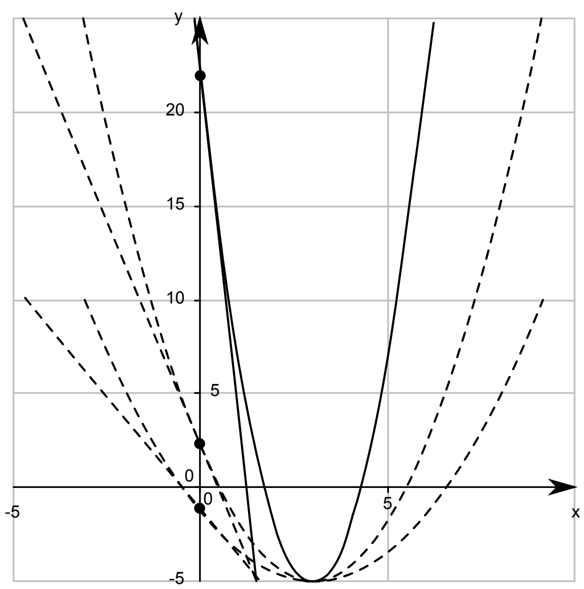
45) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(3) = -\frac{1}{9}$, d'où la tangente par $P(3;\frac{1}{3})$: $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$

46) Parabole de sommet $S(3;-5)$: $f(x) = a(x-3)^2 - 5 = ax^2 - 6ax + 9a - 5$ On dérive pour calculer la pente de la tangente : $f'(x) = 2ax - 6a$, on veut que la dérivée en $P(0;?)$ vaille -18, donc $f'(0) = 2a\cdot 0 - 6a = -18$, donc $a = 3$, d'où l'équation de la parabole : $y = 3(x-3)^2 - 5$ que l'on peut aussi donner sous la forme $y = 3x^2 - 18x + 22$

45)



46)



47) Polynôme général du 3e degré : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Graphe symétrique par rapport à l'origine $\Rightarrow$ fonction impaire $\Rightarrow$ $f(x) = ax^3 + cx$
La fonction passe par $(2;3)$, donc $3 = 8a + 2c$
La fonction admet un maximum en $(2;3)$, donc sa dérivée s'annule en ce point
$f'(x) = 3ax^2 + c$ et ainsi $0 = 3\cdot a\cdot 2^2 + c \Rightarrow 0 = 12a + c$
On résout le système : $\begin{cases} 8a + 2c = 3 \\ 12a + c = 0 \end{cases}$, ce qui donne $a = -\frac{3}{16}$ et $c = \frac{9}{4}$
D'où la fonction : $f(x) = -\frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{4}x$