Asymptotes : exemples corrigés

Corrigé des exemples du cours

1) $f_1(x) = \dfrac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)}$

$D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$ et la fonction est visiblement simplifiée

donc asymptotes verticales : $x = -2$, $x = 1$ et $x = 3$

Limites autour des asymptotes verticales :

$x \to (-2)^-$, $\frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} \to \frac{1\cdot(-4)\cdot(-1)}{(-5)\cdot 0^-\cdot(-3)} \to \frac{4}{0^-} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f_1(x) = -\infty$

$x \to (-2)^+$, $\frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} \to \frac{1\cdot(-4)\cdot(-1)}{(-5)\cdot 0^+\cdot(-3)} \to \frac{4}{0^+} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f_1(x) = +\infty$

$x \to 1^-$, $\frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} \to \frac{4\cdot(-1)\cdot 2}{(-2)\cdot 3\cdot 0^-} \to \frac{-8}{0^+} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_1(x) = -\infty$

$x \to 1^+$, $\frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} \to \frac{4\cdot(-1)\cdot 2}{(-2)\cdot 3\cdot 0^+} \to \frac{-8}{0^-} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_1(x) = +\infty$

$x \to 3^-$, $\frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} \to \frac{6\cdot 1\cdot 4}{0^-\cdot 5\cdot 2} \to \frac{24}{0^-} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f_1(x) = -\infty$

$x \to 3^+$, $\frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} \to \frac{6\cdot 1\cdot 4}{0^+\cdot 5\cdot 2} \to \frac{24}{0^+} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f_1(x) = +\infty$

Note : on écrit généralement ces limites dans l'ordre naturel : des nombres négatifs aux nombres positifs (comme ci-dessus); mais il est souvent plus simple de calculer d'abord les limites pour les nombres positifs.

Rappel : pour voir ce qui se passe autour de (-2) par exemple, on peut considérer des nombres : juste plus petit que -2 : -2.001, juste plus grand que -2 : -1.999

Comportement à l'infini :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-2x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}}{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1} = 1$

ou avec la méthode du cours :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-2x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$

D'où une asymptote horizontale : $y = 1$

Note : la fonction coupe son asymptote horizontale en $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$

2) $f_2(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+1}$

Factorisation : $f_2(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

D'où : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-1\}$ (on sait que le deuxième terme de la factorisation de x^3+1 ne s'annule jamais)

Ainsi asymptote verticale : $x = -1$

Limites autour de l'asymptote verticale :
$x \to (-1)^-$, $\frac{x^2-4}{x^3+1} \to \frac{(-1)^2-4}{((-1)^-)^3+1} \to \frac{1-4}{((-1)^-)+1} \to \frac{-3}{0^-} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f_2(x) = +\infty$
$x \to (-1)^+$, $\frac{x^2-4}{x^3+1} \to \frac{(-1)^2-4}{((-1)^+)^3+1} \to \frac{1-4}{((-1)^+)+1} \to \frac{-3}{0^+} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f_2(x) = -\infty$
Comportement à l'infini :
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$ d'où une asymptote horizontale : $y = 0$
Note : la fonction coupe son asymptote horizontale en $x = -2$ et $x = 2$

3) $f_3(x) = \dfrac{6x^2 - x + 2}{4x^2 + x + 2}$

Polynôme du dénominateur : $4x^2 + x + 2$: pas factorisable ($\Delta < 0$) donc $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$ et donc pas d'asymptotes verticales
Polynôme du numérateur : $6x^2 - x + 2$: pas factorisable ($\Delta < 0$) donc la fonction ne s'annule jamais
Comportement à l'infini :
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2-x+2}{4x^2+x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2}{4x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ d'où une asymptote horizontale : $y = \frac{3}{2}$
Note : la fonction coupe son asymptote horizontale en $x = -\frac{2}{5}$

4) $f_4(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 3}$

Factorisation du dénominateur : $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$
d'où $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
Factorisation du numérateur : difficile sans machine, mais en fait ce qui est important, c'est de savoir si la fraction est simplifiée ou non; pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de divisibilité : si la fraction est simplifiable, elle ne peut l'être que par l'un des deux termes $(x + 1)$ ou $(x - 1)$ et il suffit donc de remplacer x par -1 resp. 1 pour savoir si le numérateur est divisible. Ce qui, ici, n'est pas le cas donc la fraction est simplifiée au maximum et ses asymptotes verticales sont donc $x = -1$ et $x = 1$
Limites autour des asymptotes verticales :
$x \to (-1)^-$, $\frac{x^3-6x^2+2x-3}{3(x+1)(x-1)} \to \frac{-12}{3\cdot 0^-\cdot(-2)} \to \frac{-12}{0^+} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f_4(x) = -\infty$
$x \to (-1)^+$, $\frac{x^3-6x^2+2x-3}{3(x+1)(x-1)} \to \frac{-12}{3\cdot 0^+\cdot(-2)} \to \frac{-12}{0^-} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f_4(x) = +\infty$
$x \to 1^-$, $\frac{x^3-6x^2+2x-3}{3(x+1)(x-1)} \to \frac{-6}{3\cdot 2\cdot 0^-} \to \frac{-6}{0^-} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f_4(x) = +\infty$
$x \to 1^+$, $\frac{x^3-6x^2+2x-3}{3(x+1)(x-1)} \to \frac{-6}{3\cdot 2\cdot 0^+} \to \frac{-6}{0^+} \to -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f_4(x) = -\infty$
Comportement à l'infini : degré du numérateur juste de 1 supérieur au degré du dénominateur $\Rightarrow$ asymptote oblique.

Calcul par division de polynômes :
$(x^3 - 6x^2 + 2x - 3) : (3x^2 - 3) = \frac{1}{3}x - 2$ reste $3x - 9$
Autrement dit : $\frac{x^3-6x^2+2x-3}{3x^2-3} = \frac{1}{3}x - 2 + \frac{3x-9}{3x^2-3}$ et l'asymptote oblique est donc $y = \frac{1}{3}x - 2$
Attention : si on fait les calculs à la machine, le dernier terme sera simplifié :
$\frac{3x-9}{3x^2-3} = \frac{x-3}{x^2-1}$ voir même exprimé sous la forme $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}$
Note 1 : la fonction coupe son asymptote oblique en $x = 3$
Note 2 : la fonction s'annule en $x = 5.7427$

5) $f_5(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}$

$D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$ le dénominateur ne s'annule pas ($\Delta < 0$); il est même toujours positif
Vu que le numérateur est également toujours positif, la fonction ne s'annule jamais et son graphe est ici entièrement situé en dessus de l'axe des x
Pas d'asymptotes verticales, ni horizontale, ni oblique.

6) $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1} + \dfrac{x-2}{x+2}$

$D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-2, \frac{1}{2}\}$
Pour pouvoir utiliser les considéreations du cours sur cette fonction, il faut d'abord l'écrire sous forme d'*une seule* fraction rationnelle :
$\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{(2x+1)(x+2)}{(2x-1)(x+2)} + \frac{(x-2)(2x-1)}{(x+2)(2x-1)} = \frac{2x^2+5x+2+2x^2-5x+2}{(2x-1)(x+2)} = \frac{4x^2+4}{(2x-1)(x+2)}$ qui est bien évidemment simplifiée donc asymptotes verticales en $x = -2$ et $x = \frac{1}{2}$
Comportement à l'infini :
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+4}{(2x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+4}{2x^2+3x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \frac{4}{2} = 2$
D'où une asymptote horizontale : $y = 2$
Note : la fonction coupe son asymptote horizontale en $x = \frac{4}{3}$

MCN / 30.4.2014