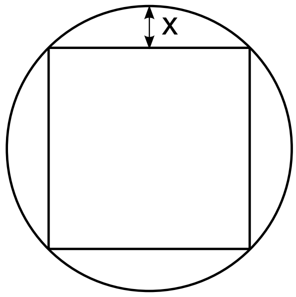
Rappels de géométrie : exercices

---

1) Connaissant l'angle $\alpha = 38°$ d'un triangle quelconque, calculer l'angle que forment les bissectrices des deux autres angles.

2) Quel angle les deux aiguilles d'une montre forment-elles à 2 h 20 ? Même question pour 11 h et quart.
A quelle heure, vers 5 h 25, sont-elles exactement superposées ?

3) Quelle est la profondeur de fraisage nécessaire pour fraiser une barre carrée à partir d'une barre ronde de 30 mm de diamètre, le carré étant à angles vifs ?



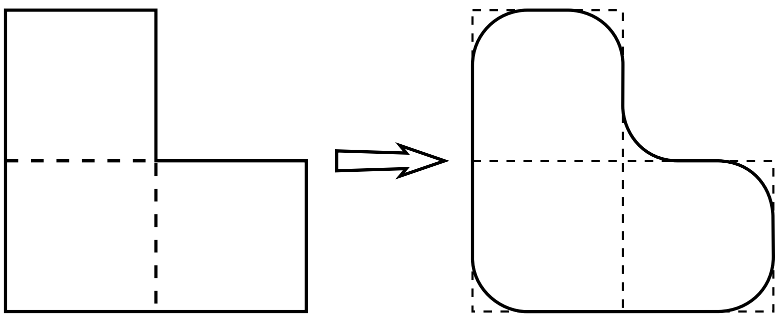
4) D'un pentagone, on connaît les angles suivants : 80°, 130°, 70° et 150°. Calculer le dernier.

5) Démontrer que le périmètre d'un triangle équilatéral circonscrit à un cercle est le double de celui d'un triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

6) Partager un triangle en deux parties de même aire par une parallèle à la base.

7) On arrondi les coins d'un carré de 15 cm de côté en les remplaçant par des quarts de cercle de 3 cm de rayon. Calculer le périmètre et l'aire de la figure obtenue.
7bis*) Même question avec un triangle équilatéral.
[Voir aussi problème 12.]

8) Une figure est constituée de trois carrés de côté a juxtaposés en forme de "L". On remplace tous les angles par des quarts de cercle de rayon r. Calculer le périmètre et l'aire de la figure obtenue.



9*) Déterminer les angles des coupes nécessaires pour diviser (en partant de son centre) un carré en 6 parties d'aires égales.
a) Premier cas : une coupe est diagonale.
b) Deuxième cas : une coupe passe par les milieux de deux côtés opposés.
[Voir éventuellement figure dans les corrigés.]
[Indication : avant de calculer les angles, calculer d'abord la position des points de coupe sur les côtés du carré.]

10) Trois cercles de même rayon R sont tangents deux à deux. On considère le triangle curviligne qui apparaît au milieu. Calculer son périmètre et son aire.
[Voir éventuellement la figure dans les corrigés.]

11) Calculer le volume de la sphère inscrite dans un cube d'arête a. Même question pour la sphère circonscrite au cube.

12*) On arrondi les sommets d'un cube d'arête a en les remplaçant par des portions de sphère de rayon r et on arrondi les arêtes en conséquence. Calculer l'aire et le volume du corps obtenu.

Solutions

1) 71° (ou 109°) **2)** 50°; 112.5°; 5.454545 h = 5 h 27 min 16.3636 s **3)** 4.3934 mm
4) 110° **6)** $h' = \frac{\sqrt{2}}{2}h$
7a) 54.849556 cm; 217.274334 cm^2 **7b)** 32.672641 cm; 78.936820 cm^2
8) $p = 8a - 12r + 3\pi r$ et $\mathcal{A} = 3a^2 - 4r^2 + \pi r^2$
9a) portions de côtés depuis la diagonale : 2/3, 1/3, 1/3, 2/3; angles : 63.4349°, 53.1301°, 63.4349°.
9b) portions de côtés depuis la coupe : 1/2, 1/6, 2/3, 1/6, 1/2; angles : 56.3099°, 67.3801°, 56.3099°.
10) $p = \pi R$ et $\mathcal{A} = \sqrt{3}\,R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2$ **11)** $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{6}\pi a^3$ et $\mathcal{V}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$
12) $\mathcal{A} = 6(a-2r)^2+4\pi r^2+6\pi r(a-2r)$ $\mathcal{V} = a^3-8r^3-12\,r^2(a-2r)+\frac{4}{3}\pi r^3+3\pi r^2(a-2r)$

Quelques aides et indications

1) Etre conscient que l'on ne pourra en aucun cas déterminer la mesure des deux autres angles du triangle (vu qu'il est quelconque). On aura donc des équations avec $\beta + \gamma$ qu'il s'agira d'éliminer **ensemble**.

2) a) Se rappeler qu'à 2 h 20, l'aiguille des heures n'est plus sur le "2", mais qu'elle a déjà avancé un peu en direction du "3". De combien ? D'un tiers de la *distance* vu que 20 minutes sont le tiers d'une heure. c) $\longrightarrow$

c) Etre conscient qu'à 5 h 25, les aiguilles ne sont pas superposées vu que l'aiguille des heures n'est plus sur le "5". Se demander combien de fois en 12 heures les deux aiguilles sont effectivement superposées. Attention : la réponse n'est pas 12 !

3) Astuce : travailler dans un petit triangle ($\frac{1}{8}$ de carré), considérer le rayon du cercle, se rappeler que la diagonale d'un carré est égale à $\sqrt{2}$ fois le côté et remarquer que le diamètre de la barre est justement égal à cette diagonale.
Autre méthode : écrire une équation à partir du théorème de Pythagore.

5) Evident si on met le triangle intérieur tête-bêche par rapport au triangle extérieur.

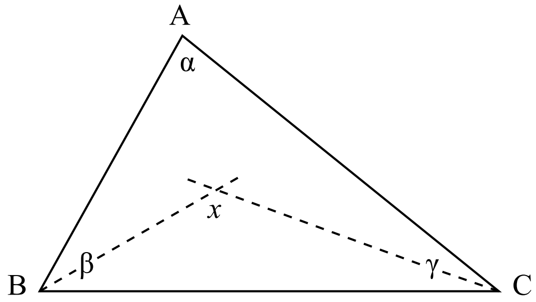
6) I) Remarque générale : dans beaucoup de problèmes où l'on demande de diviser une figure en deux parties d'aires égales, il est souvent plus facile de résoudre les équations si l'on pose $\mathcal{A}_{\text{grande}} = 2 \cdot \mathcal{A}_{\text{petite}}$ plutôt que $\mathcal{A}_{\text{petite 1}} = \mathcal{A}_{\text{petite 2}}$.
II) Ne pas chercher à exprimer à la fois la hauteur du triangle intérieur en fonction de celle du triangle extérieur **et** les longueurs des bases en fonction l'une de l'autre : ce n'est pas possible. Ce que l'on cherche, c'est leur rapport, qui est le même dans les deux cas (triangles semblables) : $x = \frac{h'}{h} = \frac{b'}{b}$. Prendre donc ce rapport x comme inconnue. Autrement dit, chercher x tel que $h' = x \cdot h$.

10) Construire une figure précise (ou utiliser le dessin du corrigé). Les centres des trois cercles forment un triangle équilatéral. Les trois points de tangence sont exactement aux milieux des côtés. Ils forment donc un autre (petit) triangle équilatéral. Le problème revient donc à enlever des portions de cercle (3 fois un sixième) de l'aire d'un triangle.

11) Sphère inscrite : son diamètre est égal au côté du cube. Sphère circonscrite : son diamètre est égal à ?

Quelques corrigés

1) Lire les remarques des *aides et indications* ci-dessus.
Avec x angle des bissectrices, α, β et γ les autres angles du triangle; on a, dans le grand triangle : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ et dans le triangle des bissectrices considérées : $x + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180° \Rightarrow 2x + \beta + \gamma = 360°$; d'où, à partir de la première équation : $2x + (180° - \alpha) = 360° \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \cdots$



2) a et b) L'aiguille des minutes fait un tour en 1 h, donc 360° en 60 min, donc 6° par minute.
L'aiguille des heures fait un tour en 12 h, donc 30° en une heure. (Il y a bien 30° entre chaque *chiffre* du cadran.)
En faisant tous les calculs d'angles par rapport à midi :
a) A 2 h 20 : aiguille des minutes : 120°. Aiguille des heures : à 2 h, elle est exactement sur le "2" (donc 60°), à 2 h 20 : à un tiers de la *distance* en direction du "3" (donc 10° de plus). Finalement : $120° - (60° + 10°) = 50°$.
b) A 11 h 15 : aiguille des minutes : 90°. Aiguille des heures : à 11 h : $-30°$; à 11 h et quart : déjà un quart de la *distance* en direction du "12" (donc $30° : 4 = 7.5°$. Finalement : $90° + 30° - 7.5° = 112.5°$.
c) En 12 heures, les deux aiguilles d'une montre se superposent exactement 11 fois. La première superposition a donc lieu à 12 h : 11 = 1 h 5 min 27.27 s et la cinquième superposition à 5 fois cette valeur.
Calcul aussi possible en posant x pour le nombre de minutes après 5 h et en égalant les angles depuis le haut (*midi*) :
aiguille des heures : $150° + x \cdot 0.5°$, aiguille des minutes : $x \cdot 6°$.

3) Diagonale d'un carré est égale à $\sqrt{2}$ fois le côté : par Pythagore : $d^2 = c^2 + c^2 \;\Rightarrow\; d^2 = 2c^2 \;\Rightarrow\; d = \sqrt{2}\,c$.
Mais la diagonale du carré est ici égale au diamètre de la barre, donc $2r = \sqrt{2}\,c$.
Profondeur de fraisage = rayon du cercle *moins* demi-côté du carré $= r - \frac{c}{2} = r - \frac{r}{\sqrt{2}}$ (par la relation ci-dessus).
Autre méthode : théorème de Pythagore $\Rightarrow\; (15 - x)^2 + (15 - x)^2 = 15^2$ ...

4) Il est facile de calculer la somme des angles d'un polygone convexe (= sans angle rentrant) : il suffit de le diviser en triangles en traçant des diagonales à partir d'un des sommets. Pour un polygone à n côtés, on pourra former $(n - 2)$ triangles, d'où une somme des angles de $(n - 2) \cdot 180°$. La somme des angles d'un pentagone est donc de $3 \cdot 180° = 540°$, d'où la valeur du dernier angle cherché.

5) Si on relie les milieux des côtés d'un triangle équilatéral, on obtient un triangle (équilatéral) intérieur dont les côtés ont la moitié de la longueur de ceux du grand (démonstration par les triangles semblables). Vu que dans un triangle équilatéral, les médiatrices sont aussi bissectrices (et hauteurs et médianes), le cercle circonscrit au petit triangle est identique au cercle inscrit dans le grand, ce qui démontre ce qu'il fallait démontrer.

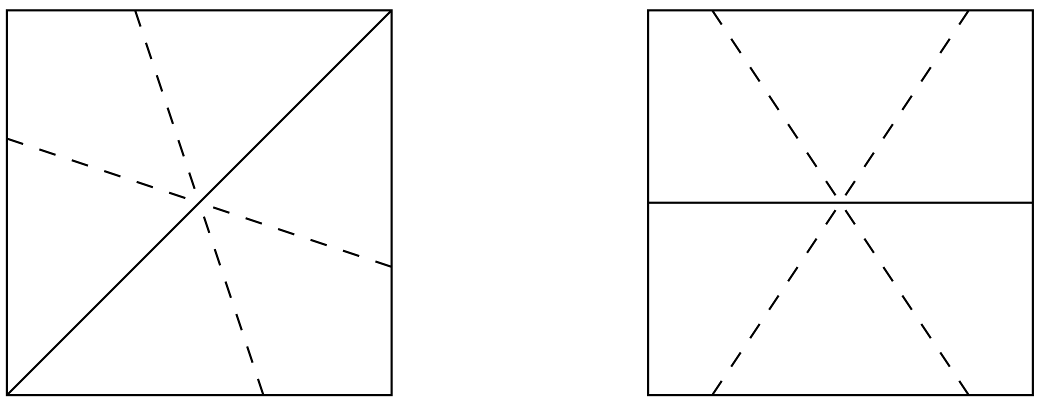
6) Lire les remarques des *aides et indications* ci-dessus.
Soient h et b la hauteur et la base du triangle de départ et h' et b' les valeurs analogues du triangle cherché. On a donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$ et $\mathcal{A}' = \frac{1}{2}b'h'$. Or on demande que $\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\mathcal{A}$

donc $b'h' = \frac{1}{2}bh$ (*). Mais ce que l'on cherche en fait, c'est où placer la nouvelle base, autrement dit on cherche le rapport entre h et h', donc mathématiquement la valeur x telle que $h' = x \cdot h$ ou encore $x = \frac{h'}{h}$
Vu que les deux triangles sont semblables, on a $\frac{h'}{h} = \frac{b'}{b} = x$
Et ainsi la relation (*) devient $xbxh = \frac{1}{2}bh \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $h' = \frac{\sqrt{2}}{2}h$

7) On enlève donc quatre petits carrés de 3 cm de côté que l'on remplace par des quarts de cercle.
Nouveau périmètre : $4 \cdot 15 \text{ cm} - 4 \cdot 2 \cdot 3 \text{ cm} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 3 \text{ cm}) = \cdots$
Nouvelle aire : $(15 \text{ cm})^2 - 4 \cdot (3 \text{ cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\pi \cdot (3 \text{ cm})^2) = \cdots$
Cas du triangle équilatéral (plus difficile) : ici, ce ne sont plus des carrés que l'on enlève, mais des cerfs-volants. Ces cerfs-volants ont bien sûr un angle de 60° (celui commun avec le triangle), ils ont aussi deux angles de 90° (là où le petit cercle est tangent au côté du triangle pour le raccord de la figure) et donc un quatrième angle de 120°. Il est facile de calculer les côtés de ces cerfs-volants en les divisant en deux triangles (qui sont des demi-triangles équilatéraux (donc 30°, 60° et 90°)). Ce qui permet de calculer la longueur qu'il faudra enlever deux fois à chaque côté du triangle de départ : $\sqrt{3} \cdot 3$ cm, ainsi que leur aire : $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (3 \text{ cm})^2$. Ce que l'on ajoute correspond à trois tiers de cercle, donc à un cercle entier (comme pour le carré ci-dessus).
Ainsi nouveau périmètre : $3 \cdot 15 \text{ cm} - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \text{ cm} + 2 \cdot \pi \cdot 3 \text{ cm} = \cdots$
Nouvelle aire : $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (15 \text{ cm})^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (3 \text{ cm})^2 + \pi \cdot (3 \text{ cm})^2 = \cdots$

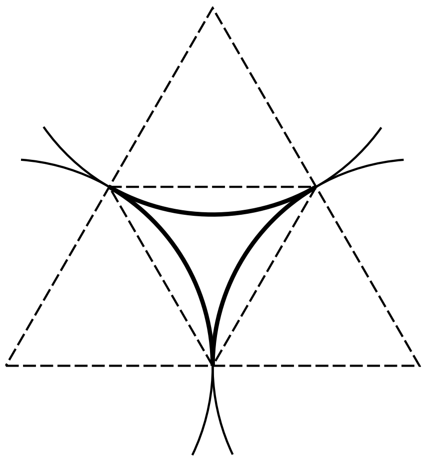
8) $p = 8a - 6 \cdot 2r + 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = 8a - 12r + 3\pi r$
et $\mathcal{A} = 3a^2 - 5 \cdot (r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2) + 1 \cdot (r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2) = \cdots = 3a^2 - 4r^2 + \pi r^2$

9) a) [Figure de gauche, triangle du bas (à gauche)] Soit x la base du triangle; sa hauteur est égale à $\frac{c}{2}$ (avec c côté du carré). On cherche donc x tel que $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{c}{2} = \frac{1}{6}c^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3} \cdot c$.
On obtient les angles par la trigonométrie élémentaire.



b) [Figure de droite, triangle du bas (au milieu)] Soit x la base du triangle; sa hauteur est égale à $\frac{c}{2}$ (avec c côté du carré). On cherche donc x tel que $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{c}{2} = \frac{1}{6}c^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3} \cdot c$.
On obtient les angles par la trigonométrie élémentaire.

10) Lire d'abord la partie *aides et indications* ci-dessus.
Périmètre : 3 sixièmes de cercle :
$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = \pi R$
Aire : aire du grand triangle *moins* trois sixièmes de disque :
$\frac{1}{2} \cdot b \cdot h - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \mathcal{A}_{\text{disque}}$
$= \frac{1}{2} \cdot (2R) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2R)\right) - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi R^2$
$= \sqrt{3}\, R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2$



11) Sphère inscrite : diamètre égal au côté du cube, donc rayon $= \frac{a}{2}$ et $\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{a}{2})^3 = \cdots = \frac{1}{6}\pi a^3$.
Sphère circonscrite : diamètre égal à la diagonale du cube.
Calcul de la diagonale du cube (en utilisant deux fois Pythagore) :
(I) diagonale d'une face du cube : $(d_f)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \;\Rightarrow\; d_f = \sqrt{2}\, a$.
(II) dans un rectangle diagonal intérieur au cube : $(d_c)^2 = (d_f)^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \;\Rightarrow\; d_c = \sqrt{3}\, a$.
D'où le volume de la sphère circonscrite : $\mathcal{V}_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^3 = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$

12) On enlève donc huit petits cubes d'arête r que l'on remplace par des huitièmes de sphère et douze *grosses arêtes* que l'on remplace par des quarts de cylindre.
Nouvelle aire : $6 \cdot (a - 2r)^2 + 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2) + 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (a - 2r) = \cdots$
Nouveau volume : $a^3 - 8 \cdot r^3 - 12 \cdot r^2 \cdot (a - 2r) + 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (a - 2r) = \cdots$

MCN / 26.7.2016