Logarithmes : cours

---

1. Introduction

Idée à la base des logarithmes : lorsqu'on a $2^3 = 8$, on peut retrouver le 2 à partir de 8 et 3 en posant $\sqrt[3]{8} = 2$, mais comment fait-on pour retrouver 3 à partir de 2 et 8; autrement dit, quelle est la fonction qui permet de répondre à la question : "à quelle puissance faut-il élever 2 pour trouver 8 ?"

Définition : on appelle logarithme en base a d'un nombre x la puissance à laquelle il faut élever a pour trouver x

Notation : $\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x$ [On lit : *logarithme en base* a *de* x]
[$\log_a x$: *à quelle puissance faut-il élever* a *pour trouver* x *?*]

Exemples :
1) $\log_2 8 =$
2) $\log_3 81 =$
3) $\log_2 \frac{1}{8} =$
4) $\log_5 \sqrt{5} =$
5) $\log_{\frac{1}{2}} 16 =$
6) $\log_8 32 =$
7) $\log_{\sqrt[5]{16}} \frac{1}{\sqrt{32}} =$
8) $\log_1 17 =$
9) $\log_0 17 =$
10) $\log_6 0 =$

◇ Note : corrigé de ces exemples dans `08-zExemplesCorriges.pdf`

Restrictions : pour la définition de $\log_a x$, il faut que $x > 0$ et $a > 0$ avec $a \neq 1$

Propriétés
1) $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$
3) $\log_a a^n = n$
4) $a^{\log_a x} = x$
5) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
6) $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
7) $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a u$
8) $\log_a \sqrt[v]{u} = \frac{1}{v} \cdot \log_a u$
9) Attention : rien pour $\log_a(u + v)$ ni pour $\log_a(u - v)$

Remarque : ces propriétés découlent immédiatement de la définition et des propriétés des exposants.

2. Deux bases particulières

1) **Logarithmes décimaux** ou de base 10

Notation : sans la base : $\log x = \log_{10} x$ ainsi : $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$

Application : calcul numérique au temps où les calculatrices de poche n'existaient pas encore.

Exemples (calculés à la machine) :

$\log 427 = 2.630428$	$\log 427000 = 5.630428$	$\log 4.27 = 0.630428$
$\log 0.427 = -0.369572$	$\log 0.0427 = -1.369572$	$\log 0.000427 = -3.369572$

Explication : $\log(4.27 \cdot 10^n) =$

2) **Logarithmes naturels ou népériens** : ce sont les logarithmes de base e, où e $= 2.71828182845904523536028747135 27...$

Notation : $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ ainsi : $\ln x = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x$

Note : le nombre 'e' et les logarithmes naturels apparaissent *naturellement* en maths; plus précisément en calcul différentiel et intégral.

◇ On pourrait donc réécrire les formules de la page précédente en un jeu pour les 'log' (base 10) et un jeu pour les 'ln', par exemple :

$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$	$\log(u^v) = v \cdot \log u$	$\cdots$
$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$	$\ln(u^v) = v \cdot \ln u$	$\cdots$

Attention : les notations 'log' (pour la base 10) et 'ln' ne sont pas universelles : on trouve quelquefois dans les livres 'Log' (avec une majuscule) pour l'une ou l'autre de ces deux bases et dans plusieurs langages de programmation, la seule fonction disponible est 'log' (avec un seul argument) et correspond aux logarithmes naturels.

Note : la fonction e^x (fonction exponentielle ou plus précisément fonction exponentielle de base e) est souvent notée 'exp'.

3. Formule du changement de base

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ où b est à choisir astucieusement

Exemple 1 :

$$\log_{\sqrt[5]{16}}\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right) = \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{32}}}{\log_2 \sqrt[5]{16}} = \frac{\log_2 32^{-\frac{1}{2}}}{\log_2 16^{\frac{1}{5}}} = \frac{\log_2 (2^5)^{-\frac{1}{2}}}{\log_2 (2^4)^{\frac{1}{5}}} = \frac{\log_2 2^{-\frac{5}{2}}}{\log_2 2^{\frac{4}{5}}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{4}{5}} = -\frac{25}{8}$$

Exemple 2 (calcul à la machine à l'aide de la base 10 ou de la base e) :

$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} = \frac{1.945910}{1.098612} = 1.771244$ ou aussi $\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} = \frac{0.845098}{0.477121} = 1.771244$

4. Equations logarithmiques et exponentielles

Pas de méthode générale, mais quelques idées de base :

1) utiliser les propriétés des exposants et des logarithmes pour arriver à une équation d'un des types suivants : $\log(\ldots) = \log(\ldots)$ ou $a^{(\ldots)} = a^{(\ldots)}$

2) prendre le 'log' des deux côtés de l'équation

3) utiliser une substitution (poser $u = \cdots$)

Mais attention : **toujours vérifier les solutions**

Exemple 1 :

$2\log(x-11) = 2 + \log x$

$\Rightarrow 2\log(x-11) = \log 100 + \log x$ (on remplace 2 par un log)

$\Rightarrow \log(x-11)^2 = \log(100x)$ (on applique les propriétés des log)

$\Rightarrow (x-11)^2 = 100x$ (si deux log sont égaux, leurs arguments sont égaux)

$\Rightarrow x^2 - 22x + 121 = 100x$ (reste à résoudre l'équation algébrique obtenue)

$\Rightarrow x^2 - 122x + 121 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = 1$ ou $x = 121$

Mais attention : la solution $x = 1$ doit être exclue, car elle donne un nombre négatif comme argument du log dans $\log(x-11)$

Exemple 2 :

$2^{(x+2)} = 8^{(x-7)}$

$\Rightarrow 2^{(x+2)} = (2^3)^{(x-7)}$ (on transforme 8 en 2^3)

$\Rightarrow 2^{(x+2)} = 2^{3(x-7)}$ (on applique les propriétés des puissances)

$\Rightarrow 2^{(x+2)} = 2^{(3x-21)}$ (on effectue)

$\Rightarrow x + 2 = 3x - 21$ (si deux puissances de 2 sont égales, alors les exposants sont égaux)

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \frac{23}{2}$

Exemple 3 :

$2^{(x+2)} = 5^{(x-7)}$

Ici, on ne peut pas utiliser la même méthode qu'à l'exemple précédent, car pour transformer 5 en puissance de 2, il faudrait écrire $5 = 2^{\log_2 5}$, ce qui alourdirait la démarche.

Méthode : prendre le logarithme naturel (ou décimal) des deux côtés :

$\Rightarrow \ln(2^{(x+2)}) = \ln(5^{(x-7)})$ (si deux nombres sont égaux, leurs logarithmes le sont aussi)

$\Rightarrow (x+2)\ln 2 = (x-7)\ln 5$ (on applique les propriétés des ln)

$\Rightarrow x\ln 2 + 2\ln 2 = x\ln 5 - 7\ln 5$ ($\ln 2$ et $\ln 5$ sont des nombres comme les autres : on applique la distributivité, puis les règles algébriques habituelles)

$\Rightarrow x\ln 2 - x\ln 5 = -2\ln 2 - 7\ln 5$

$\Rightarrow x(\ln 2 - \ln 5) = -2\ln 2 - 7\ln 5$

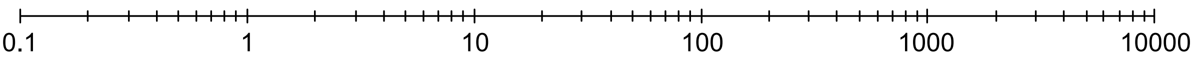
$\Rightarrow x = \frac{-2\ln 2 - 7\ln 5}{\ln 2 - \ln 5}$ $\longrightarrow$

On peut encore amplifier par -1 (pour faire plus joli) : $x = \frac{2\ln 2 + 7\ln 5}{\ln 5 - \ln 2}$
et éventuellement calculer la valeur numérique $x = 13.808237$
Remarque : on peut présenter ce résultat d'autres façons tout aussi correctes, par exemple en appliquant les propriétés des ln et/ou en calculant une partie des nombres obtenus : $x = \frac{\ln 2^2 + \ln 5^7}{\ln 5 - \ln 2} = \frac{\ln(2^2 \cdot 5^7)}{\ln 5 - \ln 2} = \frac{\ln(312500)}{\ln(5/2)}$

Note : une façon simple de vérifier un résultat est de passer par les valeurs numériques.

5. Applications des logarithmes

1. Echelles logarithmiques pour les graphiques : utiles pour pouvoir représenter de larges plages de valeurs, tout en étant précis dans les petites valeurs. Souvent utiles pour des caractéristiques de la physiologie humaine (acuité auditive, visuelle,...). Disponibles dans les tableurs usuels (Excel, OpenOffice, LibreOffice).



2. Décibels :
Niveau sonore exprimé en dB $= 20\log\frac{\text{pression}}{\text{pression de réf}} = 20\log\frac{\text{intensité}}{\text{intensité de réf}}$
$= 10\log\frac{\text{puissance}}{\text{puissance de réf}}$ (log en base 10)
(Attention : c'est bien 20, 20 et 10; à mettre en relation avec la formule $P = R \cdot I^2$)
(Seuil de l'audition : 0 dB, douleur : 140 dB $\Rightarrow \Delta$ Puissance $= 10^{14}$)
(Une différence de 3 dB correspond environ à un doublement de la puissance :
Δ Puissance $= 10^{0.3} \simeq 1.995$)

3. Acidité (pH) :
$\text{pH} = -\log(\text{concentration en ions } H^+)$

4. Calcul numérique (à l'aide de tables de logarithmes) et règles à calcul (au temps où les calculatrices de poche n'existaient pas).

5. Résolution de problèmes concernant des phénomènes de croissance ou de décroissance : désintégration radioactive, taux d'intérêt composés.

6. Un exemple de problème d'intérêts composés

1. Etablissons d'abord la formule des intérêts composés.
Considérons un capital (initial) C_0 que l'on place à 4 %.
Après une année, on aura : $C_1 = C_0 + \frac{4}{100}C_0 = 1 \cdot C_0 + 0.04 \cdot C_0 = 1.04 \cdot C_0$
Après deux ans : $C_2 = 1 \cdot C_1 + 0.04 \cdot C_1 = 1.04 \cdot C_1 = 1.04 \cdot 1.04 \cdot C_0 = (1.04)^2 \cdot C_0$
Après trois ans : $C_3 = 1.04 \cdot C_2 = 1.04 \cdot (1.04)^2 \cdot C_0 = (1.04)^3 \cdot C_0$
Et ansi, après n années : $C_n = (1.04)^n \cdot C_0$

Plus généralement, pour un capital initial C_0 placé à t%, on aura après n années : $C_n = (1 + \frac{t}{100})^n \cdot C_0$

2. Maintenant, le problème : après combien d'années un capital placé à 4 % aura-t-il doublé de valeur ?
Résolution : On cherche donc n tel que : $C_n = 2 \cdot C_0$,
mais on a (par la formule ci-dessus) : $C_n = (1.04)^n \cdot C_0$
$\Rightarrow 2 \cdot C_0 = (1.04)^n \cdot C_0 \Rightarrow 2 = (1.04)^n \Rightarrow \ln(2) = \ln((1.04)^n) \Rightarrow \ln 2 = n \ln 1.04$
$\Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1.04} = 17.67$ (années !)

MCN / 16.7.2015