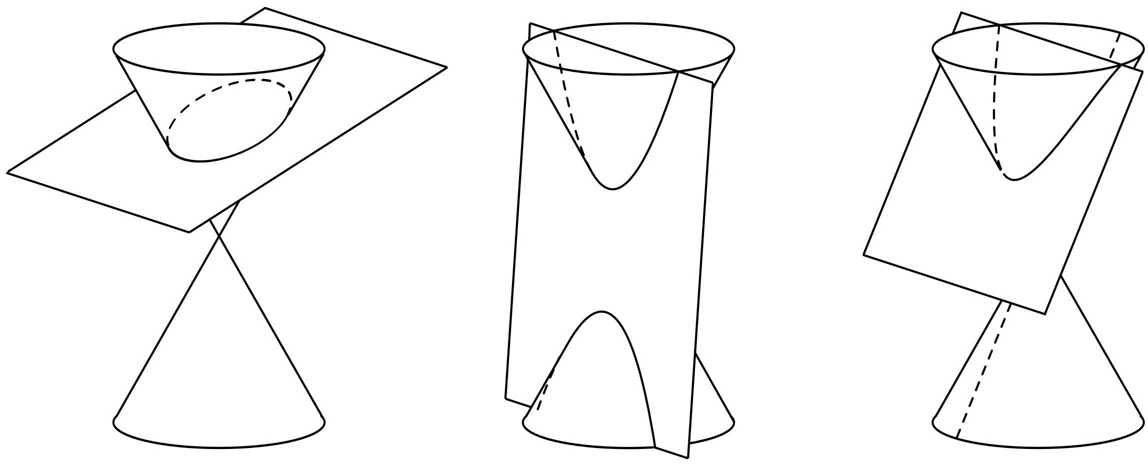
Paraboles : cours

1. Introduction

La parabole est une courbe que l'on peut obtenir par section plane d'un cône; c'est une sorte d'ellipse dont une des extrémités serait rejetée à l'infini. Cette courbe possède de nombreuses propriétés géométriques. Les miroirs paraboliques des télescopes et les antennes paraboliques de réception satellite utilisent une de ces propriétés : les ondes presque parallèles venant d'un point très éloigné sont réfléchies en un seul point (et donc amplifiées) par la parabole. (En fait ces miroirs et antennes sont des paraboloïdes de révolution : c'est-à-dire des surfaces obtenues par rotation d'une parabole autour de son axe.)



Ellipse Hyperbole Parabole

Dans le cadre de ce cours, nous ne nous intéressons aux paraboles qu'en tant que fonctions générales du 2e degré à une variable : $f(x) = ax^2 + bx + c$; les fonctions du 1er degré à une variable étant les droites $f(x) = mx + h$.

Remarque : si l'on considère l'équation générale du 1er degré à **deux** variables, on obtient aussi les droites $ax+by+c = 0$ (mais y compris les verticales); quant à l'équation générale du 2e degré à deux variables : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ elle donne toutes les coniques : cercles, ellipses, hyperboles, paraboles.

A trois variables, l'équation du 1er degré donne tous les plans de l'espace et l'équation du 2e degré donne les quadriques : un grand ensemble de surfaces de l'espace (que l'on trouve généralement dans les logiciels de rendu 3D), parmi lesquelles : sphères, cônes, cylindres, ellipsoïdes (ballons de rugby), paraboloïdes (antennes satellites), hyperboloïdes (tours des centrales nucléaires),...

2. Vocabulaire

• **Axe d'une parabole :** c'est l'axe de symétrie. Note : vu que l'on étudie des fonctions $y = f(x)$, il n'y a jamais deux points de la courbe associés à un seul x, ce qui a pour conséquence que l'axe des paraboles $y = f(x)$ sera toujours vertical. (Une parabole d'axe horizontal ou oblique ne peut pas être donnée par une équation de la forme $y = f(x)$; elle doit être donnée par une équation implicite $y^2 - 2xy + x^2 - y - x = 0$, ce qui sort du cadre du cours.)

• **Sommet d'une parabole :** c'est le point situé sur l'axe (de la parabole)(que la parabole soit tournée vers le haut ou vers le bas).

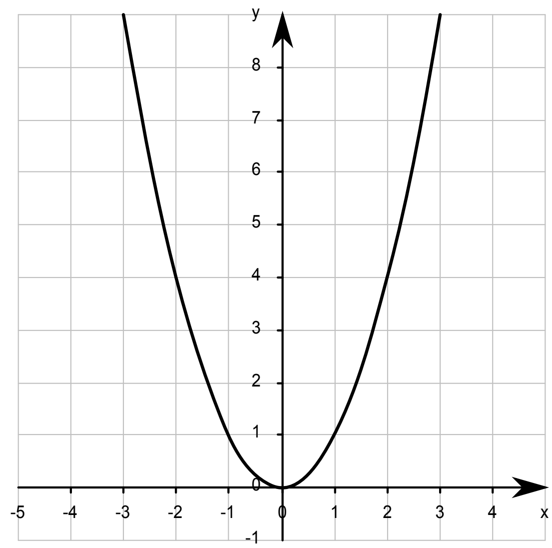
3. La parabole standard

Son équation : $y = x^2$

Son axe est confondu avec l'axe des y.

Son sommet est à l'origine $O(0; 0)$.

[Elle passe par les trois points $(-1; 1)$, $(0; 0)$ et $(1; 1)$]



4. Les autres paraboles

Trois façons d'écrire leur équation :

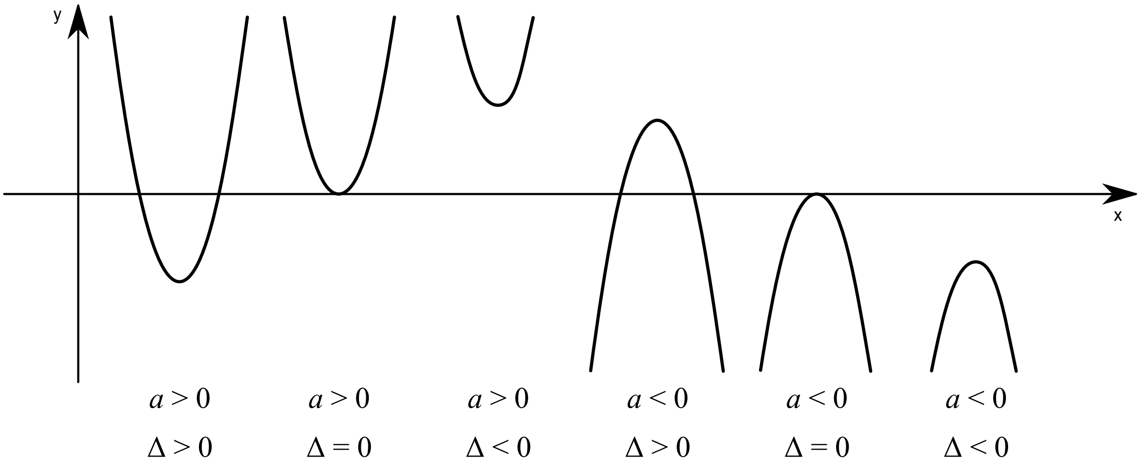
• Forme $y = a(x - h)^2 + k$:

- le coefficient a est en rapport avec la *forme*, la *largeur* de la parabole;
- le signe de a (positif ou négatif) donne le sens de la parabole : ouverte vers le haut $\cup$ ou vers le bas $\cap$);
- les coefficients h et k sont les coordonnées du sommet de la parabole : $S(h; k)$; h est lié au déplacement latéral du graphe et k au déplacement vertical (utiliser le fichier Excel `11-Paraboles.xls` pour voir l'effet des différents coefficients).

• Forme $y = ax^2 + bx + c$: c'est la forme développée de l'équation; le coefficient a est le même que ci-dessus.

• Forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$: c'est la forme factorisée de l'équation (possible uniquement si $\Delta \geq 0$)(x_1 et x_2 étant les abscisses des intersections avec l'axe Ox).

Note : le coefficient a est le même dans les trois formes de l'équation; si a est positif, la parabole est ouverte vers le haut $\cup$ et le sommet est un minimum; si a est négatif, la parabole est ouverte vers le bas $\cap$ et le sommet est un maximum.



5. Points particuliers des paraboles

• **Intersection avec l'axe des y (axe vertical) :** on l'obtient en posant $x = 0$ dans l'équation de la parabole; donc point $(0; c)$ dans le cas d'une équation donnée sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.

• **Intersection(s) avec l'axe des x (axe horizontal) :** ce sont les points où la fonction s'annule, donc les solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; on les obtient de façon habituelle (avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$); ils n'existent pas toujours. Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution et la parabole est tangente à l'axe des x.
Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution et donc pas d'intersection (la parabole est entièrement au-dessus ou au-dessous de l'axe des x).

• **Sommet de la parabole :** il est sur l'axe de symétrie de la parabole, donc exactement au milieu de x_1, x_2 (si ces deux solutions existent).
Coordonnées du sommet :

- si l'équation est donnée sous la forme $y = a(x - h)^2 + k$: sommet $S(h; k)$
- si l'équation est donnée sous la forme $y = ax^2 + bx + c$: abscisse du sommet : $h = x_S = -\frac{b}{2a}$ et l'ordonnée $k = y_S$ s'obtient en remplaçant la valeur de x_S dans l'équation de la parabole : $y_S = a(x_S)^2 + b(x_S) + c$

◇ Le sommet est un minimum $(\cup)$ si $a > 0$ et un maximum $(\cap)$ si $a < 0$

• **Axe de la parabole :** c'est la droite verticale par le sommet; son équation est donc $x = x_S$.

6. Passages d'une forme à l'autre des équations

• Pour passer à la forme $y = ax^2 + bx + c$ à partir des deux autres, il suffit d'effectuer le développement algébrique.

• Pour passer à la forme $y = a(x-h)^2 + k$: il suffit de déterminer les coordonnées $h = x_S$ et $k = y_S$ du sommet.

• Pour passer à la forme $y = a(x-x_1)(x-x_2)$: il suffit de factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$ (possible uniquement si $\Delta \geq 0$).

◇ Voir aussi le fichier Excel : `11-Paraboles.xls`

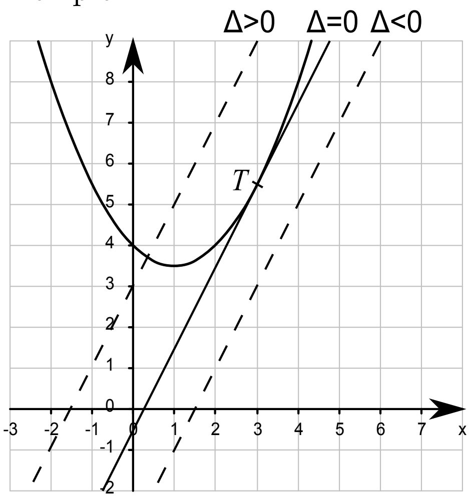
7. Tangentes à une parabole

Exemple 1 :
Calculer une équation de la tangente de pente 2 à la parabole $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 4$.
Equation générale de toutes les droites de pente 2 : $y = 2x + h$.
Intersection avec la parabole : $\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 2x + h \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 - h = 0$ (*); on calcule $\Delta = (-3)^2 - 4\frac{1}{2}(4-h) = 9 - 8 + 2h = 1 + 2h$.
Si $\Delta < 0$, alors (*) n'a pas de solution, la droite ne coupe pas la parabole.
Si $\Delta > 0$, alors (*) admet deux solution : la droite coupe la parabole en deux points.
Si $\Delta = 0$, alors (*) n'admet qu'une seule solution : la droite est tangente à la parabole, c'est le cas cherché.
$\Delta = 0 \Rightarrow 1 + 2h = 0 \Rightarrow h = -\frac{1}{2}$.
d'où l'équation de la tangente cherchée : $y = 2x - \frac{1}{2}$.
Calcul des coordonnées du point de tangence : égalité des deux équations (parabole de départ = droite trouvée) ou bien équation (*) avec $h = -\frac{1}{2}$.
On obtient le point $T(3; \frac{11}{2})$.

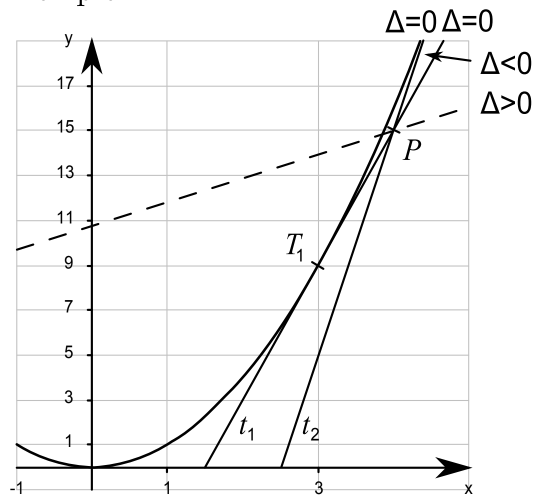
Exemple 2 :
Calculer les équations des tangentes à la parabole $y = x^2$ issues du point $P(4; 15)$.
Equation générale des droites passant par $P(4; 15)$: $\frac{y-15}{x-4} = m \Rightarrow y - 15 = m(x-4) \Rightarrow y = mx - 4m + 15$.
Intersection avec la parabole : $x^2 = mx - 4m + 15 \Rightarrow x^2 - mx + 4m - 15 = 0$ (*); on calcule $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4m - 15) = m^2 - 16m + 60$.
Si $\Delta < 0$, alors (*) n'a pas de solution, la droite ne coupe pas la parabole.
Si $\Delta > 0$, alors (*) admet deux solution : la droite coupe la parabole en deux points.
Si $\Delta = 0$, alors (*) n'admet qu'une seule solution : la droite est tangente à la parabole, c'est le cas cherché.
Mais vu que Δ est ici une relation du 2e degré en m, cela signifie qu'il y a deux valeurs de m qui annulent ce Δ, autrement dit qu'il y a deux droites qui satisfont à l'exigence, autrement dit deux tangentes à la parabole issues du point P. $\longrightarrow$

On cherche donc les m tels que $m^2 - 16m + 60 = 0 \Rightarrow \Delta_m = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 16$, d'où $m_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} = 6$ ou 10.
D'où les deux tangentes cherchées : $y = 6x - 9$ et $y = 10x - 25$.
Coordonnées des points de tangence par la même méthode qu'à l'exemple 1 et on obtient les points $T_1(3; 9)$ et $T_2(5; 25)$.

Exemple 1



Exemple 2



Attention : pour le graphique de l'exemple 2, l'échelle n'est pas la même sur les deux axes, d'où une correspondance inhabituelle entre les pentes et les angles !
Dans ce même exemple 2, les cas $\Delta < 0$ correspondent aux droites comprises dans le petit angle entre les deux tangentes.

MCN / 10.2.2015