Primitives et intégrales : cours

1. Primitives (ou intégrales indéfinies)

Définition : une fonction F est **une primitive** d'une fonction f si on a $F' = f$

Exemple :

Soit $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 7x + 1$; quelle fonction faudrait-il dériver pour obtenir $f(x)$?
$F(x) = x^4 + 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x + 47$ est une primitive de $f(x)$. Y en a-t-il d'autres ?
En fait, toutes les fonctions de la forme $x^4 + 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x + C$ (où C est un nombre réel quelconque) sont des primitives de $4x^3+6x^2-7x+1$. [Note : 'C' comme *constante*]

◇ Et dans ce cas (autrement dit avec "$+\,C$"), on parle de **la** primitive de $f(x)$.

◇ Notation : $\int f(x)dx = F(x)$

Remarque générale : l'intégration est une opération beaucoup plus complexe que la dérivation. Les formulaires comportent généralement beaucoup plus de pages sur les intégrales que sur les dérivées. Avec souvent plein de fonctions déjà intégrées où il n'y a plus qu'à modifier un ou des coefficients.

Il existe aussi des fonctions théoriquement intégrables, mais dont la primitive ne peut pas s'écrire avec les fonctions habituelles : il faudrait définir de nouvelles fonctions pour les exprimer (par exemple $\int \sin(\sin(x))\,dx$).

2. Propriétés principales de l'intégration

1) Primitive d'une somme : $\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

2) Primitive du produit d'une fonction par un nombre :

$$\int (a \cdot f)\,dx = a \cdot \int f\,dx \quad \text{(où } a \text{ est un nombre)}$$

3) Primitive d'un produit et d'un quotient : difficile (pas au programme)

3. Primitives des fonctions usuelles

$\int a\,dx = ax + C$ (primitive d'un nombre seul)

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (pour $n \neq -1$) $\qquad \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C \qquad \int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$

4. Primitives de certaines fonctions composées simples

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ (où F est une primitive de f)

En particulier : $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(ax+b)^{n+1}+C$ (pour $n\neq -1$)

Et pour le cas $n=-1$: $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+C$

De la même façon, on a par exemple : $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

[5. Primitives des fonctions composées]

En général difficile, mais un cas particulier relativement simple : lorsque la fonction est multipliée par une partie de sa dérivée intérieure.

Intégrons $(3x+4)^7$ Par la formule du paragraphe 4, on obtient :
$\int (3x+4)^7\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot(3x+4)^8+C$

Mais cette formule ne s'applique pas pour $\int (3x^2+4)^7\,dx$; on ne peut en particulier pas espérer obtenir une primitive de la forme $\frac{1}{x}\cdot(3x^2+4)^8$. En effet : si on redérive cette dernière fonction, il faut utiliser la formule pour la dérivée d'un produit et on obtient une somme de plusieurs termes.

Si on essaye de calculer $\int (3x^2+4)^7\,dx$ à la machine (ou avec un logiciel de maths), on s'aperçoit que la machine est obligée de développer la puissance 7 avant d'intégrer :
$\int (3x^2+4)^7\,dx = \frac{729x^{15}}{5}+\frac{20412x^{13}}{13}+\frac{81648x^{11}}{11}+20160x^9+34560x^7+\frac{193536x^5}{5}+28672x^3+16384x+C$

Si, par contre, on intègre $x(3x^2+4)^7$ (également à la machine), on obtient un résultat très compact : $\int x(3x^2+4)^7\,dx = \frac{(3x^2+4)^8}{48}+C$

Ce qui simplifie tout dans ce dernier cas, c'est que la fonction comporte un terme (x) qui est un multiple de la dérivée intérieure de l'autre terme. Dans ce cas, on peut adopter la méthode suivante : supposer que la primitive cherchée est un multiple d'une fonction bien choisie, dériver cette fonction (avec un coefficient inconnu) et ajuster le coefficient.

Remarque 1 : il est toujours possible de dériver la fonction obtenue pour vérifier que c'est bien la primitive de la fonction de départ.

Remarque 2 : si une fonction composée n'est pas précédée d'un multiple de sa dérivée intérieure, l'intégration peut être très difficile (voire même impossible avec les fonctions usuelles).

Exemple 1 : pour calculer $\int x^2\cos(4x^3+7)\,dx$, on remarque que le terme x^2 provient de la dérivée intérieure; on suppose alors que la primitive est de la forme $\sin(4x^3+7)$ et on pose $\int x^2\cos(4x^3+7)\,dx = k\cdot\sin(4x^3+7)$
On dérive : $(k\cdot\sin(4x^3+7))' = k\cdot\cos(4x^3+7)\cdot(3\cdot 4x^2) = 12kx^2\cos(4x^3+7)$
d'où (par comparaison avec l'égalité de départ) : $k=\frac{1}{12}$
Et ainsi : $\int x^2\cos(4x^3+7)\,dx = \frac{1}{12}\sin(4x^3+7)+C$

Exemple 2 : pour calculer $\int 5x^2(4x^3+7)^6\,dx$, on remarque que le terme x^2 provient de la dérivée intérieure; on suppose alors que la primitive est de la forme $(4x^3+7)^7$ et on pose $\int 5x^2(4x^3+7)^6\,dx = k\cdot(4x^3+7)^7$

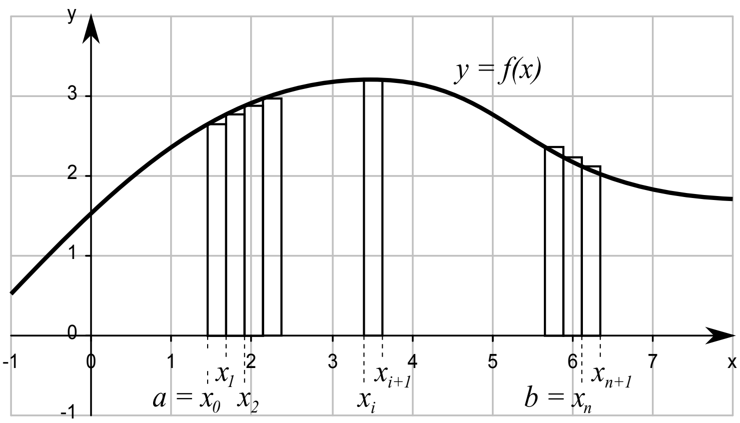
On dérive : $(k\cdot(4x^3+7)^7)' = 7k\cdot(4x^3+7)^6\cdot(3\cdot 4x^2) = 84kx^2(4x^3+7)^6$

d'où (par comparaison avec l'égalité de départ) : $k=\frac{5}{84}$

Et ainsi : $\int 5x^2(4x^3+7)^6\,dx = \frac{5}{84}(4x^3+7)^7 + C$

6. Intégrales définies - aire sous une courbe

Calcul de l'aire sous une courbe : approximation par des rectangles.



On divise l'intervalle $[a;b]$ en n parties égales et on additionne l'aire des rectangles.

Aire d'un rectangle : $(x_{i+1}-x_i)\cdot f(x_i) = \frac{b-a}{n}\cdot f(x_i)$

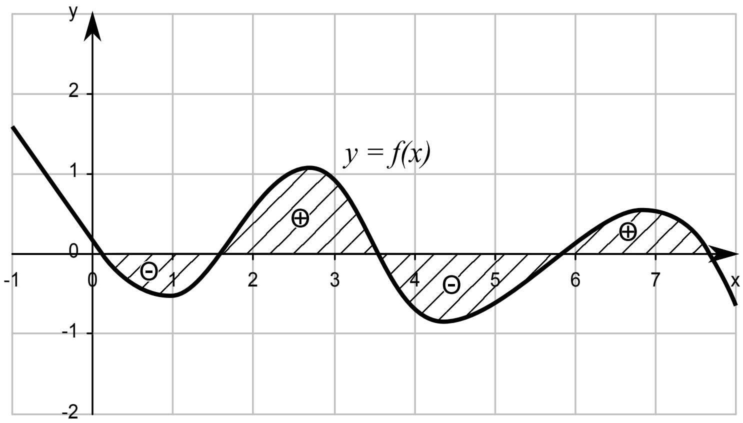
Aire de tous les rectangles : $\frac{b-a}{n}\cdot f(x_1) + \frac{b-a}{n}\cdot f(x_2) + \frac{b-a}{n}\cdot f(x_3) + \cdots + \frac{b-a}{n}\cdot f(x_n) = \frac{b-a}{n}\cdot\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\big) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$

Aire sous la courbe : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$

◇ Remarque 1 : on pourrait aussi faire le calcul en prenant chaque fois $f(x_{i+1})$, ou en prenant chaque fois le plus petit des deux (ou le plus grand) ou encore en prenant des trapèzes. On obtiendra dans chacun des cas la même valeur après le passage à la limite.

◇ Remarque 2 : ce calcul numérique est facile à programmer; on le trouve d'ailleurs sur certaines machines à calculer qui ne disposent pas du calcul algébrique.

◇ Remarque 3 : l'aire obtenue est une aire algébrique : les parties sous l'axe des x sont comptées négativement. Si on désire calculer une aire géométrique, il faut séparer la surface en plusieurs parties.



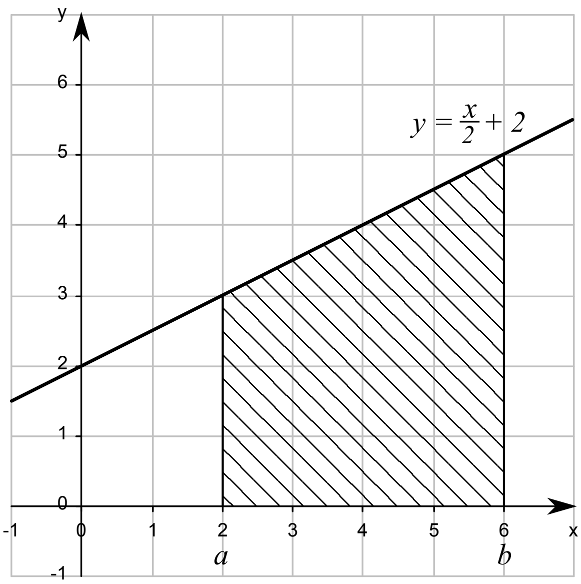
Théorème fondamental du calcul intégral

Si F est une primitive de f alors l'aire précédente est donnée par :

$$\text{Aire} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\right) = F(b) - F(a)$$

Exemple : calcul de l'aire sous la droite $y = \frac{x}{2} + 2$ entre $x = 2$ et $x = 6$

I) Par la géométrie (trapèze) :
petite base $b = 3$ (verticale en $x = 2$),
grande base $B = 5$ (verticale en $x = 6$),
hauteur $h = 4$ (par $x_B - x_A$).
Et ainsi :
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(b + B)h = \frac{1}{2}(3 + 5)\,4 = 16$



II) Par une primitive : la fonction $F(x) = \frac{x^2}{4} + 2x + C$ est la primitive de $f(x) = \frac{x}{2} + 2$; par le théorème fondamental, on a donc $\mathcal{A} = F(6) - F(2) = \frac{6^2}{4} + 2\cdot 6 + C - \left(\frac{2^2}{4} + 2\cdot 2 + C\right) = 9 + 12 + C - (1 + 4 + C) = 16$

Ce que l'on écrit généralement de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 2\right)\,dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C\,\Big|_2^6 = \frac{6^2}{4} + 2\cdot 6 + C - \left(\frac{2^2}{4} + 2\cdot 2 + C\right) = 21 - 5 = 16$$

◇ Pour indiquer que $F(x)$ est évaluée entre les deux valeurs a et b : $F(x)\Big|_a^b$, on trouve aussi les notations : $F(x)\Big]_a^b$ et $\Big[F(x)\Big]_a^b$

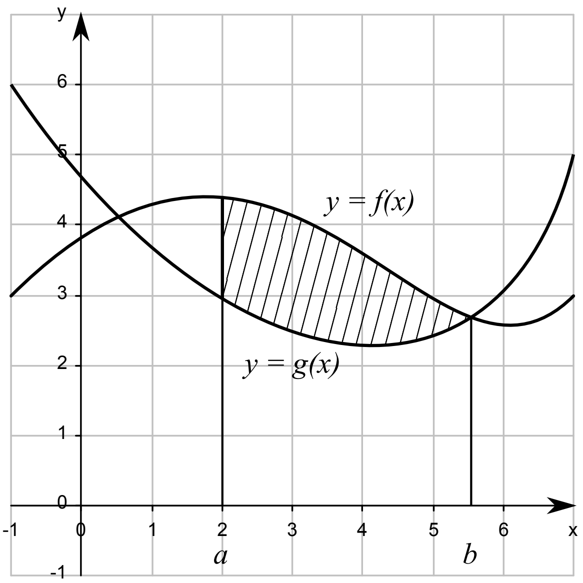
⋄ Remarque 1 : le "dx" de la notation rappelle que l'on additionne des produits $f(x) \cdot \Delta x$ et que l'on fait tendre Δx vers zéro. En maths (et aussi en physique), le "Δ" sert souvent à indiquer des différences et le "d" la limite de ces différences lorsque quelque chose tend vers zéro. Par exemple pour la dérivée : $\frac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

⋄ Remarque 2 : si le dessin est assez précis et la courbe pas trop compliquée, on peut aussi estimer l'aire en comptant les carreaux.

7. Aire entre deux courbes

C'est l'aire sous la courbe du haut moins l'aire sous la courbe du bas (sur l'intervalle considéré) :

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx$$



⋄ Note 1 : La méthode reste valable même si les courbes passent sous l'axe des x.

⋄ Note 2 : pour les bornes a et b, utiliser selon le cas les points d'intersection (à calculer) ou les bornes imposées.

⋄ Attention à toujours bien déterminer quelle fonction est en dessus de l'autre sur l'intervalle considéré. Et si les courbes se coupent, voir si l'on demande l'aire algébrique ou l'aire géométrique.

8.⋄ Intégrale par-dessus un trou du domaine de définition

Le calcul des intégrales définies n'est possible que pour des fonctions continues sur l'intervalle considéré. Si la fonction admet un trou (du domaine de définition) dans l'intervalle d'intégration, il faut être très prudent; en particulier si la fonction part à l'infini.

Le calcul suivant, par exemple, est **faux** : $\int\limits_{-2}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$

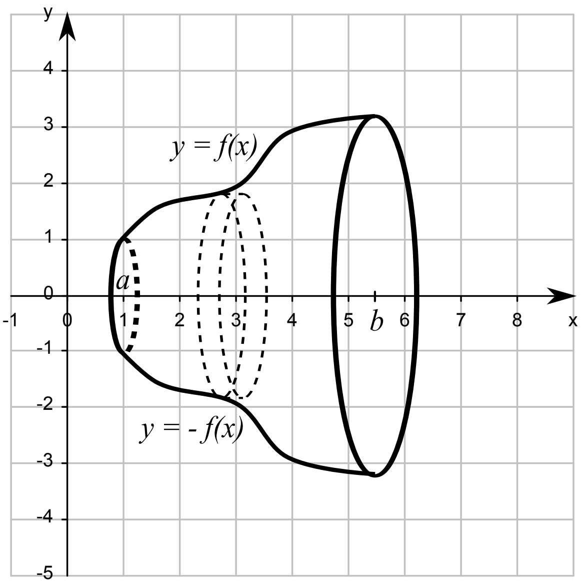
Le calcul correct de cette intégrale (dite **intégrale impropre**) nécessite l'utilisation des limites :

$$\int\limits_{-2}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a \to 0^-} \int\limits_{-2}^{a} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{b \to 0^+} \int\limits_{b}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a \to 0^-} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-2}^{a} + \lim_{b \to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{b}^{3} =$$

$$-\lim_{a \to 0^-} \frac{1}{a} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \lim_{b \to 0^+} \frac{1}{b} = -(-\infty) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \infty = \infty$$

Note : apparemment les TI savent calculer les intégrales impropres.

[[9. Volumes de révolution]]



On coupe le solide en tranches qui sont des cylindres d'axe Ox et de *hauteur* quasiment nulle.

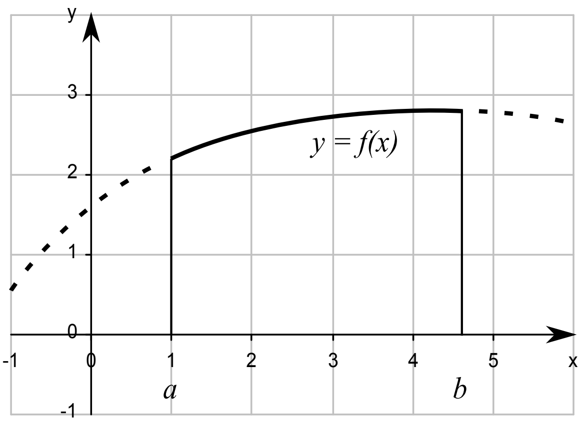
Comme pour l'aire et les rectangles, on peut additionner les volumes de ces tranches :
épaisseur (*hauteur* des cylindres) : $\frac{b-a}{n}$,
rayon : $f(x_i)$.
D'où le volume d'une tranche intermédiaire : $\mathcal{V}_i = \pi(f(x_i))^2 \cdot \frac{b-a}{n}$, etc

Et le volume total :

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

[[10. Longueur d'un arc de courbe]]

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$



◇ Note : cette intégrale est souvent difficile à calculer.