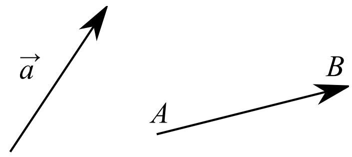
Vecteurs : cours

1. Approche géométrique

Définition : on appelle vecteur un objet mathématique caractérisé par :
- sa norme (longueur, grandeur, intensité)
- sa direction (angle)
- son sens (→ ou ←)
- (éventuellement son point d'application)



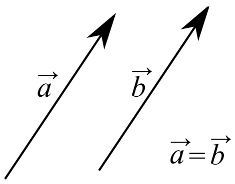
⋄ On parle aussi quelquefois de bipoints, de flèches, de segments orientés, de vecteurs libres et de vecteurs liés.

Notation :
- vecteurs : $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ (dans quelques livres : simplement écrits en gras)
- norme (longueur) : $\|\vec{a}\|$, $\|\overrightarrow{AB}\|$

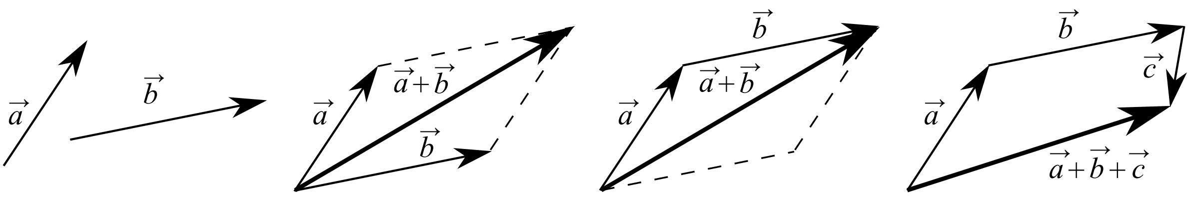
[Note : en physique, pour la norme, on écrit *sans la flèche* : $F = \|\vec{F}\|$]

Egalité des vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :
- même norme
- même direction
- même sens



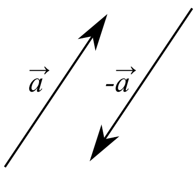
Addition des vecteurs



Méthode du parallélogramme
(surtout pour deux vecteurs)

Mise bout à bout
(pratique pour plusieurs vecteurs)

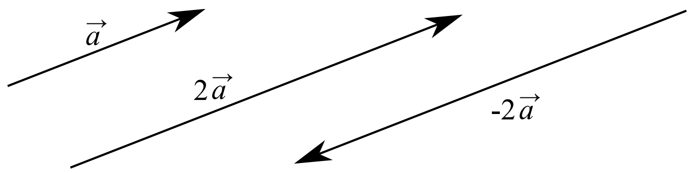
Opposé d'un vecteur :
- même norme
- même direction
- sens contraire



Soustraction : on additionne l'opposé

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Multiplication par un scalaire
[Note : *scalaire* = nombre par opposition à *vecteur*.]
[En physique :
- grandeurs scalaires : températures, coefficients,...
- grandeurs vectorielles : forces, vitesses,...]



$2\vec{a}$: 2 fois la norme, même direction, même sens
$-2\vec{a}$: 2 fois la norme, même direction, sens contraire

Remarque
L'addition des vecteurs est une opération interne à l'ensemble des vecteurs : on reste dans l'ensemble des vecteurs.
La multiplication des vecteurs est une opération externe : on utilise un élément externe (un nombre) pour opérer sur les vecteurs.

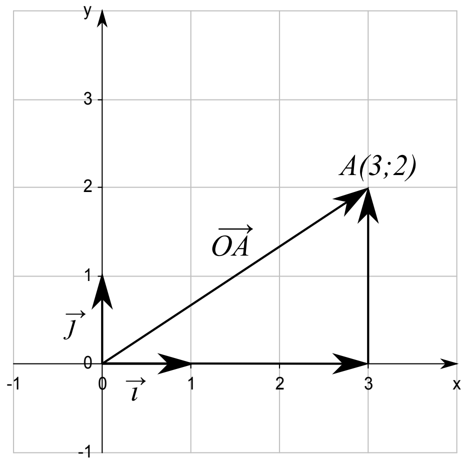
Propriétés de l'addition
Commutativité : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
Associativité : $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
Existence d'un élément neutre (le vecteur nul) : $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
[Vecteur nul ($\vec{0}$) : norme = 0, direction et sens non définis]
Existence des opposés : $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

Propriétés de la multiplication
Associativité mixte : $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})$
Elément neutre mixte (externe) : $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$
Distributivité mixte I : $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$
Distributivité mixte II : $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$

⋄ Remarque : ces propriétés qui paraissent assez habituelles, ont en fait une caractéristique non banale : elles transforment des opérations !
Dans l'associativité mixte, une multiplication *nombre fois nombre* est transformée en multiplication *nombre fois vecteur*.
Dans la distributivité mixte II, une addition de nombres donne une addition de vecteurs.

⋄ Un ensemble muni des opérations ci-dessus et ayant les propriétés ci-dessus est dit avoir une **structure algébrique d'espace vectoriel**.

2. Approche analytique



Coordonnées du point : $A(3;2)$
[x : abscisse; y : ordonnée; z : cote]
Composantes du vecteur : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sont identiques aux coordonnées du point A.

◇ Mathématiquement, on pourrait écrire les vecteurs horizontalement, mais on préfère les écrire verticalement pour une meilleure compatibilité avec les matrices.

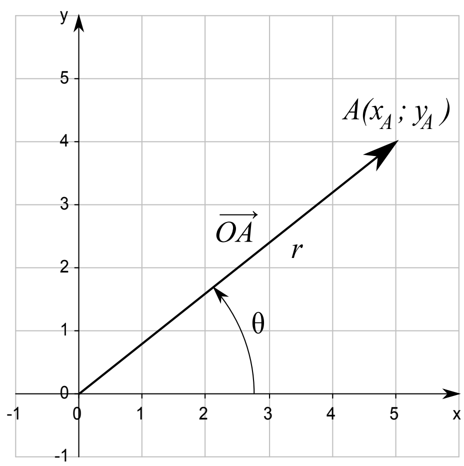
Vecteurs de base : $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple : $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ce qui justifie les opérations sur les composantes

ainsi que la relation $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = c$ **et** $b = d$

◇ Autres notations possibles (au lieu de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) : $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ou aussi $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$ (mais cette dernière plus souvent utilisée pour des bases non orthonormées).

Coordonnées et composantes polaires (norme et angle)



r : norme du vecteur
θ : angle par rapport à l'axe Ox

On a :
$\cos\theta = \frac{x_A}{r} \;\Rightarrow\; x_A = r\cos\theta$
$\sin\theta = \frac{y_A}{r} \;\Rightarrow\; y_A = r\sin\theta$
et :
$r = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2}$ (Pythagore)

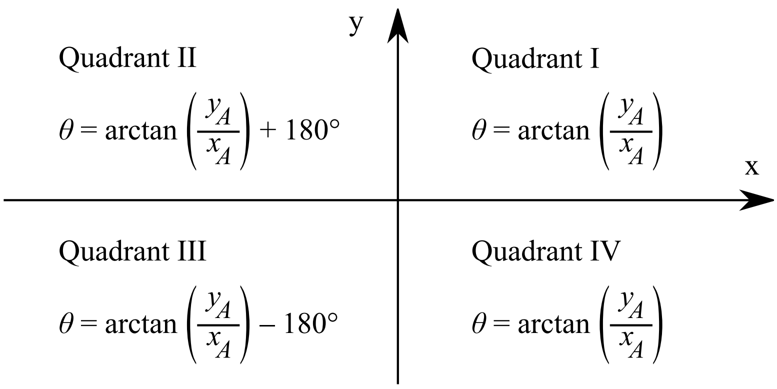
[En 3D : $r = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2 + (z_A)^2}$]

Formules de transformation

◇ Pour passer des coordonnées **polaires** aux coordonnées **cartésiennes**,
on utilise donc les formules :
$x_A = r\cos\theta$
$y_A = r\sin\theta$

◇ Et pour passer des coordonnées **cartésiennes** aux coordonnées **polaires** :
Calcul de r : $r = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2}$ (Pythagore)
Calcul de θ :
- si $x_A = 0$, on a $\theta = 90°$ ou $-90°$ (selon le signe de y_A)
- si le point est dans un des quadrants I ou IV (x_A positif), alors $\theta = \arctan(\frac{y_A}{x_A})$
- si le point est dans un des quadrants II ou III (x_A négatif), alors $\theta = \arctan(\frac{y_A}{x_A})+180°$

[Ou $\theta = \arctan(\frac{y_A}{x_A}) - 180°$ (ce que l'on préfère généralement pour le quadrant III)]



◇ Attention : ces formules de passage coordonnées cartésiennes ↔ coordonnées polaires ne sont valables que dans des systèmes orthonormés.

◇ Note : pas de notation en couple pour les coordonnées et les composantes polaires.

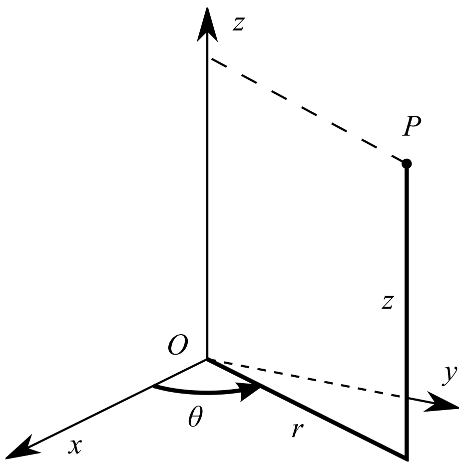
Vecteur unitaire (ou unité) : c'est un vecteur de norme égale à 1
Vecteur unitaire (ou unité) dans une direction donnée : il suffit de diviser le vecteur par sa norme : $\vec{a}$ donne $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

Exemple : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, d'où un vecteur unitaire dans la direction de $\vec{a}$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

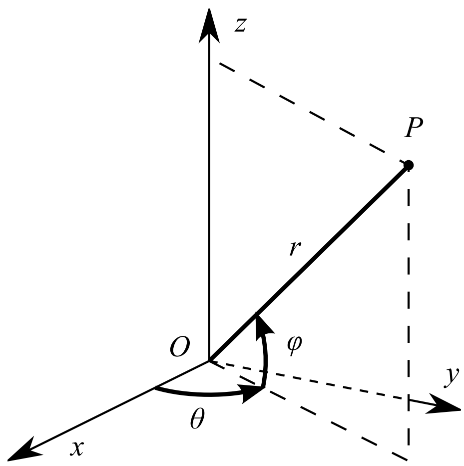
Vérification : $\|\vec{u}\| = \sqrt{(0.6)^2 + (0.8)^2} = \sqrt{0.36 + 0.64} = \sqrt{1} = 1$

Coordonnées et composantes en 3 dimensions

En 2 dimensions, on a le choix entre coordonnées cartésiennes (x et y) et coordonnées polaires (r et θ). (Idem pour les composantes.)
En 3 dimensions, il n'y a pas de coordonnées dites *polaires*, elles sont remplacées par deux généralisations : les coordonnées **cylindriques** (r, θ et z) et les coordonnées **sphériques** (r, θ et φ) (rayon, longitude et latitude). (Idem pour les composantes.)



Coordonnées cylindriques



Coordonnées sphériques

[Attention : r n'est pas le même dans les deux cas.]

3. Produit scalaire

[Note : produit **scalaire** : donne un scalaire (c'est-à-dire un nombre);
produit **vectoriel** (voir paragraphe 5) : donnera un vecteur.]

Etant donné deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$,
on définit leur **produit scalaire** par : $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-7) = 15 - 28 = -13$

◇ On peut montrer que cette définition est équivalente à la suivante :
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha$ où α est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$

◇ En général, on calcule le produit scalaire avec la première définition et on utilise la deuxième pour calculer l'angle.
Avec l'exemple précédent : $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \frac{-13}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+(-7)^2}} = \frac{-13}{5\sqrt{74}} \Rightarrow \alpha = 107.59°$

◇ **Attention :** ces définitions ne sont valables que dans des **systèmes orthonormés**.

◇ **Remarque :** ces définitions se généralisent sans problème en 3D (et même davantage).
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$
Et la méthode du cosinus ci-dessus est d'ailleurs la méthode la plus simple pour calculer l'**angle de deux vecteurs en 3D**.

Propriétés du produit scalaire

Propriétés standard (par rapport à l'addition et la multiplication) : voir les formulaires.

1a) $\vec{a} \perp \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

1b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \text{ ou } \vec{b} = \vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$

[Attention : ne pas mélanger 0 (nombre) et $\vec{0}$ (vecteur nul)]

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

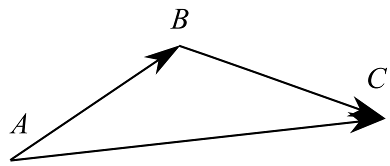
Deux applications :

1) projection d'un vecteur sur un autre (voir exercice 17);
2) en physique, le travail d'une force $W = F \cdot d \cdot \cos\alpha$ est en fait $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ ou même, plus généralement : $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

4. Approche théorique (géométrie sans représentation)

Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



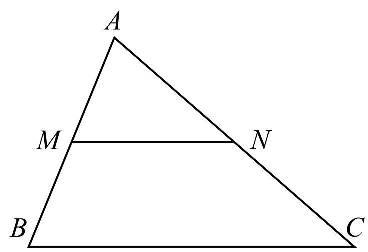
Généralisation :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

Trois exemples d'application

Application 1 : démonstration du théorème du segment moyen

Rappel du théorème du segment moyen

Dans un triangle ABC, si M et N sont aux milieux respectifs de AB et AC, alors MN est parallèle à BC et $MN = \frac{1}{2}BC$



Démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{(car } M \text{ et } N \text{ milieux (mais attention au sens : } \overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}\text{))} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \quad \text{(mise en évidence)} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{(relation de Chasles)}
\end{aligned}$$

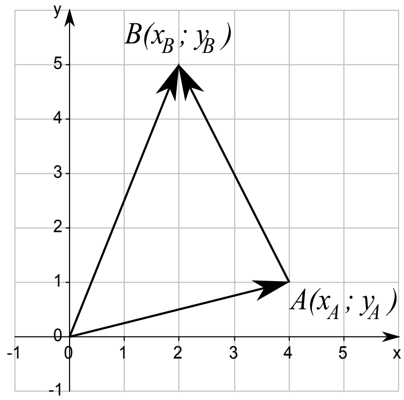
Ce qui signifie :

1) MN parallèle à BC (si deux vecteurs sont multiples l'un de l'autre, alors ils sont parallèles)

2) $\|\overrightarrow{MN}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|$ (longueurs des vecteurs)

Application 2 : composantes d'un vecteur donné par deux points :

Avec les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,
on a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.
Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$,
ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
ou encore $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
'extrémité moins origine',
'arrivée moins point de départ'



Exemple : avec les coordonnées de la figure : $A(4; 1)$ et $B(2; 5)$, on obtient :
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ qui correspond bien au vecteur de la figure qui *avance* de -2 et qui *monte* de 4.

Application 3 : coordonnées du milieu d'un segment
(formule en coordonnées et en composantes vectorielles)

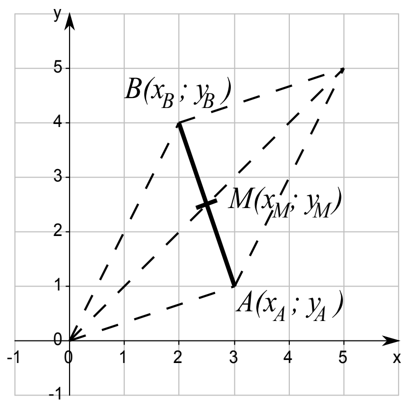
Avec les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} && \text{(relation de Chasles)}\\
&= \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} && (M \text{ au milieu})\\
&= \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) && \text{(par (2) ci-dessus)}\\
&= \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} && \text{(distributivité)}\\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

ou aussi :

$$= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

D'où, en coordonnées : $(x_M; y_M) = \left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$



Autre démonstration, plus jolie, car symétrique; mais peut-être plus difficile d'accès :
On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$
Mais aussi : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$
D'où en additionnant les deux équations :
$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (car $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$)

Exemple : avec les coordonnées de la figure : $A(3; 1)$ et $B(2; 4)$, on obtient bien le point M de coordonnées : $(x_M; y_M) = \left(\frac{3+2}{2}; \frac{1+4}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$

[[5.]] Combinaisons linéaires, dépendance et indépendance linéaires

On appelle **combinaison linéaire** d'un certain nombre de vecteurs une somme de multiples de ces vecteurs.
Exemple : $3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} - 7\vec{d}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et $\vec{d}$

Des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,... sont dits **linéairement dépendants** s'il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale à $\vec{0}$ sans que tous les coefficients soient nuls. Ils sont dits **linéairement indépendants** dans le cas contraire
Autrement dit, des vecteurs sont linéairement dépendants, si l'on peut écrire l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des autres. [Mais mathématiquement, on n'aime pas privilégier l'un des objets dans une définition, d'où la première définition qui n'oblige pas à choisir l'un des vecteurs.]

◇ En 2 dimensions : deux vecteurs parallèles sont linéairement dépendants (puisqu'on peut écrire $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ donc $\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0}$; deux vecteurs non parallèles sont toujours linérairement indépendants; trois vecteurs sont toujours linéairement dépendants

◇ En 3 dimensions : cas de deux vecteurs : comme ci-dessus; cas de trois vecteurs : s'ils sont coplanaires (= dans un même plan) alors lin. dép., s'il sont non coplanaires alors lin. indép.; cas de quatre vecteurs : toujours lin. dép.

Remarque : la **dimension** d'un espace vectoriel est en fait définie par le nombre maximal de vecteurs lin. indép. que l'on peut y trouver.

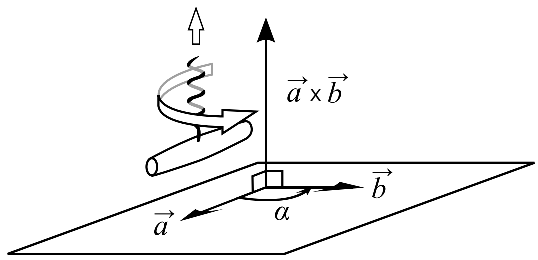
◇ Tout ensemble de vecteurs lin. indép. d'un espace vectoriel forme une **base** de cet espace : en effet on peut exprimer tous les autres vecteurs de cet espace à l'aide d'une combinaison linéaire des vecteurs de cet ensemble.

Si l'on considère deux ensembles de vecteurs lin. indép. d'un espace vectoriel, on a deux bases; et on peut alors s'intéresser aux formules qui à partir de l'expression d'un vecteur dans une des bases permettent de calculer les coefficients par rapport à l'autre base; ce sont les formules de changement de bases. Très importantes pour les changements de point de vue dans les représentations graphiques ou autres.
Exemple : si $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$ et aussi $= \alpha'\vec{\varepsilon}_1 + \beta'\vec{\varepsilon}_2 + \gamma'\vec{\varepsilon}_3$, on peut s'intéresser aux formules qui permettent de trouver α', β' et γ' à partir de α, β et γ.

6. Produit vectoriel

Rappel :
- produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ donne un nombre (*dot* product);
- produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ donne un vecteur (*cross* product).

Autre notation pour le produit vectoriel : $\vec{a} \wedge \vec{b}$



Définition de $\vec{a} \times \vec{b}$ par ses caractéristiques :

1) Norme : $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin \alpha|$

2) Direction : $\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$.
[Donc nécessite généralement la 3e dimension.]

3) Sens : par la règle du tire-bouchon.
(ou la règle des trois doigts de la main droite)

Propriétés

Propriétés standard : voir formulaires

1a) Si $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{b}$ alors $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (car $\sin \alpha = 0$)

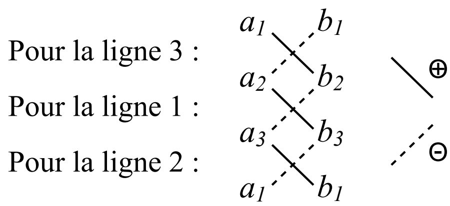
1b) Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, alors soit $\vec{a} = \vec{0}$, soit $\vec{b} = \vec{0}$, soit $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{b}$

2) Anti-commutativité : $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Définition par les composantes

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Moyen mnémotechnique : on réécrit en bas la ligne du haut puis on prend positivement le produit des termes en diagonales descendantes et négativement les diagonales montantes (en prenant chaque fois les termes des autres lignes que la ligne considérée).



Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Attention : ne pas utiliser le produit **vectoriel** pour calculer l'angle entre deux vecteurs si on ne sait pas s'il est aigu ou obtus (à cause du sinus qui ne permet pas de faire la distinction) : utiliser le produit **scalaire** qui donnera le cosinus.

MCN / 27.7.2016