Dividiamo i vincoli in due categorie:

- → Vincoli interni

  legano particelle mobili tra loro

- → Vincoli esterni

  legano particelle mobili a punti fissi

Indichiamo con N il numero di particelle

con M il numero di punti fissi

Sia n il numero di vincoli interni, m il numero di vincoli esterni.

Consideriamo la matrice di adiacenza dei vincoli V

questa matrice $(n+m)\times(n+m)$ contiene sulla diagonale la lunghezza del vincolo i-esimo, quindi $V_{ii} = L_i$

Fuori da diagonale è così costruita: $(i \neq j)$

$V_{ij} = 0$ se il vincolo i ed il vincolo j non sono adiacenti

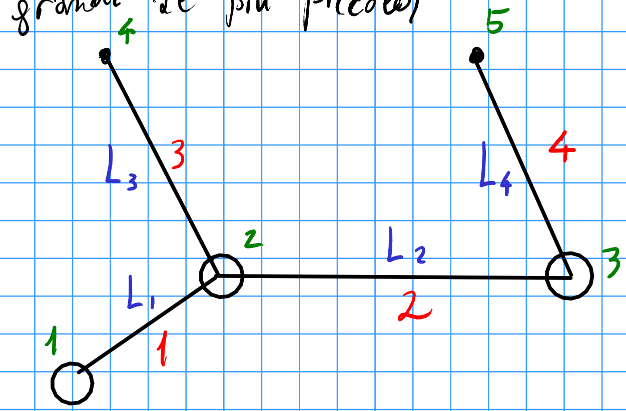
$V_{ij} = 1$ se i e j sono adiacenti

La matrice V_P di adiacenza vincoli-particelle è una matrice

$$(n+m) \times 2$$

dove la riga i indica l'indice delle due particelle vincolate dal vincolo i-esimo, pertanto assumerà solo valori da 1 a $N+M$
(vanno inseriti dal più grande al più piccolo)

Esempio:



$$V = \begin{array}{c} 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \\ 3 \rightarrow \\ 4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} L_1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & L_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & L_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \qquad V_P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \leftarrow 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Sia i vincoli esterni che quelli interni hanno espressione

$$\sigma = \| \vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta \|^2 - d_{\alpha\beta}^2$$

Tuttavia $\sigma(\vec{q}(t+h, \{\gamma_k\}))$ ha un'espressione in cui le posizioni relative alle particelle libere sono spostate di un δ durante h, mentre non lo sono se sono punti fissi, cioè:

Sia $1 \leq k \leq n$, allora $\quad \sigma_k = \|\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta\|^2 - L_k$ dove

$\alpha = V_{P_{k1}} \quad \beta = V_{P_{k2}}$ e $\alpha, \beta \leq N$

Questo porta a (in questo conto le q con $\sim$ o δ sono valutate in $t+h$, quelle senza in t)

$$0 = \|\vec{\tilde{q}}_\alpha + \delta\vec{q}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta - \delta\vec{q}_\beta\|^2 - L_k = \text{(già fatto questo conto)} =$$

$$= h^4 \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n+m} \gamma_i \gamma_j \left[\left(\frac{\nabla_\alpha}{m_\alpha} - \frac{\nabla_\beta}{m_\beta}\right)\sigma_i\right]_t \left[\left(\frac{\nabla_\alpha}{m_\alpha} - \frac{\nabla_\beta}{m_\beta}\right)\sigma_j\right]_t +$$

$$+ 2h^2 \left(\vec{\tilde{q}}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+m} \gamma_i \left[\left(\frac{\nabla_\alpha}{m_\alpha} - \frac{\nabla_\beta}{m_\beta}\right)\sigma_i\right]_t\right) +$$

$$+ \|\vec{\tilde{q}}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta\|^2 - L_k$$

Questa quantità e l'analoga per $n+1 \leq k \leq n+m$ sono calcolate da F_constraint

Dove $\left(\frac{\nabla_\alpha}{m_\alpha} - \frac{\nabla_\beta}{m_\beta}\right)\sigma_i = \vec{a}_{ki}$

Con $\quad \vec{a}_{kk} = 2\left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta}\right)\left(\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta\right)$

Per $i \neq k$

Se $V_{P_{i1}}$ o $V_{P_{i2}} = \alpha$ (indicando con γ l'altro indice) $\vec{a}_{ki} = \frac{2}{m_\alpha}\left(\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\gamma\right)$

Se $V_{P_{i1}}$ o $V_{P_{i2}} = \beta$ (indicando con γ l'altro indice) $\vec{a}_{ki} = \frac{2}{m_\beta}\left(\vec{q}_\gamma - \vec{q}_\beta\right)$

$\vec{a}_{ki} = 0$ se $\quad V_{ki} = 0$

Sia $n+1 \leq k \leq n+m$ allora $\sigma_k = \| \vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta \|^2 - L_k^2$

dove $\alpha = V_{p_{k1}}$ $\beta = V_{p_{k2}}$, $N+1 \leq \alpha \leq N+M$, $1 \leq \beta \leq N$

questo porta a: $\left(\text{ricordando } \delta \vec{q}_\beta (t+h) = \frac{h^2}{m_\beta} \sum_{i=1}^{n+m} \gamma_i \nabla_\beta \sigma_i \Big|_t \right)$

$$0 = \| \vec{q}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta - \delta \vec{q}_\beta \|^2 - L_k^2 = \| \delta \vec{q}_\beta \|^2 - 2 \left(\vec{q}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta \right) \cdot \delta \vec{q}_\beta + \| \vec{q}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta \|^2 - L_k^2$$

ricorda che $\vec{q}_\alpha$ non varia nel tempo

da cui:

$$0 = \frac{h^4}{m_\beta^2} \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n+m} \gamma_i \gamma_j \nabla_\beta \sigma_i \Big|_t \nabla_\beta \sigma_j \Big|_t - 2 \frac{h^2}{m_\beta} \left(\vec{q}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta \right) \cdot \sum_{i=1}^{n+m} \gamma_i \nabla_\beta \sigma_i \Big|_t +$$

$$+ \| \vec{q}_\alpha - \vec{\tilde{q}}_\beta \|^2 - L_k^2$$

dove

se $V_{ki} = 0 \longrightarrow \nabla_\beta \sigma_i = 0$

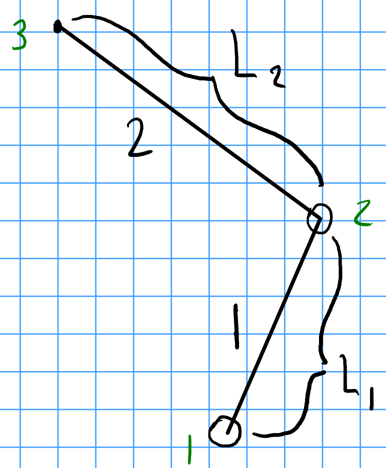
se $V_{ki} = 1$ ma $V_{p_{i1}}$ e $V_{p_{i2}} \neq \beta \longrightarrow \nabla_\beta \sigma_i = 0$

se $V_{ki} = 1$ e $V_{p_{i1}}$ o $V_{p_{i2}} = \beta \longrightarrow \nabla_\beta \sigma_i = \nabla_\beta \left[\| \vec{q}_\beta - \vec{q}_\gamma \|^2 \right] = 2 \left(\vec{q}_\beta - \vec{q}_\gamma \right)$

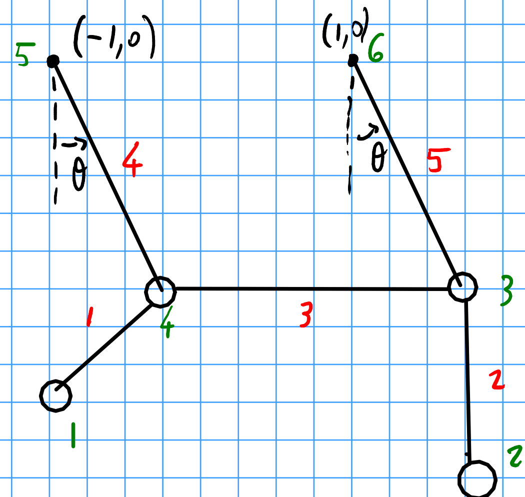
A questo punto abbiamo $n+m$ incognite $\{\gamma_k\}$

ed $n+m$ equazioni di secondo grado in $\{\gamma_k\}$

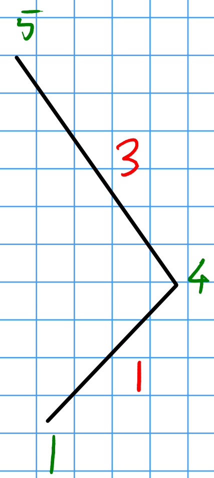
Esempi di prova

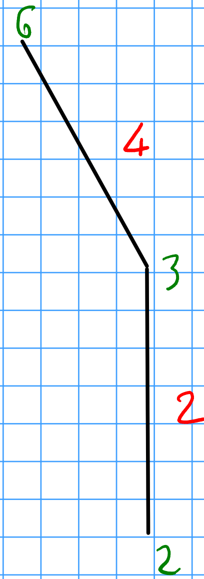


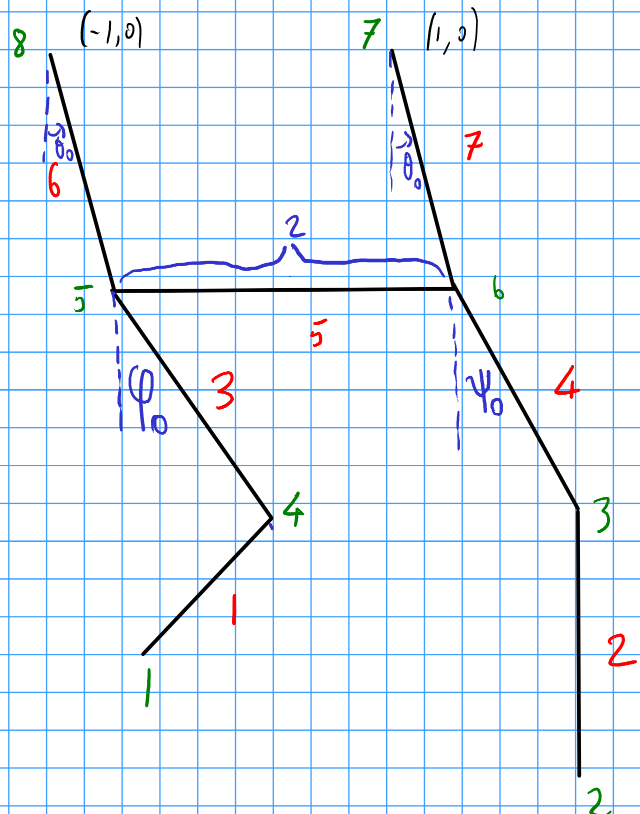
$$V = \begin{bmatrix} L_1 & 1 \\ 1 & L_2 \end{bmatrix} \qquad V_P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



$$V = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & L_4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \qquad V_P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$


5
3
4
1
1


6
4
3
2
2


8
(-1,0)
7
(1,0)
θ₀
6
7
θ₀
2
5
6
5
φ₀
3
ψ₀
4
4
3
1
1
2
2