Matrices : exercices

1 à 25) Considérer les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et calculer, lorsque c'est possible :

1) $D + E$
2) $D - E$
3) $-7C$
4) $2B - C$
[5)] $-3(D - 2E)$
6) $A - A$
7) $2\,{}^tA + C$
8) ${}^tD - {}^tE$
9) ${}^t(D - E)$
10) ${}^tB + 5\,{}^tC$
[11)] $\frac{1}{2}\,{}^tC - \frac{1}{4}A$
12) $B - {}^tB$
13) AB
14) BA
15) $(3E)D$
[16)] $(AB)C$
[17)] $A(BC)$
18) $C\,{}^tC$
19) ${}^t(DA)$
20) $({}^tCB)\,{}^tA$
21) $(4B)C + 2B$
22) ${}^t(-AC) + 5\,{}^tD$
23) ${}^tD\,{}^tE - {}^t(ED)$

24) Calculer : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}$

25) Calculer : $\begin{pmatrix} 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

26) Montrer que pour toute matrice M, le produit $M\,{}^tM$ donne une matrice symétrique (par rapport à la diagonale principale) et donc en particulier carrée.

Calculer les déterminants suivants :

27) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$
28) $\begin{vmatrix} 1 & -x \\ x & -3 \end{vmatrix}$
29) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$
30) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$
31) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$
32) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Calculer les inverses des matrices suivantes :

33) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
34) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
35) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
[[36)]] $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
[[37)]] $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
[[38)]] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

[[39)]] Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3, A^4,... et formuler une hypothèse pour A^n.
Vérifier que la formule trouvée permet, dans ce cas, de calculer également l'inverse de A en posant $n = -1$. (Attention : pas généralisable)

40) Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A^2 = 6 \cdot A + 7 \cdot I$ où I est la matrice identité 2 x 2.

41) Trouver toutes les matrices A telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

42) Etant donné les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, trouver une matrice C telle que $A \cdot B = B \cdot C$

43) Etant donnée la matrice : $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; déterminer toutes les matrices B qui commutent avec A, autrement dit toutes les matrices telles que $A \cdot B = B \cdot A$.

[[44)]] Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 42 & -16 \end{pmatrix}$. Déterminer tous les nombres λ tels que :

$\det(M - \lambda I) = 0$ où I est la matrice identité 2 sur 2.

[[45)]] Etant donné les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 2 & 9 & -9 \\ -6 & -2 & 13 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, ainsi que le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 15 \end{pmatrix}$; calculer le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $A\vec{t} = \vec{c} + B\vec{t}$.

Solutions

1) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{pmatrix}$ **4)** pas défini

5) $\begin{pmatrix} 33 & -9 & 12 \\ -3 & 6 & 9 \\ 15 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **10)** pas défini **11)** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ **12)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **14)** pas défini **15)** $\begin{pmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{pmatrix}$

16) $AB = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $(AB)C = \begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$

17) $BC = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ et $A(BC) = \begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$ **18)** $\begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ **20)** ${}^tCB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 16 & -2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ et $({}^tCB)\,{}^tA = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

21) pas défini

22) ${}^t(-AC) = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -12 & 2 & -5 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ et ${}^t(-AC) + 5\,{}^tD = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{pmatrix}$

23) ${}^tD\,{}^tE = {}^t(ED) = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 12 \\ 36 & -1 & 26 \\ 25 & 7 & 21 \end{pmatrix}$ et ${}^tD\,{}^tE - {}^t(ED) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

24) $\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$ **25)** $(\,34\,)$ **27)** 13 **28)** $x^2 - 3$ **29)** pas défini **30)** 29 **31)** 0

32) $-8a - 8b + 8c$ **33)** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, que l'on peut aussi écrire $\begin{pmatrix} 2/13 & 1/13 \\ -5/13 & 4/13 \end{pmatrix}$

34) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, que l'on peut aussi écrire $\begin{pmatrix} 1/5 & -3/10 \\ 2/5 & -1/10 \end{pmatrix}$ **35)** $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, que l'on peut aussi écrire $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$ **36)** $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -2 & -16 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}$ **37)** pas d'inverse

38) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **39)** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 16 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -31 & 32 \end{pmatrix}$,... et $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}$ et on a bien $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **40)** $A^2 = \begin{pmatrix} 31 & 18 \\ 30 & 19 \end{pmatrix}$ **41)** Quatre matrices solutions : $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

42) $C = \begin{pmatrix} 75 & 115 \\ -52 & -80 \end{pmatrix}$ **43)** $B = \begin{pmatrix} 3z+t & -\frac{5}{4}z \\ z & t \end{pmatrix}$ **44)** $\lambda = -2$ ou $\lambda = 5$

45) $x = 2$, $y = -1$ et $z = 3$

Quelques aides et indications

26) Calculer la transposée de $(M\,{}^tM)$

36) Matrice intermédiaire : $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -2 \\ 16 & -2 & -13 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **38)** $(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

41) Poser $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, calculer A^2 et en déduire un système d'équations pour les coefficients x, y, z et t.

42) Méthode I : Poser $C=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, calculer les deux produits et en déduire un système d'équations pour les coefficients x, y, z et t.
Méthode II : Utiliser l'algèbre matricielle et les propriétés des matrices inverses.
43) Méthode analogue à celle des exercices précédents.

Quelques corrigés

26) On a : $\,^t(M\,^tM)=\,^t(^tM)\,^tM=M\,^tM$ donc la matrice est égale à sa transposée et c'est donc une matrice carrée, symétrique par rapport à sa diagonale principale.
41) Avec $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on obtient $A^2=\begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+zt & yz+t^2 \end{pmatrix}$ qu'il faut égaler à $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; considérons l'équation : $xz+zt=0 \Rightarrow (x+t)z=0 \Rightarrow x+t=0$ ou $z=0$; premier cas : $x+t=0$ en contradiction avec $y(x+t)=1$, donc pas de solutions, deuxième cas : $z=0 \Rightarrow x=\pm 2$, $t=\pm 3$ et $y=\frac{1}{x+t}$, donc quatre matrices solutions : $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
42) Méthode I : Avec $C=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} 17 & 25 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+4z & 3y+4t \\ 2x+3z & 2y+3t \end{pmatrix}$, d'où un système de quatre équations à quatre inconnues qui se divise en fait en deux sous-systèmes de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} 3x+4z=17 \\ 2x+3z=-6 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3y+4t=25 \\ 2y+3t=-10 \end{cases}$
d'où $C=\begin{pmatrix} 75 & 115 \\ -52 & -80 \end{pmatrix}$
Méthode II : par calcul matriciel : $A\cdot B=B\cdot C \;\Rightarrow\; B^{-1}\cdot A\cdot B=B^{-1}\cdot B\cdot C \;\Rightarrow\; C=B^{-1}\cdot A\cdot B$
43) En posant $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, on obtient le système : $\begin{cases} 5z=-4y \\ -5x-12y+5t=0 \\ -4x+12z+4t=0 \\ -4y=5z \end{cases}$, d'où une infinité de solutions liées par $x=3z+t$ et $y=-\frac{5}{4}z$;
d'où les matrices cherchées : $\begin{pmatrix} 3z+t & -\frac{5}{4}z \\ z & t \end{pmatrix}$
44) Il faut donc résoudre l'équation : $\left|\begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 42 & -16 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=0$, autrement dit : $\begin{vmatrix} 19-\lambda & -7 \\ 42 & -16-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (19-\lambda)(-16-\lambda)-42(-7)=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0 \Rightarrow \lambda=-2$ ou $\lambda=5$