Fonctions et graphiques : cours

1. Notion de fonction

Définition : une **fonction** est un objet mathématique qui à chaque élément d'un ensemble de départ, fait correspondre un élément (et un seul) d'un ensemble d'arrivée (les deux ensembles pouvant être identiques ou différents).
Lorsque les ensembles en question comportent un nombre réduit d'éléments, il est possible de donner la liste des couples (élément; image) ou de tracer un diagramme avec des flèches allant des éléments à leur image.
Lorsque les ensembles comportent beaucoup ou un nombre infini d'éléments (par exemple l'ensemble des nombres réels), on donne généralement la fonction par une formule ou une règle de calcul exprimée algébriquement.

Exemple : fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3 - 9x + 1$; on a alors (par exemple) $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1 + 1 = -7$, $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 1 = -9$, $f(3) = 1$ ce qui signifie que l'image de 1 est -7, celle de 2 est -9,...

Remarque 1 : il est important de noter que dans l'exemple ci-dessus, la fonction est f et non $f(x)$. La variable x est en fait une variable muette qui ne sert qu'à expliquer comment f agit. On pourrait tout aussi bien écrire que f est définie par $f(t) = t^3 - 9t + 1$ ou par $f(u) = u^3 - 9u + 1$: la fonction serait exactement la même.
Il faut toutefois remarquer que dans la pratique on parle plutôt de la *fonction* $x^3 - 9x + 1$ que de la fonction f, définie par...

Remarque 2 : les mathématiques ne se contentent pas de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut passer à des dimensions supérieures, par exemple :
• de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: carte de géographie : à chaque point du plan, on fait correspondre une altitude (représentation possible dans Excel et dans OpenOffice);
• de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: à chaque point d'une salle (ou d'un modèle d'avion en soufflerie), on fait correspondre la température;
• de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: à chaque point de l'espace, on fait correspondre le champ gravifique ou le champ électromagnétique;
• de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$: à chaque instant t, on fait correspondre la position d'un objet (trajectoires, balistique, courbes paramétrées);
• de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: transformations du plan complexe.
On peut même imaginer des fonctions agissant sur d'autres choses que des nombres, par exemple sur des polynômes ou même des fonctions agissant sur d'autres fonctions.

2. Graphe d'une fonction

Lorsqu'une fonction part d'un ensemble de nombres pour aboutir également dans un ensemble de nombres (souvent les deux fois $\mathbb{R}$), il est en général possible de tracer le graphe (ou graphique) de cette fonction : on considère tous les couples $(x; f(x))$ constitués d'un élément et de son image et on les représente dans un système de coordonnées.

Note : dans le langage courant, on ne fait pas toujours une distinction très nette entre une fonction et son graphe.
On parle, par exemple, souvent du graphe de la fonction $y = f(x)$, alors que mathématiquement le graphe est constitué des points $(x; y)$ tels que $y = f(x)$ avec f, fonction définie par $f(x) = \dots$
En principe, une fonction est un objet abstrait : une correspondance entre éléments de deux ensembles, alors qu'un graphique est un ensemble de points.

◇ Sur `\Cours\Maths-MCN\MachinesACalculer\...` :
▷ `Exemples-TI-Nspire.pdf, txt, Fonctions.tns` et `Parametriques.tns` : exemples de fonctions à tracer avec la TI-Nspire (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et paramétriques)
▷ `Fonctions.xls` : généralités sur le tracé de fonctions dans Excel (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
▷ `Surfaces.xls` : graphes de fonctions à deux variables (surfaces) dans Excel (fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$)
◇ Sur `\Cours\Maths-MCN\zDivers\CanvasHTML5` : des exemples en 'canvas' (HTML)

3. Autres graphiques : graphes d'équations à deux variables

Il est possible de représenter le graphe d'une équation à deux variables (par exemple $x^2 + y^2 = 25$) : on représente simplement l'ensemble des couples de points $(x; y)$ qui satisfont cette équation. On peut ainsi obtenir des dessins de courbes qui ne sont pas le graphe d'une fonction.
Exemple avec : $x^2 + y^2 = 25$ (équation du cercle de rayon 5 centré à l'origine); par l'algèbre, on obtient $y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ ce qui correspond en fait à deux fonctions $f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ et $f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$.

Mais bien souvent, il n'est pas possible de résoudre l'équation de façon aussi simple par rapport à l'une de ses variables. Ce mode de représentation graphique n'est d'ailleurs pas souvent disponible dans les logiciels et machines à calculer (rechercher un mode *implicite*). Une méthode quelquefois possible est de passer par des équations paramétriques (voir paragraphe 4 ci-dessous).

◇ Sur `\Cours\Maths-MCN\Techniciens` :
◇ `21-SupplEqCercles.pdf` : supplément : équations des cercles
◇ `22-SupplEqEtGraphiques.pdf` : supplément : équations et graphiques (équations, coordonnées polaires, équations paramétriques, courbes de Bézier)

4. Autres graphiques : graphe d'équations (fonctions) paramétriques

Une méthode très générale pour décrire mathématiquement des courbes : les équations paramétriques : elles sont semblables aux équations que l'on utilise en physique pour décrire le mouvement d'un mobile : une fonction x dépendant du temps et une fonction y dépendant également du temps.
Par exemple :
$\begin{cases} x(t) = 5\cos t \\ y(t) = 5\sin t \end{cases}$ on considère différentes valeurs de t comprises dans un intervalle particulier et on représente les points $(x(t); y(t))$, donc ici $(5\cos t; 5\sin t)$ (ce qui donne de nouveau le cercle de rayon 5 centré à l'origine).

◇ Sur `\Cours\Maths-MCN` : les fichiers exemples déjà cités à la fin des deux paragraphes précédents.

5. Notion de domaine de définition

On appelle domaine de définition (ou ensemble de définition) d'une fonction, l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul de la fonction est possible.
On peut aussi parler du domaine de définition d'une expression algébrique, d'une équation ou d'une inéquation; dans ces deux derniers cas, on considère l'ensemble des valeurs admissibles à la fois pour les deux membres de l'équation ou de l'inéquation.

Exemples :
1) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ $\quad \mathrm{D}_{\text{déf}} =$

2) $f(x) = \sqrt{x-3}$ $\quad \mathrm{D}_{\text{déf}} =$

3) $f(x) = \ln(x-3)$ $\quad \mathrm{D}_{\text{déf}} =$

4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ $\quad \mathrm{D}_{\text{déf}} =$

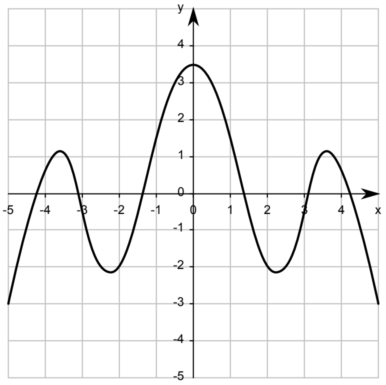
◇ Note : corrigé de ces exemples dans `09-zExemplesCorriges.pdf`

6. Propriétés des fonctions

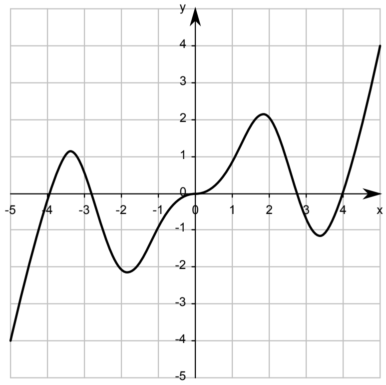
Parité des fonctions, symétrie du graphe

Une fonction f est dite **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x.
Une fonction f est dite **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x.
◇ La plupart des fonctions sont ni paires ni impaires.
◇ Si une fonction est paire, alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des y.
◇ Si une fonction est impaire, alors son graphe est symétrique par rapport à l'origine $(0; 0)$.
◇ (1) Le graphe d'une fonction ne peut pas être symétrique par rapport à l'axe des x; pourquoi ? (2) Une seule fonction est à la fois paire et impaire; c'est...

Fonction paire :
$f(-x) = f(x)$ pour tout x



Fonction impaire :
$f(-x) = -f(x)$ pour tout x



◇ Note : la vérification de quelques valeurs prises au hasard ne permet de démontrer qu'une fonction est paire ou impaire; par contre elle permet d'affirmer le cas échant qu'elle n'est **pas** paire ou **pas** impaire.
En particulier, si une fonction n'a qu'un seul trou dans son domaine de définition (et pas en $x = 0$), elle ne peut pas être paire, ni être impaire.

Exemples :

1) $f(x) = 4x^2 + 5x + 3$

2) $f(x) = 7x^4 - 3x^2 + 11$

3) $f(x) = 6x^3 - 8x$

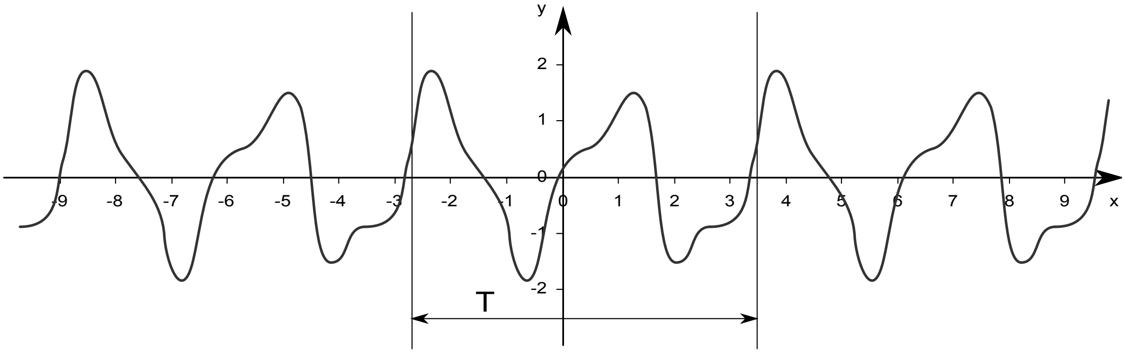
4) $f(x) = \dfrac{7x^4 - 3x^2 + 11}{6x^3 - 8x}$

5) $f(x) = \dfrac{16x^3 + 18x}{6x^3 - 8x}$

◇ Note : corrigé de ces exemples dans `09-zExemplesCorriges.pdf`

Périodicité des fonctions

Une fonction f est dite périodique de période T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout x.
Autrement dit : si son graphe est constitué d'un motif qui se répète tous les T.



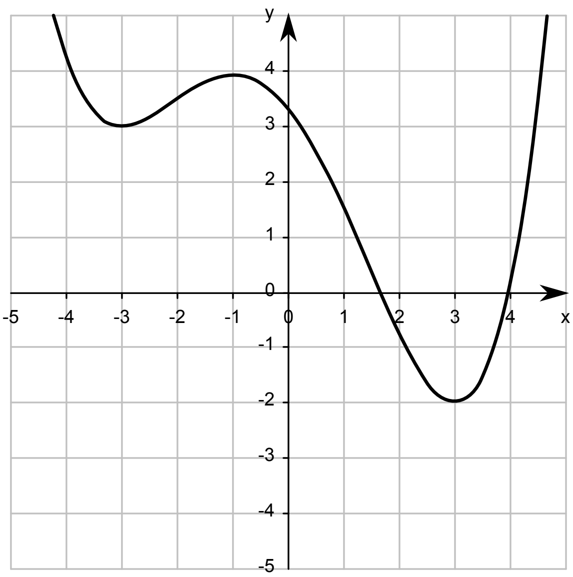
Note : les fonctions périodiques sont généralement celles écrites à partir des fonctions trigonométriques directes (sin, cos, tan) - ou alors à partir de fonctions très spéciales, par exemple : $x - \text{floor}(x)$.

7. Transformations des fonctions

Une fonction f étant donnée, il est possible de la transformer pour étirer ou déplacer son graphe horizontalement ou verticalement. Il suffit pour cela de considérer la nouvelle fonction $g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ et de déterminer correctement les coefficients a, b, c et d. [Voir le fichier `09-TransformationsDeFonctions.xls`]

Exemple (avec $f(x) = \frac{5}{144}x^4 + \frac{5}{108}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{53}{16}$)

$f(x)$



$g(x) = -f(2x-1) + 3$