Primitives et intégrales : exercices

Calculer la primitive de chacune des fonctions suivantes :

1) $x^4 + 5x^2 - 7x + 3$

2) $7x^7 - 4x^5 + 5x^4 - 2x + 3$

3) $3x^2 - 7x - 9 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{8}{x^3}$

4) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

5) $7\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + \sqrt{5} + \frac{2}{5x} - \frac{5}{6x^2}$

[6)] $(x-13)^2$

7) $(2x-3)^3$

8) $(5x-51)^{23}$

9) $(41-3x)^{17}$

[10)] $(x^2-1)^2$

[11)] $2x(x^2-1)^{37}$

[12)] $(2x+3)(x^2+3x+4)^7$

[13)] $(3x+1)(3x^2+2x-5)^5$

14) $\frac{1}{(x-3)^3}$

15) $\frac{1}{(3x-2)^5}$

16) $\frac{1}{2x-3}$

17) $\frac{x^3-3x+1}{x^2}$

18) $\frac{3x^2-8x+9}{x-2}$

[19)] $\frac{3x^2-3}{(x^3-3x+1)^3}$

[20)] $\frac{x^2-1}{x^3-3x+1}$

21) $\sqrt{2-5x}$

22) $\sqrt[4]{(2-x)^3}$

[23)] $(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}$

[24)] $(x^2-1)\sqrt[4]{(x^3-3x)^3}$

25) $\frac{3}{\sqrt{5x-3}}$

[26)] $\frac{2x-3}{\sqrt[4]{x^2-3x+4}}$

27) $\sin(2x+1)$

[28)] $\sin x \cos^3 x$

[29)] $\frac{\sin x}{\cos x}$

[30)] $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

[31)] e^{7x-5}

[32)] $x\mathrm{e}^{x^2-5}$

Calculer les intégrales définies suivantes :

33) $\int_{-1}^{4} (x^3+3x-2)dx$

34) $\int_{-2}^{-1} \left(x^4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx$

35) $\int_{0}^{1} (\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt{x})\, dx$

36) $\int_{-1}^{2} (2x-1)^3 dx$

[37)] $\int_{2}^{3} \frac{x^2-1}{x^3-3x+1} dx$

[38)] $\int_{2}^{3} \frac{x^2-1}{(x^3-3x+1)^3} dx$

39) $\int_{-2}^{-1} \sqrt{5-x}\, dx$

40) $\int_{11}^{12} \sqrt{5-x}\, dx$

[41)] $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

[42)] $\int_{0}^{2\pi} \cos x\, dx$

[43)] $\int_{\frac{1}{3}}^{\ln 2} \mathrm{e}^{3x} dx$

[44)] $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^4 x\, dx$

45) Déterminer l'aire du domaine compris entre les graphes des fonctions $y = x$ et $y = x^2$

46) Déterminer l'aire du domaine compris entre le graphe de la fonction $y = \frac{1}{x}$ et les droites $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$

47) Déterminer l'aire du domaine compris entre les graphes des paraboles $y = x^2 - 4x + 8$ et $y = -x^2 + 6x - 4$

48) Calculer l'aire du domaine limité par les graphes des trois fonctions : $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 6x + 15$ et $h(x) = 2x - 1$
Note : $y = h(x)$ est la tangente commune aux graphes des deux paraboles $y = f(x)$ et $y = g(x)$

49) Calculer l'aire comprise entre les graphes de $y = x$ et $y = x^{2n}$ (où n est un nombre entier positif). Que se passe-t-il lorsque n devient très grand ?

[[Volumes de solides de révolution]]

50) Calculer le volume du paraboloïde de révolution engendré par la rotation de la demi-parabole $y = \sqrt{x}$ autour de l'axe des x (pour x variant de 0 à a).

51) Démontrer la formule donnant le volume d'un cône. Indication : considérer le cône engendré par la rotation d'une droite passant par l'origine.

52) Démontrer la formule donnant le volume d'une sphère. Indication : considérer la sphère engendrée par la rotation d'un demi-cercle centré à l'origine.

[[Longueur d'un arc]]

53) Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = x\sqrt{x}$ entre $x = 1$ et $x = 4$.

54) Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ entre $x = 1$ et $x = 3$.

55) Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = 0$ et $x = 2$.

Note : la fonction $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ se note aussi $\cosh x$ et on l'appelle cosinus hyperbolique; le sinus hyperbolique étant $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Ces deux fonctions ont souvent des propriétés qui ressemblent à celles du sinus et du cosinus. La courbe $y = \cosh x$ s'appelle chaînette : c'est la forme que prend une petite chaîne suspendue par ses extrémités.

Solutions

1) $\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3x+C$ **2)** $\frac{7}{8}x^8-\frac{2}{3}x^6+x^5-x^2+3x+C$
3) $x^3-\frac{7}{2}x^2-9x+2\ln|x|+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+C$ **4)** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+C$, que l'on peut aussi écrire $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$ **5)** $\frac{14}{3}\sqrt{x^3}-3\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{5}\cdot x+\frac{2}{5}\ln|x|+\frac{5}{6x}+C$, que l'on peut aussi écrire $\frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{4}{3}}+\sqrt{5}\cdot x+\frac{2}{5}\ln|x|+\frac{5}{6}x^{-1}$ **6)** $\frac{1}{3}x^3-13x^2+169x+C$ ou bien $\frac{1}{3}(x-13)^3+C'=\frac{1}{3}x^3-13x^2+169x-\frac{2197}{3}+C'$ **7)** $\frac{1}{8}(2x-3)^4+C$
8) $\frac{1}{120}(5x-51)^{24}+C$ **9)** $-\frac{1}{54}(41-3x)^{18}+C$ **10)** $\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+C$
11) $\frac{1}{38}(x^2-1)^{38}+C$ **12)** $\frac{1}{8}(x^2+3x+4)^8+C$ **13)** $\frac{1}{12}(3x^2+2x-5)^6+C$
14) $-\frac{1}{2(x-3)^2}+C$ **15)** $-\frac{1}{12(3x-2)^4}+C$ **16)** $\frac{1}{2}\ln|2x-3|+C$
17) $\frac{1}{2}x^2-3\ln|x|-\frac{1}{x}+C$ **18)** $\frac{3}{2}x^2-2x+5\ln|x-2|+C$ **19)** $-\frac{1}{2(x^3-3x+1)^2}+C$
20) $\frac{1}{3}\ln|x^3-3x+1|+C$ **21)** $-\frac{2}{15}\sqrt{(2-5x)^3}+C$ **22)** $-\frac{4}{7}\sqrt[4]{(2-x)^7}+C$
23) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2x-1)^3}+C$ **24)** $\frac{4}{21}\sqrt[4]{(x^3-3x)^7}+C$ **25)** $\frac{6}{5}\sqrt{5x-3}+C$
26) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x^2-3x+4)^3}+C$ **27)** $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$ **28)** $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$
29) $-\ln|\cos x|+C$ **30)** $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$ **31)** $\frac{1}{7}\mathrm{e}^{7x-5}+C$ **32)** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-5}+C$
33) $=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-2x\Big|_{-1}^{4}=\frac{305}{4}$ **34)** $\frac{1}{5}x^5-2\ln|x|-\frac{3}{x}\Big|_{-2}^{-1}=\frac{77}{10}+2\ln 2\simeq 9.086$
35) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\frac{53}{60}\simeq 0.8833$ **36)** $\frac{1}{8}(2x-1)^4\Big|_{-1}^{2}=0$
37) $\frac{1}{3}\ln|x^3-3x+1|\Big|_{2}^{3}=\frac{1}{3}(\ln 19-\ln 3)\simeq 0.615$ **38)** $-\frac{1}{6}(x^3-3x+1)^{-2}\Big|_{2}^{3}=\frac{176}{9747}\simeq 0.018$
39) $-\frac{2}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{-1}=\frac{2}{3}\left(7^{\frac{3}{2}}-6^{\frac{3}{2}}\right)\simeq 2.549$ **40)** Pas possible **41)** $-\cos x\Big|_{0}^{\pi}=2$
42) $\sin x\Big|_{0}^{2\pi}=0$ **43)** $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\ln 2}=\frac{1}{3}(8-\mathrm{e})\simeq 1.76$
44) $-\frac{1}{5}\cos^5 x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9\sqrt{3}-1}{160}\simeq 0.09118$ **45)** $\mathcal{A}=\frac{1}{6}$ **46)** $\mathcal{A}=\ln 6-\frac{5}{6}\simeq 0.9584$
47) $\mathcal{A}=\frac{1}{3}$ **48)** $\mathcal{A}=\frac{9}{4}$ **49)** $\mathcal{A}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}$ **50)** $\mathcal{V}=\pi\int\limits_0^a(\sqrt{x})^2dx=\cdots=\frac{\pi a^2}{2}$

51) Droite $y=\frac{rx}{h}$ d'où $\mathcal{V}=\pi\int\limits_0^h\left(\frac{rx}{h}\right)^2dx=\cdots=\frac{\pi r^2 h}{3}$

52) Demi-cercle $y=\sqrt{r^2-x^2}$ d'où $\mathcal{V}=\pi\int\limits_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\cdots=\frac{4}{3}\pi r^3$

53) $\ell=\int\limits_1^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\cdots=\frac{1}{27}(80\sqrt{10}-13\sqrt{13})\simeq 7.6337$

54) $\ell=\cdots=\int\limits_1^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\cdots=\frac{53}{6}$

55) $\ell=\cdots=\int\limits_0^2\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}dx=\cdots=\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2}\simeq 3.6269$

Quelques aides et indications

17) Diviser terme à terme avant d'intégrer.
18) Effectuer la division avec reste avant d'intégrer.
45) à 49) Voir dessins en dernière page.
51) Voir dessin en dernière page.

Quelques corrigés

18) On a : $\frac{3x^2-8x+9}{x-2} = 3x - 2 + \frac{5}{x-2}$, d'où la primitive : $\frac{3}{2}x^2 - 2x + 5\ln|x-2| + C$

45) Les deux courbes se coupent en $(0;0)$ et $(1;1)$

$\mathcal{A} = \int\limits_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$ [dessin en dernière page]

46) $\mathcal{A} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{3}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{3} = \ln 6 - \frac{5}{6} \simeq 0.9584$ [dessin en dernière page]

47) Les deux courbes se coupent en $(2;4)$ et $(3;5)$ [dessin en dernière page]

$\mathcal{A} = \int\limits_2^3 ((-x^2+6x-4)-(x^2-4x+8))dx = \int\limits_2^3 (-2x^2+10x-12)dx = -\frac{2}{3}x^3+5x^2-12x\Big|_2^3 = \frac{1}{3}$

48) Les trois courbes se coupent en $(1;1)$, $(\frac{5}{2};\frac{25}{4})$ et $(4;7)$

$\mathcal{A} = \int\limits_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 2x + 1)dx + \int\limits_{\frac{5}{2}}^{4} (x^2 - 8x + 16)dx = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ [dessin en dernière page]

49) $\mathcal{A}_n = \int\limits_0^1 (x - x^{2n})dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}$ [dessin en dernière page]

Si n devient très grand, la deuxième fonction devient presque verticale en $x = 1$ et l'aire cherchée s'approche de celle d'un demi-carré. On remarquera aussi que : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}$

50) $\mathcal{V} = \pi \int\limits_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}$

51) Droite passant par $(0;0)$ et par $(h;r)$: $y = \frac{rx}{h}$ [dessin en dernière page]

d'où le volume : $\mathcal{V} = \pi \int\limits_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi}{3}\frac{r^2}{h^2}x^3\Big|_0^h = \frac{\pi}{3}\frac{r^2}{h^2}h^3 = \frac{\pi r^2 h}{3}$

52) Demi-cercle centré à l'origine et de rayon r : $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

d'où le volume : $\mathcal{V} = \pi \int\limits_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int\limits_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} =$
$\pi(r^3 - \frac{r^3}{3} - (-r^3 + \frac{r^3}{3})) = \frac{4}{3}\pi r^3$

53) On a : $(x\sqrt{x})' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

d'où la longueur de l'arc : $\ell = \int\limits_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int\limits_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$

$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \simeq 7.6337$

54) On a : $(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x})' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$

et ainsi $\sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} = \sqrt{1 + x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}} = \sqrt{x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}} = x^2 + \frac{1}{4x^2}$

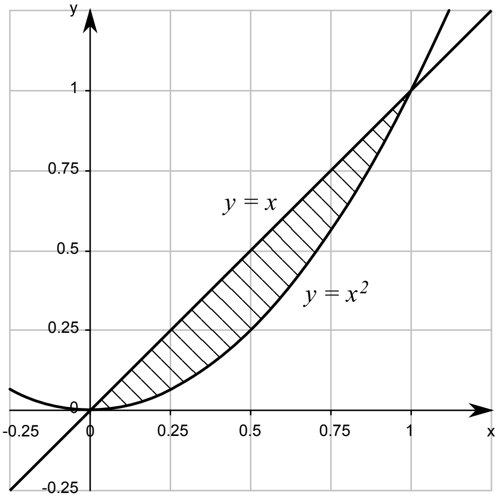
d'où la longueur de l'arc : $\ell = \int\limits_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}\Big|_1^3 = \cdots = \frac{53}{6}$

55) On a $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et ainsi :

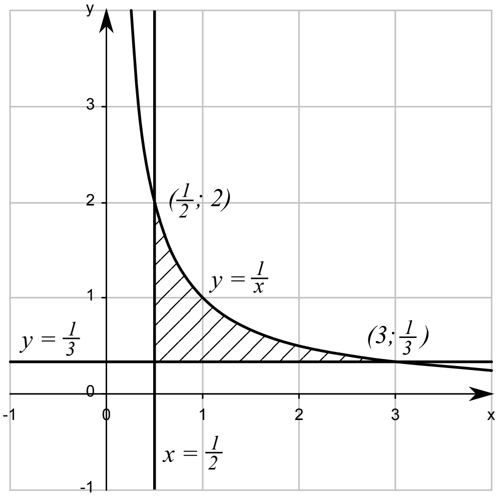
$\sqrt{1 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

d'où la longueur de l'arc : $\ell = \int\limits_0^2 \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big|_0^2 = \frac{e^2-e^{-2}}{2} - \frac{1-1}{2} \simeq 3.6269$

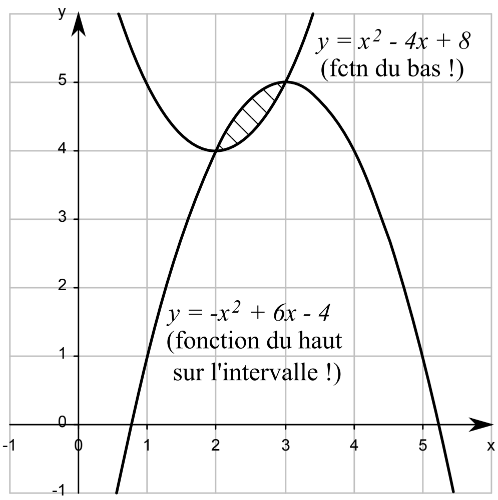
45.



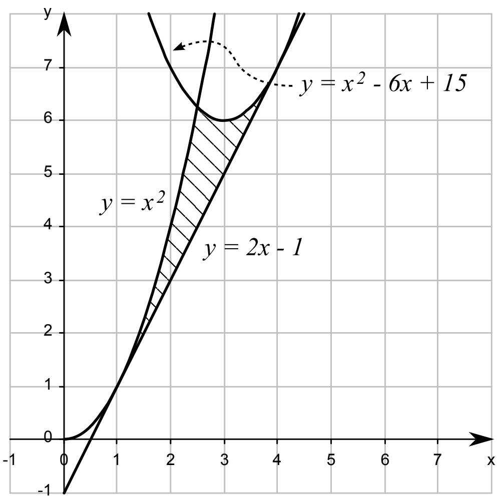
46.



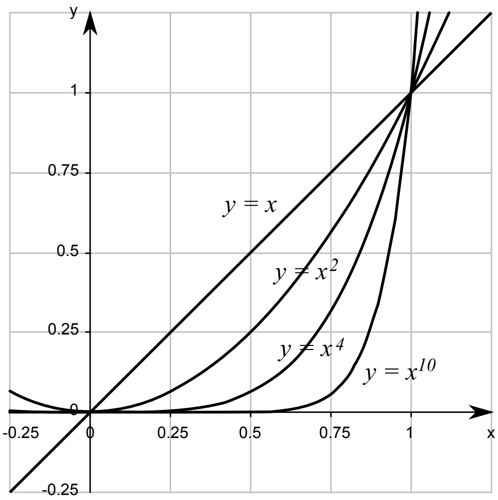
47.



48.



49.



51.