Rappels et compléments d'algèbre : cours

Note : la théorie sur les sujets de base se trouve généralement dans mes cours pour CFC disponibles sur `\Cours\Maths-MCN\CFC-Info`; mais on la trouve aussi facilement dans les livres et sur Internet.

1. Les différents ensembles de nombres

$\mathbb{N}$: les entiers naturels (= positifs)
$\mathbb{Z}$: les entiers relatifs
$\mathbb{Q}$: les nombres rationnels (= les fractions)
$\mathbb{R}$: les nombres réels

2. Les bases du calcul numérique et algébrique

2.1 Calcul avec les fractions

2.2 Distributivité et mise en évidence

Rappel 1 : $a(b+c) = ab+ac$: on distribue a sur la somme $(b+c)$ (c'est la distributivité). Lorsqu'on applique la règle $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$, on applique en fait une double distributivité : le terme $(a+b)$ distribué sur $(c+d)$, ce qui donne $\cdots = (a+b)c+(a+b)d$ puis une nouvelle distributivité pour chacun des deux termes. C'est bien souvent cette double distributivité qu'il faut utiliser pour faire des factorisations de polynômes.

Exemple : $3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = x^2(3x - 2) + 4(3x - 2) = (x^2 + 4)(3x - 2)$.

Rappel 2 : $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ la multiplication ne se distribue pas sur elle-même.

Exemple 1 : faire attention en amplifiant $\frac{1}{2}(\frac{x}{3} + 2) = \frac{x}{4}$ par 12.

Exemple 2 : $6(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3}) = 2\cdot3\cdot(x+\frac{5}{2})(x-\frac{4}{3}) = 2(x+\frac{5}{2})\cdot3(x-\frac{4}{3}) = (2x+5)(3x-4)$.

2.3 Opérations avec les puissances

Rappel : $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$, mais $ab^x = a \cdot b^x$; faire surtout attention aux coefficients et aux signes.

Exemple : $(-2xy^3)^4 = +16x^4y^{12}$.
(Voir aussi dans les divers formulaires).

2.4 Hiérarchie des opérations

Attention au signe "-" des nombres négatifs : $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$,
mais $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$; de la même façon que $0 - 3^2 = 0 - 9 = -9$.

Sur les **machines à calculer**, il y a deux signes "-" : le signe pour la soustraction et le signe pour les nombres négatifs (souvent noté "(-)" ou "+/−"). Lorsqu'on calcule -3^2

sur certaines machines, on peut obtenir 9 (ce qui est faux); cela provient du fait que dans ces machines-là, le signe "-" est associé au nombre dans sa mise en registre.

Remarque : lorsqu'on fait du calcul numérique à la machine, il est souvent plus simple de calculer les signes mentalement et de ne faire que le calcul proprement numérique à la machine.

Exemple : pour le Δ d'une équation du deuxième degré,
au lieu de calculer $\Delta = (-47)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-34)$,
on fera moins de fautes de signes si on introduit le calcul $\Delta = 47^2 + 4 \cdot 6 \cdot 34$.

2.5 Complément : les exposants négatifs

Définition : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \cdot$

Exemple : $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} \cdot$

◇ Toutes les propriétés habituelles des puissances restent valables.

Voir aussi Fortec : milieu de la p. 27 ou Formulaire CRM p. 13 (ou p. 15 selon l'édition).

2.6 Complément : les racines et les exposants fractionnaires

Voir aussi Fortec, bas de la p. 27 ou Formulaire CRM p. 13 (ou p. 15 selon l'édition).

Définition : on appelle **racine n-ième** d'un nombre positif a et on note $\sqrt[n]{a}$ le seul nombre positif b tel que $b^n = a$.

Exemple : $\sqrt[4]{81} = 3$ car $3^4 = 81$.

◇ Si n vaut 3, on parle de racine **cubique**. Si n vaut 2, on parle de racine **carrée** et on omet généralement le 2 dans la notation : on note $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$.

◇ Si n est impair, on peut prolonger la définition ci-dessus pour les nombres négatifs; par exemple $\sqrt[3]{-8} = -2$. (Mais attention : $\sqrt[4]{-81}$ n'a pas de sens.)

◇ Attention : l'équation $x^2 = 16$ admet bien les deux solutions $x = \pm 4$, mais le calcul suivant ne donne qu'une seule réponse : $\sqrt{16} = 4$.

◇ Il existe de nombreuses propriétés pour les racines (voir Fortec p. 27 ou Formulaire CRM p. 13 (ou p. 15 selon l'édition)). Mais en fait ces propriétés découlent immédiatement de celles des puissances si on définit auparavant les puissances fractionnaires.

Définition : $a^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \cdot$

Exemple : $32^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 = 2^3 = 8$.

◇ Toutes les propriétés habituelles des puissances restent valables pour les puissances fractionnaires (et donnent donc par là les propriétés pour les racines).

◇ Eviter les exposants fractionnaires pour des nombres négatifs.

3. Les bases du calcul algébrique : les polynômes

3.1 Vocabulaire (pour un rappel, voir : `\...\CFC-Info\2_03_ALG_Polynomes.pdf`)

3.2 Opérations (pour un rappel, voir : `\...\CFC-Info\2_03_ALG_Polynomes.pdf`)

3.3 Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 + b^2$ (pas de formule)	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

3.4 La division des polynômes (à une variable)

Méthode illustrée sur l'exemple $(6x^3 - 28x^2 + 54x - 2) : (3x^2 - 5x + 2)$.

1) Ordonner les deux polynômes de façon décroissante (s'ils ne le sont pas déjà).
2) Diviser les deux termes de plus haut degré : $6x^3 : 3x^2 = 2x$ et écrire le résultat.
3) Remultiplier le polynôme diviseur (complet) par le résultat obtenu :
$(3x^2 - 5x + 2) \cdot 2x = 6x^3 - 10x^2 + 4x$ et écrire le résultat sous le polynôme à diviser (en respectant l'alignement des termes de même degré pour éviter des erreur par la suite).

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
6x^3 & - & 28x^2 & + & 54x & - & 2 & : & 3x^2 & - & 5x & + & 2 & = & 2x \\
6x^3 & - & 10x^2 & + & 4x & & & & & & & & & &
\end{array}$$

4) Changer tous les signes du polynôme que l'on vient d'écrire (de préférence en couleur) pour le soustraire du polynôme de départ.
5) Effectuer la soustraction.

$$\begin{array}{llllllllllllllll}
 & 6x^3 & - & 28x^2 & + & 54x & - & 2 & : & 3x^2 & - & 5x & + & 2 & = & 2x \\
- & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 4x & & & & & & & & & & \\
\hline
 & 0 & - & 18x^2 & + & 50x & - & 2 & & & & & & & &
\end{array}$$

6) Diviser le terme du plus haut degré du résultat obtenu sous (5) par le terme du plus haut degré du polynôme diviseur : $-18x^2 : 3x^2 = -6$ et écrire le résultat.
7) Remultiplier le polynôme diviseur (complet) par le résultat obtenu :
$(3x^2 - 5x + 2) \cdot (-6) = -18x^2 + 30x - 12$.
8) Etc...
9) On s'arrête lorsque le degré du polynôme obtenu après la soustraction est plus petit que le degré du polynôme diviseur.

Attention : on n'écrit pas toutes les étapes décrites ci-dessus; à la fin du processus, on n'aura écrit que la forme compacte de la page suivante.

Voici la division en entier :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 6x^3 & - & 28x^2 & + & 54x & - & 2 & : \; 3x^2 - 5x + 2 = 2x - 6 \\
- & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 4x & & & \qquad \text{reste } 20x+10 \\
\hline
 & 0 & - & 18x^2 & + & 50x & - & 2 & \\
 & & + & 18x^2 & - & 30x & + & 12 & \\
\cline{2-8}
 & & & 0 & + & 20x & + & 10 &
\end{array}$$

Remarque : lorsqu'on écrit une division comme ci-dessus, on ne met pas de parenthèses pour ne pas surcharger le diagramme; mais il faut être conscient que sans parenthèses,
$6x^3 - 28x^2 + 54x - 2 : 3x^2 - 5x + 2$ est égal à
$6x^3 - 28x^2 + 54x - \frac{2}{3x^2} - 5x + 2$ et non à $\dfrac{6x^3 - 28x^2 + 54x - 2}{3x^2 - 5x + 2}$.

Autre exemple (où l'on a en plus supprimé les zéros en début de ligne) :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 6x^3 & - & 28x^2 & + & 54x & - & 2 & : \; 2x - 6 = 3x^2 - 5x + 12 \\
- & 6x^3 & + & 18x^2 & & & & & \qquad \text{reste } 70 \\
\hline
 & & - & 10x^2 & + & 54x & - & 2 & \\
 & & + & 10x^2 & - & 30x & & & \\
\cline{2-8}
 & & & & + & 24x & - & 2 & \\
 & & & & - & 24x & + & 72 & \\
\cline{4-8}
 & & & & & & + & 70 &
\end{array}$$

Remarque : s'il manque des termes de certains degrés dans les polynômes de départ, il faut soit faire attention à bien disposer les termes en colonnes, soit utiliser des zéros.

Exemple : $(6x^3 - 27x^2 - 2) : (3x^2 + 2)$

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 6x^3 & - & 27x^2 & & & - & 2 & : \; 3x^2 \quad + 2 = 2x - 9 \\
- & 6x^3 & & & - & 4x & & & \qquad \text{reste } -4x+16 \\
\hline
 & & - & 27x^2 & - & 4x & - & 2 & \\
 & & + & 27x^2 & & & + & 18 & \\
\cline{2-8}
 & & & & - & 4x & + & 16 &
\end{array}$$

ou bien :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 6x^3 & - & 27x^2 & + & 0x & - & 2 & : \; 3x^2 + 0x + 2 = 2x - 9 \\
- & 6x^3 & + & 0x^2 & - & 4x & & & \qquad \text{reste } -4x+16 \\
\hline
 & 0 & - & 27x^2 & - & 4x & - & 2 & \\
 & & + & 27x^2 & + & 0x & + & 18 & \\
\cline{2-8}
 & & & 0 & - & 4x & + & 16 &
\end{array}$$

4. Premier degré

4.1 Equations du premier degré (\...\CFC-Info\2_04_ALG_Equations.pdf)

4.2 Transformation de formules (\Cours\TransformationsDeFormules.pdf)

4.3 Systèmes de 2 équations linéaires à 2 inconnues

(\...\CFC-Info\2_06_ALG_Systemes_a_2_inconnues.pdf)

5. Deuxième degré

5.1 Equations du deuxième degré

Voir aussi Fortec p. 28 ou Formulaire CRM p. 16 (ou p. 18 selon l'édition).

En regroupant les termes et en les ordonnant, on peut toujours écrire une équation du deuxième degré à une inconnue sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$).

Les solutions de l'équation sont alors données par

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée discriminant de l'équation. Si Δ est négatif, le calcul des racines carrées n'est pas possible dans l'ensemble des nombres réels et l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ (mais elle admet deux solutions dans l'ensemble des nombres complexes). Si Δ est nul, $\sqrt{\Delta}$ est nul aussi et les deux solutions de l'équation sont égales (on parle alors quelquefois de solutions doubles). Si Δ est positif, x_1 et x_2 sont différents et l'équation admet deux solutions.

Exemple 1 : résoudre l'équation : $2x^2 + 3x + 5 = 0$

On a $a = 2$, $b = 3$ et $c = 5$; ainsi $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31$ qui est négatif; donc l'équation n'a pas de solution.

Exemple 2 : résoudre l'équation : $1 + 9x^2 = 6x$

En regroupant tous les termes à gauche et en les ordonnant, on obtient l'équation sous la forme standard : $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Et on a donc $a = 9$, $b = -6$ et $c = 1$;

ainsi $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$;

l'équation admet donc une seule solution : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \dfrac{-(-6) \pm 0}{2 \cdot 9} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$

Exemple 3 : résoudre l'équation : $20 = 2x^2 + 6x$

En regroupant tous les termes à droite, on obtient l'équation sous la forme standard :

$0 = 2x^2 + 6x - 20$ [à *droite* : pour obtenir un 'a' positif]

On a donc $a = 2$, $b = 6$ et $c = -20$; ainsi $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20) = 36 - (-160) = 196$; l'équation admet donc les deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 14}{4} = \begin{cases} (-6 - 14)/4 = -20/4 = -5 \\ \text{ou bien} \\ (-6 + 14)/4 = 8/4 = 2 \end{cases}$$

Attention : ne pas utiliser la formule ci-dessus pour des équations d'autres degrés que le deuxième; ne pas essayer non plus de la généraliser. Il existe des méthodes pour les équations du troisième et du quatrième degré, mais elles sont compliquées, respectivement très très compliquées.

Remarque : si l'équation est incomplète, ne pas utiliser la formule, mais utiliser l'algèbre de base.

Exemple 1 : résoudre l'équation $4x^2 - 9 = 0$
Par l'algèbre de base : $\cdots \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$

Exemple 2 : résoudre l'équation $7x^2 = 5x$
Par l'algèbre de base : $\cdots \Rightarrow 7x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(7x-5) = 0 \Rightarrow x = 0$ et $7x - 5 = 0$ d'où les deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{5}{7}$
Attention à ne pas simplifier directement l'équation de départ, car on perdrait la solution $x_1 = 0$

5.2 Factorisation des polynômes du deuxième degré

Effectuons le produit $(x+a)(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x^2+(a+b)x+ab$. On remarque que le coefficient de x est la somme $a+b$ et que le terme constant est le produit $a \cdot b$. Cela permet de décomposer par tâtonnements certains polynômes du deuxième degré.
Exemple : décomposer $x^2 + 5x + 6$. On cherche deux nombres a et b dont la somme vaut 5 et le produit 6. C'est le cas avec 2 et 3. On peut ainsi écrire $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3 = (x+2)(x+3)$.

On peut aussi décomposer les trinômes du deuxième degré à partir de leurs zéros déterminés par la résolution de l'équation associée :
I) Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet les solutions x_1 et x_2 alors le polynôme se décompose en : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
II) Si les deux solutions sont égales (donc si $\Delta = 0$), on obtient la décomposition : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$.
III) Si $\Delta < 0$, le polynôme est indécomposable.
◇ Ne pas oublier le facteur a dans les cas (I) et (II).

Exemple 1 : décomposer $6x^2 - 13x - 28$.
Considérons l'équation $6x^2 - 13x - 28 = 0$; on a $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-28) = 841 = 29^2$, d'où les deux solutions $x_1 = \frac{13-29}{12} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$ et $x_2 = \frac{13+29}{12} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$.
La décomposition est donc $6x^2 - 13x - 28 = 6\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{7}{2}\right)$.

Exemple 2 : décomposer $12x^2 - 60x + 75$.
On a $\Delta = (-60)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 75 = 0$, donc une solution double : $x = \frac{1}{24} \cdot 60 = \frac{5}{2}$, d'où la décomposition $12x^2 - 60x + 75 = 12\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$. $\longrightarrow$

On aurait aussi pu remarquer que le trinôme de départ est le triple d'un carré parfait et le décomposer en $12x^2 - 60x + 75 = 3(4x^2 - 20x + 25) = 3(2x-5)^2$.
En fait, chaque fois que $\Delta = 0$, il s'agit d'un multiple de carré parfait.

Exemple 3 : décomposer $3x^2 - 2x + 15$.
On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15 = -176$ qui est négatif, donc $3x^2 - 2x + 15$ est indécomposable.

6. Inéquations

6.1 Propriétés des inégalités

1) Par rapport à l'addition et à la soustraction, les propriétés sont les mêmes que celles de l'égalité.
2) Pour la multiplication et la division, il faut faire attention au signe du nombre :

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} k \cdot a < k \cdot b & \text{si } k \text{ est positif} \\ k \cdot a > k \cdot b & \text{si } k \text{ est négatif} \end{cases}$$

(autrement dit, on change le sens de l'inégalité si on multiplie ou si on divise par un nombre négatif et on conserve le sens si on multiplie ou si on divise par un nombre positif).
3) Eviter les propriétés pour les inverses et les carrés qui comportent de nombreuses distinctions de cas.

6.2 Exemple de résolution d'inéquation

$$3x + 2 < 5x + 7$$

méthode 1 :

$$\begin{aligned} 3x - 5x &< 7 - 2 \\ -2x &< 5 \\ x &> -\tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

méthode 2 :

$$\begin{aligned} 2 - 7 &< 5x - 3x \\ -5 &< 2x \\ -\tfrac{5}{2} &< x \end{aligned}$$

Pour arriver à la dernière ligne, on a, dans la méthode 1, divisé l'inéquation par (-2) ce qui nécessite un changement de "$<$" en "$>$" alors que dans la méthode 2, on a divisé par 2 ce qui ne change pas le sens de l'inégalité.

Remarque importante : vu le changement de sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif, il n'est pas possible de multiplier ou de diviser une inéquation par une quantité dont on ignore le signe (par exemple une quantité contenant des variables). Dans ce cas-là, il faut faire des distinctions de cas (que l'on regroupe souvent sous forme d'un tableau des signes).
Dans le cas de l'inégalité suivante, par exemple : $\dfrac{x-4}{x+2} < \dfrac{x-3}{x+5}$
il est interdit de faire le *produit croisé* car on ne connaît pas le signe de $x+2$ ni celui de $x+5$.

7. Systèmes d'équations

7.1 Systèmes d'équations linéaires 3 sur 3, 4 sur 4,...

La méthode la plus efficace pour résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues consiste à faire successivement des combinaisons linéaires entre la première et la deuxième équations, puis entre la première et la troisième, etc... de façon à obtenir un système où la première inconnue n'apparaît que dans la première équation; le reste donnant un sous-système de $(n-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues. Et on recommence le processus jusqu'à obtenir un système triangulaire, que l'on résout en remontant depuis le bas. Si le système comporte des équations particulières (par exemple où il manque des inconnues), il peut être utile de le réorganiser avant de le résoudre ou si les équations sont vraiment très particulières, d'utiliser une méthode de substitution ou encore une méthode mixte.

Remarque 1 : dans le cas où le système est sous-déterminé et qu'il y a donc une infinité de solutions liées par des équations, il est indispensable de procéder de façon claire et systématique si on ne désire pas tourner en rond.

Remarque 2 : vu la grande probabilité de faire de petites erreurs de calcul, il est préférable de résoudre à la machine ou par tableur les systèmes 4 sur 4 et plus grands (voire même les systèmes 3 sur 3).

Note : tableur jusqu'aux systèmes 6 sur 6 : `01-SystemesDEquations.xls`
sur `\Cours\Maths-MCN\Techniciens`

Exemple 1 : résolution d'un système de 4 équations linéaires à 4 inconnues.

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z - 4t = 33 & \text{(éq. 1)} \\ 3x - 7y - z + 6t = 34 & \text{(éq. 2)} \\ 2x + y - 3z + t = -9 & \text{(éq. 3)} \\ -5x + 4y - 3z - 2t = -49 & \text{(éq. 4)} \end{cases}$$

Première étape : conserver la première équation et la combiner successivement avec les suivantes (chaque fois en trois lignes de calculs non écrites ici !) :

- 3 fois (éq. 1) moins 4 fois (éq. 2) donne l'équation $2'$
- 1 fois (éq. 1) moins 2 fois (éq. 3) donne l'équation $3'$
- 5 fois (éq. 1) plus 4 fois (éq. 4) donne l'équation $4'$

d'où le système suivant (équivalent au premier) :

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z - 4t = 33 & \text{(éq. 1)} \\ 22y + 13z - 36t = -37 & \text{(éq. } 2'\text{)} \\ -4y + 9z - 6t = 51 & \text{(éq. } 3'\text{)} \\ 6y + 3z - 28t = -31 & \text{(éq. } 4'\text{)} \end{cases}$$

Deuxième étape : conserver les deux premières équations et combiner la deuxième successivement avec les suivantes :

- 2 fois (éq. $2'$) plus 11 fois (éq. $3'$) donne l'équation $3''$ (en trois lignes de calculs...)
- 3 fois (éq. $2'$) moins 11 fois (éq. $4'$) donne l'équation $4''$ (idem)

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z - 4t = 33 & \text{(éq. 1)} \\ \quad 22y + 13z - 36t = -37 & \text{(éq. } 2'\text{)} \\ \quad\quad 125z - 138t = 487 & \text{(éq. } 3''\text{)} \\ \quad\quad 6z + 200t = 230 & \text{(éq. } 4''\text{)} \end{cases}$$

Troisième étape : conserver les trois premières équations et combiner la troisième avec la quatrième :

- 6 fois (éq. $3''$) moins 125 fois (éq. $4''$) donne l'équation $4'''$ (en trois lignes...)

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z - 4t = 33 & \text{(éq. 1)} \\ \quad 22y + 13z - 36t = -37 & \text{(éq. } 2'\text{)} \\ \quad\quad 125z - 138t = 487 & \text{(éq. } 3''\text{)} \\ \quad\quad\quad - 25828t = -25828 & \text{(éq. } 4'''\text{)} \end{cases}$$

Le système obtenu est triangulaire.

La dernière équation donne immédiatement $t = 1$ que l'on remplace dans l'avant-dernière, d'où : $125z - 138 \cdot 1 = 487 \Rightarrow 125z = 625 \Rightarrow z = 5$. On remplace ces valeurs dans la deuxième équation, d'où l'on tire $y = -3$ et en remplaçant ces trois valeurs dans la première équation, on obtient $x = 4$. D'où le quadruplet solution : $(x; y; z; t) = (4; -3; 5; 1)$.

Exemple 2 : résolution d'un système (sous-déterminé) de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z = 5 & \text{(éq. 1)} \\ 3x - 7y - 9z = -50 & \text{(éq. 2)} \\ 4x - 5y - 12z = -45 & \text{(éq. 3)} \end{cases}$$

Première étape : conserver la première équation et la combiner successivement avec les suivantes :

- 3 fois (éq. 1) moins 2 fois (éq. 2) donne l'équation $2'$ (en trois lignes de calculs...)
- 2 fois (éq. 1) moins (éq. 3) donne l'équation $3'$ (idem)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z = 5 & \text{(éq. 1)} \\ \quad 23y + 0z = 115 & \text{(éq. } 2'\text{)} \\ \quad 11y + 0z = 55 & \text{(éq. } 3'\text{)} \end{cases}$$

Et on s'aperçoit que les z ont disparu en même temps que les x dans les deux dernières équations; ces deux équations sont d'ailleurs équivalentes et elles donnent $y = 5$. On remplace cette valeur dans la première équation, ce qui donne:

$2x + 15 - 6z = 5 \Rightarrow 2x = 6z - 10 \Rightarrow x = 3z - 5$.

Les solutions de ce système sont donc tous les triplets $(x; y; z)$ tels que $x = 3z - 5$ et $y = 5$ ce que l'on peut aussi écrire : $(x; y; z) = (3a - 5; 5; a)$.

7.2 Systèmes d'équations non linéaires

Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires (c'est-à-dire les systèmes avec des x^2, des $x \cdot y$,...). Le plus souvent on utilisera des substitutions en essayant de ne pas augmenter le degré des équations.
Remarque : ces systèmes comportent souvent plusieurs solutions qu'il est important de bien préciser (voir l'exemple ci-dessous).

Exemple : intersection d'un cercle et d'une parabole :
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 13 \end{cases}$
Ici, il ne faut surtout pas utiliser la deuxième équation pour remplacer y dans la première : on obtiendrait une équation du quatrième degré en x. Il faut transformer la deuxième équation en $x^2 = y + 13$ que l'on substitue à la place de x^2 dans la première équation, d'où $y + 13 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$ et ainsi $y_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$.
D'où :
I) $y = -4 \Rightarrow x^2 = -4 + 13 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
II) $y = 3 \Rightarrow x^2 = 3 + 13 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
Et le système comporte donc quatre solutions : $(-4; 3)$, $(-3; -4)$, $(3; -4)$ et $(4; 3)$.
Il faut absolument éviter de dire que les solutions sont $x = \pm 4$, $x = \pm 3$, $y = 3$ et $y = 4$: il est important de préciser quels x vont avec quels y : les solutions sont des points du plan, donc déterminées par deux coordonnées.

8. Factorisation des polynômes

8.1 Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme est factorisable en un produit de polynômes du premier degré et/ou de polynômes du deuxième degré ayant un Δ négatif.
[Cette décomposition est unique à des mises en évidence numériques près.]

8.2 Théorème de divisibilité

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel. Alors :
$P(x)$ est divisible (sans reste) par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$.
Exemple :
Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.
On a $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 24 = 8 - 12 - 20 + 24 = 0$, donc par le théorème de divisibilité, $P(x)$ est divisible par $x - 2$.
On a $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 24 = 27 - 27 - 30 + 24 \neq 0$, donc par le théorème de divisibilité, $P(x)$ n'est pas divisible par $x - 3$.
On a $P(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 10 \cdot (-3) + 24 = -27 - 27 + 30 + 24 = 0$, donc par le théorème de divisibilité, $P(x)$ est divisible par $x - (-3) = x + 3$.

8.3 Rappels et exemples des différentes méthodes de factorisation

Méthodes :

1. Mises en évidence.
2. Identités remarquables.
3. Polynômes du 2e degré, polynômes bicarrés,...
4. Complétion du carré.
5. Théorème de divisibilité.

Attention : essayer ces différentes méthodes dans l'ordre : si on utilise le théorème de divisibilité alors qu'une mise en évidence aurait suffit, on risque de se trouver dans une impasse.

Remarque : en règle générale, on ne teste à l'aide du théorème de divisibilité que les nombres qui sont des diviseurs (positifs ou négatifs) du terme constant du polynôme; si ces termes ne conviennent pas, cela signifie que très probablement on aura des fractions ou des racines dans la décomposition.

Exemples :

a)
$$\begin{aligned} 3x^3-5x^2-x &= x(3x^2-5x-1) \qquad \text{(mise en évidence)} \\ &= 3x\left(x-\tfrac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x-\tfrac{5-\sqrt{37}}{6}\right) \qquad \text{(formule du 2e degré)} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x^4-x^2-20 &= u^2-u-20 \qquad \text{(polynôme bicarré : on pose } u=x^2 \Rightarrow u^2=x^4\text{)} \\ &= (u+4)(u-5) \qquad \text{(formule du 2e degré)} \\ &= (x^2+4)(x^2-5) \qquad \text{(retour à } x\text{)} \\ &= (x^2+4)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \qquad \text{(identité remarquable)} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x^5+7x^4-2x-7 &= x^4(2x+7)-1(2x+7) \qquad \text{(deux mises en évidence)} \\ &= (x^4-1)(2x+7) \qquad \text{(mise en évidence)} \\ &= (x^2-1)(x^2+1)(2x+7) \qquad \text{(identité remarquable)} \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(2x+7) \text{ (identité remarquable)} \end{aligned}$$

d) $2x^3-5x^2+5x-6$: théorème de divisibilité : on essaye successivement ±1, ±2, ±3 et ±6. On a $P(2)=0$, donc le polynôme est divisible par $x-2$. En effectuant la division, on obtient : $2x^3-5x^2+5x-6=(x-2)(2x^2-x+3)$ (le deuxième terme n'étant pas factorisable davantage, vu que son Δ est négatif).

e) $9x^4+14x^2+25$: début du carré (ou complétion du carré) : on cherche un carré parfait contenant les termes $9x^4+\cdots+25$ ou $9x^4+14x^2+\cdots$. Il y a trois possibilités : $(3x^2+5)^2=9x^4+30x^2+25$, $(3x^2-5)^2=9x^4-30x^2+25$ ou $(3x^2+\frac{7}{3})^2=9x^4+14x^2+\frac{49}{9}$.
En fait seule la première conduit à une solution.
Considérons donc l'égalité : $(3x^2+5)^2=9x^4+30x^2+25$ et passons le terme $30x^2$ à gauche : $(3x^2+5)^2-30x^2=9x^4+25$.
En additionnant $14x^2$ des deux côtés, on obtient à droite le polynôme à factoriser :
$(3x^2+5)^2-30x^2+14x^2=9x^4+14x^2+25$.
En renversant l'égalité : $\longrightarrow$

$$\begin{aligned}
9x^4+14x^2+25 &= (3x^2+5)^2-30x^2+14x^2\\
&= (3x^2+5)^2-16x^2\\
&= (3x^2+5)^2-(4x)^2\\
&= (3x^2+5-4x)(3x^2+5+4x) \qquad \text{(identité remarquable)}\\
&= (3x^2-4x+5)(3x^2+4x+5) \qquad \text{(mise en ordre)}
\end{aligned}$$

9. Un exemple de système avec paramètre

Résoudre et discuter le système suivant en fonction du paramètre m :

$$\begin{cases} mx-y=-1 \\ x-my=-m^2 \end{cases}$$

On commence la résolution comme pour un système sans paramètre : on combine les équations de façon à faire disparaître l'une puis l'autre variable :

$m\cdot$ (éq. 1) $-\ 1\cdot$ (éq. 2) donne l'équation $m^2x-x-my+my=m^2-m$

$1\cdot$ (éq. 1) $-\ m\cdot$ (éq. 2) donne l'équation $mx-mx+m^2y-y=m^3-1$

On procède ensuite aux mises en évidence :

$(m^2-1)x=m^2-m$ et $(m^2-1)y=m^3-1$

et on divise pour trouver x, respectivement y :

$x=\frac{m^2-m}{m^2-1}=\frac{m(m-1)}{(m+1)(m-1)}=\frac{m}{m+1}$

(mais attention : simplification possible uniquement si $m\neq 1$)

et $y=\frac{m^3-1}{m^2-1}=\frac{(m-1)(m^2+m+1)}{(m-1)(m+1)}=\frac{m^2+m+1}{m+1}$

Il faut maintenant se rappeler que lorsque l'on divise une équation (et lorsque l'on simplifie une fraction), ce n'est possible que si le diviseur est non nul; cela signifie qu'il faut dans notre cas étudier les différentes valeurs de m qui risquent d'annuler le dénominateur d'avant les simplifications, à savoir $m=-1$ et $m=1$

Cas $m=-1$

Le système initial devient dans ce cas :

$\begin{cases} -x-y=-1 \\ x+y=-1 \end{cases}$ qui sont deux équations incompatibles, donc pas de solutions.

Cas $m=1$

Le système initial devient :

$\begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ donc deux fois la même équation, ce qui signifie que l'on a une infinité de solution liées par la relation $x-y=-1$

En résumé :

Pour $m\neq\pm1$: $x=\frac{m}{m+1}$ et $y=\frac{m^2+m+1}{m+1}$; pour $m=-1$: pas de solutions : équations incompatibles; pour $m=1$: infinité de solutions liées par $y=x+1$.

Remarque : les machines à calculer capables de résoudre ce genre de systèmes ne donnent souvent que la solution générale. Dans le cas de cet exemple-ci, c'est dangereux car le cas $m=1$ est totalement occulté.