Matrices et vecteurs : exercices

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

[[2)]] Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ [Note : donne une équation du 3e degré à résoudre à la machine.]

3*) Démontrer qu'une matrice 2 x 2 non inversible admet toujours 0 comme valeur propre.

4*) Démontrer que si une matrice 2 x 2 admet 0 comme valeur propre alors cette matrice n'est pas inversible.

5) Déterminer les coefficients de la matrice associée à une rotation de $+41°$.

6) Calculer les coefficients de la matrice associée à une symétrie axiale dont l'axe, passant par l'origine, fait un angle de $30°$ avec l'axe $0x$.
Calculer ensuite le symétrique du point $P(4;1)$ par rapport à l'axe donné ci-dessus.

7) Calculer les coefficients de la matrice associée à une symétrie axiale dont l'axe, passant par l'origine, est donné par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
Calculer ensuite les valeurs et vecteurs propres de la matrice obtenue ou les déduire à partir de la nature géométrique de la transformation.
Calculer ensuite le symétrique du point $P(4;1)$ par rapport à l'axe donné ci-dessus.

8) Calculer les coefficients de la matrice associée à une projection orthogonale sur la droite passant par l'origine et portant le vecteur $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
Calculer ensuite les valeurs et vecteurs propres de la matrice obtenue ou les déduire à partir de la nature géométrique de la transformation.
Calculer ensuite la projection orthogonale du point $P(4;1)$ sur la droite donnée ci-dessus.

9) Représenter dans un dessin l'action de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.75 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$ sur le carré unité, puis sur le rectangle $ABCD$ donné par $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;2)$ et $D(0;2)$.

10) Déterminer les coordonnées des sommets d'un rectangle de dimensions 3 unités sur 2 unités, dont le point le plus proche de l'origine est $A(2;5)$ et dont le grand côté fait un angle de $+26°$ par rapport à l'axe Ox.
Indications : considérer un rectangle bien placé par rapport à l'origine, le faire tourner par multiplication matricielle et le translater.
[Note : voir éventuellement le dessin sur l'avant-dernière page.]

11) Déterminer la matrice qui transforme le parallélogramme $ABCD$: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1.5;1)$, $D(0.5;1)$ en le rectangle $A'B'C'D'$: $A'(0;0)$, $B'(0.8;0)$, $C'(0.8;1.5)$, $D'(0;1.5)$. [Note : voir éventuellement le dessin sur l'avant-dernière page.]

12) On désire transformer le triangle ABC : $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(-1;4)$ en le triangle $A'B'C'$: $A'(7;3)$, $B'(10;9)$, $C'(6;10)$ à l'aide d'une transformation de type $\vec{x}\,' = M\cdot\vec{x}+\vec{t}$. Calculer les coefficients de la matrice M dans le cas où $\vec{t} = \overrightarrow{AA'}$.
[Note : voir éventuellement le dessin sur la dernière page.]

[[13)]] Dans l'espace à trois dimensions, considérer les matrices A et B respectivement associées à une rotation de $+72°$ autour de l'axe Oz et une rotation de $+29°$ autour de l'axe Oy. Calculer ces matrices ainsi que les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
A la machine : examiner éventuellement les valeurs propres et surtout les vecteurs propres des matrices produit obtenues (attention, ces matrices comportent des valeurs propres en nombres complexes).
Attention, rappel : $A\cdot B$ signifie rotation B suivie de rotation A, car $A\cdot B\cdot\vec{v}$ fait d'abord opérer B sur $\vec{v}$.

Solutions

1a) $\lambda_1 = 2$, $\vec{v}_1 = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $\vec{v}_2 = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **1b)** $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $\vec{v}_2 = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **1c)** pas de valeurs propres **1d)** $\lambda = 2$, $\vec{v}_1 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_1 = 4$, $\vec{v}_1 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 0.754710 & -0.656059 \\ 0.656059 & 0.754710 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866025 \\ 0.866025 & -0.5 \end{pmatrix}$ et $P'(2.866025; 2.964102)$

7) $\alpha = 53.13°$, $\begin{pmatrix} -0.28 & 0.96 \\ 0.96 & 0.28 \end{pmatrix}$, valeur propre 1 dans la direction de l'axe $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, valeur propre -1 dans la direction $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ perpendiculaire à l'axe et $P'(-0.16; 4.12)$

8) $\alpha = 143.13°$, $\begin{pmatrix} 0.64 & -0.48 \\ -0.48 & 0.36 \end{pmatrix}$, valeur propre 1 dans la direction de l'axe $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, valeur propre 0 dans la direction $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ perpendiculaire à l'axe et $P'(2.08; -1.56)$

10) Transformation : $\begin{pmatrix} \cos 26° & -\sin 26° \\ \sin 26° & \cos 26° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, d'où les quatre points : $A(2; 5)$, $B(4.70; 6.32)$, $C(3.82; 8.11)$ et $D(1.12, 6.80)$

11) $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 1.4 & 0.1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

13) $A = \begin{pmatrix} 0.309017 & -0.951057 & 0 \\ 0.951057 & 0.309017 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.874620 & 0 & -0.484810 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.484810 & 0 & 0.874620 \end{pmatrix}$,

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0.270272 & -0.951057 & -0.149814 \\ 0.831813 & 0.309017 & -0.461081 \\ 0.484810 & 0 & 0.874620 \end{pmatrix}$,

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.270272 & -0.831813 & -0.484810 \\ 0.951057 & 0.309017 & 0 \\ 0.149814 & -0.461081 & 0.874620 \end{pmatrix}$;

vecteurs propres : $\vec{v}_{AB} = \begin{pmatrix} 0.24 \\ -0.33 \\ 0.92 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_{BA} = \begin{pmatrix} -0.24 \\ -0.33 \\ 0.92 \end{pmatrix}$

Quelques aides et indications

6) Note : si on trouve une solution presque correcte avec juste des signes différents, c'est vraisemblablement que l'on s'est trompé dans l'ordre entre $R_{30°}$ et $R_{-30°}$.

7) et 8) Note : si on trouve une solution presque correcte avec juste des signes différents, c'est vraisemblablement que l'on s'est trompé dans l'ordre entre R_α et $R_{-\alpha}$ ou dans le calcul de l'arctangente.

9) Pour le carré unité : voir l'exemple de la page 3 du cours.
Pour le rectangle, multiplier par la matrice les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

11) Vu que le point A ne bouge pas, chercher la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $M \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$; par linéarité, le point C sera automatiquement transformé en C'.

12) Chercher la matrice M telle que : $\overrightarrow{OB'} = M \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AA'}$ **et** $\overrightarrow{OC'} = M \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AA'}$
Voir aussi le fichier Excel : `06-TransformationsLineaires3.xls`

Quelques corrigés

1) [Pour le détail : voir l'exemple du cours] On obtient les équations suivantes :
a) $(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$, **b)** $\lambda(\lambda+2) = 0$, **c)** $\lambda^2 - 12\lambda + 50 = 0$, **d)** $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

1d) Attention : si une matrice 2×2 admet une seule valeur propre, les machines à calculer peuvent indiquer qu'il n'y a pas de résultats réels, car elles travaillent par approximations successives et peuvent trouver des solutions complexes conjuguées avec une partie imaginaire presque nulle.

2) $\dots \Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0$

3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non inversible $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$, autrement dit $ad = bc$, d'où l'équation pour λ : $\lambda^2 - (a+d)\lambda = 0$, d'où au moins une solution $\lambda = 0$
Détail du calcul : $0 = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = \lambda^2 - a\lambda - d\lambda = \lambda^2 - (a+d)\lambda$

4) Soit $\vec{u}$ un vecteur propre associé à la valeur propre 0; on a donc $A \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$; si la matrice admettait une inverse, on pourrait calculer $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{u} = A^{-1} \cdot \vec{0}$, autrement dit $\vec{u} = \vec{0}$ (donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur propre).

5) $\begin{pmatrix} \cos 41^\circ & -\sin 41^\circ \\ \sin 41^\circ & \cos 41^\circ \end{pmatrix}$

6) $M = R_{30^\circ} \cdot S_x \cdot R_{-30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$\diamond$ Note : si on trouve une solution presque correcte avec juste des signes différents, c'est vraisemblablement que l'on s'est trompé dans l'ordre entre R_{30° et R_{-30°.

7) $\alpha = \arctan \frac{4}{3}$ est un angle tel que $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ et $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ (exactement). Ainsi $M = R_\alpha \cdot S_x \cdot R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

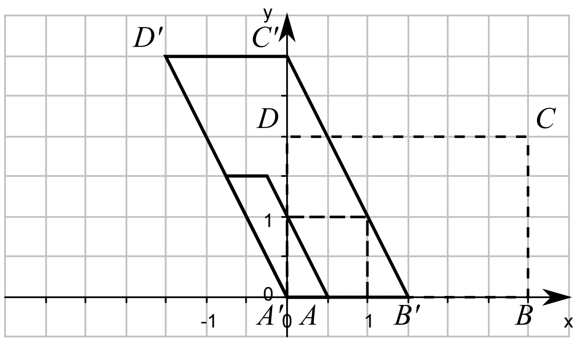
$\diamond$ Note : si on trouve une solution presque correcte avec juste des signes différents, c'est vraisemblablement que l'on s'est trompé dans l'ordre entre R_α et $R_{-\alpha}$ ou dans le calcul de l'arctangente.

8) $\alpha = 180^\circ + \arctan(-\frac{3}{4})$ est un angle tel que $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ et $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ (exactement). Ainsi $M = R_\alpha \cdot P_x \cdot R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.8 & 0.6 \\ -0.6 & -0.8 \end{pmatrix}$

$\diamond$ Note : si on trouve une solution presque correcte avec juste des signes différents, c'est vraisemblablement que l'on s'est trompé dans l'ordre entre R_α et $R_{-\alpha}$ ou dans le calcul de l'arctangente.

9) Le carré unité devient le parallélogramme $(0;0)$, $(0.5;0)$, $(-0.25;1.5)$, $(-0.75;1.5)$

$ABCD$ devient $A'B'C'D'$ avec $A'(0;0)$, $B'(1.5;0)$, $C'(0;3)$ et $D'(-1.5;3)$



10) (I) Rectangle de dimensions souhaitées avec le correspondant de A à l'origine : $A'(0;0)$, $B'(3;0)$, $C'(3;2)$ et $D'(0;2)$.
(II) On fait tourner ce rectangle de 26° (par rapport à l'origine) en multipliant les vecteurs des points par la matrice de rotation $R_{26°} = \begin{pmatrix} \cos 26° & -\sin 26° \\ \sin 26° & \cos 26° \end{pmatrix}$; on obtient les points : $A''(0;0)$, $B''(2.70;1.32)$, $C''(1.82;3.11)$ et $D''(-0.88;1.80)$
(III) On termine par une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

11) Vu que le point A ne bouge pas, il faut chercher une matrice M qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{AD'}$ (par linéarité, on obtiendra automatiquement la transformation de $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AC'}$).
On pose donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}$

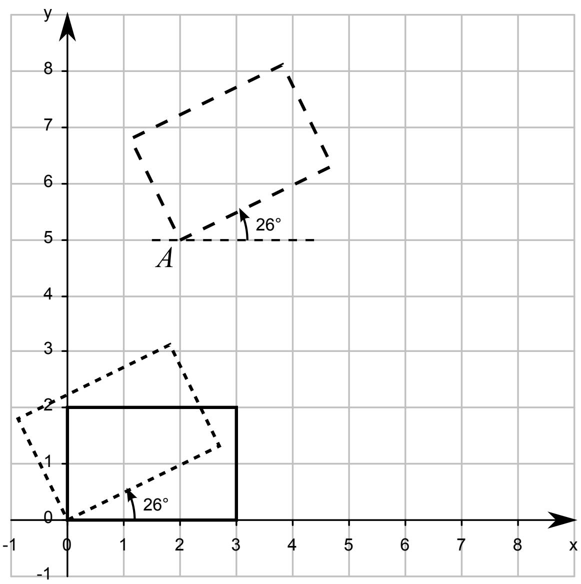
qui donne les deux équations : $\begin{cases} 1 \cdot a + 0 \cdot b = 0.8 \\ 1 \cdot c + 0 \cdot d = 0 \end{cases}$

Et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

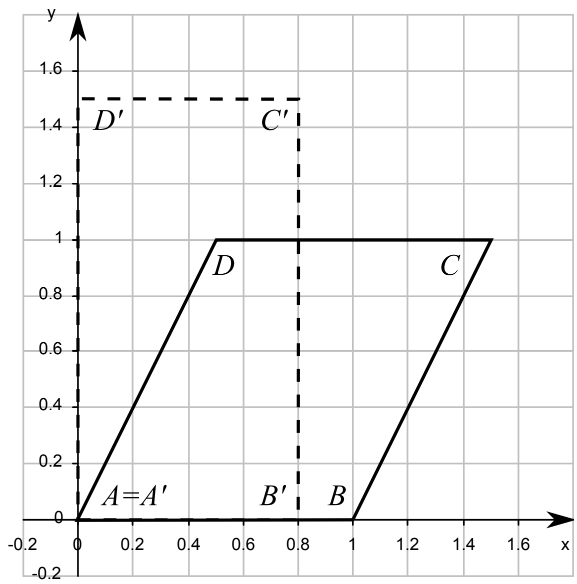
qui donne les deux autres équations $\begin{cases} 0.5 \cdot a + 1 \cdot b = 0 \\ 0.5 \cdot c + 1 \cdot d = 1.5 \end{cases}$

La résolution du système donne la matrice cherchée.
[[Spécial]] Aussi possible par : $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

10)



11)



12) Méthode analogue à celle de l'exercice 9 sauf qu'il y a en plus le vecteur $\overrightarrow{AA'}$

On cherche donc la matrice M qui satisfait les deux équations matricielles :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

[[Spécial]] Aussi possible par :

$$\begin{pmatrix} 10-7 & 6-7 \\ 9-3 & 10-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$