Rappels et compléments de trigonométrie : cours

1. Les mesures d'angles

Il existe plusieurs unités de mesure d'angle :
1) **le degré :** 1 angle droit = 90° (c'est l'unité standard utilisée en géométrie et dans la vie courante).
2) **le grade :** 1 angle droit = 100 grades (c'est une unité héritée de la Révolution française et qui n'est pratiquement plus utilisée).
3) **le radian :** 1 angle droit = $\frac{\pi}{2}$ radian (c'est une unité standard en mathématiques, utilisée principalement pour l'étude des fonctions trigonométriques).
◇ En trigonométrie, on utilise généralement les degrés pour les problèmes à base géométrique et les radians pour les fonctions étudiées en tant que telles.

Le degré sexagésimal : on a utilisé pendant longtemps des degrés divisés sexagésimalement : 1 degré étant divisé en 60 minutes (d'angle), elles-mêmes divisées chacune en 60 secondes (d'angle); ce que l'on note : $1° = 60'$ et $1' = 60''$.
Remarque : ces minutes et secondes d'angle n'ont rien à voir avec les minutes et les secondes mesurant le temps.
◇ Avec la généralisation des calculatrices, on abandonne petit à petit l'usage de la division sexagésimale et on indique les parties de degrés par des nombres à virgule usuels.

Les radians
Définition : un radian est la mesure d'un angle tel que s'il est placé au centre d'un cercle, il intercepte sur ce cercle un arc de longueur égale au rayon.
Ainsi 2π radians interceptent le cercle entier, on en déduit donc que 2π rad = 360°.

Remarque : le radian est une mesure sans unité; on devrait donc écrire $\alpha = 1.7$ et non $\alpha = 1.7$ rad; en pratique, on le fait surtout pour les mesures données en fractions de π, par exemple : $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Pour transformer des degrés en radians et inversement, on utilise la relation π (rad) = 180°, ce qui permet d'écrire une proportion; toutefois, lorsque les angles ont des valeurs remarquables, on préfère écrire leur valeur en radians à l'aide de fractions de π : $37° = 0.6458$ (rad), mais $135° = \frac{3\pi}{4}$

Remarque : lorsque l'angle est donné en radians, la formule permettant de calculer la longueur de l'arc de cercle à partir du rayon est particulièrement simple : $a = \alpha \cdot r$. Si l'angle est donné en degrés, on utilise une autre formule ou on transforme les degrés en radians (mais les calculs sont pratiquement les mêmes).

2. Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

L'idée de base de la trigonométrie, ce sont les **triangles semblables** : si on connaît tous les angles d'un triangle, alors sa **forme** est entièrement déterminée; si en plus, on connaît une longueur quelconque dans ce triangle, alors il est complètement déterminé et il devrait être possible de calculer toutes ses autres longueurs.

En particulier dans les triangles rectangles : si on connaît un angle et un côté d'un triangle rectangle, le triangle est entièrement déterminé et on devrait pouvoir calculer les autres côtés. De même, si on connaît deux côtés d'un triangle rectangle, il est aussi entièrement déterminé et on devrait pouvoir calculer ses angles.

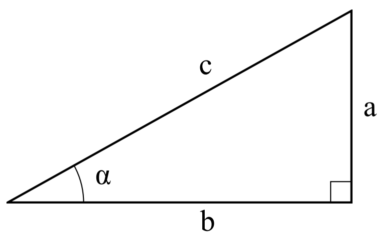
C'est donc parce que tous les triangles rectangles qui ont un angle donné (par exemple 34°) ont la même forme, que l'on a pu créer des fonctions (sinus, cosinus,...) qui mettent en relation la valeur de cet angle avec le rapport des longueurs de deux côtés. Vu qu'il y a six rapports possibles entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, il y a donc six fonctions trigonométriques possibles, mais pratiquement, on n'en utilise que trois : le sinus, le cosinus et la tangente. (Note : les autres : sécante, cosécante et cotangente.)

◇ Un triangle rectangle étant donné, on définit donc les trois rapports suivants :

Le sinus : $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$

Le cosinus : $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$

La tangente : $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$



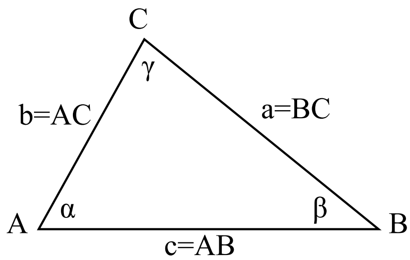
◇ La tangente trigonométrique n'a rien à voir avec la tangente à une courbe (à un cercle par exemple).

◇ On peut encore définir la cotangente, la sécante et la cosécante, mais leur calcul, notamment à la calculatrice, se fait toujours en passant par les trois fonctions de base.

◇ Les notions de côté opposé et de côté adjacent se réfèrent toujours à l'angle considéré : c'est le côté opposé à l'angle α pour les rapports liés à l'angle α, etc.

◇ Ne jamais appliquer les définitions ci-dessus à l'angle droit du triangle rectangle; ne jamais les appliquer non plus dans un triangle non rectangle.

◇ On note souvent A, B, C les trois sommets d'un triangle et a, b, c les trois côtés situés respectivement en face; ainsi $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$; on note alors les angles respectivement par $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ou alors par α, β et γ.



⋄ Lors de calculs à la machine, il est important de vérifier que celle-ci se trouve dans le mode désiré (degrés, grades ou radians)(elle ne peut en effet pas deviner si $\sin 1.7$ désigne $\sin 1.7°$ ou $\sin 1.7$ (rad) ou encore $\sin 1.7$ gr). (Note : certaines calculatrices se remettent automatiquement en mode degrés à chaque enclenchement, d'autres pas.)

Exemples de calcul

a) Dans un triangle ABC, rectangle en C, on a $AB = 24$ cm et $\alpha = 17°$; calculer l'angle et les côtés manquants.
On a : $\beta = 180° - 90° - \alpha = 73°$
de plus : $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \;\Rightarrow\; BC = AB \cdot \sin\alpha = 24 \cdot \sin 17° = 7.017$
et : $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \;\Rightarrow\; AC = AB \cdot \cos\alpha = 24 \cdot \cos 17° = 22.951$

b) Dans un triangle ABC, rectangle en C, on a $AB = 34$ cm et $BC = 30$; calculer ses angles ainsi que le côté manquant.
Par Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2 \;\Rightarrow\; AC^2 = AB^2 - BC^2 = 34^2 - 30^2 = 256 \Rightarrow AC = 16$
de plus $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{34} \;\Rightarrow\; \alpha = 61.93°$
et finalement : $\beta = 180° - 90° - \alpha = 28.07°$

⋄ Chercher les côtés et les angles manquants d'un triangle se dit quelquefois **résoudre** le triangle.

Remarque importante : les définitions des rapports trigonométriques ne sont valables que dans les triangles rectangles. Si on doit résoudre un triangle non rectangle, il faut essayer de le diviser en deux triangles rectangles ou alors utiliser les théorèmes du sinus et du cosinus (voir plus loin).

3. Théorèmes du sinus et du cosinus (Trigonométrie dans les triangles quelconques)

Les définitions des rapports trigonométriques permettent de résoudre directement les triangles rectangles dont on connaît suffisamment d'éléments pour les tracer géométriquement. Ce n'est pas le cas pour les triangles quelconques : pour résoudre ces derniers, il faut d'abord les décomposer en triangles rectangles à l'aide d'une hauteur. Mais il est aussi possible d'utiliser les théorèmes du sinus et du cosinus dont les démonstrations reposent justement sur l'utilisation de ces hauteurs tracées pour diviser les triangles.

Définissons d'abord les fonctions trigonométriques pour les angles obtus :
Pour $90° < \alpha < 180°$, on pose :

$$\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$$
$$\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$$
$$\tan(\alpha) = -\tan(180° - \alpha)$$

Théorème du sinus : dans tout triangle dont les sommets et les côtés vérifient les conventions de la figure du bas de la page 2, on a :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \quad \text{où } R \text{ désigne le rayon du cercle circonscrit}$$

Théorème du cosinus : dans tout triangle dont les sommets et les côtés vérifient la convention les conventions de la figure du bas de la page 2, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Remarque importante : vu que le sinus d'un angle est égal au sinus de son supplémentaire, cette fonction ne permet pas de déterminer univoquement la valeur d'un angle.

Exemple :
De même que l'équation $x^2 = 17$ admet deux solutions $x = \pm\sqrt{17} = \pm 4.1231$, mais que la touche $\sqrt{\ }$ des machines à calculer ne donne qu'une valeur;

de même : $\sin\alpha = 0.17 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha = \arcsin(0.17) = 9.7878° \\ \text{ou} \\ \alpha = 180° - \arcsin(0.17) = 170.2122° \end{cases}$

(La *fonction* arcsin ne donne bien évidemment qu'une seule valeur.)

⋄ Il faudra donc éviter de calculer par son sinus un angle dont on ignore s'il est aigu ou obtus; on calculera un tel angle par son cosinus ou, comme dernier angle d'un triangle, par soustraction à 180°.

Rappel : dans tout triangle, le côté le plus grand est toujours en face de l'angle le plus grand et le côté le plus petit en face de l'angle le plus petit.

Exemple de calcul Dans un triangle ABC, on a $a = 9$ cm, $b = 20$ cm et $c = 15$ cm; calculer les angles de ce triangle.

Vu les données, on est obligé de commencer par le théorème du cosinus. Remarquons d'abord que le côté le plus grand est b. C'est donc l'angle β qui sera le plus grand et qui seul risque d'être obtus. Utilisons donc directement le théorème du cosinus pour calculer cet angle.

Théorème du cosinus : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \;\Rightarrow\; 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \;\Rightarrow$ $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{9^2+15^2-20^2}{2\cdot 9\cdot 15} = -0.348148 \;\Rightarrow\; \beta = 110.3741°$ qui est donc obtus.

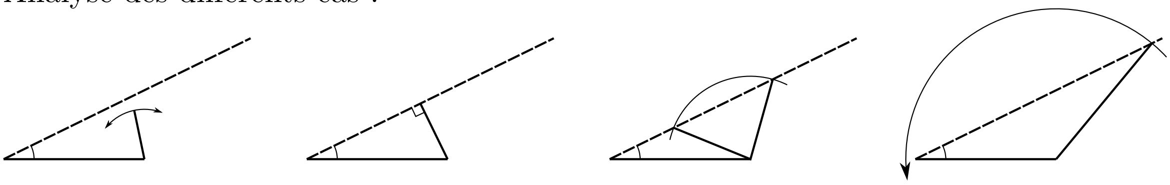
Théorème du sinus pour déterminer l'angle α : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} = \frac{9\sin\beta}{20} = 0.421848 \;\Rightarrow\; \alpha = 24.9513°$.

Et finalement $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 44.6746°$.

Un cas spécial

Il existe un type de problème pouvant comporter deux solutions, mais dans ce cas, il y a aussi deux solutions géométriques. C'est le type de problème où l'on donne deux côtés et un angle non situé entre eux.

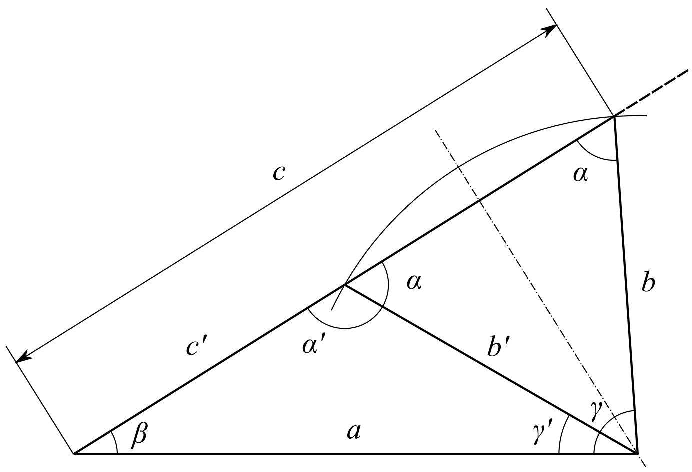
Analyse des différents cas :



Cas 1 Cas 2 Cas 3 Cas 4

Cas 1 : côté trop petit : pas de triangle possible
Cas 2 : côté juste assez grand : triangle rectangle
Cas 3 : côté un peu plus grand : deux triangles possibles
Cas 4 : côté plus grand que l'autre : un seul triangle possible

Résolution d'un exemple comportant deux solutions ($a = 10$, $b = 6$, $\beta = 32°$) :
Seul début possible : théorème du sinus pour déterminer l'angle α (ou alors théorème du cosinus, mais on obtient une équation du deuxième degré en c).
Théorème du sinus : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} = \frac{10\sin 32°}{6} = 0.883199 \Rightarrow \alpha = 62.0307°$. Mais vu que rien n'assure que l'angle α est aigu, on est obligé de considérer également l'angle obtus $\alpha' = 180° - \alpha = 117.9693°$ qui a le même sinus que α.
On obtient donc également deux valeurs possibles pour γ :
$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 85.9693°$
et $\gamma' = 180° - \alpha' - \beta = 30.0307°$.
Et par le théorème du sinus, deux côtés c possibles :
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow$
$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = 11.2945$
et $c' = \frac{b\sin\gamma'}{\sin\beta} = 5.6665$.



◇ Voir aussi le fichier Excel : `03-ResolutionsDesTriangles.xls`

Trois formules utiles en rapport avec l'aire des triangles (quelconques) :

1) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (et donc aussi $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$)

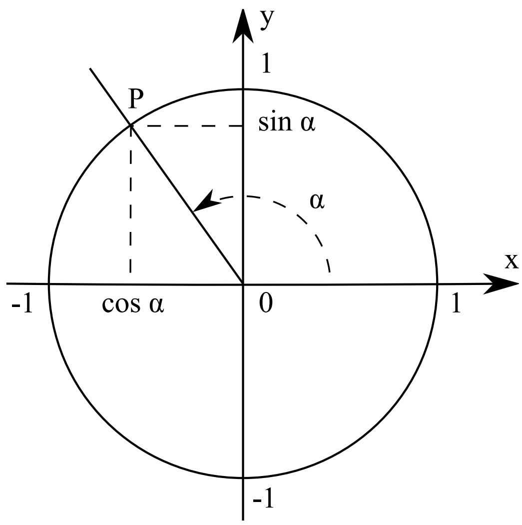
2) $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formule de Héron)
(où p désigne le demi-périmètre du triangle : $p = \frac{a+b+c}{2}$)

3) $\mathcal{A} = p \cdot \rho$ (avec p : demi-périmètre et ρ rayon du cercle inscrit dans le triangle)

En général, on calcule l'aire par une des deux premières formules et on utilise la dernière pour calculer le rayon du cercle inscrit.

4. Extension de la définition à des angles quelconques

Les définitions des rapports trigonométriques ont été données dans un triangle rectangle; elles ne sont donc valables que pour des angles aigus. Pour pouvoir utiliser la trigonométrie dans les triangles quelconques (pouvant donc présenter des angles obtus) ou pour étudier les fonctions trigonométriques, il est nécessaire de prolonger les définitions à des angles quelconques.
Deux méthodes sont possibles :
- soit on considère un angle aigu de référence et on définit la fonction du nouvel angle à partir de celle de l'angle de référence avec éventuellement un changement de signe (comme on l'a fait au paragraphe 3 ci-dessus);
- soit on considère l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1, centré à l'origine des axes) ($P(x;y)$ a donc pour coordonnées : $x = \cos\alpha$ et $y = \sin\alpha$; l'angle α étant toujours pris depuis l'axe des x.)



◇ Voir aussi le fichier Excel :
`03-CercleTrigonometrique.xls`

5. Fonctions trigonométriques inverses (ou réciproques)

Ce sont les fonctions qui permettent de retrouver un angle à partir de son sinus, son cosinus ou sa tangente. Vu qu'il y a chaque fois plusieurs angles possibles, il est nécessaire de préciser dans quel intervalle on prendra la valeur, sinon la fonction ne serait pas déterminée de façon univoque.

1) Fonction arcsinus : on pose $\arcsin x = \alpha$ où α est tel que :
$\sin\alpha = x$ et $-90° \leq \alpha \leq 90°$ (ou bien $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$).
Exemples : $\arcsin 0.5 = 30°$ car $\sin 30° = 0.5$;
$\arcsin(-0.5) = -30°$ car $\sin(-30°) = -0.5$.

2) Fonction arccosinus : on pose $\arccos x = \alpha$ où α est tel que :
$\cos\alpha = x$ et $0° \leq \alpha \leq 180°$ (ou bien $0 \leq \alpha \leq \pi$).
Exemples : $\arccos 0.5 = 60°$ car $\cos 60° = 0.5$;
$\arccos(-0.5) = 120°$ car $\cos 120° = -0.5$.

3) Fonction arctangente : on pose $\arctan x = \alpha$ où α est tel que :
$\tan\alpha = x$ et $-90° < \alpha < 90°$ (ou bien $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$).
Exemples : $\arctan 3 = 60°$ car $\tan 60° = 3$;
$\arctan(-3) = -60°$ car $\tan(-60°) = -3$.

$\longrightarrow$

◇ Au lieu des notations arcsin, arccos, arctan, on trouve aussi les notations $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$; les notations ASIN, ACOS, ATAN ou les notations ASN, ACS, ATN (selon les machines à calculer ou les langages de programmation).

6. Fonction sinusoïdale et autres fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques et en particulier la fonction sinus ont beaucoup d'applications dans divers domaines. On les trouve principalement dans la modélisation des phénomènes périodiques : cycle des saisons, cycles jour / nuit, mouvements harmoniques (ressorts), ondes électromagnétiques, courants électriques alternatifs, ondes sonores,...

Ces fonctions sont **périodiques** : elles se *répètent* régulièrement.
Plus précisément, une fonction f est dite **périodique** de **période** T, si pour tout x on a $f(x+T) = f(x)$. Autrement dit, à intervalles de largeur T, on retrouve toujours la même valeur sur le graphe.

◇ Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π (ou 360°); les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π (ou 180°).

◇ Conséquence de la périodicité : les équations contenant des fonctions trigonométriques admettent pratiquement toujours une infinité de solutions (et ces solutions sont très souvent périodiques).

Pour modéliser des phénomènes périodiques, on utilise souvent des fonctions de la forme $f(x) = a\sin(bx + c)$. Le coefficient a étire ou compresse la fonction verticalement; on appelle **amplitude**, la valeur absolue de a (sur le graphe : *hauteur* de la *bosse* par rapport à la ligne médiane). Le coefficient b étire ou compresse la fonction horizontalement; il est lié à la **période** par $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ou $T = \frac{360°}{|b|}$. Le coefficient c décale la fonction vers la gauche ou vers la droite; il est lié au **déphasage** qui vaut $-\frac{c}{b}$.

◇ L'addition de plusieurs fonctions de la forme $a_i \sin(b_i x)$ permet de modéliser des phénomènes périodiques complexes : c'est la base des séries de Fourier que l'on utilise par exemple dans les synthétiseurs de sons.

◇ Voir aussi le fichier Excel : `03-SinusEtCosinus.xls`

[[7.]] Formules diverses

Les différentes fonctions trigonométriques sont liées par un grand nombre de formules. Il n'est pas nécessaire de toutes les connaître, par contre, il faut savoir qu'elles existent et où les retrouver. $\longrightarrow$

Deux formules de base : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Formules pour les angles complémentaires, supplémentaires,... : $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cdots$

Formules d'addition et de soustraction : $\sin(\alpha \pm \beta) = \cdots$

Formules pour le double angle : $\sin(2\alpha) = \cdots$

Formules pour le demi-angle : $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \cdots$

Formules permettant de transformer un produit en somme ou une somme en produit.

[[8.]] Equations trigonométriques

Remarque préliminaire : vu la périodicité des fonctions trigonométriques, les équations trigonométriques admettront presque toujours une infinité de solutions (généralement périodiques). Une solution exprimée par exemple sous la forme $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (étant sous-entendu $k \in \mathbb{Z}$) signifie x égal à $\frac{\pi}{4}$ plus ou moins un nombre entier de tours (2π correspondant à $360°$). Autrement dit toutes les solutions $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$,.. et aussi $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{15\pi}{4}$, $-\frac{23\pi}{4}$,...

Trois types d'équations simples :

a) Equations du type $\sin x = \sin y$ **(deux fois la même fonction)**

On utilise l'une des trois équivalences (avec chaque fois k dans $\mathbb{Z}$) :

$$\sin\alpha = \sin\beta \iff \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases} \qquad \cos\alpha = \cos\beta \iff \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

$\tan\alpha = \tan\beta \iff \alpha = \beta + k\pi$

[Si deux sinus sont égaux, alors leurs arguments sont égaux ou supplémentaires, à un certain nombre de tours près. Si deux cosinus sont égaux, alors...]

Exemple : résoudre l'équation $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(5x + \frac{\pi}{3})$

I) Arguments égaux : $2x - \frac{\pi}{4} = 5x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Rightarrow\ 2x - 5x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \Rightarrow\ -3x = \frac{3\pi+4\pi}{12} + 2k\pi \ \Rightarrow\ x = -\frac{7\pi}{36} - \frac{2k\pi}{3}$

II) Arguments supplémentaires : $2x - \frac{\pi}{4} = \pi - (5x + \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$

$\Rightarrow\ 2x + 5x = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \Rightarrow\ 7x = \frac{12\pi+3\pi-4\pi}{12} + 2k\pi \ \Rightarrow\ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7}$

b) Equations du type $\sin x = \text{nombre}$ **(une fonction et un nombre)**

On utilise l'une des trois équivalences (avec chaque fois k dans $\mathbb{Z}$) :

$$\sin x = a \iff \begin{cases} x = \arcsin(a) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi \end{cases} \qquad \cos x = a \iff \begin{cases} x = \arccos(a) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\arccos(a) + 2k\pi \end{cases}$$

$\tan x = a \iff x = \arctan(a) + k\pi$

Exemple : résoudre l'équation $\cos(3x - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

On sait que $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, ainsi :

I) Arguments égaux : $3x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Rightarrow\ 3x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \Rightarrow\ 3x = \frac{9\pi+4\pi}{12} + 2k\pi \ \Rightarrow\ x = \frac{13\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$

II) Arguments opposés : $3x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Rightarrow\ 3x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \Rightarrow\ 3x = \frac{9\pi-4\pi}{12} + 2k\pi \ \Rightarrow\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$

c) Equations du type $\sin x = \cos y$,... (deux fonctions différentes)

On transforme l'une des fonctions en l'autre en utilisant (par exemple) les formules pour les angles complémentaires. On est alors ramené à une équation du premier type.

Remarque : selon la formule utilisée, on peut obtenir des solutions qui paraissent différentes de celles du corrigé ou de la machine. Il suffit de vérifier si elles ne sont pas décalées d'une ou plusieurs périodes.

Les solutions suivantes (par exemple) sont équivalentes : $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$ et $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ et (elles sont juste décalées de $\frac{2\pi}{3}$).

Equations plus complexes

On essaie de se ramener à une équation de l'un des types précédents en utilisant des formules de transformation trigonométrique. Mais quelquefois il suffit d'une simple transformation algébrique pour clarifier la situation.

Exemple 1 : résoudre l'équation $4\sin^2 x \tan x = \tan x$

On passe tout à gauche $4\sin^2 x \tan x - \tan x = 0$ et on factorise $(4\sin^2 x - 1)\tan x = 0$, d'où deux cas :

I) $4\sin^2 x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ \sin x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$ (etc)

II) $\tan x = 0 \ \Rightarrow$ (etc) (type (b) ci-dessus)

Exemple 2 : résoudre l'équation $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Il suffit de poser $u = \cos x$ pour obtenir une équation du 2e degré que l'on résout pour ensuite obtenir deux équations du type (b) ci-dessus.

9. Formulaire : angles remarquables

α (rad)	α (deg)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	$0°$	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	∞