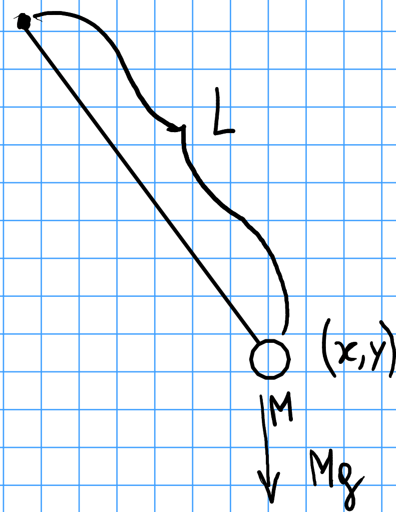
$$q(t) \equiv (x, y)$$



$$\vec{q}(t+h) = 2\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) + \frac{h^2}{m}\vec{F}(t) + \delta\vec{q}(t+h)$$

dove $\delta\vec{q}(t+h) = \frac{h^2}{m}\gamma\,\nabla\sigma\big|_t$

ma $\sigma = x^2+y^2-L^2 \rightarrow \nabla\sigma = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\vec{q}$

dunque $\delta\vec{q}(t+h) = \frac{h^2}{m}\gamma\, 2\,\vec{q}(t)$

Le γ risolvono $\sigma(q(t+h, \gamma)) = 0$ a)

Significa che scelgo γ in modo da imporre il vincolo

Per esplicitare meglio questa equazione, scrivo meglio $\vec{q}(t+h)$:

$$\vec{q}(t+h) = 2\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) - h^2\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} + 2\frac{h^2}{m}\gamma\,\vec{q}(t) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{h^2}{m}\gamma\right)\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) - h^2\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Dunque
$$\sigma(q(t+h, \gamma)) = \left[2x(t) + 2\frac{h^2}{m}\gamma x(t) - x(t-h)\right]^2 + \left[2y(t) + 2\frac{h^2}{m}\gamma y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2 - L^2 = 0$$

$$4\frac{h^4}{m^2}\gamma^2 x^2(t) + 4\frac{h^4}{m^2}\gamma^2 y^2(t) + 4\frac{h^2}{m}\gamma x(t)\left[2x(t) - x(t-h)\right] + 4\frac{h^2}{m}\gamma y(t)\left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right] =$$

$$= L^2 - \left[2x(t) - x(t-h)\right]^2 - \left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2$$ b)

Vogliamo trovare γ che risolve questo problema, potremmo farlo visto che è un eq. di secondo grado coi conti, ma per coerenza visto che se ci sono più γ non possiamo farlo, proviamo per via iterativa partendo dal guess iniziale:

$$\gamma_0 = \frac{L^2 - \left[2x(t) - x(t-h)\right]^2 - \left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2}{4\frac{h^2}{m}\left[x(t)\left(2x(t) - x(t-h)\right) + y(t)\left(2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right)\right]}$$

Magari usando il metodo di Newton:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n - \frac{\sigma\left(q(t+h, \gamma_n)\right)}{\frac{\partial(\sigma \circ q)}{\partial \gamma}(t+h, \gamma_n)}$$

b) può essere scritta come

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$$

dove

$$A = 4\frac{h^4}{m^2}\left(x^2(t) + y^2(t)\right)$$

$$B = 4\frac{h^2}{m}\left[x(t)\left(2x(t) - x(t-h)\right) + y(t)\left(2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right)\right]$$

$$C = \left[2x(t) - x(t-h)\right]^2 + \left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2 - L^2$$

Dunque l'iterazione di Newton è:

$$\begin{cases} \gamma_{n+1} = \gamma_n - \dfrac{A\gamma_n^2 + B\gamma_n + C}{2A\gamma_n + B} \\ \text{se } \left| \dfrac{A\gamma_n^2 + B\gamma_n + C}{2A\gamma_n + B} \right| < \varepsilon \\ \text{fermati e dai } \gamma_{n+1} \text{ come output} \end{cases}$$

L'algoritmo diventa:

1) Usando $q(0)$ e $v(0)$ costruisci $q(h)$
2) Ripeti quanto segue fino ad arrivare a T
   1) Calcola A, B, C
   2) Usa Newton per trovare una buona approssimazione di γ
   3) $\vec{q}(t+h) = 2\left(1 + \frac{h^2}{m}\gamma\right)\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) - h^2\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$
   4) $\vec{v}(t) = \frac{1}{2h}\left[\vec{q}(t+h) - \vec{q}(t-h)\right]$

Fine

Provo ora a generalizzare: N particelle
ℓ vincoli

Sia $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} \vec{q}_1(t) \\ \vec{q}_2(t) \\ \vdots \\ \vec{q}_N(t) \end{pmatrix}$ dove $\vec{q}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix}$

Sulla particella i-esima agirà la forza $\vec{F}_i$
(risultante delle forze non vincolari agenti sulla particella i-esima)

Indico con $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{F}_1}{m_1} \\ \frac{\vec{F}_2}{m_2} \\ \vdots \\ \frac{\vec{F}_N}{m_N} \end{pmatrix}$

Il passo dell'algoritmo sarà dato da:

$$\vec{\tilde{q}}(t+h) = 2\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) + h^2 \vec{a}$$

$$\delta \vec{q}_i(t+h) = \frac{h^2}{m_i} \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \nabla_i \sigma_k \Big|_t$$

i γ non dipendono da i

il gradiente rispetto $\vec{q}_i$ di σ_k
vincolo k-esimo

$$\delta \vec{q}(t+h) = \begin{pmatrix} \delta \vec{q}_1(t+h) \\ \vdots \\ \delta \vec{q}_N(t+h) \end{pmatrix}$$

ATTENZIONE! LE γ_k DIPENDONO DAL TEMPO

$$\vec{q}(t+h) = \vec{\tilde{q}}(t+h) + \delta \vec{q}(t+h)$$

La condizione da imporre ora è che (indicando esplicitamente la dipendenza dalle γ_k):

$$\vec{q}(t+h, \{\gamma_k\}) = \vec{\tilde{q}}(t+h) + \delta\vec{q}(t+h, \{\gamma_k\})$$

sia tale che:

$$\sigma_i(\vec{q}(t+h, \{\gamma_k\})) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, \ell$$

Poiché siamo interessati solo al caso di vincoli rigidi come i seguenti:

$$\| \vec{q}_j - \vec{q}_i \|^2 - d_{ij}^2 = 0 \qquad \forall t$$

(nei calcoli che seguono $t+h, \{\gamma_k\}$ vengono nascosti)

Studiamo questo caso in particolare, ed osserviamo che detto $r \in \{1, \dots, \ell\}$ il vincolo r-esimo che lega la particella i-esima a quella j-esima, allora:

$$\sigma_r(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = \| \vec{q}_j - \vec{q}_i \|^2 - d_{ij}^2$$

risulta

$$\sigma_r = \| \vec{\tilde{q}}_j + \delta\vec{q}_j - \vec{\tilde{q}}_i - \delta\vec{q}_i \|^2 - d_{ij} =$$

$$= \underbrace{\| \vec{\tilde{q}}_j - \vec{\tilde{q}}_i \|^2}_{\text{non dipende da } \gamma} + \underbrace{\| \delta\vec{q}_j - \delta\vec{q}_i \|^2}_{\text{dipende da } \gamma^2} + \underbrace{2(\vec{\tilde{q}}_j - \vec{\tilde{q}}_i)\cdot(\delta\vec{q}_j - \delta\vec{q}_i)}_{\text{dipende da } \gamma} \underbrace{- d_{ij}}_{\text{non dipende da } \gamma}$$

$$\delta\vec{q}_j - \delta\vec{q}_i = h^2 \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \underbrace{\left[\left(\frac{\nabla_j}{m_j} - \frac{\nabla_i}{m_i} \right) \sigma_k \right]_t}_{}$$

questa quantità è all'istante t, quindi è fissato quando stiamo calcolando $\{\gamma_k\}$ da cui poi calcoliamo $q(t+h)$

Dunque:

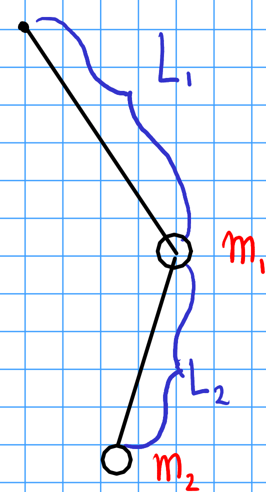
$$h^4 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{h=1}^{\ell} \gamma_k \gamma_h \left[\left(\frac{\nabla_j}{m_j} - \frac{\nabla_i}{m_i}\right)\sigma_k\right]_t \left[\left(\frac{\nabla_j}{m_j} - \frac{\nabla_i}{m_i}\right)\sigma_h\right]_t +$$

$$+2h^2\left(\tilde{\vec{q}}_j - \tilde{\vec{q}}_i\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\ell}\gamma_k\left[\left(\frac{\nabla_j}{m_j} - \frac{\nabla_i}{m_i}\right)\sigma_k\right]_t\right)+$$

$$+\left\|\tilde{\vec{q}}_j-\tilde{\vec{q}}_i\right\|^2 - d_{ij}^2 = 0$$

Tutto ciò che ho scritto dopo è follia.

Proviamo cosa accade per il doppio pendolo:



Abbiamo due vincoli:

$$\sigma_1(\vec{q}_1) = \|\vec{q}_1\|^2 - L_1^2$$

$$\sigma_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|^2 - L_2^2$$

$$\nabla_1 \sigma_1\big|_t = 2\,\vec{q}_1(t) \qquad \nabla_2 \sigma_1\big|_t = 0$$

$$\nabla_1 \sigma_2\big|_t = 2\left(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)\right) \qquad \nabla_2 \sigma_2\big|_t = 2\left(\vec{q}_2(t) - \vec{q}_1(t)\right)$$

Da cui abbiamo due equazioni da soddisfare:

$\sigma_1)$ $$h^4 \sum_{k=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} \gamma_k \gamma_h \left[\frac{\nabla_1}{m_1}\sigma_k\right]_t \cdot \left[\frac{\nabla_1}{m_1}\sigma_h\right]_t + 2h^2\, \tilde{\vec{q}}_1 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2}\gamma_k \frac{\nabla_1}{m_1}\sigma_k\right) + \|\tilde{\vec{q}}_1\|^2 - L_1^2 = 0$$

$$\gamma_1^2\, 4\frac{h^4}{m_1^2}\|\vec{q}_1(t)\|^2 + 4\gamma_1\frac{h^2}{m_1}\,\tilde{\vec{q}}_1(t+h)\cdot\vec{q}_1(t) + \|\tilde{\vec{q}}_1(t+h)\|^2 - L_1^2 = 0$$

$\gamma_2)$ $$h^4\sum_{k=1}^{2}\sum_{h=1}^{2}\gamma_k\gamma_h\left[\left(\frac{\nabla_2}{m_2}-\frac{\nabla_1}{m_1}\right)\sigma_k\right]_t\cdot\left[\left(\frac{\nabla_2}{m_2}-\frac{\nabla_1}{m_1}\right)\sigma_h\right]_t+2h^2\left(\tilde{\vec{q}}_2-\tilde{\vec{q}}_1\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{2}\gamma_k\left[\left(\frac{\nabla_2}{m_2}-\frac{\nabla_1}{m_1}\right)\sigma_k\right]_t\right)+$$
$$+\|\tilde{\vec{q}}_2-\tilde{\vec{q}}_1\|-L_2^2=0$$

$$h^4\left\{\gamma_1^2\frac{4}{m_1^2}\|\vec{q}_1(t)\|^2+2\gamma_1\gamma_2\left(\frac{2}{m_1}\vec{q}_1(t)\right)\cdot\left[2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(\vec{q}_2(t)-\vec{q}_1(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\gamma_2^2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2\|\vec{q}_2(t)-\vec{q}_1(t)\|^2\right\}+2h^2\left(\tilde{\vec{q}}_2(t+h)-\tilde{\vec{q}}_1(t+h)\right)\cdot\left[-\frac{2}{m_1}\gamma_1\vec{q}_1(t)+\right.$$

$$\left.+2\gamma_2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(\vec{q}_2(t)-\vec{q}_1(t)\right)\right]+\|\tilde{\vec{q}}_2(t+h)-\tilde{q}_1(t+h)\|^2-L_2^2=0$$

$\gamma_1)$ $$A_1\gamma_1^2+B_1\gamma_1+C_1=0$$

con
$$A_1=4\frac{h^4}{m_1^2}\|\vec{q}_1(t)\|^2$$
$$B_1=4\frac{h^2}{m_1}\tilde{\vec{q}}_1(t+h)\cdot\vec{q}_1(t)$$
$$C_1=\|\tilde{q}_1(t+h)\|^2-L_1^2$$

Da questa equazione usando newton possiamo ricavare γ_1

$\gamma_2)$ Ora γ_1 è noto, quindi definiamo le costanti in modo da avere
$$A_2\gamma_2^2+B_2\gamma_2+C_2=0$$

dove
$$A_2=h^4\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2\|\vec{q}_2(t)-\vec{q}_1(t)\|^2$$
$$B_2=2h^4\gamma_1\left(\frac{2}{m_1}\vec{q}_1(t)\right)\cdot\left[2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(\vec{q}_2(t)-\vec{q}_1(t)\right)\right]+$$
$$+4h^2\left(\tilde{\vec{q}}_2(t+h)-\tilde{\vec{q}}_1(t+h)\right)\cdot\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(\vec{q}_2(t)-\vec{q}_1(t)\right)$$

$$C_2 = \frac{4h^4}{m_1^2}\gamma_1^2 \|q_1(t)\|^2 - 4\frac{h^2}{m_1}\left(\vec{\tilde{q}}_2(t+h) - \vec{\tilde{q}}_1(t+h)\right)\gamma_1 \cdot \vec{q}_1(t) +$$

$$+ \|\vec{\tilde{q}}_2(t+h) - \vec{\tilde{q}}_1(t+h)\|^2 - L_2^2$$

Newton:

Ipotesi iniziale: $\gamma_i^{(0)} = -\frac{C_i}{B_i}$ per $i = 1, 2$

$$\gamma_i^{(n+1)} = \gamma_i^{(n)} - \frac{A\gamma_i^{(n)^2} + B\gamma_i^{(n)^2} + C\gamma_i^{(n)^2}}{2A\gamma_i^{(n)} + B}$$

Arrestare le iterazioni quando

$$\left| \frac{A\gamma_i^{(n)^2} + B\gamma_i^{(n)^2} + C\gamma_i^{(n)^2}}{2A\gamma_i^{(n)} + B} \right| < \varepsilon$$

e ritornare $\gamma_i^{(n+1)}$

Algoritmo complessivo:

1) Da $\vec{q}(0)$ e $\vec{v}(0)$ calcolo $\vec{q}(h) = \vec{q}(0) + h\vec{v}(0)$

2) Ripeti quanto segue fino ad arrivare a T:

   1) Ricavo $\vec{\tilde{q}}(t+h)$ da $\vec{q}(t)$ e $\vec{q}(t-h)$

   2) Calcola A_1, B_1, C_1

   3) Newton per ricavare γ_1

   4) Calcola A_2, B_2, C_2

5) Newton per ricavare γ_2

6) Calcolo $\vec{q}(t+h) = \tilde{\vec{q}}(t+h) + \delta\vec{q}(t+h, \{\gamma_k\})$

7) Calcolo $\vec{v}(t) = \frac{1}{2h}\left[\vec{q}(t+h) - \vec{q}(t-h)\right]$

Qui ricomincia la ragione

Sia $r \in \{1, \dots, \ell\}$ un vincolo. Esso agirà sulle particelle i, j

Sia K un altro vincolo, allora:

$$a_{rK} \triangleq \left(\frac{\nabla_i}{m_i} - \frac{\nabla_j}{m_j}\right)\sigma_K \quad \text{con } i > j$$

(con la convenzione opposta cambierebbe solo il segno)

Diciamo due vincoli adiacenti se hanno una particella in comune.

$\vec{a}_{rK} = 0$ se r e K non sono adiacenti, infatti in quel caso

$$\sigma_K = \|q_\alpha - q_\beta\|^2 - d_{\alpha\beta}^2 \quad \text{con } \alpha \text{ e } \beta \text{ diversi da } i \text{ e } j$$

Sia $r = K$.

$$\vec{a}_{rK} = \left(\frac{\nabla_i}{m_i} - \frac{\nabla_j}{m_j}\right)\left[\|q_i - q_j\|^2 - d_{ij}^2\right] = \frac{1}{m_i} 2(\vec{q}_i - \vec{q}_j) - \frac{1}{m_j} 2(\vec{q}_j - \vec{q}_i) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)(\vec{q}_i - \vec{q}_j)$$

Sia $r \neq K$ ma adiacenti rispetto i:

$$\vec{a}_{rk} = \left(\frac{\nabla_i}{m_i} - \frac{\nabla_j}{m_j}\right)\left[\|q_i - q_\alpha\|^2 - d_{i\alpha}^2\right] = \frac{2}{m_i}\left(\vec{q}_i - \vec{q}_\alpha\right)$$

Sia $r \neq K$ ma adiacenti rispetto la j:

$$\vec{a}_{rk} = \left(\frac{\nabla_i}{m_i} - \frac{\nabla_j}{m_j}\right)\left[\|q_j - q_\alpha\|^2 - d_{j\alpha}^2\right] = -\frac{2}{m_j}\left(\vec{q}_j - \vec{q}_\alpha\right) = \frac{2}{m_j}\left(\vec{q}_\alpha - \vec{q}_j\right)$$

Inoltre, in maniera analoga $r \mapsto \|q_i - q_j\|^2 - d_{ij}^2 \triangleq c_r$, $\vec{b}_r = \vec{q}_i - \vec{q}_j$

Così otteniamo ℓ equazioni da soddisfare:

$$h^4 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{h=1}^{\ell} \gamma_k \gamma_h \left[\left(\frac{\nabla_i}{m_i} - \frac{\nabla_j}{m_j}\right)\sigma_k\right]_t \left[\left(\frac{\nabla_i}{m_i} - \frac{\nabla_j}{m_j}\right)\sigma_h\right]_t +$$

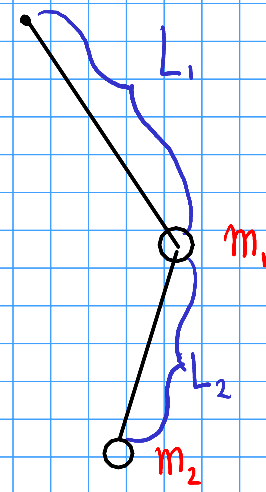
$$+ 2h^2 \left(\vec{\tilde{q}}_j - \vec{\tilde{q}}_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \left[\left(\frac{\nabla_i}{m_i} - \frac{\nabla_j}{m_j}\right)\sigma_k\right]_t\right) +$$

$$+ \left\|\vec{\tilde{q}}_i - \vec{\tilde{q}}_j\right\|^2 - d_{ij}^2 = 0$$

diventa:

$$h^4 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{h=1}^{\ell} \gamma_k \gamma_h \, \vec{a}_{rk} \cdot \vec{a}_{rh} + 2h^2 \sum_{k=0}^{\ell} \gamma_k \quad \vec{b}_r \cdot \vec{a}_{rk} + c_r = 0 \quad \forall r = 1, \dots, \ell$$

Riproviamo a studiare il caso del doppio pendolo:



$$\vec{a}_{11} = \left(\frac{\nabla_1}{m_1}\right)\left(\|\vec{q}_1\|^2 - L_1^2\right) = \frac{1}{m_1} 2\vec{q}_1 = \frac{2}{m_1}\vec{q}_1$$

$$\vec{a}_{12} = \left(\frac{\nabla_1}{m_1}\right)\left(\|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|^2 - L_2^2\right) = \frac{2}{m_1}\left(\vec{q}_1 - \vec{q}_2\right)$$

$$\vec{a}_{21} = \left(\frac{\nabla_2}{m_2} - \frac{\nabla_1}{m_1}\right)\left(\|\vec{q}_1\|^2 - L_1^2\right) = -\frac{1}{m_1} 2\vec{q}_1 = -\frac{2}{m_1}\vec{q}_1$$

$$\vec{a}_{22} = \left(\frac{\nabla_2}{m_2} - \frac{\nabla_1}{m_1}\right)\left(\|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|^2 - L_2^2\right) = \frac{1}{m_2} 2\left(\vec{q}_2 - \vec{q}_1\right) - \frac{1}{m_1} 2\left(\vec{q}_1 - \vec{q}_2\right) = 2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(\vec{q}_2 - \vec{q}_1\right)$$

$$\vec{b}_1 = \vec{\tilde{q}}_1(t+h) \qquad \vec{b}_2 = \vec{\tilde{q}}_2(t+h) - \vec{\tilde{q}}_1(t+h)$$

$$c_1 = \|\vec{\tilde{q}}_1(t+h)\|^2 - L_1^2 \qquad c_2 = \|\vec{\tilde{q}}_2(t+h) - \vec{\tilde{q}}_1(t+h)\|^2 - L_2^2$$

$$h^4 \sum_{k=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} \gamma_k \gamma_h \, \vec{a}_{1k} \cdot \vec{a}_{1h} = \frac{4h^4}{m_1^2}\left[\gamma_1^2 \|\vec{q}_1(t)\|^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \left[\|\vec{q}_1(t)\|^2 - \vec{q}_1(t)\cdot\vec{q}_2(t)\right] + \gamma_2^2 \|\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)\|^2\right]$$

$$2h^2 \sum_{k=1}^{2} \gamma_k \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_{1k} = 4h^2\left[\gamma_1 \frac{1}{m_1} \vec{\tilde{q}}_1(t+h)\cdot\vec{q}_1(t) + \gamma_2 \frac{1}{m_1}\vec{\tilde{q}}_1(t+h)\cdot\left(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)\right)\right]$$

$$h^4 \sum_{k=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} \gamma_k \gamma_h \, \vec{a}_{2k} \cdot \vec{a}_{2h} = 4h^4\left[\gamma_1^2 \frac{1}{m_1^2}\|\vec{q}_1(t)\|^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \frac{1}{m_1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left[\|\vec{q}_1(t)\|^2 - \vec{q}_1(t)\cdot\vec{q}_2(t)\right] + \gamma_2^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 \|\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)\|^2\right]$$

$$2h^2 \sum_{k=1}^{2} \gamma_k \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_{2k} = 4h^2\left[\gamma_1 \frac{1}{m_1}\left(\vec{\tilde{q}}_1(t+h) - \vec{\tilde{q}}_2(t+h)\right)\cdot\vec{q}_1(t) + \gamma_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(\vec{\tilde{q}}_1(t+h) - \vec{\tilde{q}}_2(t+h)\right)\cdot\left(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)\right)\right]$$

Inizializziamo $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{pmatrix}$ come segue:

$$4h^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1}\vec{\tilde{q}}_1 \cdot \vec{q}_1 & \frac{1}{m_1}\vec{\tilde{q}}_1 \cdot \left(\vec{q}_1 - \vec{q}_2\right) \\ \frac{1}{m_1}\left(\vec{\tilde{q}}_1 - \vec{\tilde{q}}_2\right)\cdot\vec{q}_1 & \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(\vec{\tilde{q}}_1 - \vec{\tilde{q}}_2\right)\cdot\left(\vec{q}_1 - \vec{q}_2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^2 - \|\vec{\tilde{q}}_1\|^2 \\ L_2^2 - \|\vec{\tilde{q}}_1 - \vec{\tilde{q}}_2\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\delta \vec{q}_i(t+h) = \frac{h^2}{m_i} \sum_{k=1} \gamma_k \nabla_i \sigma_k \Big|_t$$

Calcolo $\nabla_i \sigma_k \big|_t$:

$$\nabla_1 \sigma_1 \big|_t = \nabla_1 \left(\|\vec{q}_1\|^2 - L_1^2 \right) \Big|_t = 2\, \vec{q}_1(t)$$

$$\nabla_1 \sigma_2 \big|_t = \nabla_1 \left(\|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|^2 - L_2^2 \right) \Big|_t = 2 \left(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t) \right)$$

$$\nabla_2 \sigma_1 \big|_t = \nabla_2 \left(\|\vec{q}_1\|^2 - L_1^2 \right) \Big|_t = 0$$

$$\nabla_2 \sigma_2 \big|_t = \nabla_2 \left(\|\vec{q}_2 - \vec{q}_1\|^2 - L_2^2 \right) \Big|_t = 2 \left(\vec{q}_2(t) - \vec{q}_1(t) \right)$$

Dunque:

$$\delta \vec{q}_1 = \frac{2h^2}{m_1} \left[\gamma_1 \vec{q}_1(t) + \gamma_2 \left(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t) \right) \right]$$

$$\delta \vec{q}_2 = \frac{2h^2}{m_2} \gamma_2 \left(\vec{q}_2(t) - \vec{q}_1(t) \right)$$