Nombres complexes : cours

---

1. Introduction

On appelle **nombres complexes** des objets mathématiques de la forme $a + bi$
avec a et b dans $\mathbb{R}$ et i : symbole tel que $i^2 = -1$
(On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.)
Exemples : $3 + 4i$, $\sqrt{2} - \frac{5}{7}i$

Le nombre a s'appelle **partie réelle** du nombre complexe $z = a + bi$
et le nombre b **partie imaginaire**.
On écrit quelquefois : $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$
(fonctions qui existent par exemple en Python sous la forme : `real(z)` et `imag(z)`).
⋄ Attention : ce n'est pas bi que l'on appelle partie imaginaire, mais uniquement b.
Si sa partie réelle est nulle, le nombre complexe est dit **imaginaire pur**.
Exemples : $5i$, $-7i$.

Conjugué d'un nombre complexe : $\overline{a + bi} = a - bi$

Egalité des nombres complexes : $a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c \\ \textbf{et} \\ b = d \end{cases}$

Addition et soustraction : par composantes :
$(3 + 4i) + (7 + 2i) = 10 + 6i$
$(3 + 4i) - (7 + 2i) = -4 + 2i$

Multiplication : comme pour un polynôme et en appliquant ensuite la règle $i^2 = -1$:
$(3 + 4i) \cdot (7 + 2i) = 21 + 6i + 28i + 8i^2 = 21 + 6i + 28i - 8 = 13 + 34i$
⋄ Attention : $8i^2$ signifie $8 \cdot (i^2)$ et non $(8i)^2$

Puissances de i
On a $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$,
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ et le cycle recommence (cycle répétitif de longueur 4) :

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9	$\ldots$	i^{61}	i^{62}	i^{63}	i^{64}	i^{65}	$\ldots$
i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	$\cdots$	i	-1	$-i$	1	i	$\cdots$

Pour les puissances plus grandes, il suffit donc de calculer modulo 4.
Exemple : $i^{1439} = i^{1436} \cdot i^3 = i^{(4 \cdot 359)} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

Remarque utile (et divisions) :
Si on multiplie un nombre complexe par son conjugué, on obtient :
$(a+bi)\overline{(a+bi)} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$
qui est toujours **positif** (et donc en particulier réel).

Application : pour **diviser** par un nombre complexe, on amplifie par le conjugué du dénominateur.
Exemple : $\frac{13+34i}{7+2i} = \frac{(13+34i)(7-2i)}{(7+2i)(7-2i)} = \frac{91-26i+238i-68i^2}{49+4} = \frac{91+212i+68}{53} = \frac{159+212i}{53} = 3+4i$

Deux remarques sur les équations à variables complexes :
1) par tradition on note généralement la variable z au lieu de x;
2) une méthode de résolution qui peut être utile dans certains cas : séparer la variable en ses parties réelle et imaginaire, autrement dit poser $z = x + iy$ (avec x et $y \in \mathbb{R}$); c'est notamment utile dans les cas où l'équation comporte des termes faisant intervenir les conjugués.

Racines carrées des nombres négatifs
On a posé $i^2 = -1$; on pourrait donc écrire $\sqrt{-1} = i$
Mais on a aussi $(-i)^2 = -1$; on pourrait donc aussi écrire $\sqrt{-1} = -i$
Dans les nombres réels, on a choisi la seule valeur positive : $\sqrt{16} = 4$ et non -4 ni encore ± 4 !
Rappel important : $x^2 = 16 \;\Rightarrow\; x = \pm 4$, mais $\sqrt{16} = 4$
De même : $x^2 = 17 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{17}$ (le "$\pm$" ne fait pas partie de la racine)
Dans les nombres complexes, il n'y pas de raison de choisir l'un plutôt que l'autre; on accepte donc les deux valeurs : $\sqrt{-1} = \pm i$ et $\sqrt{-16} = \pm 4i$
Conséquence importante : les propriétés habituelles des racines ne sont plus valables; en particulier $\sqrt{a \cdot b} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

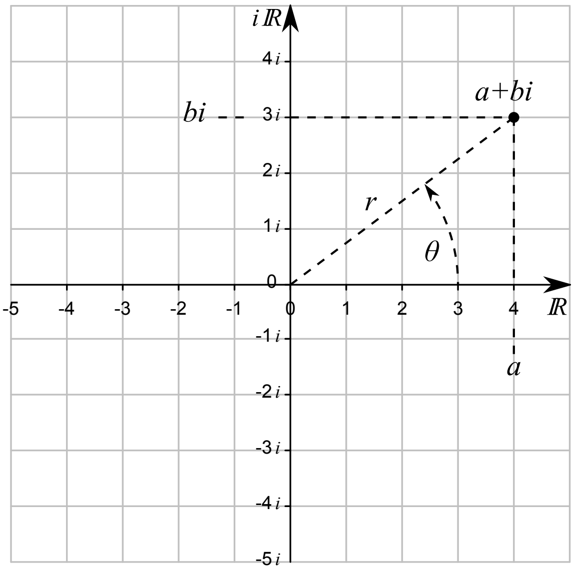
Application : résolution des équations du 2e degré avec Δ négatif
Exemple : $x^2 + 6x + 58 = 0$
La formule habituelle reste valable : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 58 = 36 - 232 = -196$
et $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6\pm\sqrt{-196}}{2\cdot 1} = \frac{-6\pm 14i}{2} = -3 \pm 7i$
Note : dans ce cas, le "$\pm$" de la formule fait double emploi avec celui admis pour la racine (d'un nombre négatif).

2. Représentation dans le plan de Gauss

Pour représenter les nombres réels, une droite suffit.
Pour les nombres complexes, il faut passer en 2 dimensions (et on retrouvera souvent (mais sous un autre nom) des concepts déjà vu avec les vecteurs).

L'axe Ox devient l'**axe réel**, l'axe Oy l'**axe imaginaire** et le nombre complexe $a + bi$ est représenté par le point $(a; b)$.
Voir aussi le fichier Excel : `07-OperationsEnNombresComplexes.xls`

On appelle **module** du nombre complexe $a + bi$, la valeur : $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (c'est une longueur; donc toujours positive).

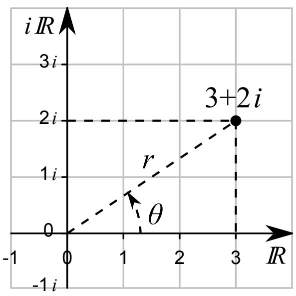


On appelle **argument** du nombre complexe $a + bi$, l'angle θ que fait sa représentation avec l'axe réel.
On calcule l'argument comme pour les vecteurs ($\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ avec év. $\pm 180°$).
[Pour $\pm 180°$, voir tableau dans le cours sur les vecteurs]

Transformation réciproque :
Pour les vecteurs, on avait $\vec{v} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$
Dans $\mathbb{C}$: $a + bi = r\cos\theta + ri\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$
"$r \cdot \mathrm{cis}\,\theta$" est la forme **polaire** ou **trigonométrique** du nombre complexe $a + bi$.
Note : "cis" : <u>c</u>os + <u>i</u> <u>s</u>in

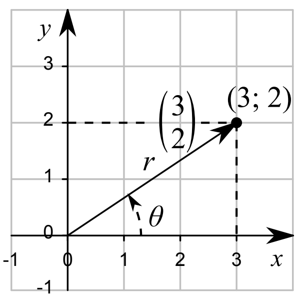
Comparaison nombres complexes $\longleftrightarrow$ vecteurs / points

Nombres complexes



$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7°$
$3 + 2i = \sqrt{13}\cos 33.7° + i\sqrt{13}\sin 33.7°$
$= \sqrt{13}\,\mathrm{cis}\,33.7°$

Vecteurs / points

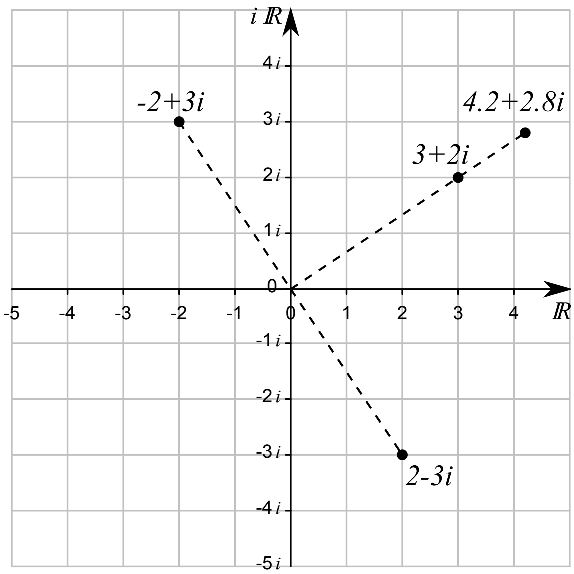


$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7°$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{13}\cos 33.7° \\ \sqrt{13}\sin 33.7° \end{pmatrix}$

Remarque : ne pas utiliser arctan pour les cas simples : $7 = 7\,\mathrm{cis}\,0$, $7i = 7\,\mathrm{cis}\,90°$,...

Représentation de l'addition et de la soustraction : analogue à ce qui se passe avec les vecteurs.

Représentation de la multiplication



Exemple 1 : multiplication par 1.4 :
$1.4 \cdot (3+2i) = 4.2 + 2.8i$;
la distance entre l'origine et le point est agrandie d'un facteur 1.4

Exemple 2 : multiplication par i :
$i \cdot (3+2i) = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$;
graphiquement, cela correspond à une rotation de $+90°$.

Exemple 3 : multiplication par $-i$:
$(-i) \cdot (3+2i) = -3i - 2i^2 = 2 - 3i$;
graphiquement, cela correspond à une rotation de $-90°$.

Plus généralement, le module du multiplicateur donne une homothétie (agrandissement, rétrécissement) et l'argument (= angle) une rotation.

Multiplication (et division) en notation polaire

$(r_1 \operatorname{cis}\theta_1) \cdot (r_2 \operatorname{cis}\theta_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ $\qquad$ $\dfrac{r_1 \operatorname{cis}\theta_1}{r_2 \operatorname{cis}\theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

[Les modules se multiplient (resp. se divisent) et les arguments s'additionnent (resp. se soustraient).]

Remarque : on n'utilise pratiquement jamais ces formules (sauf bien sûr si les données sont déjà sous forme polaire). La multiplication sous forme polaire est par contre très utile dans sa généralisation aux puissances des nombres complexes.

3. Puissances des nombres complexes

• Si l'exposant est petit (2, 3, év. 4), on peut appliquer l'algèbre de base et les formules du binôme; attention toutefois aux signes (surtout avec les puissances de i).

• Si l'exposant est plus grand, on a intérêt à écrire le nombre sous forme polaire et à appliquer la formule des puissances :

$(r \cdot \operatorname{cis}\theta)^n = r^n \cdot \operatorname{cis}(n \cdot \theta)$

Exemple : calcul de $(3-4i)^6$
1) Calcul du module : $|3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
2) Calcul de l'argument : $\arg(3-4i) = \arctan \frac{-4}{3} = -53.1301°$
3) Ainsi : $(3-4i) = 5 \operatorname{cis}(-53.1301°)$ $\longrightarrow$

4) D'où : $(3-4i)^6 = 5^6 \operatorname{cis}(6 \cdot (-53.1301°)) = 15625 \operatorname{cis}(-318.7806°) = 11753 + 10296i$

◇ Note : Attention aux erreurs d'arrondi; en particulier si les deux parties du nombre de départ sont des entiers, on **doit** obtenir des entiers à l'arrivée.

Voir aussi les fichiers Excel : `07-OperationsEnNombresComplexes.xls`
et `07-NombresComplexesPuissancesEtRacines.xls`

4. Racines des nombres complexes

Vu ce qui a été fait pour les puissances, on pourrait se dire que pour calculer une racine n-ième, il suffit de prendre la racine n-ième du module et de diviser l'argument par n. Cela fonctionne si on se contente d'une seule racine. Mais, de même que l'on a accepté deux racines carrées, il faudra accepter n racines n-ièmes.

Considérons en effet le nombre complexe $2 \operatorname{cis} 10°$ et calculons sa cinquième puissance :
$(2 \operatorname{cis} 10°)^5 = 2^5 \operatorname{cis}(5 \cdot 10°) = 32 \operatorname{cis} 50°$

Que se passe-t-il avec $2 \operatorname{cis} 82°$?

On a $(2 \operatorname{cis} 82°)^5 = 2^5 \operatorname{cis}(5 \cdot 82°) = 32 \operatorname{cis} 410° = 32 \operatorname{cis} 50°$

De même : $(2 \operatorname{cis} 154°)^5 = 2^5 \operatorname{cis}(5 \cdot 154°) = 32 \operatorname{cis} 770° = 32 \operatorname{cis} 50°$

Et aussi : $(2 \operatorname{cis} 226°)^5 = 2^5 \operatorname{cis}(5 \cdot 226°) = 32 \operatorname{cis} 1130° = 32 \operatorname{cis} 50°$

Ces quatre nombres (+ encore $2 \operatorname{cis} 298°$) sont donc cinq candidats possibles pour la racine cinquième de $32 \operatorname{cis} 50°$. On remarquera que leurs arguments diffèrent de 72°, à savoir 360°/5. C'est ce que l'on utilise pour calculer les n racines n-ièmes d'un nombre complexe par la formule :

$$\sqrt[n]{r \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + k \cdot 360°}{n}\right) = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}\right) \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$$

Remarques :

1) les formules habituelles des racines ne sont plus valables;

2) dans la formule, il y a une racine complexe et une racine réelle (attention : quelquefois des doubles racines (vu que r est un module), quelquefois des simples);

3) les n racines n$^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe forment un polygone régulier à n sommets;

4) la racine dont l'argument est le plus petit est appelée **détermination principale**.

Exemple 1 : calcul des racines quatrièmes de $28 + 96i$: $\sqrt[4]{28 + 96i}$

1) Calcul du module : $|28 + 96i| = \sqrt{28^2 + 96^2} = \sqrt{784 + 9216} = \sqrt{10000} = 100$

2) Calcul de l'argument : $\arg(28 + 96i) = \arctan \frac{96}{28} = 73.7398°$

3) Ainsi : $(28 + 96i) = 100 \operatorname{cis} 73.7398°$

4) D'où : $\sqrt[4]{28 + 96i} = \sqrt[4]{100} \operatorname{cis}\left(\frac{73.7398°}{4} + k \cdot \frac{360°}{4}\right) = \sqrt{10} \operatorname{cis}(18.4349° + k \cdot 90°)$

Pour $k = 0$, on obtient : $\sqrt{10} \operatorname{cis}(18.4349°) = 3 + i$

Pour $k = 1$, on obtient : $\sqrt{10} \operatorname{cis}(18.4349° + 90°) = -1 + 3i$

Pour $k = 2$, on obtient : $\sqrt{10} \operatorname{cis}(18.4349° + 180°) = -3 - i$

Pour $k = 3$, on obtient : $\sqrt{10} \operatorname{cis}(18.4349° + 270°) = 1 - 3i$

Note 1 : pour $k = 4$, on retrouverait la même valeur que pour $k = 0$.

Note 2 : ne pas confondre la valeur de k avec le quadrant de la valeur.

Exemple 2 : calcul des racines cubiques de 8 : $\sqrt[3]{8}$

1) Calcul du module : $|8+0i| = 8$

2) Calcul de l'argument : $\arg(8+0i) = 0°$

3) Ainsi : $8 = 8\,\text{cis}\,0°$

4) D'où : $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}\,\text{cis}\left(\frac{0°}{3} + k \cdot \frac{360°}{3}\right) = 2\,\text{cis}(0° + k \cdot 120°)$

Attention : dans la relation ci-dessus, le premier terme $\sqrt[3]{8}$ est une racine dans $\mathbb{C}$, alors que le deuxième terme $\sqrt[3]{8}$ est une racine dans $\mathbb{R}$

Pour $k = 0$, on obtient : $2\,\text{cis}(0°) = 2$

Pour $k = 1$, on obtient : $2\,\text{cis}(0° + 120°) = -1 + \sqrt{3}\,i$

Pour $k = 2$, on obtient : $2\,\text{cis}(0° + 240°) = -1 - \sqrt{3}\,i$

Note : pour $k = 3$, on retrouverait la même valeur que pour $k = 0$.

◇ Voir aussi les fichiers Excel : `07-OperationsEnNombresComplexes.xls`
et `07-NombresComplexesPuissancesEtRacines.xls`

Application aux équations du 2e degré à coefficients complexes

Exemple : résoudre l'équation : $2z^2 + 7z = 6 + 10iz + 17i$

1) On écrit l'équation sous forme standard : $2z^2 + (7-10i)z + (-6-17i) = 0$

2) On applique la formule habituelle : $\Delta = b^2 - 4ac = (7-10i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6-17i) \overset{(*)}{=}$
$49 - 140i + (10i)^2 + 48 + 136i = 49 - 140i + (-100) + 48 + 136i = -3 - 4i$

(*) : par $(a+b)^2 = \cdots$

3) Il faut maintenant calculer les deux racines carrées de $-3-4i$

3a) Module : $|-3-4i| = \cdots = 5$ argument : $\arg(-3-4i) = \cdots = -126.8699$

3b) Ainsi $-3-4i = 5\,\text{cis}(-126.8699)$

3c) Et $\sqrt{-3-4i} = \sqrt{5\,\text{cis}(-126.8699)} = \sqrt{5}\,\text{cis}\left(\frac{-126.8699}{2} + k \cdot \frac{360°}{2}\right) =$
$= \sqrt{5}\,\text{cis}(-63.4349 + k \cdot 180°) = 1 - 2i$ ou $-1 + 2i$

4) D'où les deux solutions de l'équation :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(7-10i) \pm (1-2i)}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{-(7-10i)-(1-2i)}{4} = \frac{-8+12i}{4} = -2+3i \\ \frac{-(7-10i)+(1-2i)}{4} = \frac{-6+8i}{4} = \frac{3}{2} + 2i \end{cases}$$

Voir aussi le fichier Excel : `07-NombresComplexesEquations2eDegre.xls`

5. Petit historique

Historiquement, les nombres complexes sont apparus lors de la résolution des équations du troisième degré. Curieusement, en effet, la résolution de certaines équations (dont les solutions sont pourtant réelles) nécessite le passage par des racines de nombres négatifs qui ensuite disparaissent dans les calculs.

On s'est d'abord méfié de ces nombres que l'on appelait, à l'époque, *imaginaires*. Puis on les a étudiés et ils ont trouvé leur place dans différentes théories mathématiques :

pour relier les fonctions exponentielles et les fonctions trigonométriques, pour étendre le corps des nombres réels, pour décrire certains ensembles fractals,...
En physique, on leur a trouvé des applications en électricité (circuits oscillants), en mécanique ondulatoire (superposition d'oscillations de même fréquence), en physique quantique (où l'on utilise même des matrices à coefficients complexes),...

6.$^\diamond$ Généralisation

Il est possible de généraliser les nombres complexes, autrement dit de construire un ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{C}$ et prolongeant ses opérations. C'est l'ensemble des **quaternions de Hamilton** (noté $\mathbb{H}$).
On ajoute pour cela à $\mathbb{C}$ deux autres nombres imaginaires : j et k avec les propriétés suivantes (pour la multiplication) :

$i^2 = -1,\ \ j^2 = -1,\ \ k^2 = -1,$
$i \cdot j = k,\ \ j \cdot k = i,\ \ k \cdot i = j,$ (ordre $ijkijk$ donne $(+)$)
$j \cdot i = -k,\ \ k \cdot j = -i,\ \ i \cdot k = -j$ (ordre $kjikji$ donne $(-)$)

Les quaternions sont alors des objets de la forme $a + bi + cj + dk$, les opérations et propriétés étant analogues à celles des nombres complexes.
La seule **différence importante** est que la multiplication n'est plus commutative :

$z_1 \cdot z_2$ pas nécessairement égal à $z_2 \cdot z_1$

Une application des quaternions : modélisation des rotations dans l'espace, modélisation utilisée dans certains logiciels de création de jeux en remplacement des matrices qui peuvent poser problème dans quelques cas particuliers.
Une rotation d'angle α autour d'un axe donné par le vecteur unitaire $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sera représentée par le quaternion $\cos\theta + a\sin\theta \cdot i + b\sin\theta \cdot j + c\sin\theta \cdot k$ (où $\theta = \frac{\alpha}{2}$).

Et la multiplication des quaternions représentant deux rotations donnera les caractéristiques de la rotation composée. Remarque : un théorème de géométrie de l'espace dit que la composée de deux rotations (même d'axes différents) redonne une rotation (dont l'axe et l'angle sont d'ailleurs difficiles à calculer autrement que par les quaternions).

MCN / 5.2.2015