Exemples (exercices) d'études de fonctions

---

1) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 15$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

3) $f(x) = \dfrac{-x^3 - 3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

[[4)]] $f(x) = \sqrt{(1+x)^2(1-x^2)}$

[[5)]] $f(x) = 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = -\cos(2x) - 2\sin x$

[[6)]] $f(x) = (x-1)^2\,\mathrm{e}^x$

Quelques études de fonction supplémentaires

1) $f(x) = (x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x - 2$

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

3) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = x(x-2)^3$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$

6) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

7) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^3}$

8) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

9) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$

11) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^3 - 8}$

12) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$

13) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

14) $f(x) = \dfrac{8(x-3)^3}{x^2}$

Exemple 1 : $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 15$

1) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$

2) Ni paire, ni impaire, ni périodique.

[[3)]] A la machine : $f(x) = 0 \implies x = 2.2801$ ou $x = 3.5059$

4) Pas d'asymptotes; $f(x) \to +\infty$ pour $x \to \pm\infty$

5) $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3)$,

qui s'annule pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 3$

$f''(x) = 36x^2 - 96x + 36 = 12(3x^2 - 8x + 3)$,

qui s'annule pour $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3} = 0.4514$ et $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3} = 2.2153$

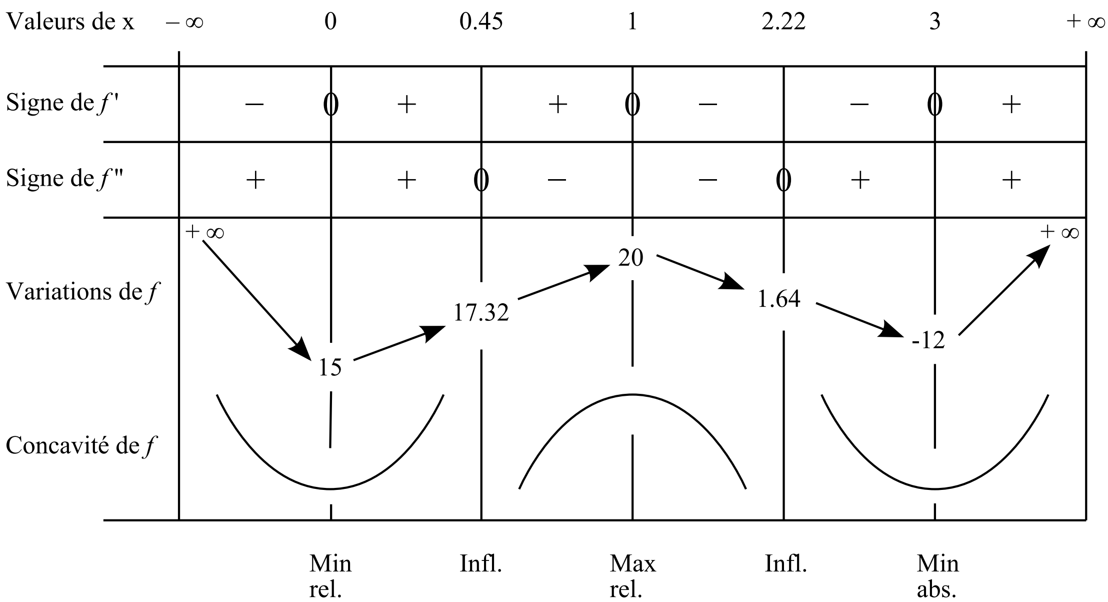
[[6)]] Fonction et dérivées continues sur $\mathbb{R}$

7) $f(0) = 15,\ f'(0) = 0,\qquad f(0.4514) = 17.3207,\ f'(0.4514) = 7.5736$

$f(1) = 20,\ f'(1) = 0,\qquad f(2.2153) = 1.6422,\ f'(2.2153) = -25.3513$

$f(3) = -12,\ f'(3) = 0$

8) Tableau des variations :



9) Graphe 1, p. 8; attention : l'échelle n'est pas la même sur les deux axes ($\Rightarrow$ l'angle des pentes n'est pas respecté)

10) Résumé :

$(0; 15)$: minimum relatif

$(0.4514; 17.3207)$: point d'inflexion à tangente oblique (de pente 7.5736)

$(1; 20)$: maximum relatif

$(2.2153; 1.6422)$: point d'inflexion à tangente oblique (de pente -25.3513)

$(3, -12)$: minimum absolu

Exemple 2 : $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

1) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$

2) C'est une fonction paire, non périodique.

[[3)]] $f(x) = 0 \implies x = \pm 2$

4) Asymptotes verticales en $x = -3$ et $x = 3$ et horizontale en $y = 1$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} f(x) = -\infty$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

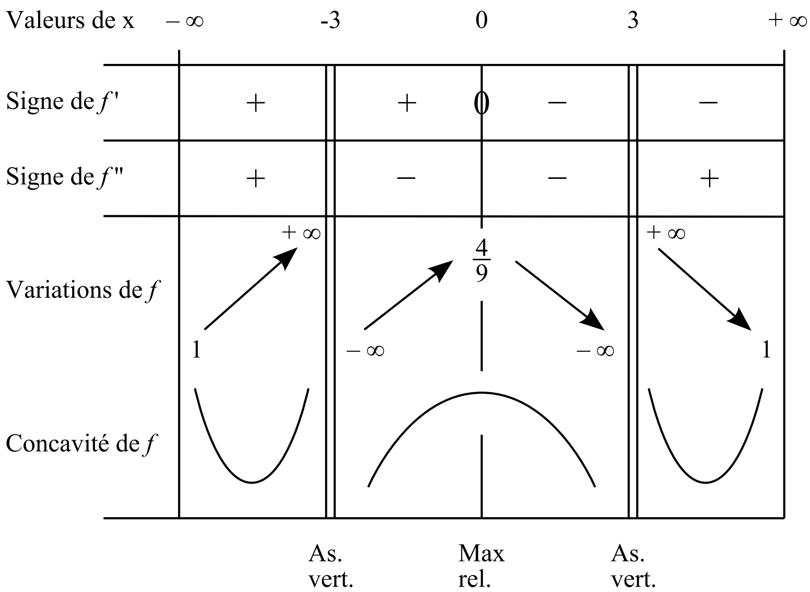
5) $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2-9)^2}$, qui s'annule pour $x = 0$

$f''(x) = \frac{30(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$, qui ne s'annule jamais

[[6)]] Fonction et dérivées continues sur $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$

7) $f(0) = \frac{4}{9}$, $f'(0) = 0$

8) Tableau des variations :



9) Graphe 2, p. 8

10) Résumé :

$(0; \frac{4}{9})$: maximum relatif

Asymptotes verticales : $x = -3$ et $x = 3$

Asymptote horizontale : $y = 1$

Exemple 3 : $f(x) = \dfrac{-x^3 - 3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

1) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) Ni paire, ni impaire, ni périodique.

[[3)]] $f(x) = 0 \implies x = -3$ ou $x = 0$

4) Asymptote verticale en $x = -2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty, \qquad \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

Degré du numérateur supérieur de 1 au degré du dénominateur

$\Rightarrow$ existence d'une asymptote oblique.

Calcul par division de polynôme : $\frac{-x^3-3x^2}{(x+2)^2} = -x + 1 - \frac{4}{(x+2)^2}$

D'où l'asymptote : $y = -x + 1$

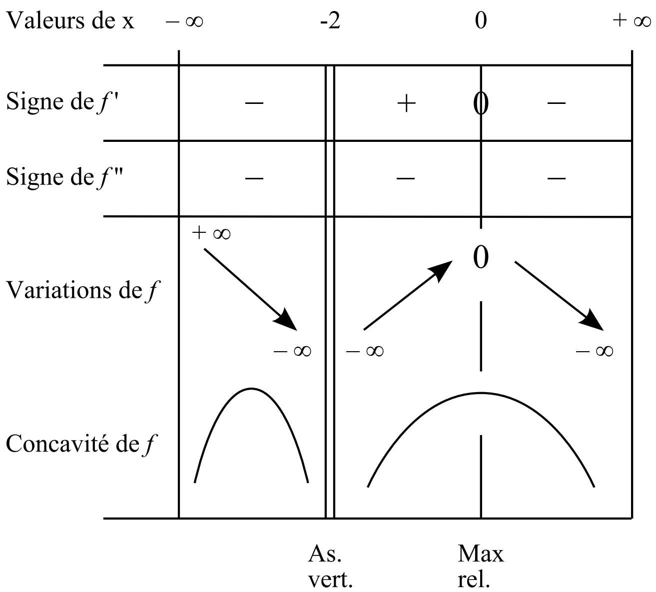
5) $f'(x) = \frac{-x(x^2+6x+12)}{(x+2)^3}$, qui s'annule pour $x = 0$

$f''(x) = \frac{-24}{(x+2)^4}$, qui est toujours négative

[[6)]] Fonction et dérivées continues sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

7) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$

8) Tableau des variations :



9) Graphe 3, p. 8

10) Résumé :

$(0; 0)$: maximum relatif

Asymptote verticale : $x = -2$

Asymptote oblique : $y = -x + 1$

[[Exemple 4]] : $f(x) = \sqrt{(1+x)^2(1-x^2)}$

0) $f(x) = \sqrt{(1+x)^2(1-x^2)} = |1+x|(1-x^2)$

1) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = [-1; 1]$

Note : dans le cadre du domaine de définition, on a en particulier $-1 \leq x$ et donc dans ce cas : $|1+x| = 1+x$ et on peut donc réécrire la fonction sous la forme : $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

2) Ni paire, ni impaire, ni périodique.

3) $f(x) = 0 \implies x = -1$ ou $x = 1$

4) Valeurs aux bornes du domaine de définition : $f(-1) = 0$ et $f(1) = 0$

5) $f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$,

qui s'annule pour $x = \frac{1}{2}$ (pour $x = -1$: voir point 6 ci-dessous)

$f''(x) = -\frac{(3x+1)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2(x+1)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

qui s'annule pour $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} = -0.3660$ (pour $x = -1$: voir ci-dessous)

6) ⋄ Telle qu'écrite ci-dessus, la dérivée f' n'est définie (et continue) que sur un sous-ensemble du domaine de définition de la fonction : $]-1;1[$. Si on la simplifie sous la forme $f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}$, son domaine de définition s'agrandit un peu : $[-1;1[$ et on peut accepter son zéro en $x = -1$ mentionné au point 5. Si on conserve le domaine restreint, on peut aussi calculer la limite en -1 et trouver 0.

⋄ Que se passe-t-il en $x = 1$ (autre borne du domaine de définition) ?

Calculons la limite après avoir mis la dérivée au dénominateur commun :

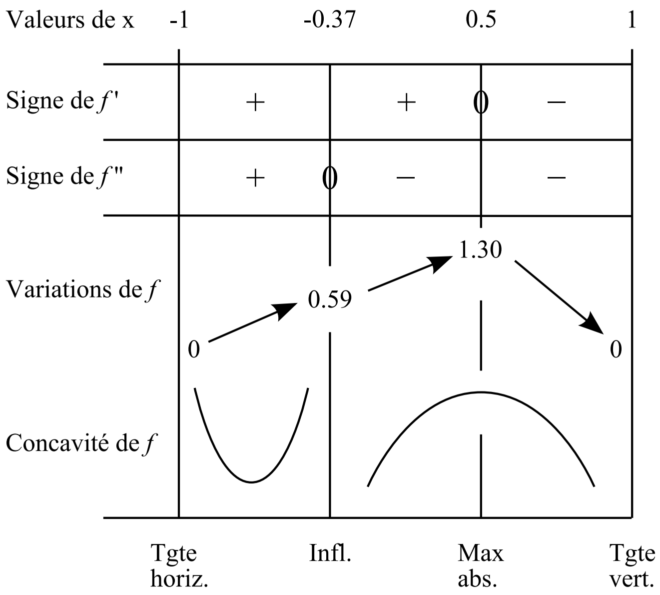
$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{-(x+1)(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty.$

La fonction aura donc une tangente verticale en $x = 1$.

⋄ Deuxième dévirée : définie et continue sur $]-1;1[$

7) $f(-0.3660) = 0.5800$, $f'(-0.3660) = 1.1700$, $f(0.5) = 1.2990$, $f'(0.5) = 0$

8) Tableau des variations :



9) Graphe 4, p. 8

10) Résumé :

$(-1;0)$: début du domaine de définition; point à tangente horizontale

$(-0.3660; 0.5800)$: point d'inflexion à tangente oblique (de pente 1.1700)

$(0.5; 1.2990)$: maximum absolu

$(1;0)$: fin du domaine de définition; point à tangente verticale

[[Exemple 5]] : $f(x) = 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = -\cos(2x) - 2\sin x$

0) Remarque : la deuxième façon d'écrire la fonction est surtout utile pour la voir comme somme de deux fonctions simples (voir pointillés sur le graphique)

1) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$

2) Ni paire, ni impaire; périodique de période 2π; étude sur $[0; 2\pi[$.

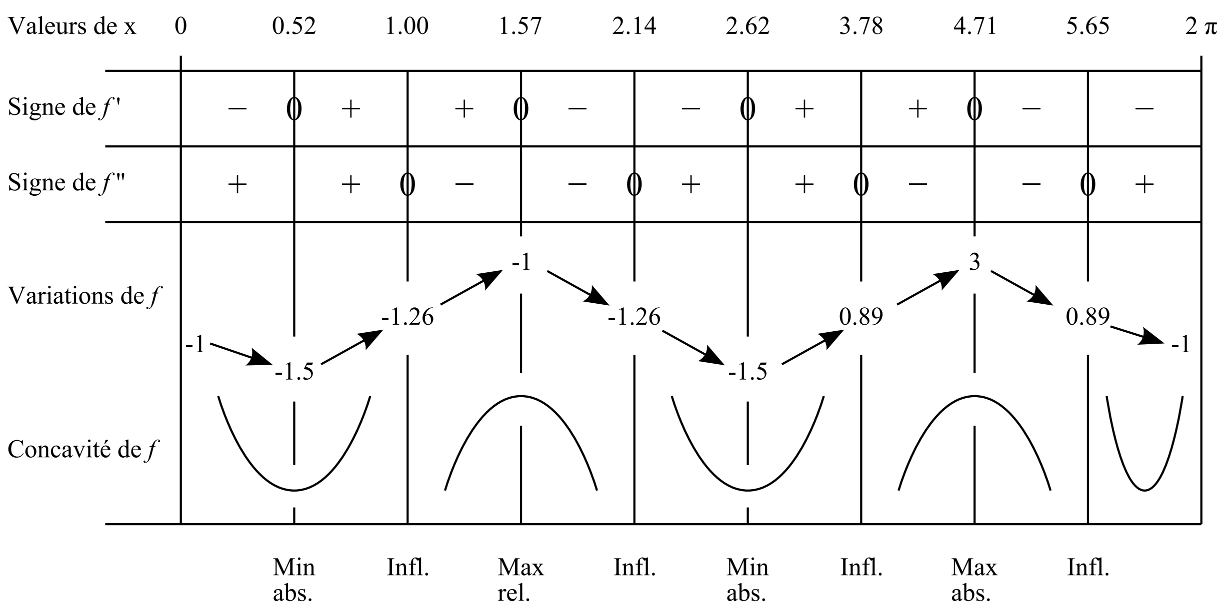
3) $f(x) = 0 \implies x = \arcsin(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi$ ou $x = \pi - \arcsin(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi$;
valeurs numériques dans $[0; 2\pi[$: 5.9085, 3.5163
Méthode de résolution : poser $u = \sin x \Rightarrow 2u^2 - 2u - 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cdots$

4) (-) **5)** $f'(x) = 4\cos x \sin x - 2\cos x$, qui s'annule pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; valeurs numériques dans $[0; 2\pi[$: 1.5708, 4.7124, 0.5236, 2.6180
Méthode de résolution : factoriser et résoudre les deux équations : $2\cos x(2\sin x - 1) = 0 \Rightarrow 2\cos x = 0$ ou $2\sin x - 1 = 0$
$f''(x) = 4\cos^2 x - 4\sin^2 x + 2\sin x$, qui s'annule pour $x = \arcsin(\frac{1-\sqrt{33}}{8}) + 2k\pi$ ou $x = \arcsin(\frac{1+\sqrt{33}}{8}) + 2k\pi$ ou $x = \pi - \arcsin(\frac{1-\sqrt{33}}{8}) + 2k\pi$ ou $x = \pi - \arcsin(\frac{1+\sqrt{33}}{8}) + 2k\pi$;
valeurs numériques dans $[0; 2\pi[$: 5.6483, 3.7765, 1.0030, 2.1386
Méthode de résolution : remplacer $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x \Rightarrow -8\sin^2 x + 2\sin x + 4 = 0$, puis poser $u = \sin x \Rightarrow -8u^2 + 2u + 4 = 0 \Rightarrow u = \frac{1\pm\sqrt{33}}{8} \Rightarrow \cdots$

6) Fonction et dérivées continues sur $\mathbb{R}$

7) Dans l'ordre des calculs ci-dessus :
$f(1.5708) = -1$, $f'(1.5708) = 0$, $f(4.7124) = 3$, $f'(4.7124) = 0$
$f(0.5236) = -1.5$, $f'(0.5236) = 0$, $f(2.6180) = -1.5$, $f'(2.6180) = 0$
$f(5.6483) = 0.8896$, $f'(5.6483) = -3.5203$, $f(3.7765) = 0.8896$, $f'(3.7765) = 3.5203$
$f(1.0030) = -1.2646$, $f'(1.0030) = 0.7380$, $f(2.1386) = -1.2646$, $f'(2.1386) = -0.7380$

8) Tableau des variations :



9) Graphe 5, p. 8 (pointillés : voir point 0 ci-dessus)

10) Résumé : tout sur le tableau des variations

[[Exemple 6]] : $f(x) = (x-1)^2\,\mathrm{e}^x$

1) $\mathrm{D_{déf}} = \mathbb{R}$

2) Ni paire, ni impaire, ni périodique.

3) $f(x) = 0 \implies x = 1$

4) Pas d'asymptote verticale [pas au programme]
Asymptote horizontale en $y = 0$ [pas au programme]
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ [pas au programme]

5) $f'(x) = (x^2-1)\,\mathrm{e}^x$, qui s'annule pour $x = \pm 1$
$f''(x) = (x^2+2x-1)\,\mathrm{e}^x$, qui s'annule pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$
valeurs numériques : -2.4142, 0.4142

6) Fonction et dérivées continues sur $\mathbb{R}$

7) $f(-2.4142) = 1.0426$, $f'(-2.4142) = 0.4318$, $f(-1) = 1.4715$, $f'(-1) = 0$
$f(0.4142) = 0.5192$, $f'(0.4142) = -1.2536$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$

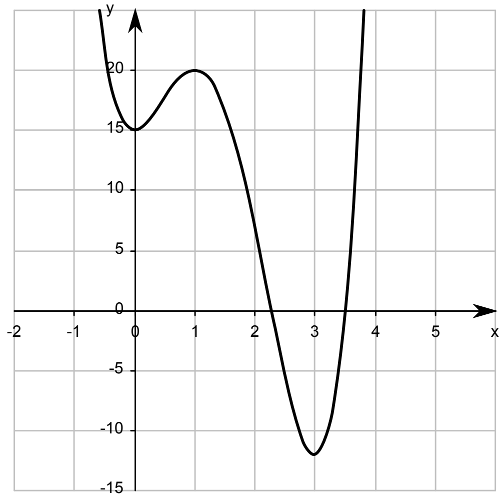
8) Tableau des variations :

Valeurs de x	$-\infty$		-2.41		-1		0.41		1		$+\infty$
Signe de f'		+		+	0	−		−	0	+	
Signe de f''		+	0	−		−	0	+		+	
Variations de f	0	$\nearrow$	1.04	$\nearrow$	1.47	$\searrow$	0.52	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Concavité de f		$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cup$	
			Infl.		Min rel.		Infl.		Min abs.		

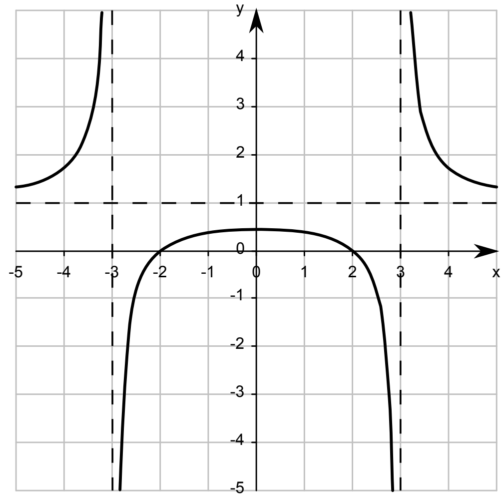
9) Graphe 6, p. 8

10) Résumé :
$(-2.4142; 1.0426)$: point d'inflexion à tangente oblique (de pente 0.4318)
$(-1; 1.4715)$: maximum relatif
$(0.4142; 0.5192)$: point d'inflexion à tangente oblique (de pente -1.2536)
$(1; 0)$: minimum absolu
Asymptote horizontale : $y = 0$

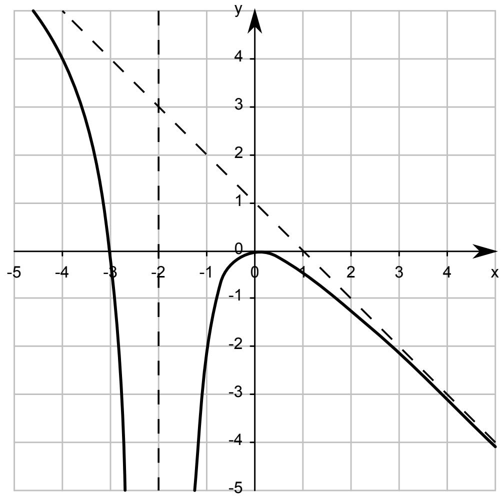
1.


y
x
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-2 -1 0 1 2 3 4 5

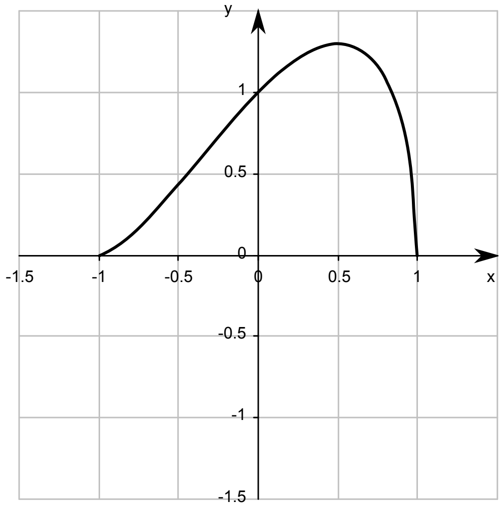
2.


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

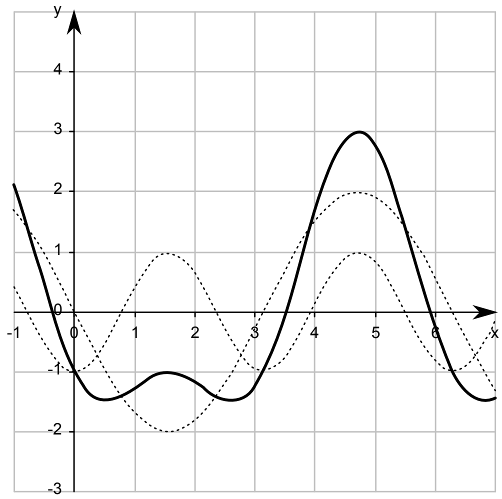
3.


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

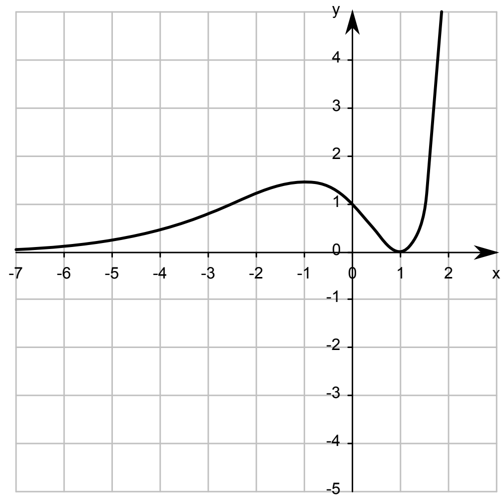
4.


y
x
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5 -1 -0.5 0 0.5 1

5.


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1 0 1 2 3 4 5 6

6.


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2

Quelques indications pour les études de fonction supplémentaires

1) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 3$ qui s'annule pour $x = \pm 1$ (max, min)
$f''(x) = 6x$ qui s'annule pour $x = 0$ (pt d'infl.)

2) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$ Paire $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$ qui s'annule pour $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ (min, max, min) $f''(x) = 3x^2 - 4$ qui s'annule pour $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (pts d'infl.)

3) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2(2x-1)(x-2)^2$ qui s'annule pour $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ (min, palier)
$f''(x) = 12(x-1)(x-2)$ qui s'annule pour $x = 1$, $x = 2$ (pt d'infl., palier)

4) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-2\}$ As. vert. $x = -2$ As. horiz. $y = 1$
$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ toujours positive $f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3}$ jamais nulle

5) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{1\}$ As. vert. $x = 1$ As. horiz. $y = 0$
$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}$ jamais nulle $f''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}$ toujours positive

6) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{1\}$ As. vert. $x = 1$ As. horiz. $y = 0$
$f'(x) = -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}$ qui s'annule pour $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (max) $f''(x) = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$ qui s'annule pour $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{2}$ (rien, pt d'infl.) (en $x = 0$, $f''(x)$ ne change pas de signe)

7) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{0\}$ As. vert. $x = 0$ As. horiz. $y = 0$
$f'(x) = -\frac{6(x-1)}{x^4}$ qui s'annule pour $x = 1$ (max) $f''(x) = \frac{6(3x-4)}{x^5}$ qui s'annule pour $x = \frac{4}{3}$ (pt d'infl.)

8) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ Impaire As. vert. $x = -1$ et $x = 1$ As. horiz. $y = 0$
$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ toujours négative $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ qui s'annule pour $x = 0$ (pt d'infl.)

9) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$ Impaire As. horiz. $y = 0$
$f'(x) = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$ qui s'annule pour $x = \pm 1$ (min, max) $f''(x) = \frac{8x^3-24x}{(x^2+1)^3}$ qui s'annule pour $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ (3 pts d'infl.)

10) $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} - \{2\}$ As. vert. $x = 2$ As. horiz. $y = 1$
$f'(x) = \frac{-4x+2}{(x-2)^3}$ qui s'annule pour $x = \frac{1}{2}$ (min) $f''(x) = \frac{8x+2}{(x-2)^4}$ qui s'annule pour $x = -\frac{1}{4}$ (pt d'infl.)

11) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}-\{2\}$ As. vert. $x = 2$ As. horiz. $y = 2$
$f'(x) = \frac{-48x^2}{(x^3-8)^2}$ toujours négative ou nulle (nulle pour $x = 0$) (palier)
$f''(x) = \frac{196x(x^3+4)}{(x^3-8)^3}$ qui s'annule pour $x = -\sqrt[3]{4}$, $x = 0$ (pt d'infl., palier)

12) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}-\{1;2\}$ As. vert. $x = 1$ et $x = 2$ As. horiz. $y = 0$
$f'(x) = \frac{-x^2+2}{(x-1)^2(x-2)^2}$ qui s'annule pour $x = \pm\sqrt{2}$ (min, max) $f''(x) = \frac{2x^3-12x+12}{(x-1)^3(x-2)^3}$ qui s'annule pour $x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} = -2.847$ (pt d'infl.)

13) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}-\{1\}$ As. vert. $x = 1$ As. oblique $y = x + 2$
$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ qui s'annule pour $x = 0$, $x = 3$ (palier, min) $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$ qui s'annule pour $x = 0$ (palier)

14) $\mathrm{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}-\{0\}$ As. vert. $x = 0$ As. oblique $y = 8x - 72$
$f'(x) = \frac{8(x-3)^2(x+6)}{x^3}$ qui s'annule pour $x = -6$, $x = 3$ (max, palier) $f''(x) = \frac{432(x-3)}{x^4}$ qui s'annule pour $x = 3$ (palier)

MCN / 2.8.2016