Rappels et compléments d'algèbre : exercices

---

1) Calculer :

a) $-5^2 - 3^5 \cdot 4 + 5 \cdot (-6)^3$ b) $1^{52} - 6^0 \cdot 3^1 + (-1)^{133849}$

2) Calculer (et donner le résultat sous forme de fraction simplifiée (ou d'entier)) :

a) $\dfrac{4^{-2}}{2^{-5}}$ b) $16^{\frac{3}{4}}$ c) $\dfrac{2^{-3}}{32^{\frac{3}{5}}}$ d) $\dfrac{4 + 8^{\frac{2}{3}}}{4 - 16^{-\frac{1}{4}}}$

3) Simplifier le plus possible (on suppose x, y et z strictement positifs) :

a) $\dfrac{(-3x^4)(-2x)^6}{(6x)^2}$ b) $\dfrac{x^{-4}y^3}{2^{-3}x^{-3}y^{-5}}$ c) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}z^{-\frac{4}{3}}}$

4) Effectuer, réduire et ordonner :

a) $(6x^3 - 2x^2 + 2)(7x^2 + 6x - 6)$ b) $(1000x^2 + 3)^2(1000x^2 - 3)^2$

5) Factoriser les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles :

a) $x^4 + 14x^2 + 49$ b) $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

6) Effectuer et simplifier (sans se préoccuper du domaine de définition) :

a) $\frac{2}{a^2} + \frac{3}{ab} - \frac{7}{a}$ b) $\frac{2x-4}{x^2-10x+25} + \frac{3x+5}{x^2-25} - \frac{5x-2}{x-5}$ c) $\dfrac{\frac{2x+3}{x+2} + 2}{4 - \frac{4x^2-1}{x^2-4}}$

7) Effectuer les divisions suivantes :

a) $(6x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 9x + 4) : (2x^2 - x + 4)$

b) $(3x^3 - 11x^2 + 13x) : (3x - 5)$

c) $(4x^3 - 23x^2 + 17x - 2) : (4x - 20)$

d) $(x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x^2 - x + 1)$

e) $(x^3 - 1) : (x + 1)$

8) Résoudre les systèmes :

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x - 7y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3y - 4 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

9) Exprimer les variables demandées à partir des relations :

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a = ? \ ; \quad b = ? \ ; \quad c = ? \ ; \quad d = ?$

b) $t = \dfrac{3a + 4}{2a - 5} \quad \Rightarrow \quad a = ?$

c) $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2b} - \dfrac{1}{3c} \quad \Rightarrow \quad a = ? \ ; \quad b = ? \ ; \quad c = ?$

10) Résoudre les équations :

a) $18x^2 + 3x = 10$ b) $9x^2 + 16 = 24x$

c) $3x^2 - 4x + 7 = 0$ d) $\frac{3}{2}x^2 - 2 = \frac{7}{2}x$

11) Résoudre les équations suivantes, après avoir précisé leur domaine de définition :

a) $2 - \frac{4}{x-3} = \frac{9}{x+2}$ b) $\frac{1}{(x^2-9)^2} = 0$

12) Exprimer les variables demandées à partir des relations :

a) $6x^2 + 7x + 10y = 8xy + 8y^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x = ?\ ; \quad [\,y = ?\,]$

b) $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{b-c} \quad \Rightarrow \quad a = ?\ ; \quad c = ?\ ; \quad b = ?$

13) Résoudre les inéquations :

a) $3x - 7 \leq 7x - 13$ b) $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} > \frac{7}{3}x - \frac{3}{2}$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3}(\frac{x}{4} + 1) \leq \frac{2}{3} + \frac{2x}{3} + 2(x - \frac{2}{3})$ d) $\frac{x}{4} - \frac{5}{3}(x - 5) \leq \frac{x}{3} - 7(\frac{x}{4} - 3)$

e) $(x^2 + 1)^2 < (x^2 - 1)^2$ f) $\frac{2}{2x-1} < \frac{1}{x}$

14) Résoudre les systèmes :

a) $\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 46 \\ 3x - y + z = -3 \\ 4x - 3y + 5z = -25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y - 12z = -3 \\ 2x - 4y + 2z = 4 \\ 3x - 5y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + 4z = -8 \\ 2x - 4y + 3z = -1 \\ x - 2y - 3z = 13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 2 \\ x + z = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - 7y = 25 \end{cases}$ (intersection d'un cercle et d'une droite)

f) $\begin{cases} x^2 - y = 4 \\ y = 7x^2 + 5x - 10 \end{cases}$ (intersection de deux paraboles)

15) Factoriser complètement les polynômes suivants :

a) $6x^4 + 7x^3 - 20x^2$ b) $45x^4 - 61x^2 - 36$

c) $2x^4 + x^3 - 16x - 8$ d) $2x^3 - 10x^2 + 3x - 15$

16) Résoudre et discuter les systèmes suivants en fonction du paramètre m (resp. des paramètres a, b et c) :

a) $\begin{cases} mx - y = m \\ x + my = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + my = 1 \\ x - y = m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx = 2y + 3m + 3 \\ mx + my = y \end{cases}$

d*) $\begin{cases} mx = y + 1 \\ 3x + (m-4)y = m + 2 \end{cases}$ e*) $\begin{cases} ax - by = 2a \\ ax + by = 2c \end{cases}$

Solutions

1a) -2077 **1b)** -3 **2a)** 2 **2b)** 8 **2c)** $\frac{1}{64}$ **2d)** $\frac{16}{7}$

3a) $-\frac{16}{3}x^8$ **3b)** $8x^{-1}y^8$ que l'on peut aussi écrire : $\frac{8y^8}{x}$ **3c)** $x^{-1}y^{-\frac{13}{6}}z^2$

4a) $42x^5+22x^4-48x^3+26x^2+12x-12$ **4b)** $10^{12}x^8-18\cdot 10^6\cdot x^4+81$

5a) $(x^2+7)^2$ **5b)** $(x+2)(x^2-2x+4)(x-3)$

6a) $\frac{2b+3a-7ab}{a^2b}$ **6b)** $\frac{-5x^3+7x^2+121x-95}{(x-5)^2(x+5)}$ **6c)** $-\frac{(4x+7)(x-2)}{15}$

7a) $3x^2-2x+1$ **7b)** x^2-2x+1, reste 5 **7c)** $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ reste 8

7d) x^2+x-1 **7e)** x^2-x+1 reste -2

8a) $x=\frac{59}{32}$ et $y=\frac{7}{16}$ **8b)** $x=-\frac{11}{5}$ et $y=\frac{3}{5}$

9a) $a=\frac{bc}{d}$, $b=\frac{ad}{c}$, $c=\frac{ad}{b}$, $d=\frac{bc}{a}$ **9b)** $a=\frac{5t+4}{2t-3}$ **9c)** $a=\frac{6bc}{3c-2b}$, $b=\frac{3ac}{2a+6c}$, $c=\frac{2ab}{3a-6b}$

10a) $x_1=-\frac{5}{6}$, $x_2=\frac{2}{3}$ **10b)** $x=\frac{4}{3}$ **10c)** $S=\emptyset$ **10d)** $x=\frac{7\pm\sqrt{97}}{6}$

11a) $\mathrm{D_{déf}}=\mathbb{R}-\{-2;3\}$, solutions : $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=7$

11b) $\mathrm{D_{déf}}=\mathbb{R}-\{-3;3\}$, pas de solutions

12a) $x_1=\frac{-2y+1}{3}$, $x_2=\frac{4y-3}{2}$, $y_1=\frac{2x+3}{4}$, $y_2=\frac{-3x+1}{2}$

12b) $a=\frac{b(b+c)}{b-c}$, $c=\frac{b(a-b)}{a+b}$, $b=\frac{a-c\pm\sqrt{a^2-6ac+c^2}}{2}$

13a) $x\geq\frac{3}{2}$ **13b)** $x<1$ **13c)** $x\geq 0$ **13d)** $S=\mathbb{R}$ **13e)** $S=\emptyset$ **13f)** $0<x<\frac{1}{2}$

14a) $(x;y;z)=(2;6;-3)$

14b) $x=3z$, $y=2z-1$ et z quelconque, autrement dit $(x;y;z)=(3a;2a-1;a)$

14c) $x=2y+4$, y quelconque et $z=-3$, autrement dit $(x;y;z)=(2a+4;a;-3)$

14d) $(x;y;z)=(4;-1;3)$ **14e)** $(x;y)=(4;-3)$ et $(x;y)=(-3;-4)$

14f) $(x;y)=(-\frac{3}{2};-\frac{7}{4})$ et $(x;y)=(\frac{2}{3};-\frac{32}{9})$

15a) $6x^2(x-\frac{4}{3})(x+\frac{5}{2})$ que l'on peut aussi écrire : $x^2(3x-4)(2x+5)$

15b) $45(x^2+\frac{4}{9})(x-\frac{3}{\sqrt{5}})(x+\frac{3}{\sqrt{5}})$ que l'on peut aussi écrire : $(9x^2+4)(\sqrt{5}x-3)(\sqrt{5}x+3)$

15c) $(x-2)(x^2+2x+4)(2x+1)$ **15d)** $(2x^2+3)(x-5)$

16a) solution unique (pour tout m) : $x=1$ et $y=0$

16b) pour $m\neq 0$: $x=\frac{m^2+1}{2m}$ et $y=-\frac{m^2-1}{2m}$; pour $m=0$: pas de solutions : une équation est contradictoire

16c) pour $m\neq -1$ et $m\neq 0$: $x=\frac{3(m-1)}{m}$ et $y=-3$; pour $m=-1$: infinité de solutions liées par $x=-2y$; pour $m=0$: pas de solutions : équations incompatibles

16d) pour $m\neq 1$ et $m\neq 3$: $x=\frac{2}{m-3}$ et $y=\frac{m+3}{m-3}$; pour $m=1$: infinité de solutions liées par $y=x-1$; pour $m=3$: pas de solutions : équations incompatibles

16e) les différents cas : (1) $a\neq 0$, $b\neq 0$: $x=\frac{2ab+2bc}{2ab}=\frac{a+c}{a}$ et $y=\frac{-2a^2+2ac}{2ab}=\frac{c-a}{b}$; (2) $a=0$, $b=0$, $c=0$: infinité de solutions : x et y quelconques; (3) $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$: pas de solution; (4) $a=0$, $b\neq 0$, $c=0$: infinité de solutions : x quelconque et $y=0$; (5) $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$: pas de solution; (6) $a\neq 0$, $b=0$, $c=0$: pas de solution; (7) $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$: (I) si $a\neq c$: pas de solution, (II) si $a=c$: infinité de solutions : $x=2$ et y quelconque

Quelques aides et indications

1a) Attention à la hiérarchie des opérations.

2d) Rappel - Attention : interdit de simplifier par 4 !

4b) Astuce : utiliser le fait que $a^2b^2 = (ab)^2$

5a) C'est un carré parfait.

5b) Utiliser une double mise en évidence (= méthode des *groupements*), puis une identité remarquable : $x^3 + 8 \longrightarrow a^3 + b^3 = \cdots$

6) [*Domaine de définition* : ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul de l'expression a un sens. Il faudrait donc écarter ici les nombres qui annulent les divers dénominateurs.]

6c) Important de conserver les factorisations pour pouvoir simplifier.

9a) Partir chaque fois de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c$

9c) Le plus simple : tout mettre au même dénominateur, puis supprimer ces dénominateurs. Ou directement tout multiplier par le dénominateur commun : $6abc$.

10d) Plus simple si on amplifie l'équation par 2 pour supprimer les dénominateurs.

12a) (I) Pour trouver x, écrire l'équation comme une équation du 2^e degré en x : $?\,x^2 + ?\,x + ? = 0$

(II) pour trouver y, l'écrire comme une équation du 2^e degré en y : $?\,y^2 + ?\,y + ? = 0$

Attention si on essaye de résoudre ces équations à la machine : ne pas oublier la touche de multiplication entre x et y pour le produit $8xy$

12b) (II) pour trouver c, partir de $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{b-c} \;\Rightarrow\; a(b-c) = b(b+c) \;\Rightarrow\; \cdots$

(III) pour trouver b, partir comme pour c, puis écrire l'équation comme une équation du 2^e degré en b : $?\,b^2 + ?\,b + ? = 0$

13f) Rappel - Attention : interdit de faire le *produit croisé* avec des termes dont on ignore s'ils sont positifs ou négatifs

14e) Sortir x de la deuxième équation et le remplacer dans la première.

14f) Remplacer le y de la deuxième équation dans la première; mais faire **attention** aux changements de signes. Ou bien sortir y de la première équation et égaler les deux expressions.

15a) $\cdots = x^2(6x^2 + 7x - 20) = \cdots$ (fin par $\Delta = \cdots$)

15b) Poser $u = x^2 \;\Rightarrow\; \cdots = 45(u + \frac{4}{9})(u - \frac{9}{5}) = 45(x^2 + \frac{4}{9})(x^2 - \frac{9}{5}) = \cdots$

15c) $\cdots = (x^3 - 8)(2x + 1) = \cdots$ (fin par $a^3 - b^3 = \cdots$)(voir aussi le (5b))

15d) Utiliser une double mise en évidence (= méthode des *groupements*)

16c) Ne pas effectuer toutes les multiplications au cours du calcul : essayer de conserver les factorisations.

Quelques corrigés

2a) $\dots = \frac{1}{16} : \frac{1}{32} = \frac{1}{16} \cdot \frac{32}{1} = \frac{32}{16} = 2$

2c) $\dots = \frac{1}{8} : (\sqrt[5]{32})^3 = \frac{1}{8} : 2^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

2d) $\dots = \frac{4+8^{\frac{2}{3}}}{4-\frac{1}{16^{\frac{1}{4}}}} = \frac{4+(\sqrt[3]{8})^2}{4-\frac{1}{\sqrt[4]{16}}} = \frac{4+4}{4-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{7}{2}} = 8 \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$

3a) $\dots = \frac{(-3x^4)(64x^6)}{(36x^2)} = -\frac{16}{3}x^{(4+6-2)} = -\frac{16}{3}x^8$

3b) $\dots = 2^{-(-3)}x^{(-4-(-3))}y^{(3-(-5))} = 8x^{(-4+3)}y^{(3+5)} = 8x^{-1}y^8$

3c) $\dots = x^{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}y^{-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}z^{\frac{2}{3}-(-\frac{4}{3})} = x^{-\frac{2}{2}}y^{-\frac{4}{6}-\frac{9}{6}}z^{\frac{6}{3}} = x^{-1}y^{-\frac{13}{6}}z^2$

4a) $\dots = 42x^5 + 36x^4 - 36x^3 - 14x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 14x^2 + 12x - 12$
$= 42x^5 + 22x^4 - 48x^3 + 26x^2 + 12x - 12$

4b) $\dots = \big((1000x^2+3)(1000x^2-3)\big)^2 = (10^6x^4-9)^2 = 10^{12}x^8 - 18 \cdot 10^6 \cdot x^4 + 81$

5b) $\dots = x^3(x-3) + 8(x-3) = (x^3+8)(x-3) = (x+2)(x^2-2x+4)(x-3)$

6b) $\dots = \frac{2x-4}{(x-5)^2} + \frac{3x+5}{(x-5)(x+5)} - \frac{5x-2}{x-5} = \frac{(2x-4)(x+5)}{(x-5)^2(x+5)} + \frac{(3x+5)(x-5)}{(x-5)^2(x+5)} - \frac{(5x-2)(x-5)(x+5)}{(x-5)^2(x+5)}$
$= \frac{2x^2+10x-4x-20+3x^2-15x+5x-25-(5x^3-2x^2-125x+50)}{(x-5)^2(x+5)} = \frac{-5x^3+7x^2+121x-95}{(x-5)^2(x+5)}$

Note : structure de la mise au même dénominateur ci-dessus (analogue à celle du 6a) :
$\frac{2x-4}{a^2} + \frac{3x+5}{a \cdot b} - \frac{5x-2}{a} = \frac{(2x-4)\cdot b}{a^2 \cdot b} + \frac{(3x+5)\cdot a}{a^2 \cdot b} - \frac{(5x-2)\cdot a \cdot b}{a^2 \cdot b}$ avec $a = (x-5)$ et $b = (x+5)$

6c) $\dots = \frac{\frac{2x+3+2(x+2)}{x+2}}{\frac{4(x^2-4)-(4x^2-1)}{(x+2)(x-2)}} = \frac{(4x+7)}{(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(-15)} = -\frac{(4x+7)(x-2)}{15}$

9b) $t = \frac{3a+4}{2a-5} \;\Rightarrow\; t(2a-5) = 3a+4 \;\Rightarrow\; 2at - 5t = 3a+4 \;\stackrel{(*)}{\Rightarrow}\; 2at - 3a = 5t+4$
$\Rightarrow\; a(2t-3) = 5t+4 \;\Rightarrow\; a = \frac{5t+4}{2t-3}$

(*) On met tous les a à gauche et tous les *non* a à droite

9c) $\dots \;\Rightarrow\; \frac{6bc}{6abc} = \frac{3ac}{6abc} - \frac{2ab}{6abc} \;\Rightarrow\; 6bc = 3ac - 2ab \;\Rightarrow\; \dots$ etc

11a) $\dots \;\Rightarrow\; \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)} - \frac{4(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{9(x-3)}{(x-3)(x+2)} \;\Rightarrow\; 2(x-3)(x+2) - 4(x+2) = 9(x-3) \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; 2x^2 - 15x + 7 = 0 \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 7$

[Attention au(x) signe(s) "-" devant la ou les grandes barres de fraction]

12a) (I) Ecrire l'équation comme une équation du 2$^{\text{e}}$ degré en x :
$\dots \;\Rightarrow\; 6x^2 + 7x - 8xy + 10y - 8y^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 6 \cdot x^2 + (7-8y) \cdot x + (10y - 8y^2 - 3) = 0$
ainsi :
$\Delta = b^2 - 4ac = (7-8y)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (10y - 8y^2 - 3) = \dots = 256y^2 - 352y + 121 = (16y-11)^2$
et finalement :

$$x_{1,2} = \frac{-(7-8y) \pm \sqrt{(16y-11)^2}}{2 \cdot 6} = \frac{-7+8y \pm (16y-11)}{12} = \begin{cases} \frac{-7+8y-(16y-11)}{12} = \frac{-8y+4}{12} = \frac{-2y+1}{3} \\ \frac{-7+8y+(16y-11)}{12} = \frac{24y-18}{12} = \frac{4y-3}{2} \end{cases}$$

12a) (II) Ecrire l'équation comme une équation du 2$^{\text{e}}$ degré en y :
$\dots \;\Rightarrow\; (-8) \cdot y^2 + (10-8x) \cdot y + (6x^2 + 7x - 3) = 0$
ainsi :
$\Delta = (10-8x)^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (6x^2 + 7x - 3) = \dots = 256x^2 + 64x + 4 = (16x+2)^2$
et finalement :

$$x_{1,2} = \frac{-(10-8x) \pm \sqrt{(16x+2)^2}}{2 \cdot (-8)} = \frac{-10+8x \pm (16x+2)}{-16} = \begin{cases} \frac{-10+8x-(16x+2)}{-16} = \frac{-8x-12}{-16} = \frac{2x+3}{4} \\ \frac{-10+8x+(16x+2)}{-16} = \frac{24x-8}{-16} = \frac{-3x+1}{2} \end{cases}$$

12b) (II) $\cdots \Rightarrow a(b-c)=b(b+c) \Rightarrow ab-ac=b^2+bc \overset{(*)}{\Rightarrow} ab-b^2=ac+bc \Rightarrow ab-b^2=(a+b)c \Rightarrow c=\frac{ab-b^2}{a+b}$

(*) On met tous les c à droite et tous les *non* c à gauche

(III) pour trouver b, début comme ci-dessus, puis écrire l'équation comme une équation du 2$^{\text{e}}$ degré en b : $0=b^2+bc-ab+ac \Rightarrow 0=b^2+b(c-a)+ac$

ainsi : $\Delta=(c-a)^2-4\cdot 1\cdot ac=c^2-2ac+a^2-4ac=c^2-6ac+a^2$

et finalement : $x_{1,2}=\frac{-(c-a)\pm\sqrt{c^2-6ac+a^2}}{2\cdot 1}=\frac{a-c\pm\sqrt{a^2-6ac+c^2}}{2}$

13d) $\Rightarrow \frac{x}{4}-\frac{5x}{3}+\frac{25}{3}\leq\frac{x}{3}-\frac{7x}{4}+21 \Rightarrow 3x-20x+100\leq 4x-21x+252 \Rightarrow 100\leq 252$ ce qui est toujours vrai donc $S=\mathbb{R}$

13e) $\cdots \Rightarrow x^4+2x^2+1<x^4-2x^2+1 \Rightarrow 4x^2<0$, mais un carré n'est jamais **strictement** inférieur à 0, donc $S=\emptyset$

13f) $\cdots \Rightarrow \frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}<0 \Rightarrow \frac{2x-(2x-1)}{x(2x-1)}<0 \Rightarrow \frac{1}{x(2x-1)}<0$

Pour que ce quotient soit négatif, il faut que les termes du dénominateur soient de signes contraires; d'où deux cas :

(I) $x<0$ **et** $2x-1>0$ On en déduit : $2x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$, ce qui est en contradiction avec l'autre hypothèse ($x<0$); donc pas de solutions dans ce cas-ci

(II) $x>0$ **et** $2x-1<0$ On en déduit : $2x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$; d'où les solutions $0<x<\frac{1}{2}$

14a) Par la méthode standard, on obtient l'étape intermédiaire suivante (dans laquelle l'équation (3) peut être simplifiée par 13) : $\begin{cases} 2x+5y-4z=46 \\ 17y-14z=144 \\ 13y-13z=117 \end{cases}$

(Mais d'autres étapes peuvent aussi être tout à fait correctes selon la méthode choisie.)

14b) 1 (éq. 1) - 1 (éq. 2) donne l'équation : $7y-14z=-7$ que l'on peut simplifier en : $y-2z=-1$

3 (éq. 1) - 2 (éq. 3) donne l'équation : $19y-38z=-19$ que l'on peut simplifier en : $y-2z=-1$ (donc la même que ci-dessus)

Le système de départ se ramène donc au système $\begin{cases} 2x+3y-12z=-3 \\ y-2z=-1 \\ y-2z=-1 \end{cases}$ autrement dit à un système de **deux** équations à **trois** inconnues; il admet donc une infinité de solutions.

[Remarque : si on avait obtenu une contradiction, par exemple $y-2z=-1$ et $y-2z=4$, cela aurait signifié que le système n'avait pas de solutions.]

Exprimons x et y en fonction de z (on pourrait aussi exprimer y et z en fonction de x, ou...) : l'équation obtenue ci-dessus donne $y=2z-1$ que l'on remplace dans la première équation : $2x+3(2z-1)-12z=-3 \Rightarrow 2x+6z-3-12z=-3 \Rightarrow 2x-6z=0 \Rightarrow x=3z$

D'où les solutions du système : $x=3z$, $y=2z-1$ et z quelconque.

14c) 2 (éq. 1) - 1 (éq. 2) donne l'équation : $5z = -15$ donc : $z = -3$
1 (éq. 1) - 1 (éq. 3) donne l'équation : $7z = -21$ donc : $z = -3$ (donc comme ci-dessus)

Le système de départ se ramène donc au système $\begin{cases} x - 2y + 4z = -8 \\ z = -3 \\ z = -3 \end{cases}$ autrement dit à un système de **deux** équations à **trois** inconnues; il admet donc une infinité de solutions.

[Remarque : si on avait obtenu une contradiction, par exemple $z = -3$ et $z = 47$, cela aurait signifié que le système n'avait pas de solutions.]

Vu qu'ici z prend une valeur fixe, on ne peut pas (comme dans l'exercice 14b) exprimer x et y en fonction de z; exprimons alors x en fonction de y : en remplaçant $z = -3$ dans la première équation du système, on obtient : $x - 2y + 4(-3) = -8 \Rightarrow x - 2y = -8 + 12 \Rightarrow x = 2y + 4$

D'où les solutions du système : $x = 2y + 4$, y quelconque et $z = -3$

14d) Une astuce de résolution dans ce cas-ci : additionner les trois équations; on obtient : $2x+2y+2z = 12 \Rightarrow x+y+z = 6$ équation que l'on peut alors comparer (mentalement) à chacune des trois autres pour trouver la variable manquante.

14e) Sortir x de la deuxième équation : $x = 7y + 25$ et le remplacer dans la première : $(7y + 25)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 49y^2 + 350y + 625 + y^2 = 25 \Rightarrow 50y^2 + 350y + 600 = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} y^2 + 7y + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = \cdots \Rightarrow y = -3$ ou $y = -4$; la deuxième équation permet alors de trouver les valeurs de x correspondantes.

(*) Simplification par 50

14f) Remplacer le y de la deuxième équation dans la première en faisant **attention** aux changements de signes : $x^2 - (7x^2 + 5x - 10) = 4 \Rightarrow x^2 - 7x^2 - 5x + 10 = 4 \Rightarrow -6x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = \cdots$ (éventuellement changer les signes avant de calculer Δ)

15c) $2x^4 + x^3 - 16x - 8 = x^3(2x+1) - 8(2x+1) = (x^3 - 8)(2x+1) = (x^3 - 2^3)(2x+1) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)(2x+1)$

15d) $2x^3 - 10x^2 + 3x - 15 = 2x^2(x-5) + 3(x-5) = (2x^2 + 3)(x - 5)$

16c) Les simplifications pour le cas $m \neq -1$ et $m \neq 0$: $x = \frac{3(m+1)(m-1)}{m(m+1)} = \frac{3(m-1)}{m}$ et $y = \frac{-3(m+1)}{(m+1)} = -3$

16d) Les simplifications pour le cas $m \neq 1$ et $m \neq 3$: $x = \frac{m-4+m+2}{(m-3)(m-1)} = \frac{2m-2}{(m-3)(m-1)} = \frac{2(m-1)}{(m-3)(m-1)} = \frac{2}{m-3}$ et $y = \frac{-3+m^2+2m}{(m-3)(m-1)} = \frac{(m+3)(m-1)}{(m-3)(m-1)} = \frac{m+3}{m-3}$