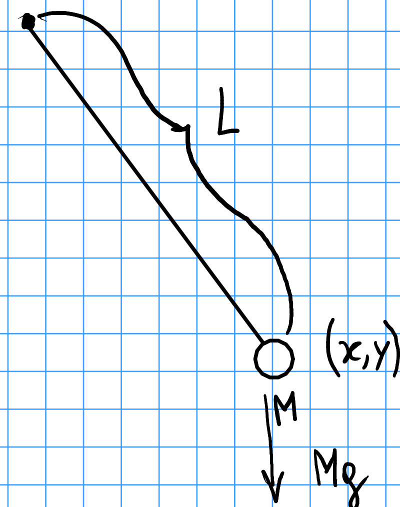
$$q(t) = (x, y)$$



$$\vec{q}(t+h) = 2\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) + \frac{h^2}{m}\vec{F}(t) + \delta\vec{q}(t+h)$$

dove $\delta\vec{q}(t+h) = \frac{h^2}{m}\gamma\,\nabla\sigma\big|_t$

ma $\sigma = x^2+y^2-L^2 \rightarrow \nabla\sigma = 2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\vec{q}$

dunque $\delta\vec{q}(t+h) = \frac{h^2}{m}\gamma\,2\,\vec{q}(t)$

Le γ risolvono $\sigma(q(t+h,\gamma)) = 0$ a)

Significa che scelgo γ in modo da imporre il vincolo

Per esplicitare meglio questa equazione, scrivo meglio $\vec{q}(t+h)$:

$$\vec{q}(t+h) = 2\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) - h^2\begin{pmatrix}0\\g\end{pmatrix} + 2\frac{h^2}{m}\gamma\,\vec{q}(t) =$$

$$= 2\left(1+\frac{h^2}{m}\gamma\right)\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) - h^2\begin{pmatrix}0\\g\end{pmatrix}$$

Dunque

$$\sigma(q(t+h,\gamma)) = \left[2x(t) + 2\frac{h^2}{m}\gamma x(t) - x(t-h)\right]^2 + \left[2y(t) + 2\frac{h^2}{m}\gamma y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2 - L^2 = 0$$

$$4\frac{h^4}{m^2}\gamma^2 x^2(t) + 4\frac{h^4}{m^2}\gamma^2 y^2(t) + 4\frac{h^2}{m}\gamma x(t)\left[2x(t) - x(t-h)\right] + 4\frac{h^2}{m}\gamma y(t)\left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right] =$$

$$= L^2 - \left[2x(t) - x(t-h)\right]^2 - \left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2 \qquad \text{b)}$$

Vogliamo trovare γ che risolve questo problema, potremmo farlo visto che è un'eq. di secondo grado coi conti, ma per coerenza visto che se ci sono più γ non possiamo farlo, proviamo per via iterativa partendo dal guess iniziale:

$$\gamma_0 = \frac{L^2 - \left[2x(t) - x(t-h)\right]^2 - \left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2}{4\frac{h^2}{m}\left[x(t)\left(2x(t) - x(t-h)\right) + y(t)\left(2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right)\right]}$$

Magari usando il metodo di Newton:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n - \frac{\sigma\left(q(t+h, \gamma_n)\right)}{\frac{\partial(\sigma \circ q)}{\partial \gamma}(t+h, \gamma_n)}$$

b) può essere scritta come

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = 0$$

dove

$$A = 4\frac{h^4}{m^2}\left(x^2(t) + y^2(t)\right)$$

$$B = 4\frac{h^2}{m}\left[x(t)\left(2x(t) - x(t-h)\right) + y(t)\left(2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right)\right]$$

$$C = \left[2x(t) - x(t-h)\right]^2 + \left[2y(t) - y(t-h) - h^2 g\right]^2 - L^2$$

Dunque l'iterazione di Newton è:

$$
\begin{cases}
\gamma_{n+1} = \gamma_n - \dfrac{A\gamma_n^2 + B\gamma_n + C}{2A\gamma_n + B} \\
\text{se } \left| \dfrac{A\gamma_n^2 + B\gamma_n + C}{2A\gamma_n + B} \right| < \varepsilon \\
\text{fermati e dai } \gamma_{n+1} \text{ come output}
\end{cases}
$$

L'algoritmo diventa:

1) Usando $q(0)$ e $v(0)$ costruisci $q(h)$
2) Ripeti quanto segue fino ad arrivare a T
   1) Calcola A, B, C
   2) Usa Newton per trovare una buona approssimazione di γ
   3) $\vec{q}(t+h) = 2\left(1 + \frac{h^2}{m}\gamma\right)\vec{q}(t) - \vec{q}(t-h) - h^2\begin{pmatrix}0\\g\end{pmatrix}$
   4) $\vec{v}(t) = \frac{1}{2h}\left[\vec{q}(t+h) - \vec{q}(t-h)\right]$

Fine