Problèmes d'extremums sous conditions

1) On désire clôturer avec 10 m de treillis les trois autres côtés d'un enclos rectangulaire adossé à un mur. Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

2) Déterminer les proportions du rectangle de plus grande aire que l'on puisse placer entre la parabole $y = -x^2 + 4$ et l'axe des x.

3) Déterminer les proportions du rectangle de plus grande aire que l'on puisse placer dans un demi-cercle.

4) Déterminer les proportions du cône de plus grand volume que l'on puisse inscrire dans une sphère.

5) Déterminer les proportions du trapèze de plus grande aire que l'on puisse placer dans un demi-cercle.

6) On désire réaliser une boîte à base carrée de la façon suivante à partir d'un feuille de carton carrée de côté c : on enlève dans chaque coin un petit carré de côté x et on relève les faces latérales que l'on colle deux à deux avec du papier adhésif. Déterminer la valeur de x pour laquelle la boîte aura un volume maximal. (Voir év. figure p. 4)

Solutions

1) 2.5 m sur 5 m (parallèlement au mur)(par $\mathcal{A} = 10x - 2x^2$ (max pour $x = 2.5$ m))
2) $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (donc largeur $= 2x = \frac{4}{\sqrt{3}}$) et $h = \frac{8}{3}$ **3)** Demi-carré **4)** $h = \frac{4R}{3}$ et $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ **5)** Demi-hexagone **6)** $x = \frac{1}{6}c$

Quelques aides et indications

4) Prendre $h = x + R$

5) Note : donne des équations difficiles qui font un peu perdre le fil du développement.
Astuce : prendre comme variable la demi-petite base (et non la petite base entière).
On aura donc : $\mathcal{A} = bh + Rh$ et $R^2 = b^2 + h^2$
(1) si on remplace b, la dérivée est simple, mais l'équation longue;
(2) si on remplace h, la dérivée est plus compliquée, mais l'équation plus simple.

Quelques corrigés

1) Soit x la distance au mur et y la longueur parallèle au mur.
On a alors $x + y + x = 10 \;\Rightarrow\; y = 10 - 2x$
L'aire à maximiser est alors : $\mathcal{A} = xy = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2$
D'où, en annulant la dérivée : $0 = \mathcal{A}' = 10 - 4x \;\Rightarrow\; x = 2.5$

2) Considérons un rectangle pour x variant de $-a$ à a (avec a supposé positif) (voir figure p. 4). Sa largeur vaut donc $2a$ et sa hauteur $f(a)$ (puisque deux *coins* sont sur la parabole). L'aire de ce rectangle vaut ainsi : $\mathcal{A} = 2a \cdot f(a) = 2a \cdot (-a^2 + 4) = -2a^3 + 8a$; que l'on dérive par rapport à a : $\mathcal{A}' = -6a^2 + 8$. Cette dérivée s'annule pour $-6a^2 + 8 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{4}{3} \;\Rightarrow\; a = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (deux valeurs qui donnent le même rectangle).
C'est bien un maximum vu la nature géométrique du problème : pour $a = 0$, l'aire est nulle; pour $a = 2$, l'aire est également nulle; entre ces deux valeurs, l'aire est positive et vu que la dérivée ne s'annule qu'une seule fois, il ne peut s'agir que d'un maximum.
Hauteur du rectangle : $h = f(a_{max}) = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$; aire : $\mathcal{A} = \cdots = \frac{32\sqrt{3}}{9}$

3) En construisant une figure d'aide (voir p. 4), on s'aperçoit que la hauteur et la longueur du rectangle sont liées par le rayon du cercle et le théorème de Pythagore. Mais en fait, c'est la demi-longueur qui intervient, d'où la bonne idée de la prendre comme variable au lieu de la longueur entière.
Soit donc x la demi-longueur du rectangle et h sa hauteur. On a $x^2 + h^2 = R^2 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'où l'aire : $\mathcal{A} = (2x) \cdot h = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$ On dérive cette aire par rapport à x : $\mathcal{A}' = 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2 \cdot (R^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ Cette dérivée s'annule pour : $2R^2 - 4x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{R^2}{2} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}R}{2}$ On a ainsi : $h = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}R}{2}$
Autrement dit, la longueur vaut deux fois la hauteur; c'est donc un demi-carré (ou un double carré).
Note 1 : la valeur obtenue (zéro de la dévirée) correspond bien à un maximum (et non à un minimum) pour des raisons géométriques évidentes (valeurs extrêmes : $x = 0$ ou $h = 0$ avec aire nulle; aire positive entre ces deux valeurs; un seul point à tangente horizontale).
Note 2 : on peut simplifier l'expression de l'aire pour faciliter la dérivation (on rentre $2x$ sous la racine) : $2x\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{4x^2}\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(4x^2)(R^2 - x^2)} = \sqrt{4R^2x^2 - 4x^4}$

4) [Voir figure p. 4]
Astuce pour simplifier les calculs : prendre $h = x + R$ et rechercher x.
Volume du cône : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (x + R)$
Mais x, r et R sont liés par le fait que le cône est inscrit dans la sphère :
$r^2 + x^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - x^2$
Ce qui permet de réduire à 1 le nombre de variables de l'expression du volume :
$\mathcal{V} = \frac{\pi}{3}(R^2 - x^2) \cdot (x + R) = \cdots = \frac{\pi}{3}(-x^3 - x^2R + xR^2 + R^3)$
On dérive (par rapport à x) : $\mathcal{V}' = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 2xR + R^2)$ $\longrightarrow$

On cherche les zéros de la dérivée : $-3x^2 - 2xR + R^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{3}$ ou $x = -R$ (qui est à exclure).
On a ainsi : $h = x + R = \frac{4R}{3}$ et $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8R^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$
C'est bien un maximum pour des raisons géométriques évidentes.

5) [Voir figure p. 4]
Aire du trapèze : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(2b + 2R)h = (b + R)h = bh + Rh$
Variables liées par le fait que le trapèze est dans un demi-cercle : $R^2 = b^2 + h^2$

• Première méthode : on remplace b :
D'où l'aire : $\mathcal{A} = h\sqrt{R^2 - h^2} + hR = \sqrt{h^2}\sqrt{R^2 - h^2} + hR = \sqrt{h^2R^2 - h^4} + hR$ que l'on dérive par rapport à h : $\mathcal{A}' = \frac{2hR^2 - 4h^3}{2\sqrt{h^2R^2 - h^4}} + R$
On annule cette dérivée : $hR^2 - 2h^3 = -R\sqrt{h^2R^2 - h^4} \Rightarrow (hR^2 - 2h^3)^2 = R^2(h^2R^2 - h^4) \Rightarrow h^2R^4 - 4h^4R^2 + 4h^6 = h^2R^4 - h^4R^2 \Rightarrow 4h^6 - 3h^4R^2 = 0 \Rightarrow 4h^6 - 3h^4R^2 = 0 \Rightarrow h^4(4h^2 - 3R^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}R}{2}$ ou $h = 0$ (qui est à exclure).
D'où $b = \frac{R}{2}$ et demi-hexagone.
C'est bien un maximum pour des raisons géométriques évidentes.

• Deuxième méthode : on remplace h :
D'où l'aire : $\mathcal{A} = (b + R)\sqrt{R^2 - b^2}$
que l'on dérive par rapport à b : $\mathcal{A}' = \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{(b+R)\cdot(-2b)}{2\sqrt{R^2 - b^2}}$
On annule cette dérivée : $\sqrt{R^2 - b^2} = \frac{2b(b+R)}{2\sqrt{R^2 - b^2}} \Rightarrow R^2 - b^2 = b^2 + bR \Rightarrow 0 = 2b^2 + bR - R^2 \Rightarrow b = \frac{R}{2}$ ou $b = -R$ (qui est à exclure).
D'où $h = \frac{\sqrt{3}R}{2}$ et demi-hexagone.
C'est bien un maximum pour des raisons géométriques évidentes.

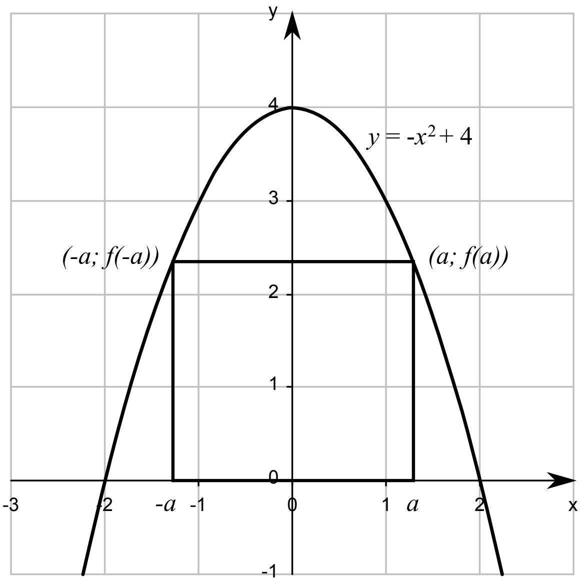
◇ Remarque 1 : dans un même problème, il faudrait éviter d'utiliser les deux fois $\mathcal{A}'$ pour désigner la dérivée par rapport à des variables différentes (b resp. h); mais vu qu'ici, il s'agit de deux méthodes distinctes...

◇ Remarque 2 : lorsqu'on fait beaucoup de petits calculs (comme dans la résolution de l'équation de la première méthode), une bonne façon de limiter les erreurs est de vérifier chaque fois que l'on additionne bien des termes de nature identique (au niveau des unités); que l'on n'additionne pas, par exemple des mètres et des mètres cubes.

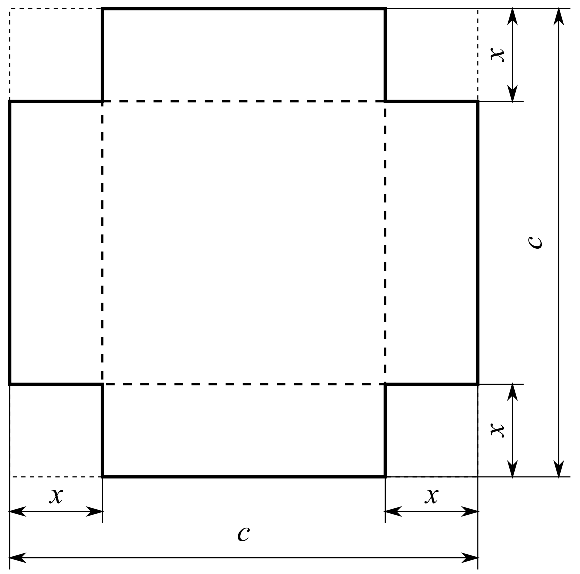
6) [Voir figure p. 4]
$\mathcal{V} = x(c - 2x)^2 = x(c^2 - 4cx + 4x^2) = c^2x - 4cx^2 + 4x^3 = 4x^3 - 4cx^2 + c^2x$
$\mathcal{V}' = 12x^2 - 8cx + c^2$
$\mathcal{V}' = 0 \Rightarrow \Delta = (-8c)^2 - 4 \cdot 12 \cdot c^2 = 64x^2 - 48c^2 = 16c^2$

$$x_{1,2} = \frac{8c \pm \sqrt{16c^2}}{2 \cdot 12} = \frac{8c \pm 4c}{24} = \begin{cases} \frac{4c}{24} = \frac{1}{6}c \\ \frac{12c}{24} = \frac{1}{2}c \quad \text{(volume nul)} \end{cases}$$

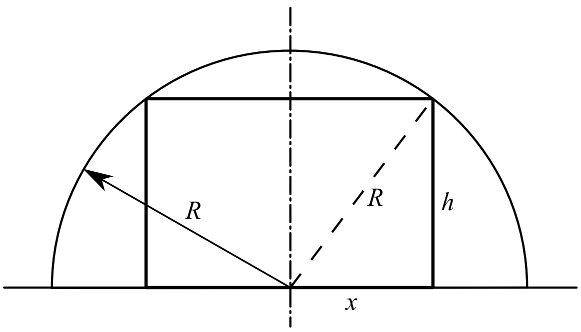
Problème 2



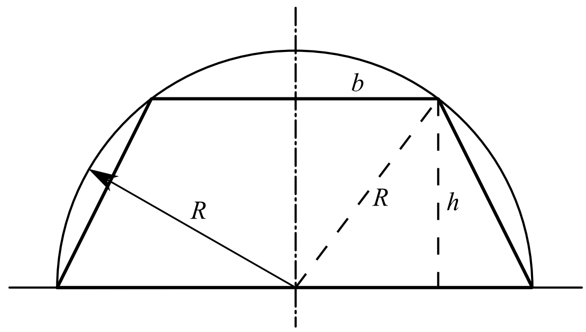
Problème 6



Problème 3



Problème 5



Problème 4