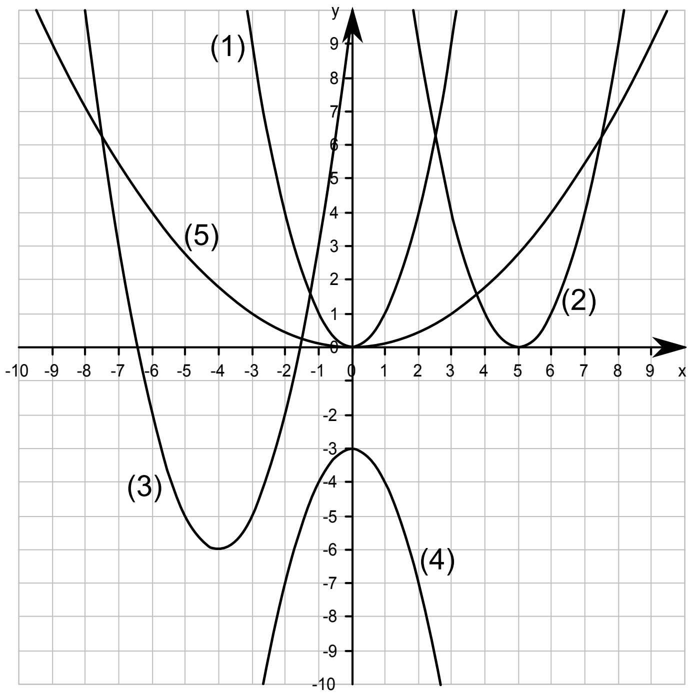
Paraboles : exercices

1.1) Pour la parabole $f_1(x) = 6x^2 - x - 12$, déterminer :
a) les intersections avec l'axe Ox
b) l'intersection avec l'axe Oy
c) les coordonnées du sommet, en précisant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum
1.2) Même problème pour la parabole $f_2(x) = -10x^2 + 19x - 6$

2) Exprimer les deux fonctions suivantes sous la forme $a(x-h)^2 + k$:
I) $f_1(x) = 4x^2 - 12x + 7$
II) $f_2(x) = -x^2 + 5x - 1$

3) Donner une équation pour chacune des 5 paraboles ci-dessous :



4) Déterminer une équation de la parabole coupant l'axe Ox en $x = 3$ et en $x = 7$ et dont le point le plus bas a une ordonnée égale à -16.

[5)] Une parabole passant par le point $P(6; 8)$ coupe l'axe Ox en $x = -2$ et en $x = 4$. Déterminer une équation de cette parabole.

6) On considère une droite et une parabole se coupant aux points A et B. On donne la pente $m = 3$ de la droite, le point $A(0; -10)$ ainsi que le sommet $S(2; -18)$ de la parabole. Déterminer :
a) une équation de la droite;
b) une équation de la parabole;
c) les coordonnées du point B;
d) une équation de la tangente à la parabole, tangente qui soit parallèle à la droite donnée.

7) Déterminer une équation de la parabole passant par les trois points $A(0;7)$, $B(3;4)$ et $C(9;16)$.

8) On donne la parabole p_1 par son équation $y = 3 - 2x^2$ et le point $P(4;6)$.
Déterminer une équation de la parabole p_2 symétrique de la parabole p_1 par rapport au point P.

9) On considère une droite de pente m qui coupe l'axe Oy en $y = 1$. Déterminer en fonction de m les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec la parabole $y = x^2 - 5$.
Y a-t-il une valeur de m pour laquelle la droite est tangente à la parabole ? Pourquoi ?

10) Prouver algébriquement que l'aire d'un rectangle de périmètre donné est maximale lorsque le rectangle est un carré.

11*) Exercice spécial : créer un exercice. Trouver une équation logarithmique de la forme $\ln(ax+b) = 2\ln(x+c)$ telle que l'équation du 2e degré associée $ax+b = (x+c)^2$ admette deux solutions négatives, l'une des deux devant être exclue pour l'équation logarithmique. Indication : penser aux intersections de la droite $y = ax+b$ et de la parabole $y = (x+c)^2$.

Solutions

1.1a) $(-\frac{4}{3};0)$ et $(\frac{3}{2};0)$ **1.1b)** $(0;-12)$
1.1c) $(\frac{1}{12};-\frac{289}{24}) = (0.083333;-12.041667)$, minimum; **attention :** ce minimum n'est pas au point $(0;-12)$ comme pourrait le laisser croire un graphique sur la calculatrice
1.2a) $(\frac{2}{5};0)$ et $(\frac{3}{2};0)$ **1.2b)** $(0;-6)$ **1.2c)** $(\frac{19}{20};\frac{121}{40})$, maximum
2) $f_1(x) = 4(x-\frac{3}{2})^2 - 2$, $f_2(x) = (-1)(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{21}{4}$
3) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-5)^2$, que l'on peut aussi écrire $x^2 - 10x + 25$,
$f_3(x) = (x+4)^2 - 6$, que l'on peut aussi écrire $x^2 + 8x + 10$,
$f_4(x) = -x^2 - 3$, $f_5(x) = \frac{1}{9}x^2$
4) $f(x) = 4(x-3)(x-7)$, que l'on peut aussi écrire $4x^2 - 40x + 84$ ou encore $4(x-5)^2 - 16$
5) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)(x+2)$, que l'on peut aussi écrire $\frac{1}{2}x^2 - x - 4$
6a) $y = 3x - 10$ **6b)** $f(x) = 2(x-2)^2 - 18$, que l'on peut aussi écrire $2x^2 - 8x - 10$
6c) $B(\frac{11}{2};\frac{13}{2})$ **6d)** $y = 3x - \frac{201}{8}$ **7)** $y = \frac{x^2}{3} - 2x + 7$
8) $y = 2(x-8)^2 + 9$ **9)** Droite : $y = mx + 1$ Points d'intersection :
$I_1(\frac{m-\sqrt{m^2+24}}{2};\frac{m^2+2-m\sqrt{m^2+24}}{2})$ et $I_2(\frac{m+\sqrt{m^2+24}}{2};\frac{m^2+2+m\sqrt{m^2+24}}{2})$

Quelques aides et indications

2) Déterminer les coordonnées du sommet $(x_S;y_S)$, car on a $h = x_S$ et $k = y_S$;
se rappeler aussi que le coefficient a reste le même dans les trois formes de l'équation.

3) Remarquer que la parabole (1) est la parabole standard $y = x^2$. Les paraboles (2) et (3) sont des versions déplacées de cette même parabole standard; on vérifiera en particulier qu'elles passent par les équivalents déplacés des points $(-1; 1)$, $(0; 0)$ et $(1; 1)$. Cela signifie que leur coefficient a est le même que celui de la parabole standard ($a = 1$). La parabole (4) est analogue aux précédentes, mais tournée vers le bas ($\Rightarrow a =?$). Pour écrire les équations de ces paraboles, le plus simple est d'utiliser la formule rapportée au sommet ($y = a(x - h)^2 + k$).
Pour la parabole (5), remarquer la position de son sommet et utiliser les coordonnées d'un point au choix (de préférences à coordonnées entières (par exemple : $(\pm 3; 1)$ ou $(\pm 9; 9)$)) pour calculer le coefficient a.

4) Utiliser la forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ de l'équation et se rappeler que le sommet...

6a) Le point A se trouve sur la droite **et** la parabole; par rapport à la droite, c'est...
6b) Utiliser la forme $y = a(x - h)^2 + k$ de l'équation.
6c) Le point B est à la fois sur la droite **et** sur la parabole, donc...

7) Considérer l'équation générale d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$ et déterminer les valeurs des coefficients a, b et c en utilisant le fait que la parabole passe par les trois points donnés.

10) Appeler p le périmètre et ℓ un des côtés; exprimer l'autre côté en fonction de p et de ℓ, puis l'aire également en fonction de p et de ℓ. Considérer l'aire comme une fonction de ℓ dont on pourrait faire le graphique et en chercher le maximum.

Quelques corrigés

1.1a) $6x^2 - x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; \Delta = \cdots \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{4}{3}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$ (et $y_1 = 0$, $y_2 = 0$)

1.1b) $f_1(0) = 6 \cdot 0^2 - 0 - 12 = -12$, d'où les coordonnées du point.

1.1c) $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{12} = \frac{1}{12}$ et $y_S = f_1(\frac{1}{12}) = \cdots = -\frac{289}{24}$ Vu que $a = 6$ est positif, la courbe est tournée dans le sens $\cup$ et le sommet est donc un minimum.

3) Parabole (1) : parabole standard $y = x^2$
Parabole (2) : même coefficient $a = 1$ que la parabole standard (voir `aide` ci-dessus), sommet $(5; 0)$, d'où l'équation $y = 1(x - 5)^2 + 0$
Parabole (3) : même coefficient $a = 1$ que la parabole standard (voir `aide` ci-dessus), sommet $(-4; -6)$, d'où l'équation $y = 1(x - (-4))^2 + (-6)$
Parabole (4) : tournée dans l'autre sens ($\Rightarrow a$ négatif), mais même *forme* que la parabole standard $\Rightarrow a = -1$; sommet $(0; -3)$, d'où l'équation $y = (-1)(x - 0)^2 + (-3)$
Parabole (5) : sommet en $(0; 0)$, d'où l'équation $y = a(x - 0)^2 + 0 \;\Rightarrow\; y = ax^2$; considérer ensuite un point de la parabole, par exemple $(3; 1)$ qui, mis dans l'équation, donne a : $1 = a \cdot 3^2 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$

4) En utilisant la forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ de l'équation, on a : $y = a(x - 3)(x - 7)$. Il suffit alors d'insérer les coordonnées d'un point pour déterminer le coefficient a. On ne peut pas utiliser les points 3 et 7 que l'on a déjà utilisés car ils n'apporteraient rien de plus. Il faut un point supplémentaire; il suffit alors se rappeler que le sommet est au milieu des deux points d'intersection avec l'axe des x on peut donc utiliser le point $(5; -16)$. Ainsi $-16 = a(5 - 3)(5 - 7) \Rightarrow -16 = -4a \Rightarrow a = 4$

On peut aussi écrire l'équation en fonction du sommet $y = a(x - 5)^2 - 16$ et y placer les coordonnées de l'un des deux points $(3; 0)$ ou $(7; 0)$ pour calculer le coefficient a.

5) Vu que l'on connaît les intersections avec l'axe des x, on peut écrire l'équation $y = a(x + 2)(x - 4)$; il suffit ensuite d'y placer les coordonnées du point $P(6; 8)$ pour trouver la valeur de a : $8 = a(6 + 2)(6 - 4) \Rightarrow 8 = a \cdot 8 \cdot 2 \Rightarrow a = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

6a) Droite donnée par sa pente et son ordonnée à l'origine (point A), d'où l'équation évidente : $y = 3x - 10$

6b) Parabole donnée par son sommet $S(2; -18)$, donc $y = a(x - 2)^2 - 18$. Elle passe par le point $A(0; -10)$, donc $-10 = a(0 - 2)^2 - 18 \Rightarrow a = 2$

6c) Le point B est à l'intersection de la droite et de la parabole; on trouve donc ses coordonnées en résolvant le système constitué par les deux équations mises ensemble. Note : on trouvera deux points d'intersection : le point B cherché et bien sûr aussi le point A déjà connu.

6d) Equation générale des droites de pente 3 : $y = 3x + h$

Intersection avec la parabole : $2x^2 - 8x - 10 = 3x + h \Rightarrow 2x^2 - 11x - 10 - h = 0$; on calcule $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10 - h) = \cdots = 201 + 8h$, puis on cherche la valeur de h qui annule ce Δ (à savoir le cas où il n'y a qu'une seule solution à l'équation d'intersection) $\Rightarrow h = -\frac{201}{8}$ d'où l'équation de la tangente : $y = 3x - \frac{201}{8}$

7) Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation cherchée; la parabole passe par $A \Rightarrow c = 7$

La parabole passe par B : $\Rightarrow 4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 7$ d'où une équation en a et b : $9a + 3b = -3$

La parabole passe par C : $\Rightarrow 16 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + 7$ d'où une deuxième équation en a et b : $81a + 9b = 9$

D'où finalement (en résolvant le système constitué des deux équations en a et b) : $a = \frac{1}{3}$ et $b = -2$, ce qui donne la parabole : $y = \frac{x^2}{3} - 2x + 7$

Note : dans le cas général (avec $x_A \neq 0$), on obtiendrait un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

8) La parabole $y = 3 - 2x^2$ a son sommet au point $S(0; 3)$

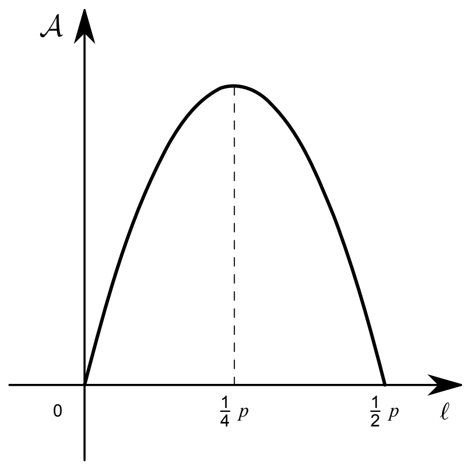
Symétrique de S par rapport au point P donné : c'est le point S' tel que :
$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PS'} \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OS'} = 2 \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS} \;\Rightarrow\; S'(8; 9)$

La parabole symétrique a la même 'ouverture', mais est tournée dans l'autre sens, donc son coefficient a vaut $+2$, d'où son équation : $y = 2(x - 8)^2 + 9$

9a) Droite de pente m par le point $(0;1)$: $y = mx + 1$
Intersections avec la parabole : $x^2 - 5 = mx + 1 \Rightarrow x^2 - mx - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = m^2 + 24 \Rightarrow x_{1,2} = \cdots$, d'où ensuite les valeurs $y_{1,2}$ correspondantes.
9b) Vu que Δ est strictement positif pour toutes les valeurs possibles de m, il y aura toujours deux intersections, donc la droite ne sera jamais tangente. Cela provient du fait que le point choisi $(0;1)$ se trouve à l'*intérieur* de la parabole.

10) Soit p le périmètre et ℓ un des côtés, l'autre côté vaut alors $\frac{1}{2}(p - 2\ell) = \frac{1}{2}p - \ell$ d'où l'aire : $\mathcal{A} = \ell(\frac{1}{2}p - \ell) = \frac{1}{2}p\ell - \ell^2 = -\ell^2 + \frac{1}{2}p\ell$

Si on considère maintenant cette aire comme une fonction de ℓ et que l'on trace son graphe,
on obtiendra une parabole, dont on sait calculer les coordonnées du sommet :
$\ell_{\max} = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}p}{-2} = \frac{1}{4}p$;
les petits côtés valent ainsi le quart du périmètre, le rectangle est donc bien un carré !



Note : une autre méthode très jolie en prenant comme longueur $x + m$ et comme largeur $x - m$ d'où l'aire $\mathcal{A} = x^2 - m^2$ qui est bien évidemment maximale pour $m = 0$

11) La droite $y = ax + b$ coupe la parabole $y = (x + c)^2$ de part et d'autre de son axe de symétrie $x = -c$. On peut donc prendre n'importe quel nombre positif pour c, puis considérer deux nombres négatifs x_1 et x_2 de part et d'autre de $-c$ (à distances inégales); on calcule alors $y_1 = (x_1 + c)^2$ et $y_2 = (x_2 + c)^2$ et finalement l'équation de la droite par les deux points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$.
Exemple : $c = 5$, $x_1 = -6$ et $x_2 = -3$ d'où $y_1 = 1$ et $y_2 = 4$ puis la droite $y = x + 7$ et l'équation créée : $\ln(x + 7) = 2\ln(x + 5)$

MCN / 26.12.2016