# Asymptotes : cours

---

## 1. Introduction

**Définition intuitive :** une asymptote est une droite dont le graphe d'une fonction s'approche lorsque la fonction part vers l'infini.

**Mathématiquement,** une droite est asymptote d'une fonction si la distance entre la droite et le graphe de la fonction diminue lorsque $x$ ou $y$ tend vers l'infini.

**Remarque :** il est faux de dire qu'une asymptote est une tangente à l'infini, car une fonction peut très bien traverser de nombreuses fois une asymptote.

## 2. Trois types d'asymptotes

**Asymptote verticale :** une fonction $f(x)$ admet la droite $x = a$ comme asymptote verticale si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (ou aussi si ce n'est le cas que pour $x \to a^+$ ou pour $x \to a^-$)
Autrement dit, la fonction *part* à l'infini lorsque $x$ s'approche de $a$.

Note : les asymptotes verticales sont souvent (mais pas toujours) liées à des trous du domaine de définition de la fonction.

**Asymptote horizontale :** une fonction $f(x)$ admet la droite $y = a$ comme asymptote horizontale si et seulement si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$
Autrement dit, la fonction se stabilise autour d'une valeur $a$ lorsque $x$ tend vers $+$ ou $-$ infini.

**Asymptote oblique :** une fonction $f(x)$ admet la droite $y = mx+h$ comme asymptote oblique si et seulement si $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+h)) = 0$ ou $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+h)) = 0$
Autrement dit, la fonction ressemble de plus en plus à une droite lorsque $x$ tend vers $+$ ou $-$ infini.

C'est en particulier le cas lorsque la fonction se compose d'une droite et d'une partie qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers l'infini; par exemple : $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x^2}$

## 3. Cas des fractions rationnelles

**Rappel :** une fraction rationnelle est une fonction constituée d'un polynôme divisé par un autre polynôme (Exemple : $\frac{2x^3+3x^2-7}{x^2-3x+11}$).

**Attention :** les considérations qui suivent ne se généralisent pas à des fonctions qui ne sont pas des fractions rationnelles.

**Asymptotes verticales des fractions rationnelles :** si la fraction rationnelle est **simplifiée**, il y a une asymptote verticale pour chaque trou du domaine de définition.

**Asymptotes horizontales et obliques des fractions rationnelles**

**Comportement à l'infini :** il dépend des degrés des polynômes du numérateur (dessus) et du dénominateur (dessous) :

Si (degré du haut) $<$ (degré du bas) alors $y = 0$ est asymptote horizontale.

Si (degré du haut) $=$ (degré du bas) alors $y = \frac{a}{b}$ est asymptote horizontale ($a$ et $b$ étant les coefficients des termes du plus haut degré de chacun des polynômes).

Si (degré du haut) $>$ (degré du bas) alors pas d'asymptote horizontale (mais éventuellement une oblique, si on est dans le cas particulier ci-dessous).

Si (degré du haut) $=$ (1 + degré du bas) il y a alors une asymptote oblique que l'on trouve en effectuant la division avec reste des polynômes (voir méthode ci-dessous).

**Méthode (asymptotes obliques des fractions rationnelles) :**

Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes et $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ la fraction rationnelle considérée; en effectuant la division, on obtient un polynôme quotient $Q(x)$ et un reste $R(x)$, autrement dit $N(x) : D(x) = Q(x)$ reste $R(x)$ ou aussi $N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ ou encore $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$. Mais, vu que le degré du reste est strictement plus petit que le degré du diviseur (et que $Q(x)$ est de degré 1), cela signifie que l'on est dans le cas d'une équation de droite + un terme qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers infini; ce qui signifie que le polynôme quotient $Q(x)$ donne l'équation de l'asymptote oblique.

**Exemple :**

Soit $f(x) = \frac{2x^3+3x^2-7}{x^2-3x+11}$;

on effectue la division : $(2x^3 + 3x^2 - 7) : (x^2 - 3x + 11) = 2x + 9$, reste $5x - 106$

La fonction peut donc s'écrire : $f(x) = \frac{2x^3+3x^2-7}{x^2-3x+11} = 2x + 9 + \frac{5x-106}{x^2-3x+11}$

[de la même façon que $44 : 7 = 6$ reste $2 \;\Rightarrow\; \frac{44}{7} = 6 + \frac{2}{7}$]

L'asymptote est donc $y = 2x + 9$

(le reste fournit la partie qui devient nulle lorsque x tend vers $\pm\infty$)

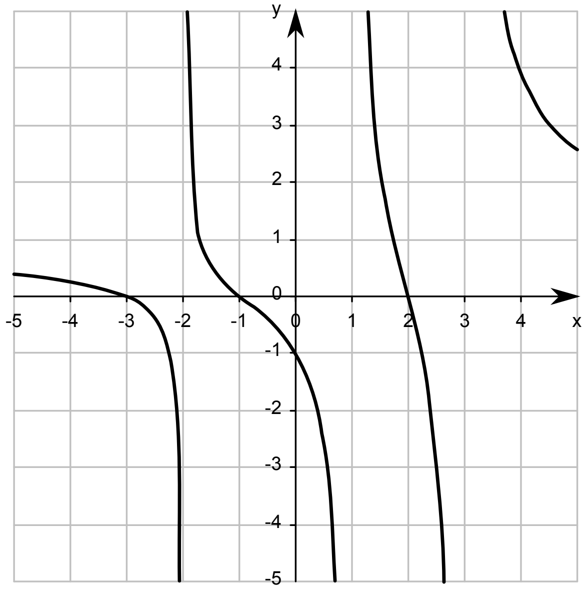
**Résumé : Fractions rationnelles : méthode de recherche des asymptotes :**

1) Asymptotes verticales : dans les trous du domaine de définition (si $f$ simplifiée)
2) Calculer les limites à gauche et à droite de ces asymptotes verticales
3) Comportement à l'infini : les valeurs relatives des degrés du numérateur et du dénominateur indiquent s'il y a une asymptote horizontale, oblique ou pas d'asymptote
4) Déterminer le cas échéant l'équation de cette asymptote

◇ Note : corrigé des exemples qui suivent dans `13-zExemplesCorriges.pdf`

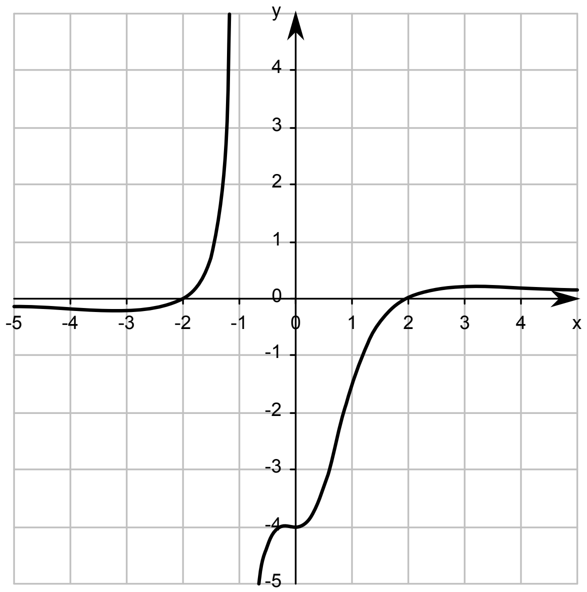
**Exemple 1**

$$f_1(x) = \frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)}$$



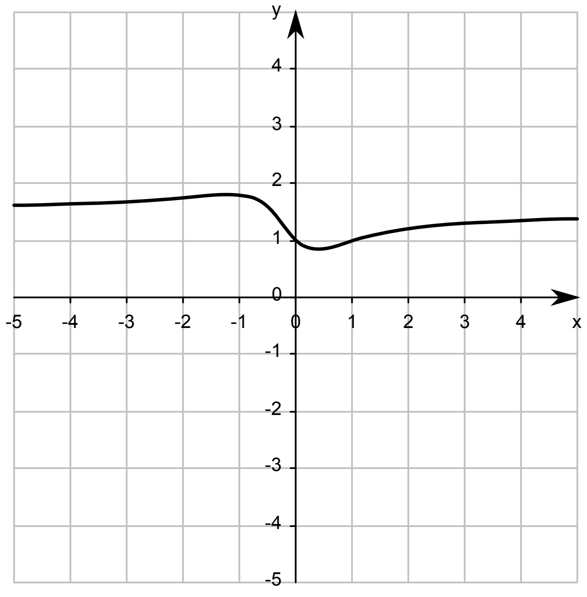

**Exemple 2**

$$f_2(x) = \frac{x^2-4}{x^3+1}$$



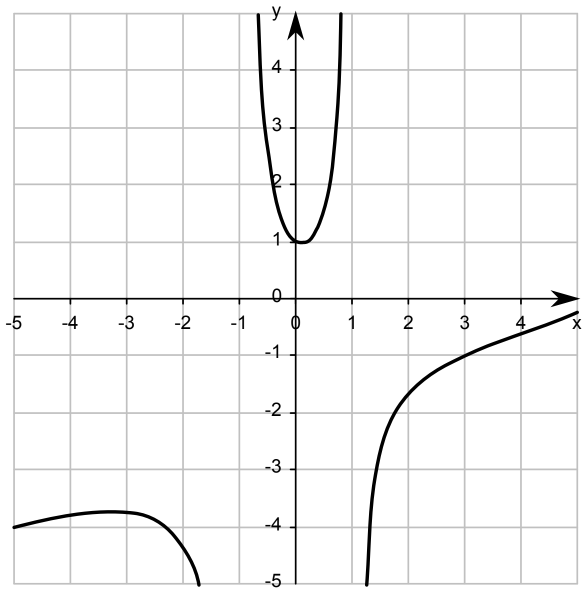
## Exemple 3

$$f_3(x) = \frac{6x^2 - x + 2}{4x^2 + x + 2}$$



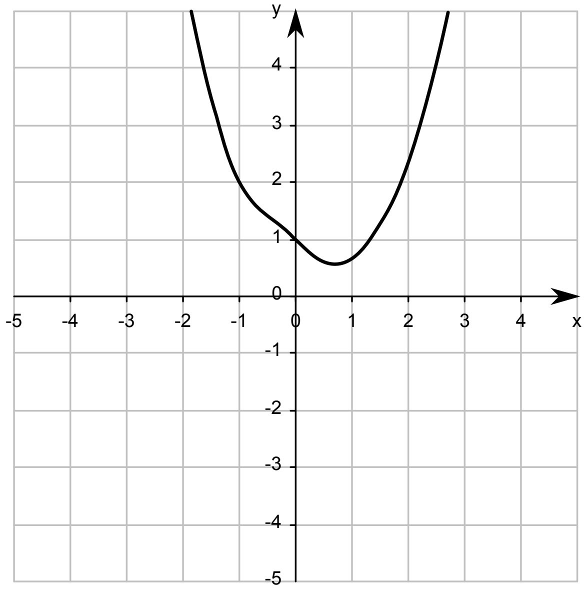

## Exemple 4

$$f_4(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 3}$$



### Exemple 5

$$f_5(x) = \frac{x^4+1}{x^2+x+1}$$




### Exemple 6

$$f_6(x) = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{x-2}{x+2}$$