

Limites et continuité : cours

1. Notion (intuitive) de limite

Soit f une fonction; le nombre L est la limite de f lorsque x tend vers a si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a (x différent de a)

Autrement dit, c'est une méthode / notation pour dire ce qui se passe avec une fonction f lorsque x s'approche d'une valeur a en général problématique.

Notations : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ou "Si $x \rightarrow a$ alors $f(x) \rightarrow L$ "

Exemples :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x + 3) =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} =$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{-5x+2}{2x-3} =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x < 3/2}} \frac{-5x+2}{2x-3} =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3/2 \\ x > 3/2}} \frac{-5x+2}{2x-3} =$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x+2}{2x-3} =$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) =$$

◇ Note : corrigé de ces exemples dans 12-zExemplesCorriges.pdf

2. Notion (intuitive) de continuité

Continuité en 1 point : une fonction f est dite continue en $x = a$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Autrement dit :

si la limite à gauche est égale à la limite à droite et à la valeur de la fonction.

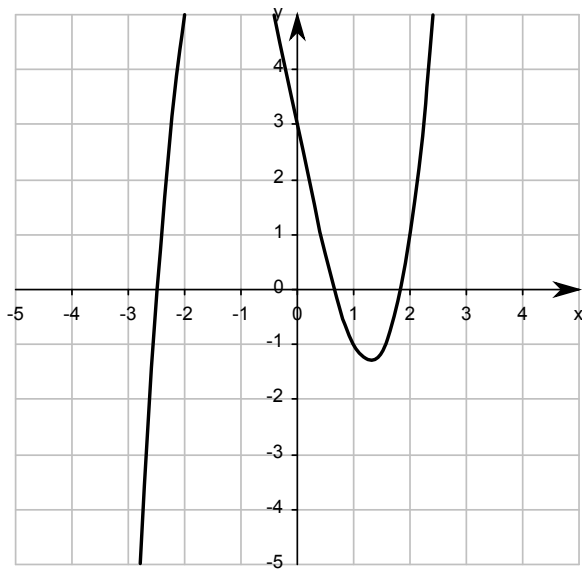
Autrement dit :

si on obtient la même chose en venant depuis la droite ou depuis la gauche.

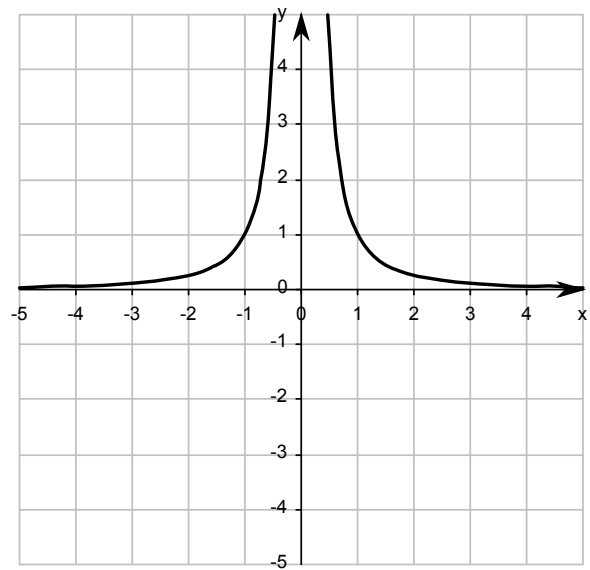
Intuitivement : si on peut faire le dessin sans lever le crayon.

Continuité (globale) : Une fonction est dite continue (globalement ou sur un intervalle) si elle est continue en chacun de ses points.

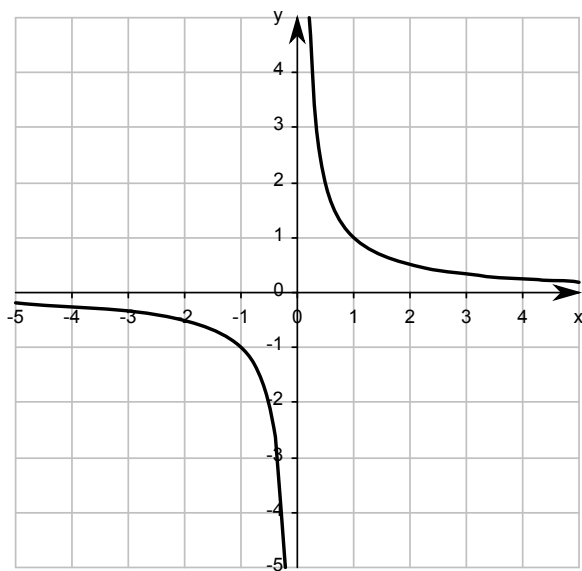
Intuitivement : peut être tracée sans lever le crayon.



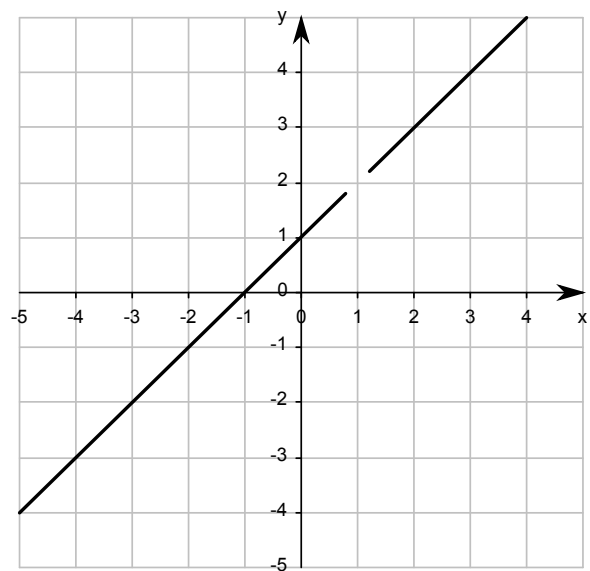
$$f(x) = x^3 - 5x + 3$$



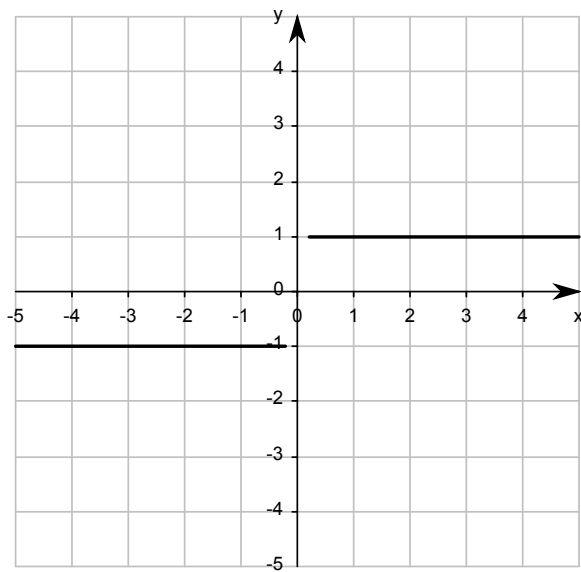
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



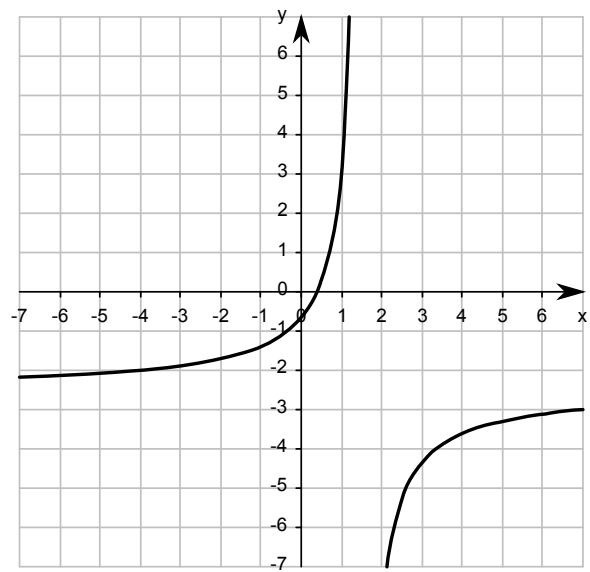
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



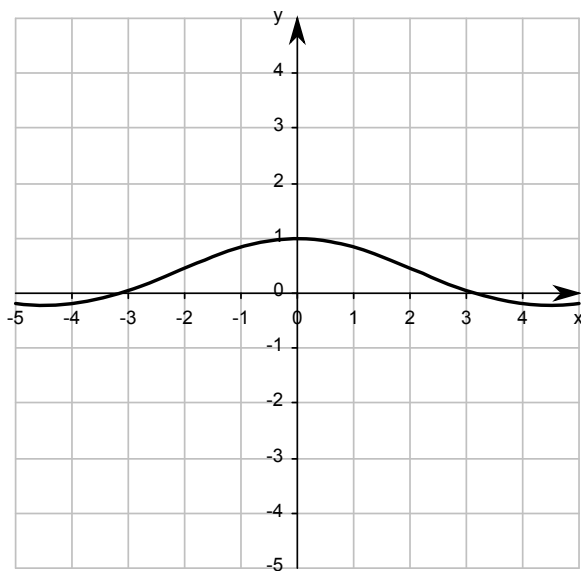
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



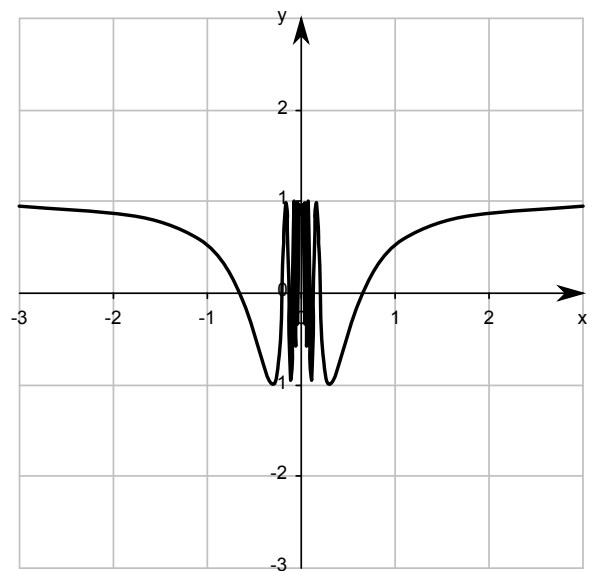
$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$



$$f(x) = \frac{-5x+2}{2x-3}$$



$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$