Vecteurs : exercices

Note : le fichier Excel `04-Vecteurs-Exercices.xls` propose de résoudre de façon générale la plupart des exercices qui suivent (tout est prêt pour le dessin; manquent juste les calculs entre les données et les réponses).
Le fichier `04-Vecteurs-ExercicesAvecAide.xls` est identique au précédent avec quelques aides et un exemple.

1) Considérer les quatre vecteurs :
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
Et calculer $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a} - 5\vec{c}$, $4\vec{b} + 2\vec{d}$ et $17\vec{a} + 9\vec{b} + 14\vec{c}$.

2) Considérer les trois vecteurs :
$\vec{u} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ -2b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = -3 \cdot \begin{pmatrix} -b \\ 3a \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$ où a et b sont des nombres réels quelconques.
Et calculer $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $3\vec{u} - 5\vec{w}$ et $2\vec{v} + 3\vec{w}$.

3) Exprimer avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ de l'exercice 1.

4) Considérer les trois vecteurs :
$\vec{a} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$
Et calculer $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a} - \vec{c}$ et $2\vec{b} + 3\vec{c}$.

5) Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ de l'exercice 1, ainsi que l'angle qu'ils forment avec la partie positive de l'axe des x.

[6)] Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'exercice 4, ainsi que l'angle qu'ils forment avec la partie positive de l'axe des x.

7) Un vecteur de norme 7 fait un angle de $29°$ avec l'axe Ox; calculer ses composantes.

8) Déterminer les composantes d'un vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ Exprimer $\vec{a}$ en fonction de ce vecteur unitaire. Y a-t-il un autre vecteur unitaire possible ?

[[9)]] Soit $\vec{a}$ un vecteur, que peut-on dire de la norme du vecteur $3\vec{a}$ (démonstration) ?
Que peut-on dire de l'angle que le vecteur $3\vec{a}$ forme avec l'axe des x ?
Mêmes questions avec $-\vec{a}$.

10) Un vecteur de norme 13 fait un angle de 37° avec un vecteur de norme 6; calculer la norme du vecteur somme ainsi que l'angle qu'il forme avec le vecteur de norme 6.

11) On donne quatre vecteurs par leur norme et l'angle qu'ils forment avec l'axe Ox : $\|\vec{a}\| = 3$, $\theta_{\vec{a}} = 33°$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\theta_{\vec{b}} = 104°$, $\|\vec{c}\| = 4$, $\theta_{\vec{c}} = -123°$, $\|\vec{d}\| = 5$, $\theta_{\vec{d}} = 235°$. Calculer la norme de leur vecteur somme ainsi que l'angle qu'il forme avec l'axe Ox.

12) Etant donné le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, déterminer les composantes du vecteur que l'on obtient en le faisant tourner de $+27°$.

13) Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur, déterminer les composantes de son symétrique par rapport à l'axe des x, puis de son symétrique par rapport à l'axe des y.
Indication : commencer par un dessin avec le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14) Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur; déterminer les composantes du vecteur que l'on obtient en le faisant tourner de 90°; idem en le faisant tourner de $-90°$. Déterminer ensuite les composantes de tous les vecteurs qui sont perpendiculaires au vecteur $\vec{v}$.
Indication : comme pour l'exercice 13.

15) En reprenant les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'exercice 1, calculer les produits scalaires $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ et $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Calculer également l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

[16)] Même exercice avec les vecteurs de l'exercice 4.

[[17)]] En reprenant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de l'exercice 1, calculer le vecteur $\vec{a}'$ projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ et le vecteur $\vec{b}'$ projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

18) En reprenant les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'exercice 1, déterminer des coefficients x, y et z (non nuls) tels que l'on ait $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.

19) Déterminer m pour que les deux vecteurs suivants soient perpendiculaires :
$\vec{a} = 4m\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{b} = m\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$

20) Soit $A(-2;-5)$, $B(-3;1)$ et $C(2;7)$. Déterminer les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

21) Calculer l'aire du triangle ABC donné par les coordonnées de ses sommets :
$A(-3;4)$, $B(5;2)$ et $C(-6;-2)$.

22) Soit $A(1;1)$ et $C(5;3)$, les extrémités de la diagonale AC d'un carré $ABCD$. Déterminer les coordonnées des deux autres sommets.

23) Soit $A(-3;-2)$ et $C(4;1)$, les extrémités de la diagonale AC d'un losange $ABCD$. Déterminer les coordonnées des deux autres sommets, sachant que la longueur de la diagonale BD est le triple de l'autre.

24) Soit $A(1;3)$ et $B(4;7)$. Déterminer C et D de telle façon que $ABCD$ soit un rectangle de longueur 18. Des deux solutions possibles, prendre celle pour laquelle $x_C > x_B$.

25) Déterminer les coordonnées des sommets d'un pentagone régulier centré à l'origine (dimensions et position à choix).

26) Soit $A(3;1)$ et $B(1;6)$. Déterminer les coordonnées du point C, troisième sommet du triangle équilatéral ABC (deux solutions possibles).

[[27)]] Considérer les trois vecteurs :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants.
b) Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement indépendants.
c) Utiliser la partie (a) pour décomposer $\vec{c}$ dans la base formée par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
d) Démontrer la partie (a) graphiquement.

[[28)]] Considérer les quatre vecteurs :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement indépendants.
b) Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants.
c) Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ sont linéairement indépendants.

29) Soit $ABCD$ un tétraèdre, E le milieu de l'arête BC et F le milieu de l'arête AD. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

30) Considérer un cube $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ et $A'B'C'D'$ étant deux carrés reliés par les arêtes AA', BB', CC' et DD'). Soit M le milieu de BB', N le milieu de $C'D'$ et P tel que $\overrightarrow{DD'} = 3 \cdot \overrightarrow{DP}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'}$ ou de certains d'entre eux.

31) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque (pas nécessairement plan) et E, F, G, H les milieux de ses côtés. Démontrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

32) Démontrer que si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.

33) Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

34) Dans un triangle ABC, on prolonge la médiane AM d'une longueur égale à elle-même pour obtenir le point E et la médiane BN de la même façon pour obtenir le point F. Démontrer que C, E et F sont alignés.

35) Etant donné un triangle ABC et les points M et N tels que $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AM}$ et $2 \cdot \overrightarrow{CA} = 3 \cdot \overrightarrow{CN}$. Démontrer par les vecteurs que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$.

36) Placer 3 points A, B et C sur une droite de telle façon que l'on ait :
$5 \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{CB}$.

[[37)]] Démontrer que les médianes d'un triangle se coupent en un seul point.

[[38)]] Soit $ABCD$ un parallélogramme, E, le milieu de AB et F le milieu de CD. Démontrer que AF et EC coupent la diagonale BD en trois parties égales.

39) Déterminer les coordonnées des sommets d'un cube d'arête 1 centré à l'origine; idem pour un octaèdre régulier, puis un tétraèdre régulier (plusieurs solutions possibles).

40) Considérer les trois vecteurs :
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
a) Calculer les produits vectoriels : $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ et $\vec{b} \times \vec{c}$
b) Déterminer les composantes d'un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

41) Soit $A(41; 53; -5)$, $B(73; 29; 25)$ et $E(-2; -71; 25)$ trois points de l'espace.
Déterminer les coordonnées des autres sommets du cube $ABCDA'B'C'D'$, sachant que C est sur BE du même côté que E et que $z_{A'} > z_A$.

Solutions

1) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $3\vec{a}-5\vec{c} = \begin{pmatrix} 24 \\ 31 \end{pmatrix}$, $4\vec{b}+2\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$, $17\vec{a}+9\vec{b}+14\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2a \\ -4b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3b \\ -9a \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2a-6b \\ 18a-4b \end{pmatrix}$, $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ -9a-4b \end{pmatrix}$,
$\vec{u}-\vec{v} = \begin{pmatrix} 2a-3b \\ 9a-4b \end{pmatrix}$, $3\vec{u}-5\vec{w} = \begin{pmatrix} -4a+30b \\ -90a+8b \end{pmatrix}$, $2\vec{v}+3\vec{w} = \begin{pmatrix} 6a-12b \\ 36a-12b \end{pmatrix}$
3) $\vec{a} = 3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$, $\vec{b} = -\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$, $\vec{c} = -3\vec{\imath}-5\vec{\jmath}$, $\vec{d} = 2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$
4) $\vec{c} = -4\vec{\imath}-9\vec{\jmath}$, $\vec{a}+\vec{b} = 3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$, $\vec{a}-\vec{b} = -\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$, $3\vec{a}-\vec{c} = 7\vec{\imath}$, $2\vec{b}+3\vec{c} = -8\vec{\imath}-25\vec{\jmath}$

5) $\|\vec{a}\| = \sqrt{13} = 3.6056$, $\theta_{\vec{a}} = \arctan(\frac{2}{3}) = 33.6901°$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{17} = 4.1231$, $\theta_{\vec{b}} = \arctan(-4) + 180° = 104.0362°$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{34} = 5.8310$, $\theta_{\vec{c}} = \arctan(\frac{5}{3}) - 180° = -120.9638°$, $\|\vec{d}\| = \sqrt{5} = 2.2361$, $\theta_{\vec{d}} = \arctan(-\frac{1}{2}) = -26.5651°$

6) $\|\vec{a}\| = \sqrt{10} = 3.1623$, $\theta_{\vec{a}} = \arctan(-3) = -71.5651°$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{5} = 2.2361$, $\theta_{\vec{b}} = \arctan(\frac{1}{2}) = 26.5651°$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{97} = 9.8489$, $\theta_{\vec{c}} = \arctan(\frac{9}{4}) - 180° = -113.9625°$

7) $\begin{pmatrix} 6.1223 \\ 3.3937 \end{pmatrix}$ **8)** $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{34}} \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5145 \\ -0.8575 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \sqrt{34} \cdot \vec{u}$ $\vec{u}' = -\vec{u}$

9) $\|3\vec{a}\| = 3\|\vec{a}\|$, $\theta_{3\vec{a}} = \theta_{\vec{a}}$, $\|-\vec{a}\| = \|\vec{a}\|$, $\theta_{-\vec{a}} = 180° + \theta_{\vec{a}}$ **10)** 18.1545 et 25.5275°

11) $\vec{S} = \begin{pmatrix} -3.0143 \\ -3.8759 \end{pmatrix}$ d'où $\|\vec{s}\| = 4.9103$ et $\theta_{\vec{s}} = -127.8718°$

12) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} \sqrt{65}\cos 87.2551° \\ \sqrt{65}\sin 87.2551° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3861 \\ 8.0530 \end{pmatrix}$ **13)** $\vec{v}' = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$, $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$

14) $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} -kb \\ ka \end{pmatrix}$ (avec k quelconque)

15) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -19$ et $\vec{b} \cdot \vec{c} = -17$, angle$(\vec{a};\vec{b}) = \arccos \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} = 70.3462°$

16) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1$, $\vec{b}\cdot\vec{a} = -1$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = 23$ et $\vec{b}\cdot\vec{c} = -17$, angle$(\vec{a};\vec{b}) = \arccos \frac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = 98.1301°$

17) $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -5/17 \\ 20/17 \end{pmatrix}$, $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 15/13 \\ 10/13 \end{pmatrix}$

18) $x = \frac{17}{14}z$, $y = \frac{9}{14}z$ et z quelconque **19)** $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ **20)** $D(3;1)$ **21)** $\mathcal{A} = 27$

22) $B(4;0)$, $D(2;4)$ **23)** $B(5;-11)$, $D(-4;10)$ **24)** $C(18.4;-3.8)$ et $D(15.4;-7.8)$

25) Solution la plus simple : $(1;0)$, $(0.3090;\pm0.9511)$, $(-0.8090;\pm0.5878)$

26) $M(2;\frac{7}{2})$, $C(2 - \frac{5\sqrt{3}}{2};\frac{7}{2} - \sqrt{3})$ ou $C'(2 + \frac{5\sqrt{3}}{2};\frac{7}{2} + \sqrt{3})$ ou bien numériquement : $M(2;3.5)$, $C(6.3301;5.2321)$ ou $C'(-2.3301;1.7679)$

27a) On a $22\vec{a} + 39\vec{b} - 23\vec{c} = \vec{0}$ **27c)** $\vec{c} = \frac{22}{23}\vec{a} + \frac{39}{23}\vec{b}$

28b) On a $5\vec{a} + 8\vec{b} - 7\vec{c} = \vec{0}$

29) $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

30) $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AA'}$

39) plusieurs solutions sont possibles; parmi celles-ci :
cube : $(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2})$; octaèdre : $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};0;0)$, $(0;\pm\frac{\sqrt{2}}{2};0)$, $(0;0;\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$;
tétraèdre : $(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4})$, $(\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4})$
Rappel : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (il suffit chaque fois d'amplifier la fraction par $\sqrt{2}$)

40a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

40b) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ou aussi $\vec{u}' = -\vec{u}$

41) $A(41;53;-5)$, $B(73;29;25)$, $C(43;-11;25)$, $D(11;13;-5)$, $A'(17;71;35)$, $B'(49;47;65)$, $C'(19;7;65)$ et $D'(-13;31;35)$

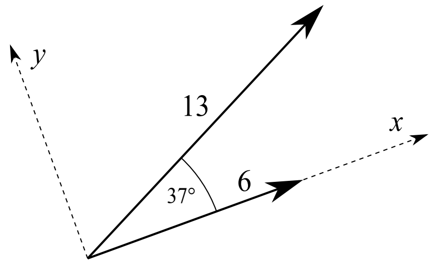
Quelques aides et indications

2) Calculer d'abord les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (vu qu'on les utilise dans plusieurs calculs).

4) Calculer d'abord le vecteur $\vec{c}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$

9) Prendre un vecteur quelconque $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et calculer.

10) Le plus simple : placer les vecteurs dans un système d'axes et calculer leurs composantes. Vu que l'on demande l'angle du vecteur somme par rapport au vecteur de norme 6, le plus judicieux est de placer celui-ci sur l'axe Ox



12) Calculer l'angle du vecteur par rapport à l'axe des x, ajouter les 27°...

17) Se rappeler que la longueur de la projection est donnée par : $\|\vec{a}'\| = \|\vec{a}\| \cos \alpha$

18) Résoudre le système d'équation que l'on obtient en développant :
$x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

19) Pour que 2 vecteurs soient perpendiculaires, il faut que leur prod. scalaire soit nul.

20) Plusieurs méthodes :
I) Par les composantes : écrire une égalité vectorielle $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ en utilisant des coordonnées indéterminées pour $D(x_D; y_D)$
II) Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \cdots$

21) Plusieurs méthodes :
I) Calculer les longueurs des côtés et utiliser la formule de Héron.
II) Calculer deux côtés et l'angle compris entre eux, puis : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$
Note : il existe aussi des formules toutes faites.

22) à 25) Penser à la manière dont on résoudrait le problème géométriquement (règle, équerre, compas).

22) Coordonnée du milieu M de AC. Faire tourner le vecteur $\overrightarrow{MA}$ de 90°, on obtient le vecteur $\overrightarrow{MB}$, d'où les coordonnées du point B, etc...

23) Méthode analogue à celle de l'exercice 22.

24) Considérer le vecteur $\overrightarrow{BA}$, le tourner de ±90° pour le rendre parallèle à BC en choisissant le sens qui respecte la condition $x_C > x_B$; amplifier le vecteur pour qu'il ait la longueur demandée, etc....

25) Le plus simple : prendre un cercle de rayon 1 et le premier sommet du pentagone en $(1; 0)$, puis passer en coordonnées polaires...

26) Deux méthodes possibles :
I) méthode analogue à celle des exercices 22 et 23 (carré et losange par une diagonale) : prendre une perpendiculaire par le milieu de AB et y reporter une longueur égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois celle du côté.

II) faire tourner le côté AB de $\pm 60°$ autour de A ou de B (comme dans l'exercice 12).
Note : la méthode (II) est plus rapide, mais elle ne donne pas les valeurs algébriques (avec des $\sqrt{3}$) des solutions : uniquement leurs valeurs numériques.

27a) Il suffit de trouver une solution non nulle pour le système $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$.

27b) Il suffit de montrer que le système $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ n'admet que la solution nulle.

27c) Il suffit d'expliciter $\vec{c}$ à partir de la combinaison linéaire trouvée en (a).

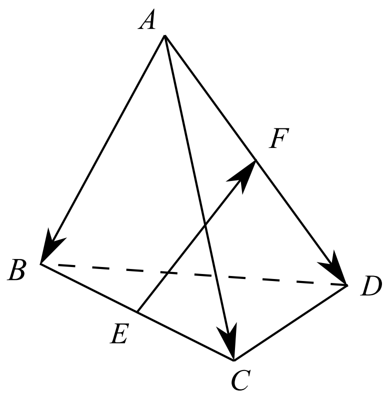
27d) Utiliser $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme base pour former un système d'axes (donc un *quadrillage* en parallélogrammes) et y décomposer le vecteur $\vec{c}$.

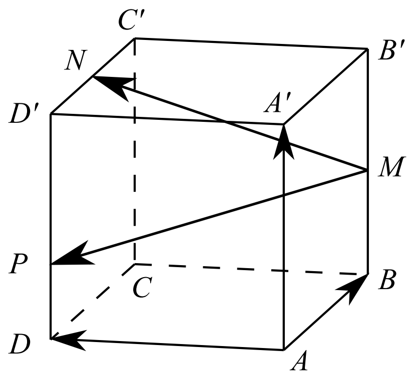
28a) Il suffit de montrer que le système $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ n'admet que la solution nulle.

28a) Il suffit de montrer que le système $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ admet au moins une solution non nulle.

28c) Il suffit de montrer que le système $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{d}=\vec{0}$ n'admet que la solution nulle.

29) [Figure de gauche] Utiliser la relation de Chasles pour aller de E à F en passant par divers sommets.



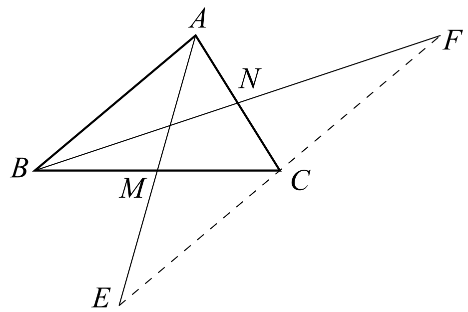


30) [Figure de droite] Utiliser la relation de Chasles pour aller de M à N (respectivement P) en passant par divers sommets.

31) Démontrer que $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ (attention au sens). Utiliser pour cela la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{EF}$ en passant par le sommet le plus proche. Faire de même avec $\overrightarrow{HG}$.

32) Démontrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (attention au sens) en passant par le point d'intersection des diagonales.

33) Plus difficile que le précédent : il faut d'abord considérer les diagonales et exprimer vectoriellement le fait que le point I est à leur intersection et que ce n'est pas n'importe quel point à l'intérieur du quadrilatère. Il faut ensuite utiliser les propriétés vectorielles des parallélogrammes pour montrer que I est les deux fois au milieu. Pour cela, il est judicieux d'utiliser $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ comme base et d'y décomposer les autres vecteurs du problème.



34) Pour démontrer que trois points C, E et F sont alignés, il suffit de trouver une relation vectorielle du type $\overrightarrow{CE} = x \cdot \overrightarrow{CF}$. Mais il est bien souvent plus simple de deviner la valeur du coefficient x et d'agir en conséquence. C'est le cas ici, où si l'on fait un dessin correct, on voit facilement que C est au milieu de EF. Il suffit alors d'essayer de démontrer que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$; ce qui est très simple si l'on remarque que ces deux vecteurs sont égaux à un autre de la figure.

35) Faire une figure correcte et s'inspirer de la démonstration du théorème du segment moyen (voir cours). Note : il faut en principe démontrer (et pas seulement constater sur le dessin) que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (donc que le point N est au tiers de la longueur).

36) Transformer la relation de départ en une relation de la forme $\overrightarrow{\underline{X}Y} = k \cdot \overrightarrow{\underline{X}Z}$

37) Difficile. S'inspirer de l'exercice 33. Avec A', B' et C' les points d'arrivée des médianes sur les côtés opposés aux sommets et I le point d'intersection de DEUX médianes, poser $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BI} = y\overrightarrow{BB'}$ En prenant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ comme base de vecteurs, transformer la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ pour obtenir une combinaison linéraire entre les deux vecteurs de base ce qui donnera un système d'équations dont la solution sera $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$. On dit ensuite que l'on pourrait faire la même chose avec deux AUTRES médianes et que l'on trouverais aussi $\frac{2}{3}$, ce qui démontre donc que le point I est sur les TROIS médianes.

38) Difficile, mais un grand classique des exercices sur les vecteurs. S'inspirer de l'exercice 33. Prendre I à l'intersection de AF et de BD. Ecrire les relations : $\overrightarrow{AI} = x \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DI} = y \cdot \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$; etc.

39) Pour les trois solides, commencer par prendre des points à coordonnées pratiques (-1, 0, 1), puis calculer la longueur d'une arête et normer les vecteurs (= rendre leur norme égale à 1).

Pour le cube : généraliser en 3D le cas du carré parallèle aux axes en 2D.

Pour l'octaèdre : généraliser en 3D le cas du carré à 45° par rapport aux axes en 2D.

Pour le tétraèdre : ne pas le considérer comme une pyramide régulière à base triangulaire : il serait très difficile de mettre son centre en $(0, 0, 0)$. Utiliser une propriété du cube : les diagonales des faces d'un cube forment deux tétraèdres entrecroisés. [La figure s'appelle *Stella octangula*.]

◇ Sur `\Cours\Maths-MCN` :

1) `\zDivers\Excel\RotationsPolyedres.xls`

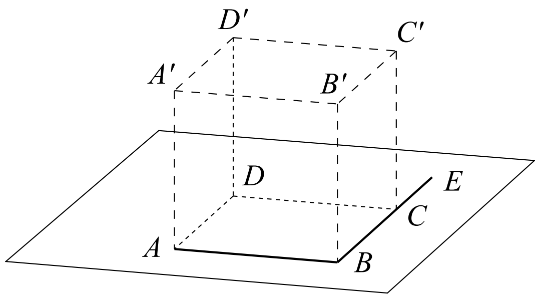
2) `\zDivers\ProgrammesVB\PolyedresSp.zip`

3) `\zDivers\ProcessingJava\StellaOctangula.jar`

40b) Se rappeler que le produit vectoriel donne un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs de départ, c'est justement ce que l'on demande ici. Il suffit donc de calculer $\vec{b} \times \vec{c}$ puis de le normer (c'est-à-dire de rendre sa norme égale à 1).

41) Les étapes :

1) Vérifier que l'on a bien un angle droit en B (par produit scalaire égal à zéro). [Si l'angle $\hat{B}$ n'est pas droit, le problème est faux; mais on aurait aussi pu donner simplement trois points non alignés A, B et F pour déterminer le plan du carré $ABCD$ et demander de construire un angle droit en B (beaucoup plus difficile).]



2) Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$ et la reporter sur $\overrightarrow{BE}$ pour mettre en place le point C.
3) Coordonnées de D en complétant le carré (propriété du parallélogramme).
4) Construire un vecteur normal (= perpendiculaire) au plan du carré $ABCD$ (par produit vectoriel; par exemple $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BE}$ pour reprendre des valeurs de départ).
5) Ajuster la longueur de ce vecteur à la longueur des arêtes du cube ($\|\overrightarrow{AB}\|$).
6) Ajouter ou soustraire ce nouveau vecteur aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$,... pour obtenir les quatre derniers sommets du cube.

Quelques corrigés

8a) On calcule la norme du vecteur : $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$. D'où le vecteur unitaire $\vec{u}$ obtenu en divisant $\vec{a}$ par sa norme : $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{34} \\ -5/\sqrt{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5145 \\ -0.8575 \end{pmatrix}$

8b) Vu que l'on a : $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, on en tire $\vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \vec{u} = \sqrt{34} \cdot \vec{u}$

8c) Autre vecteur unitaire possible : celui dans l'autre sens : $-\vec{u}$

9) Avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a : $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\|3\vec{a}\| = \sqrt{(3x)^2 + (3y)^2} = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$
$= \sqrt{9(x^2 + y^2)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 3\|\vec{a}\|$
Pour l'angle, on a : $\theta_{3\vec{a}} = \arctan(\frac{3y}{3x}) = \arctan(\frac{y}{x}) = \theta_{\vec{a}}$ (plus éventuellement 180° dans les deux cas)
Pour $-\vec{a}$, on a : $\|-\vec{a}\| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{a}\|$
Et pour l'angle : $\theta_{-\vec{a}} = \arctan(\frac{-y}{-x}) = \arctan(\frac{y}{x})$, ce qui semble donner la même valeur que pour $\theta_{\vec{a}}$, mais en fait, dans un des deux cas on aura +180° et dans l'autre pas; ce qui fait que finalement $\theta_{-\vec{a}} = 180° + \theta_{\vec{a}}$

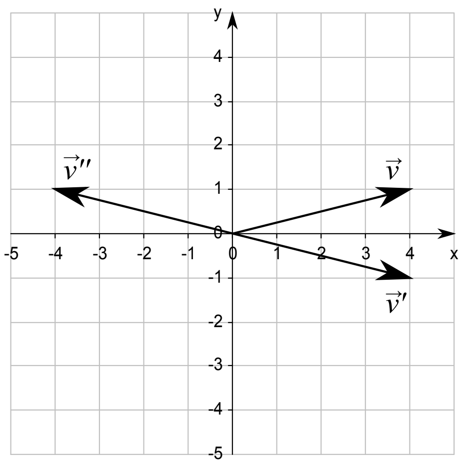
10) En plaçant le vecteur de norme 6 sur l'axe Ox d'un système orthonormé et l'autre vecteur avec un angle de 37° par rapport à ce même axe des x, on obtient en composantes : $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13\cos 37° \\ 13\sin 37° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.3823 \\ 7.8236 \end{pmatrix}$; d'où la norme et l'angle (par rapport à l'axe Ox donc par rapport au vecteur de norme 6). [Voir dessin dans la partie *Aides*]

11) $\begin{pmatrix} 3\cos 33° \\ 3\sin 33° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos 104° \\ 2\sin 104° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cos(-123°) \\ 4\sin(-123°) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\cos 235° \\ 5\sin 235° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.0143 \\ -3.8759 \end{pmatrix}$

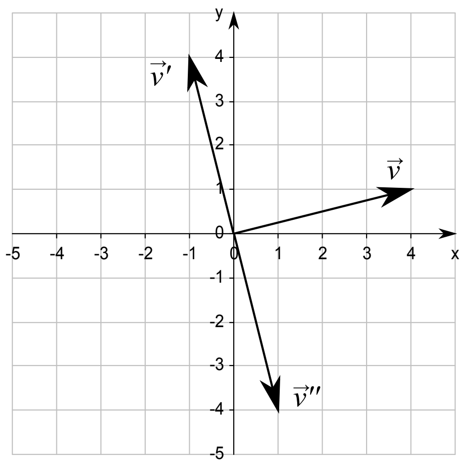
12) Norme du vecteur : $\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$
Angle du vecteur par rapport à l'axe des x : $\theta_{\vec{a}} = \arctan(\frac{7}{4}) = 60.2551°$
Après rotation, la norme ne change pas : $\|\vec{a}'\| = \|\vec{a}\| = \sqrt{65}$
Et le nouvel angle vaut : $\theta_{\vec{a}'} = 60.2551° + 27° = 87.2551°$
Et ainsi : $\vec{a}' = \begin{pmatrix} \sqrt{65}\cos 87.2551° \\ \sqrt{65}\sin 87.2551° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3861 \\ 8.0530 \end{pmatrix}$

13) [Figure de gauche] Avec le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$: son symétrique par rapport à l'axe des x : $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; son symétrique par rapport à l'axe des y : $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ D'où l'analogue pour des vecteurs quelconques.

Exercice 13 :



Exercice 14 :



14) [Figure de droite] Avec le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$: tourné de 90° : $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, tourné de $-90°$: $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ D'où l'analogue pour des vecteurs quelconques.
Si on cherche tous les vecteurs perpendiculaires à un vecteur donné, ce sont tous les multiples des précédents, que l'on peut écrire sous la forme : $\vec{p} = \begin{pmatrix} -kb \\ ka \end{pmatrix}$ (avec k quelconque). Note : k peut être négatif, ce qui fait que l'on prend tous les cas en une seule formule (ci-dessus, on a effectivement $\vec{v}'' = -\vec{v}'$).

15) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = -3 + 8 = 5$, etc
angle$(\vec{a}; \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \arccos \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} = 70.3462°$

17) $\vec{a}' = \|\vec{a}\| \cos\alpha \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \|\vec{a}\| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} = \frac{5}{17} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix}$, $\vec{b}' = \cdots = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} = \frac{5}{13} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{15}{13} \\ \frac{10}{13} \end{pmatrix}$

18) On cherche x, y et z tels que l'on ait $x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, d'où le système sous-déterminé : $\begin{cases}3x-y-3z=0\\2x+4y-5z=0\end{cases}$ qui donne $x=\frac{17}{14}z$ et $y=\frac{9}{14}z$

19) On voit peut-être mieux les choses en écrivant d'abord les vecteurs sous la forme de composantes : $\vec{a}=4m\vec{\imath}+\vec{\jmath}=\begin{pmatrix}4m\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=m\vec{\imath}-5\vec{\jmath}=\begin{pmatrix}m\\-5\end{pmatrix}$

Ensuite : pour que deux vecteurs soient perpendiculaires, il faut que leur produit scalaire soit nul. On cherche donc m tel que $0=\vec{a}\cdot\vec{b}=4m\cdot m+1\cdot(-5)=4m^2-5\Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Note : si on désire une perpendicularité stricte, il faut encore vérifier que pour chacune de ces valeurs de m les vecteurs ne peuvent être nuls; ce qui est le cas vu que chacun d'eux a une composante non nulle indépendante de m.

20) Plusieurs méthodes :

I) Parallélogramme $\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}x_D-2\\y_D-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-(-3)\\-5-1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_D=-2+3+2=3\\y_D=-5-1+7=1\end{cases}$

II) Par Chasles : $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}\overset{(*)}{=}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\cdots=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$(*)$ car *parallélogramme*

On remarquera que les deux méthodes conduisent bien évidemment aux mêmes calculs numériques.

21) Résultats intermédiaires possibles selon la méthode utilisée : $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{68}=8.2462$, $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{45}=6.7082$, $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{137}=11.7047$, $\hat{A}=102.53°$, $\hat{B}=34.02°$, $\hat{C}=43.45°$, demi périmètre : $p=13.3296$

22) Coordonnées du milieu M de AC : $x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_C)=3$ et $y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_C)=2$; d'où $M(3;2)$. On a donc le vecteur $\overrightarrow{MA}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, que l'on fait tourner de 90° pour obtenir $\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, d'où les coordonnées du point B par Chasles : $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}$.

Pour le point D, on refait la dernière étape en utilisant le fait que $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$

23) Coordonnées du milieu M de AC : $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Puis $\overrightarrow{MC}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MD}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\\frac{21}{2}\end{pmatrix}$

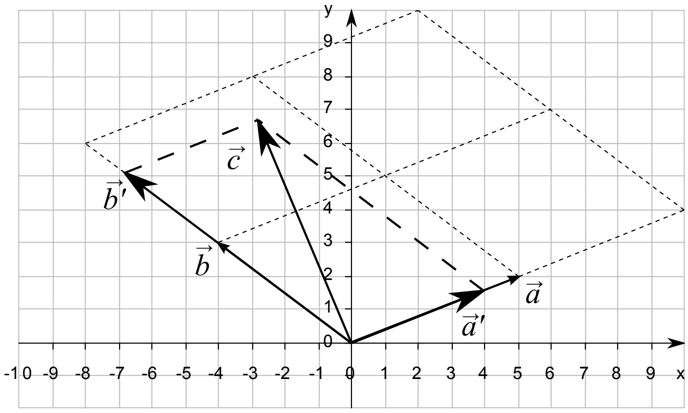
24) $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$. En le tournant de 90°, on obtient $\overrightarrow{BC'}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. On a $\|\overrightarrow{BC'}\|=5$, mais on désire un vecteur de longueur 18; il faut donc multiplier $\overrightarrow{BC'}$ par $\frac{18}{5}=3.6$

D'où $\overrightarrow{BC}=3.6\cdot\overrightarrow{BC'}=\begin{pmatrix}14.4\\-10.8\end{pmatrix}$, puis les points C et D par la relation de Chasles.

25) En prenant un cercle de rayon 1 et le premier sommet du pentagone en $(1;0)$, les coordonnées polaires des autres sommets sont $r=1$ et $\theta=k\cdot\frac{360°}{5}=k\cdot72°$ (avec $k=1,2,3$ et 4). Ou plus simplement encore : prendre $k=\pm1$ ou ±2, autrement dit des angles de $\pm72°$ ou $\pm144°$.

27a) Solution générale du système $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$:
$x = -\frac{22z}{23}, y = -\frac{39z}{23}$ et $z =$ quelconque;
d'où en particulier une solution non nulle : $x = 22$, $y = 39$ et $z = -23$ (par exemple)
et la combinaison linéaire : $22\vec{a} + 39\vec{b} - 23\vec{c} = \vec{0}$.

27d) Utiliser $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme base pour former un système d'axes (donc un *quadrillage* en parallélogrammes) et y décomposer le vecteur $\vec{c}$.



29) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

30) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DD'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AA'}$

31) En prenant E au milieu de AB et les autres points en suivant, la relation de Chasles permet d'écrire : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \cdots = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. En passant par D, on montre de même que $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi on a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, ce qui signifie que ces deux côtés sont égaux et parallèles, ce qui donne bien un parallélogramme.

Remarque : pour montrer que deux objets sont égaux, il est quelquefois plus facile (comme ici) de montrer qu'ils sont en fait égaux à un troisième.

32) Soit A, B, C et D les sommets du quadrilatère et I l'intersection des diagonales. Vu que ces diagonales se coupent en leurs milieux, on a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$, ainsi que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$ La relation de Chasles permet donc d'écrire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \overset{(*)}{=} \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DI} \overset{(**)}{=} \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DC}$. Donc égaux et parallèles $\Rightarrow$ parallélogramme.

$(*)$: on remplace respectivement les deux termes ! ($\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DI}$)

$(**)$: on permute les deux termes !

33) Soit A, B, C et D les sommets du parallélogramme et I le point à l'intersection des diagonales. Pour exprimer vectoriellement le fait que I est à l'intersection des diagonales, on ne peut pas simplement dire $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AC}$; c'est en effet toujours vrai,

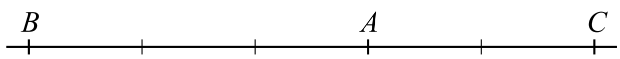
c'est la relation de Chasles. On ne peut pas non plus dire $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$; ce serait utiliser ce qui est justement à démontrer.
Il faut écrire $\overrightarrow{AI} = x \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI} = y \cdot \overrightarrow{BD}$, autrement dit que I est à la fois sur AC et sur BD. Et il s'agit ensuite de montrer que $x = \frac{1}{2}$ et y également.
On peut maintenant écrire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = x\overrightarrow{AC} - y\overrightarrow{BD}$ (1).
Décomposons $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ en utilisant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ comme base :
on obtient $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (2).
Et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \stackrel{(*)}{=} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ (3) [c'est ici $(*)$ que l'on utilise le fait que l'on a un parallélogramme]
En remplaçant les relations (2) et (3) dans la relation (1), on obtient :
$\overrightarrow{AB} = x(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) - y(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB} - yAD$
On met alors de l'ordre dans cette relation en passant tous les termes $\overrightarrow{AB}$ d'un côté et tous les $\overrightarrow{AD}$ de l'autre :
$\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AD} - y\overrightarrow{AD} \Rightarrow (1 - x - y)\overrightarrow{AB} = (x - y)\overrightarrow{AD}$ on a alors obtenu une relation qui dit qu'un multiple de $\overrightarrow{AB}$ est égal à un multiple de $\overrightarrow{AD}$ ce qui n'est pas possible (vectoriellement) si les vecteurs ne sont pas parallèles. Sauf si les deux coefficients sont nuls : $0 \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \cdot \overrightarrow{AD}$. Ce qui donne le système d'équations $\begin{cases} 1 - x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
dont la solution est $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$

En résumé : deux points importants à retenir :
1) la façon d'exprimer vectoriellement qu'un point est sur un segment, respectivement à l'intersection de deux segments;
2) l'idée de décomposer tous les vecteurs du problème dans une base faite de deux vecteurs bien choisis, ce qui permet ensuite d'utiliser le fait qu'ils ne sont pas parallèles.

34) En s'inspirant de l'aide ci-dessus et de la démonstration du théorème du segment moyen (voir cours) : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ME} \stackrel{(*)}{=} \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \stackrel{(**)}{=} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$; de même : $\overrightarrow{FC} = \cdots = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FC}$ et C est donc au milieu de EF, donc aligné avec eux.
$(*)$: on remplace respectivement les deux termes !
$(**)$: on permute les deux termes !

35) On a $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CN} \Rightarrow 2\overrightarrow{CA} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}) \Rightarrow 2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AN} \Rightarrow -\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Les points M et N sont donc chaque fois au tiers de la longueur depuis A. On termine comme pour la démonstration du théorème du segment moyen (voir cours).

36) $5\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CB} \Rightarrow 5\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ ce qui permet de faire le dessin.



38) Soit I le point à l'intersection de AF et de DB
On a $\overrightarrow{AI} = x \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DI} = y \cdot \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$
Ainsi $x \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + y \cdot \overrightarrow{DB}$
D'où $x \cdot (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} + y \cdot (-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$
Et ainsi $(x - 1 + y) \cdot \overrightarrow{AD} = (-\frac{1}{2}x + y) \cdot \overrightarrow{AB}$
D'où $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$

40a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-4) - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 3 - (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ -8 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 0 - (-3) \\ 6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 0 - 4 \\ -8 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

40b) Le vecteur $\vec{b} \times \vec{c}$ est perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$; il suffit de le normer : $\|\vec{b} \times \vec{c}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{42}$, etc...

41) (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 32 \\ -24 \\ 30 \end{pmatrix}$, sa norme : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{32^2 + (-24)^2 + 30^2} = 50$

$\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -75 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$, sa norme : $\|\overrightarrow{BE}\| = \cdots = 125$

(b) Vérification de l'angle droit en B (par produit scalaire égal à 0) :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = 32 \cdot (-75) + (-24) \cdot (-100) + 30 \cdot 0 = 0$

(c) Calcul des coordonnées du point C : on veut $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ (c'est un carré) et C sur BE (entre B et E); on a donc $\overrightarrow{BC} = x \cdot \overrightarrow{BE}$ (avec $x = \frac{50}{125}$) et ainsi $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où le point C par : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$
Et le point D par : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

(d) Calcul du vecteur $\overrightarrow{BB'}$ (qui est égal à $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{DD'}$) par produit scalaire de deux vecteurs non parallèles du plan $ABCD$:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 3000 \\ -2250 \\ -5000 \end{pmatrix}$ et sa norme : $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = 6250$

On ajuste la longueur : $\overrightarrow{BB'} = -\frac{50}{6250} \begin{pmatrix} 3000 \\ -2250 \\ -5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$

Note : le signe *moins* pour avoir $z_{A'} > z_A$ (comme demandé).

(e) Calcul des coordonnées des points A', B', C' et D' de façon habituelle :
$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'}$,...