

RICERCA OPERATIVA

Prof. Marco Trubian
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018



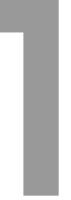
Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
27 gennaio 2018

Indice

1 Modelli di programmazione lineare	4
1.1 Formulazione di un modello PL	4
1.2 Modelli di pianificazione della produzione	4
1.3 Modelli di miscelazione	5
1.4 Modelli di flusso su rete	5
1.4.1 Problema di flusso a costo minimo	5
1.4.2 Problema del cammino orientato di costo minimo	5
1.4.3 Problema del massimo flusso	6
1.4.4 Problema di trasporto	6
1.4.5 Problema dell'assegnamento	7
1.5 Modelli multi periodo	7
1.6 Riassunto	8
2 Modelli di programmazione intera	9
2.1 Modelli di taglio ottimo	9
2.2 Modelli dello zaino	9
2.3 Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento	10
2.4 Modelli di localizzazione	10
2.4.1 Capacitated Plant Location (CPL)	10
2.5 Modello di caricamento di contenitori	11
2.6 Modelli di copertura, di riempimento e di partizionamento d'insieme	11
2.6.1 Modelli di copertura o set-covering	11
2.6.2 Modelli di riempimento d'insieme o set-packing	11
2.6.3 Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning	12
3 Modelli di programmazione lineare	13
3.1 Geometria poliedrale	13
3.1.1 Combinazione di vettori	13
3.1.2 Poliedro	13
3.2 Problema duale	13
3.2.1 Regole di simmetria generali	14
3.2.2 Condizioni sufficienti di ottimalità	14
3.2.3 Relazioni tra primale e duale	14
3.2.4 Teorema degli scarti complementari	14
3.3 Analisi di Sensitività	15
3.3.1 Variazione di un costo	15
3.3.2 Variazione di una risorsa	15
3.3.3 Variazione di un vincolo	15
3.3.4 Ulteriore variabile	15
3.3.5 Ulteriore vincolo	15
3.4 Interpretazioni economiche della dualità	15
3.4.1 Prezzo ombra	15
3.5 Esercizi - Risoluzione grafica di PL	17
3.5.1 Esercizio 2.6	17
3.5.2 Risoluzione esercizio 2.6	17
3.5.3 Esercizio 2.7	17
3.5.4 Risoluzione esercizio 2.7	18
3.5.5 Esercizio 2.8	18
3.5.6 Risoluzione esercizio 2.8	18
3.5.7 Esercizio 2.9	19
3.5.8 Risoluzione esercizio 2.9	19

4 Algoritmo del Simplex	20
5 Teoria di programmazione lineare intera	21
5.1 Rilassamenti	22
5.1.1 Rilassamento per eliminazione di vincoli	22
5.1.2 Rilassamento lagrangiano	22
5.1.3 Problema lagrangiano duale	22
6 Metodi di programmazione lineare intera	23
6.1 Branch & Bound	23
6.2 Algoritmo dei piani di taglio	23
7 Problema del massimo flusso	24
7.1 Algoritmo di Ford e Fulkerson	24
7.2 Taglio di capacità minima	24
7.3 Flusso massimo a costo minimo	24
7.4 Algoritmo di Prim	25
A Struttura del tema d'esame	26
A.1 Primo esercizio (8 punti)	26
A.1.1 Problema di Programmazione Lineare	26
A.1.2 Problema di Programmazione Lineare Grafico	27
A.2 Secondo esercizio	27
A.2.1 Problema di Minimo con Tableau [3]	27
A.3 Terzo Esercizio	27
A.3.1 Problema di Programmazione Lineare Intero	27
A.3.2 Modello di Programmazione Lineare con Grafi [3]	27
A.3.3 Modello di Programmazione Lineare Intero [4]	27
A.3.4 Branch & Bound, Problema dello zaino [7]	28
A.4 Quarto esercizio: Formulare un modello di Programmazione Lineare [7]	28
A.5 Quinto Esercizio: Grafi	28
A.6 Domande di teoria	29
A.6.1 Domande su Branch & Bound	29
A.6.2 Domande su problema duale	30
A.6.3 Domande su rilassamento del problema lineare continuo	31
A.6.4 Domande su Analisi di sensitività	32
A.6.5 Domande varie	32
B Temi d'esame risolti	33
B.1 Esame del 04/07/2016	33
B.1.1 Esercizio 1	33
B.1.2 Soluzione esercizio 1	34
B.1.3 Esercizio 2	35
B.1.4 Soluzione esercizio 2	36
B.1.5 Esercizio 3	36
B.1.6 Risoluzione esercizio 3	37
B.2 Esame del 24/01/2017	38
B.2.1 Esercizio 1	38
B.2.2 Soluzione esercizio 1	39
B.2.3 Esercizio 2	40
B.2.4 Soluzione esercizio 2	40
B.2.5 Esercizio 3	42
B.2.6 Soluzione esercizio 3	42
B.2.7 Esercizio 4	43
B.2.8 Soluzione esercizio 4	44
C Teoria	46
C.1 Lista degli argomenti	46
C.2 Criterio di ottimalità della base	46
C.3 Teorema Minkowsky-Weyl	47
C.4 Esistenza di vertice ottimo	47
C.5 Teorema fondamentale della programmazione lineare	47
C.6 Regola di Bland	49

C.7 Teorema di convergenza del simplesso	49
C.8 Lemma di Farkas	50
C.9 Il duale del duale è il primale	50
C.10 Teorema di dualità forte	51
C.11 Teorema di dualità debole	51
C.12 Condizioni di ottimalità	51
C.13 Matrici totalmente unimodulari	52
C.14 Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo	52
C.15 MAX-FLOW = MIN-CUT	53



Modelli di programmazione lineare

1.1 Formulazione di un modello PL

Un modello di programmazione lineare si ottiene assumendo che **funzione obiettivo** e **vincoli** e viene espresso come:

$$\begin{aligned} \min x(x) &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &\geq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &\geq b_m \end{aligned}$$

Esso include anche i vincoli di non negatività delle variabili di decisione:

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

In forma matriciale (compatta) il modello di PL può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Dove $c \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo mentre $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti dei vincoli ed A è la matrice dei coefficienti delle variabili di decisione nei vincoli.

1.2 Modelli di pianificazione della produzione

Dato un numero di risorse m disponibile per la produzione di n prodotti, a_{ij} con $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ la quantità di risorsa i necessaria per produrre una unità di prodotto j , b_i la quantità della risorsa disponibile i e p_j il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita di un prodotto j , il modello PL è costituito come segue:

$$\begin{aligned} \max z(x) &= \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Figura 1.1: Modello di pianificazione della produzione

1.3 Modelli di miscelazione

Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità degli m componenti, a_{ij} la quantità di componente i presente nell'ingrediente j mentre b_i rappresenta la quantità minima di componente i richiesto nella miscela. Il costo unitario dell'ingrediente j è indicato con c_j .

$$\begin{aligned} \max z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Figura 1.2: Modello di miscelazione

Ulteriori vincoli tipici potrebbero essere la presenza di un componente i minore di un valore d_i :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq d_i$$

1.4 Modelli di flusso su rete

1.4.1 Problema di flusso a costo minimo

Dato un grafo orientato $\mathcal{D} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ dove \mathcal{N} è l'insieme dei nodi, mentre \mathcal{A} è l'insieme degli archi, si indica con b_i con $i \in \mathcal{N}$ la fornitura (se positivo) o domanda (se negativo) del nodo i e con c_{ij} , l_{ij} e u_{ij} rispettivamente il costo, la capacità minima e massima dell'arco (i, j) , $\forall (i, j) \in \mathcal{A}$. La sestupla $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, b, c, l, u)$ si definisce **rete**.

Il vincolo afferma che la differenza tra la quantità di flusso entrante e la quantità uscente dal nodo deve essere uguale alla fornitura / domanda.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

Figura 1.3: Problema di flusso a costo minimo

1.4.2 Problema del cammino orientato di costo minimo

Basandosi sul caso base visto nel **problema di flusso a costo minimo 1.4.1** aggiungiamo i nodi s (origine) e t (destinazione), considerando quindi $i \neq s \neq t$ e le forniture $b_i = 0$, $b_s = 1$ e $b_t = -1$:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= b_s = 1 \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -1 \end{aligned}$$

Figura 1.4: Problema del cammino orientato di costo minimo

1.4.3 Problema del massimo flusso

Basandosi sempre sul caso base del **problema di flusso a costo minimo 1.4.1**, poniamo i costi c_{ij} , capacità minime l_{ij} e le forniture b_i a 0. L'obiettivo posto è di inviare la massima quantità di flusso possibile da un nodo di ingresso s (detto sorgente) ed uno di uscita t (detto pozzo). Viene indicata con v la fornitura del nodo s (che non è un parametro ma una variabile dipendente dalle x_{ij} , rappresentante il flusso netto uscente da s)

$$\begin{aligned} \min z(x) &= v \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= b_s = v \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -v \\ x_{ij} &\leq u_{ij} \quad (i,j) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Figura 1.5: Problema del massimo flusso

1.4.4 Problema di trasporto

Dati n nodi di origine (stabilimenti di produzione) con una produzione di $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ e m nodi di destinazione (punti vendita), ciascuno caratterizzato da una domanda $b_j, j \in \{1, \dots, m\}$ ed un costo unitario di trasporto c_{ij} . L'obiettivo del problema è di determinare il quantitativo di prodotto da inviare da ciascuna origine verso ciascuna destinazione in modo tale da minimizzare il costo complessivo di trasporto rispettando i vincoli sulla quantità di prodotto disponibile in ciascuna origine e garantendo il soddisfacimento delle domande di ogni destinazione.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &\leq a_i \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= b_j \quad \forall j \end{aligned}$$

Figura 1.6: Problema di trasporto

Per ricondursi al caso in cui vale il vincolo $\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i$ è sempre possibile aggiungere una destinazione fittizia $m+1$ che funge da discarica.

Una variante del problema di trasporto considera la possibilità di includere p nodi intermedi di transito, che possono scambiare il materiale anche tra loro. Questo porta il numero delle origini e destinazioni a divenire $n+p$ e $m+p$ (ogni origine può inviare a p nuovi nodi ed ogni destinazione può ricevere da p nuovi nodi). Diviene necessario aggiungere due vincoli ulteriori per modellare i nodi p come intermedi, cioè che ogni punto di transito abbia un flusso entrante coincidente con il flusso uscente e che non ponga ulteriori limitazioni:

$$\begin{aligned}
 \min z(x) &= \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{m+p} c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} &\leq a_i \quad \forall i \\
 \sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} &= b_j \quad \forall j \\
 \sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} &= \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall i \\
 \sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} &= \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall j
 \end{aligned}$$

Figura 1.7: Problema di trasporto con p nodi intermedi

1.4.5 Problema dell'assegnamento

Supponiamo di avere n oggetti (per esempio lavoratori) ed altrettanti posti (per esempio postazioni di lavoro) associate da un costo di assegnamento c_{ij} . Il problema consiste nel determinare il modo più conveniente di assegnare ogni oggetto i ad uno e un solo posto j . Il problema è a variabili di tipo binario ($x_{ij} \in \{0, 1\}$).

$$\begin{aligned}
 \min z(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall i \\
 \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall j
 \end{aligned}$$

Figura 1.8: Problema dell'assegnamento

Varianti tipiche possono essere sull'assegnare un numero oggetti diverso dal numero di posti, che vanno a modificare i vincoli di uguaglianza a $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$.

1.5 Modelli multi periodo

Modelli in cui viene utilizzata un intervallo di tempo, con $t \in \{1, \dots, T\}$ la generica frazione di tempo, genericamente utilizzata per la minimizzazione dei costi su un intervallo o massimizzazione di un'utilità.

1.6 Riassunto

$$\begin{aligned}\max z(x) &= \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i \quad \forall i \in \mathcal{N}\end{aligned}$$

(a) Modello di pianificazione della produzione

(b) Modello di miscelazione

(c) Problema di flusso a costo minimo

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= b_s = 1 \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min z(x) &= v \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= b_s = v \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -v \\ x_{ij} &\leq u_{ij} \quad (i,j) \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

(d) Problema del cammino orientato di costo minimo

(e) Problema del massimo flusso

(f) Problema di trasporto

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &\leq a_i \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= b_j \quad \forall j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{m+p} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} &\leq a_i \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} &= b_j \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} &= \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} &= \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall j\end{aligned}$$

(h) Problema dell'assegnamento

(g) Problema di trasporto con p nodi intermedi

2

Modelli di programmazione intera

In questi modelli tutte o alcune variabili di decisione sono vincolate ad assumere valori interi o binari. Talvolta è possibile svincolare dall'interessezza tramite il rilassamento continuo, arrotondando poi i valori frazionari ottenuti, con un risultato trascurabile sul soddisfacimento dei vincoli.

2.1 Modelli di taglio ottimo

Obiettivo: Minimizzare lo scarto di prodotto derivato dal taglio di moduli di materiale.

Nel caso base **monodimensionale** si assume di dover tagliare moduli di dimensione D in moduli di dimensioni $d_i, i \in \{1, \dots, m\}$, in numero $r_i, i \in \{1, \dots, m\}$ (per ogni dimensione d_i). Ogni modulo standard può essere tagliato in modo differente, considerando n possibili schemi di taglio: a_{ij} sarà il numero di moduli di dimensione d_i ottenuti da un modulo standard tagliato secondo lo schema j . Per minimizzare lo sfrido (scarto) sarà quindi sufficiente minimizzare il numero di moduli tagliati.

Chiamo x_j il numero di moduli tagliati secondo lo schema j .

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{j=1}^n x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq r_i, \forall i \\ x_j &\geq 0, x_j \in \mathbb{N}, \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.1: Modello di taglio ottimo

Qualora i moduli avessero più dimensioni il problema diviene molto più difficile da risolvere.

2.2 Modelli dello zaino

Obiettivo: Massimizzare il valore degli oggetti nello zaino.

Si ha un insieme di n oggetti, ciascuno con un valore c_j ed un peso p_j e uno zaino con un limite di capacità b .

Chiamo x_j la variabile binaria che indica se aggiungo o meno l'oggetto j -esimo nello zaino.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j &\leq b, \forall i \\ x_j &\in \{0, \dots, 1\}, \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.2: Modello dello zaino

2.3 Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

Obiettivo: Minimizzare i costi di avvio e di produzione.

Avviando una nuova produzione si hanno costi fissi f_j e costi per unità prodotta c_j . Rappresentiamo con $x_j \geq 0$ il numero di prodotti che si decide di produrre, e introduciamo una variabile $y_j \in \{1, 0\}$ che rappresenta se decidiamo o meno di produrre un prodotto j per eliminare la discontinuità all'origine causata dal costo fisso f_j . Per ogni prodotto, consideriamo una domanda b_j ed un vincolo di produzione massima M_j .

$$\begin{aligned} \min z(x, y) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n f_j y_j \\ \min z(x, y) &= \sum_{j=1}^n b_j - x_j \\ x_j &\leq M_j \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.3: Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

2.4 Modelli di localizzazione

Obiettivo: Posizionare centri di servizio in modo da soddisfare la domanda e minimizzare una funzione di costo.

2.4.1 Capacitated Plant Location (CPL)

Posizionamento di impianti di produzione o immagazzinamento di prodotti da cui deve essere trasportato il prodotto a dei punti vendita. Viene modellato tramite un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2, \mathcal{A})$, con \mathcal{N}_1 nodi rappresentanti i siti potenziali e \mathcal{N}_2 i nodi successori. Chiamiamo $d_j, j \in \mathcal{N}_2$ la domanda del nodo successore j – esimo, $q_i, i \in \mathcal{N}_1$ il massimo livello di attività del nodo sito candidato i – esimo, k_{ij} il costo unitario di trasporto da nodo candidato i a nodo successore j , f_i il costo fisso di avviamento del nodo candidato i .

Chiamo $y_i \in \{0, 1\}$ la variabile binaria rappresentante l'approvazione o meno del nodo candidato i – esimo e s_{ij} il flusso di prodotto dal nodo i a j .

$$\begin{aligned} \min z(s, y) &= \sum_{i \in \mathcal{N}_1} \sum_{j \in \mathcal{N}_2} k_{ij} s_{ij} + \sum_{i \in \mathcal{N}_1} f_i y_i \\ \sum_{i \in \mathcal{N}_1} s_{ij} &= d_j, \forall j \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_2} s_{ij} &\leq q_i y_i, \forall i \end{aligned}$$

Figura 2.4: Capacitated Plant Location (CPL)

Modelli più completi considerano una soglia di attivazione minima per considerare l'approvazione di un nodo candidato.

2.5 Modello di caricamento di contenitori

Si tratta di una generalizzazione del problema dello zaino, in cui sono considerati n zaini o contenitori sempre di dimensione uguale q .

Obiettivo: Utilizzare meno contenitori il possibile inserendo tutti gli oggetti.

Ogni oggetto ha un peso p_i , la variabile $x_{ij} \in \{0, 1\}$ è vera quando l'oggetto i è inserito nel contenitore j e $y_j \in \{0, 1\}$ è vera quando il contenitore j è utilizzato.

$$\begin{aligned} \min z(x, y) & \sum_{j=1}^n y_j \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} & = 1, \forall i \\ \sum_{i=1}^m p_i x_{ij} & \leq q y_j, \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.5: Modello di caricamento di contenitori

Un'alternativa di modello è considerare le capacità dei contenitori diverse q_j ed assegnare ad ogni contenitore un costo c_j .

2.6 Modelli di copertura, di riempimento e di partizionamento d'insieme

Definito un insieme I di m elementi ed una collezione $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ di sottoinsiemi di I , ognuno dei quali con un valore c_j , e una sotto-collezione SC di C . Viene usata una matrice A di dimensione $m \times n$ detta *di copertura* il cui elemento $a_{ij} \in \{0, 1\}$ assume valore 1 se $i \in C_j$.

Le variabili di decisione sono $x_j \in \{0, 1\}$ e sono vere se $C_j \in SC$.

2.6.1 Modelli di copertura o set-covering

Obiettivo: Determinare una sotto-collezione SC di valore minimo, detta **copertura**, tale che ogni elemento di I appartenga ad almeno un sottoinsieme di SC .

$$\begin{aligned} \min z(x) & = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \geq 1, \forall i \end{aligned}$$

Figura 2.6: Modelli di copertura o set-covering

2.6.2 Modelli di riempimento d'insieme o set-packing

Obiettivo: Determinare una sotto-collezione SC di valore massimo, detto **riempimento**, tale che ogni elemento di I appartenga ad al più una sotto-collezione di SC .

$$\begin{aligned} \min z(x) & = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq 1, \forall i \end{aligned}$$

Figura 2.7: Modelli di riempimento d'insieme o set-packing

2.6.3 Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning

Obiettivo: Determinare una sotto-collezione SC di valore minimo, detta **partizione**, tale che ogni elemento di I appartenga esattamente ad una sotto-collezione di SC . Essa costituisce sia una **copertura** sia un **riempimento** di I .

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1, \forall i$$

Figura 2.8: Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning

3

Modelli di programmazione lineare

3.1 Geometria poliedrale

3.1.1 Combinazione di vettori

Dati k vettori $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ e k scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il vettore $v = \sum_{j=1}^k \lambda_j v^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ si dice:

Combinazione affine se $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$.

Combinazione conica se $\lambda_j \geq 0 \forall j$.

Combinazione convessa se è sia *conica* che *affine*.

3.1.2 Poliedro

Un poliedro P è intersezione di un numero finito di semispazi.

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Se il poliedro definisce un'area limitata viene chiamato **politopo**.

3.2 Problema duale

Teorema 3.2.1 (Problema duale). Dato un problema P di PL in forma standard (funzione in forma di minimizzazione):

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

ogni soluzione ammissibile \tilde{x} di P è tale che:

$$c^T \tilde{x} \geq b^T \tilde{y}$$

dove \tilde{y} è una soluzione ammissibile del seguente problema D (detto **duale** di P) di PL:

$$\begin{aligned} \max w(y) &= b^T y \\ A^T y &\leq c \end{aligned}$$

3.2.1 Regole di simmetria generali

1. A un vincolo di disegualanza primale corrisponde una variabile vincolata nel duale.
2. A una variabile vincolata in segno nel primale un vincolo di disegualanza nel duale.
3. A un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale.
4. A una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale.
5. Se la funzione del primale è in forma di minimo, nel duale sarà di massimo e viceversa.

Il duale del problema duale è il problema primale.

3.2.2 Condizioni sufficienti di ottimalità

Teorema 3.2.2 (Condizioni sufficienti di ottimalità). Date due soluzioni \tilde{x} e \tilde{y} ammissibili rispettivamente nel problema primale e duale. Se vale la relazione C.10.1:

$$c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$$

Figura 3.1: Condizione sufficiente di ottimalità

allora \tilde{x} e \tilde{y} sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi.

Una soluzione \tilde{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione nel problema duale \tilde{y} che rispetti la relazione C.10.1. In tal caso, sia \tilde{x} che \tilde{y} sono ottime.

3.2.3 Relazioni tra primale e duale

Teorema 3.2.3 (Relazioni tra primale e duale). Dato un problema ed il suo duale, è vera esattamente **una** delle seguenti affermazioni:

- a) I due problemi ammettono soluzioni ottime finite, x^* e y^* rispettivamente, tali da rispettare la relazione C.10.1.
- b) Il problema primale è illimitato inferiormente ed il duale è inammissibile.
- c) Il problema duale è illimitato superiormente ed il primale è inammissibile.
- d) I problemi primale e duale sono entrambi inammissibili.

3.2.4 Teorema degli scarti complementari

Teorema 3.2.4 (Teorema degli scarti complementari o condizioni di ortogonalità). Date due soluzioni $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, soluzioni ammissibili nel problema primale e duale rispettivamente ($a_{ij} \in A$, matrice dei coefficienti dei vincoli nei problemi), esse sono ottime se vale la relazione 3.2 (forma vettoriale di C.10.1):

$$(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \tilde{y}_i) \tilde{x}_j = 0 \quad \forall j$$

Figura 3.2: Condizioni Ortogonalità

3.3 Analisi di Sensitività

Si tratta di un'analisi svolta *dopo* aver identificato la soluzione ottima di un problema di PL volta a determinare la qualità del modello, attraverso la modifica di coefficienti di costo c_j , di risorse b_k , dei vincoli a_{ij} oppure introducendo ulteriori variabili e/o vincoli e osservando in che modo la soluzione ottima va a variare.

3.3.1 Variazione di un costo

Non modifica il poliedro del problema, la soluzione ottima precedente rimane ammissibile ma potrebbe non essere più ottima.

3.3.2 Variazione di una risorsa

Cambia il poliedro del problema (la regione ammissibile) per cui la soluzione ottima potrebbe non essere più ammissibile

3.3.3 Variazione di un vincolo

Va ad introdurre una variazione analoga alla variazione del costo, con l'aggiunta che la matrice A potrebbe diventare invertibile e quindi porterebbe la soluzione di base a non rispettare più le condizioni di ammissibilità o di ottimalità.

3.3.4 Ulteriore variabile

Viene inserita come fosse una variabile precedentemente esistente con costi e coefficienti dei vincoli nulli, che quindi vengono variati con le implicazioni viste nella sezione 3.3.1 e 3.3.3.

3.3.5 Ulteriore vincolo

Si procede analogamente all'aggiunta di variabile.

3.4 Interpretazioni economiche della dualità

Il problema duale può essere interpretato come il problema della determinazione del minimo prezzo a cui all'impresa produttrice converrebbe vendere in blocco le risorse disponibili piuttosto che utilizzarle ai fini produttivi.

3.4.1 Prezzo ombra

Definizione 3.4.1 (Prezzo ombra). Data una variazione δ di una risorsa b_h nel problema primale, con una rispettiva variazione dell'ottimo Δz^* , si definisce **prezzo ombra** la variabile y_h^* del problema duale tale per cui:

$$y_h^* = \frac{\Delta z^*}{\delta}$$

Figura 3.3: Prezzo ombra

Massimizzazione

In un problema in cui la funzione obiettivo è da massimizzare , il prezzo ombra della risorsa h – *esima* sarà:

Non negativo nel caso in cui il vincolo h è del tipo \leq .

Non positivo nel caso in cui il vincolo h è del tipo \geq .

Minimizzazione

In un problema in cui la funzione obiettivo è da minimizzare , il prezzo ombra della risorsa h – *esima* sarà:

Non negativo nel caso in cui il vincolo h è del tipo \geq .

Non positivo nel caso in cui il vincolo h è del tipo \leq .

3.5 Esercizi - Risoluzione grafica di PL

3.5.1 Esercizio 2.6

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura 3.4: Esercizio 2.6

3.5.2 Risoluzione esercizio 2.6

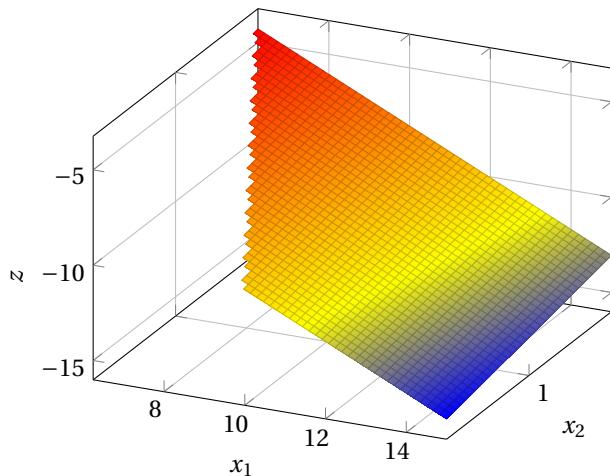
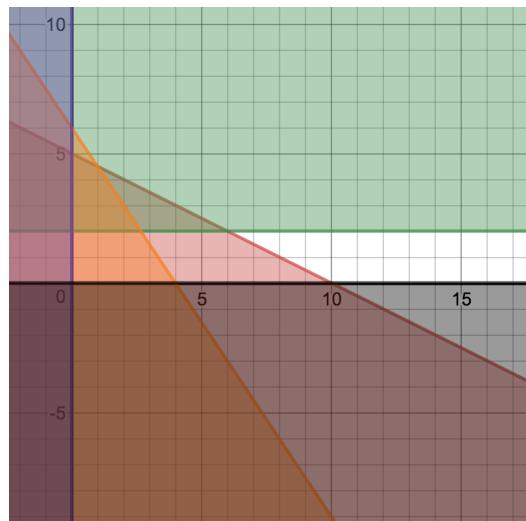
(a) La funzione z (b) I vincoli del problema nello spazio $x_1 - x_2$

Figura 3.5: Risoluzione esercizio 2.6

Il minimo della funzione risulta essere $(-\infty, 0)$ siccome la variabile x_1 non è vincolata. La soluzione quindi è illimitata.

3.5.3 Esercizio 2.7

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 9x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura 3.6: Esercizio 2.7

3.5.4 Risoluzione esercizio 2.7

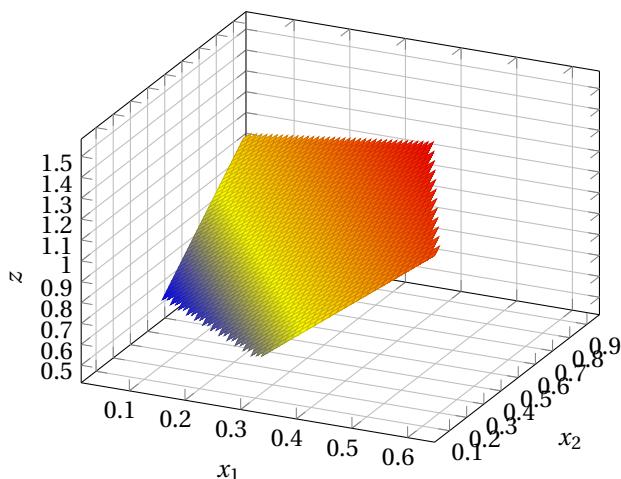
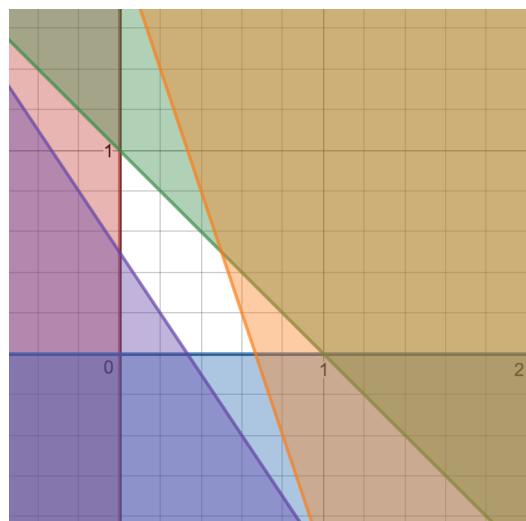
(a) La funzione z (b) I vincoli del problema nello spazio $x_1 - x_2$

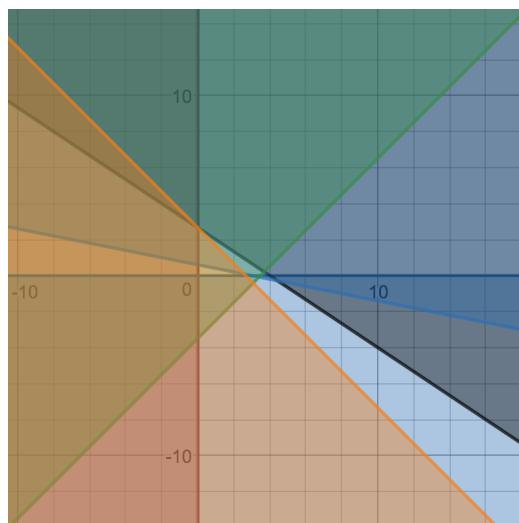
Figura 3.7: Risoluzione esercizio 2.7

3.5.5 Esercizio 2.8

$$\begin{aligned} \min z &= x_2 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 &\geq 7 \\ 3x_1 + 3x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura 3.8: Esercizio 2.8

3.5.6 Risoluzione esercizio 2.8

(a) I vincoli del problema nello spazio $x_1 - x_2$
Figura 3.9: Risoluzione esercizio 2.8

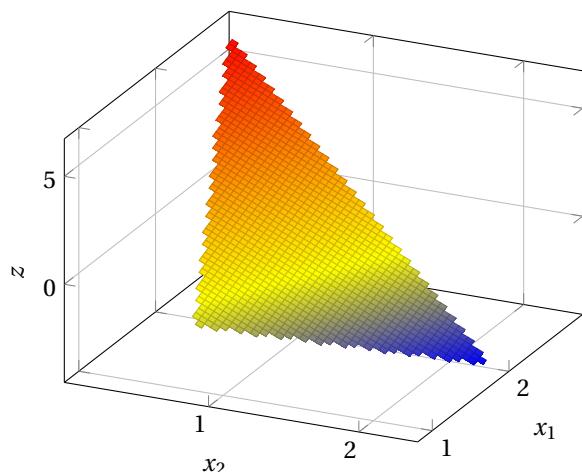
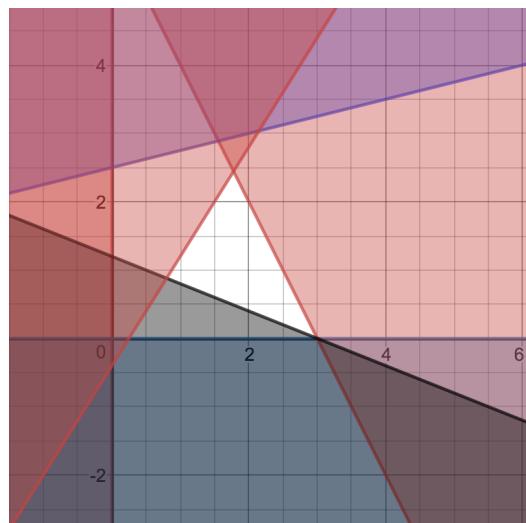
La regione ammissibile è vuota.

3.5.7 Esercizio 2.9

$$\begin{aligned}
 \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\
 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 -x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\
 2x_1 + 5x_2 &\geq 6 \\
 8x_1 - 5x_2 &\geq 2 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Figura 3.10: Esercizio 2.9

3.5.8 Risoluzione esercizio 2.9

(a) La funzione z (b) I vincoli del problema nello spazio $x_1 - x_2$
Figura 3.11: Risoluzione esercizio 2.9

Il punto di minimo è l'angolo dove l'ordinata è massima e l'ascissa minima.

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x_1 - 5(6 - 2x_1) = 2 \\ x_2 = 6 - 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{9} \\ x_2 = 6 - \frac{32}{9} = \frac{54-32}{9} = \frac{22}{9} \end{cases}$$

Il valore di minimo della funzione risulta $\min z = \frac{32}{9} - \frac{66}{9} = \frac{34}{9}$.

4

Algoritmo del Simplex

5

Teoria di programmazione lineare intera

Definizione 5.0.1 (Matrice unimodulare (UM)). Una matrice quadrata M di dimensione m a elementi interi con $\det M = \pm 1$ si dice **unimodulare (UM)**.

Definizione 5.0.2 (Matrice totalmente unimodulare (TUM)). Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è **totalmente unimodulare (TUM)** se tutte le sue sotto-matrici quadrate non singolari sono unimodulari.

Teorema 5.0.3 (Condizione necessaria e sufficiente per vertici a componenti intere). Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$ a elementi interi e rango m . Condizione necessaria e sufficiente affinché il poliedro in forma standard P abbia tutti i vertici a componenti interi per qualsiasi $b \in \mathbb{R}^m$ a componenti intere è che ogni base sia **UM**.

Teorema 5.0.4 (Soluzione ottima con basi UM). Una SBA ottima del rilassamento lineare di P è ottima anche per P se ogni base ammissibile di A è **UM** e b è a componenti intere.

Sfortunatamente, determinare se tutte le basi ammissibili sono **UM** è un problema esponenziale.

Nel caso in cui A sia una **TUM** vale il seguente risultato.

Teorema 5.0.5 (Soluzione ottima con A TUM). Condizione sufficiente affinché il poliedro P abbia tutti i vertici a componenti intere, per qualsiasi n intera, è che A sia **TUM**.

Ne segue che una soluzione ottima del rilassamento continuo del poliedro P , se A è **TUM** sarà soluzione ottima anche per P .

Teorema 5.0.6 (Proprietà di una TUM). Una matrice A è **TUM** se:

1. Ogni colonna ha al più due elementi diversi da 0.
2. Risulta possibile partizionare gli indici di riga in due sottoinsiemi R_1 ed R_2 tali che:

Se una colonna j contiene due elementi non nulli dello stesso segno, allora le corrispondenti righe non appartengono allo stesso sottoinsieme.

Se una colonna i contiene due elementi non nulli di segno opposto, allora le corrispondenti righe appartengono allo stesso sottoinsieme.

Teorema 5.0.7. La matrice di incidenza di un grafo orientato (digrafo) o un grafo bipartito è TUM.

5.1 Rilassamenti

5.1.1 Rilassamento per eliminazione di vincoli

Banalmente si elimina uno o più dei vincoli di P estendendo la regione ammissibile.

5.1.2 Rilassamento lagrangiano

La soluzione ottima del rilassamento lagrangiano fornisce una limitazione inferiore sul valore ottimo della funzione obiettivo del problema originario.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ \underline{A}x &\geq b \\ \underline{C}x &\geq d \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Problema di PI

$$\begin{aligned} \min_x L(\underline{\lambda}, x) &= c^T x - \underline{\lambda}^T (\underline{A}x - b) \\ \underline{C}x &\geq d \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z} \\ \underline{\lambda} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

(b) Rilassamento lagrangiano $RL_{\underline{\lambda}}$ di P

Teorema 5.1.1. In generale, la soluzione ottima identificata tramite un rilassamento lineare (RL) è sempre peggiore o uguale a quella identificata tramite rilassamento lagrangiano L.

$$z_{RL}^* \leq L^*$$

Teorema 5.1.2 (Proprietà di integralità). la soluzione ottima identificata tramite un rilassamento lineare (RL) è sempre uguale a quella identificata tramite rilassamento lagrangiano L (o meglio il rilassamento lagrangiano non può arrivare ad una approssimazione migliore) se vale la **proprietà di integralità**, cioè l'inviluppo convesso dei vincoli in P è uguale all'area ammissibile nel rilassamento continuo.

5.1.3 Problema lagrangiano duale

Il duale lagrangiano estende alla PI il concetto di dualità ma non garantisce che gli ottimi siano uguali tra il problema primale e duale.

Teorema 5.1.3. L'ottimo del problema lagrangiano duale coincide con il rilassamento continuo se il poliedro dei vincoli rimasti gode della **proprietà di integralità**.

Si risolve tramite un algoritmo iterativo, detto del **sottogradiente**, un'approssimazione dell'algoritmo del gradiente necessaria perché $L^*(\lambda)$ è generalmente non differenziabile.

Definizione 5.1.4 (Sottogradiente). Per sottogradiente si intende il vettore:

$$s(\lambda) = -(Ax - b)$$

6

Metodi di programmazione lineare intera

6.1 Branch & Bound

Si tratta del metodo risolutivo per PI più comune, un po' come il simplex per PL.

Si procede risolvendo molteplici rilassamenti continui di un problema LI usando il metodo del simplex.

A ogni iterazione, può accadere che:

1. L'iterazione $i - esima$ è inammissibile.
2. Le variabili sono intere e pertanto non è necessario suddividere ulteriormente ma è stata identificata la soluzione ottima intera di questo ramo.
3. La soluzione continua identificata è inferiore alla soluzione intera identificata in un altro ramo e quindi non ha senso esplorare questa regione ulteriormente.
4. La soluzione intera ottenuta è abbastanza vicina alla soluzione continua ottima e si decide pertanto di interrompere l'algoritmo (per motivi di tempo).
5. Le variabili sono continue e quindi suddivideremo ulteriormente la regione in due sotto problemi, per esempio se la variabile intera fosse $x = a$ andremmo a dividere tra $x \leq \lfloor a \rfloor$ e $x \geq \lceil a \rceil$, quindi ripeteremo il calcolo della soluzione ottima con l'algoritmo del simplex avendo aggiunti questi vincoli.

6.2 Algoritmo dei piani di taglio

Banalmente si applicano iterativamente tagli di Chvatal-Gomory alla regione del problema (che sebbene inizialmente molto efficaci lo divengono sempre meno) per eliminare soluzioni non accettabili dal problema discreto ma ottime per il rilassamento continuo.

Definizione 6.2.1 (Taglio di Gomory). Ogni soluzione ammissibile di P soddisfa la relazione:

$$x_h + \sum_{j \in N} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$$

7

Problema del massimo flusso

7.1 Algoritmo di Ford e Fulkerson

Si tratta di un algoritmo per calcolare il **massimo flusso** su un grafo da un nodo sorgente s ad un nodo destinazione t .

Definizione 7.1.1 (Cammino incrementante). Un **cammino incrementante** è un cammino che ha archi con direzione positiva non pieni o archi con direzione negativa non vuoti.

L'algoritmo procede nel modo seguente:

1. Si identifica un cammino aumentante.
2. Si identifica la capacità di strozzatura, cioè quella che su questo specifico cammino limita la capacità massima.
3. Si aumenta la capacità occupata di ogni arco ed il flusso totale della differenza, ciò significa che in un cammino inverso (con freccia nella direzione inversa del flusso) il valore di flusso cala.
4. Si ripete sino a che non è più possibile identificare un cammino aumentante.

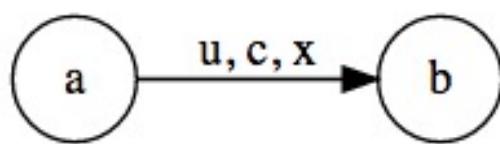
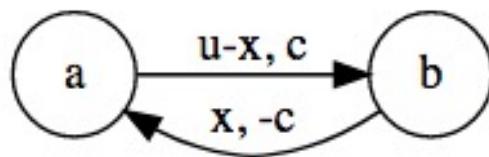
7.2 Taglio di capacità minima

Si tratta dell'insieme di archi che va da un sottoinsieme di nodi \mathcal{P}_1 ad un secondo sottoinsieme \mathcal{P}_2 , con il totale dei nodi $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$, cioè nessuno dei nodi in \mathcal{P}_1 si trova anche in \mathcal{P}_2 costruito in modo tale che esso limiti la capacità massima di flusso (insieme degli archi di strozzatura) che può andare dal nodo s a t .

Un bel sito web che risolve questo problema è <https://blocks.org/estk/9629395>.

7.3 Flusso massimo a costo minimo

Si tratta di riportare ogni arco ij del digrafo tra un nodo i e j , definito come (u_{ij}, c_{ij}, x_{ij}) , dove u_{ij} è la massima capacità di flusso dell'arco, c_{ij} il costo per unità dell'arco e x_{ij} la quantità di flusso che effettivamente scorre sull'arco, ad una forma a due archi come segue:

(a) Arco con massima capacità u , costo c e flusso inviato x .(b) Archi con flusso inviato e costo
Figura 7.1: Flusso massimo a costo minimo

Una volta sostituiti tutti gli archi (nei temi d'esame è possibile compilare degli archi forniti) è necessario identificare circuiti in cui la somma dei costi è negativa.

Se questi esistono, il costo non è minimo ed è possibile ridurlo re-instrandando il flusso del circuito identificato.

7.4 Algoritmo di Prim

Nell'algoritmo di Prim si procede con un metodo greedy: dato un set di nodi iniziali (spesso solo uno), a ogni step si sceglie il nodo con distanza minima connesso a uno dei nodi del set, lo si aggiunge al set e si ripete sino ad ottenere un albero ricoprente.

A

Struttura del tema d'esame

Un tema d'esame di Ricerca Operativa risulta composto da 4/5 esercizi pratici e talvolta alcune domande di teoria.

Gli argomenti più frequenti negli esercizi sono, in ordine, i seguenti:

1. Risolvere graficamente un problema di programmazione lineare. Si evidenzi il vertice ottimo e si riporti il valore di z per tutte le variabili del modello, compreso scarto e surplus. [12]
2. Risolvere mediante scarti complementari la soluzione duale del problema. [11]
3. Formulare un modello di Programmazione Lineare [11]
4. Applicare Algoritmo di Ford-Fulkerson [10]
5. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia. [9]
6. Trovare un taglio di capacità minima [8]
7. Branch & Bound, Problema dello zaino [7]
8. Taglio di Gomory relativo al primo vincolo del PL. [6]
9. Si costruisca un reinstradamento che vada a ridurre il costo (o se ci si trova in condizione di minimo, di aumentarlo) modificandolo solo una volta e fornire la variazione di costo così ottenuta. [6]
10. Forma canonica del Tableau [4]
11. Determinare e disegnare il flusso massimo di un grafo [4]

Seguono le tipologie di esercizi.

A.1 Primo esercizio (8 punti)

A.1.1 Problema di Programmazione Lineare

1. Disegnare la regione ammissibile dai vincoli forniti. Si evidenzi il vertice ottimo e si riporti il valore di z per tutte le variabili del modello, compreso scarto e surplus. [12]

Per risoluzione grafica si intende disegnare i vincoli ed identificare così il vertice ottimo tramite intersezione dei vincoli.

Scarto e surplus è la differenza tra il valore del vincolo e il valore dell'equazione sostituito il punto di ottimo.

2. Vi sono vertici ammissibili ai quali corrispondono basi degeneri?

Una base è degenere quando nel vettore $A_B^{-1} b$ ci sono degli zeri.

Per calcolare l'inversa di una matrice 2×2 si usa la formula: $A_B^{-1} = \frac{1}{\det A_B} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Nelle matrici di base 2×2 è possibile verificare se almeno una delle due seguenti equazioni sono pari a zero per poter affermare che essa è degenere: $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$ \vee $a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$.

3. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia. [9]
4. Da quali variabili è composta la base associata al vertice di una data intersezione? [2]
5. Quanto può variare il termine noto senza che la composizione della base ottima cambi?
6. Risolvere mediante scarti complementari la soluzione duale del problema. [11]

A.1.2 Problema di Programmazione Lineare Grafico

1. Verso dei vincoli rappresentati graficamente.
2. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia.

A.2 Secondo esercizio

A.2.1 Problema di Minimo con Tableau [3]

1. Forma canonica del Tableau [4]
2. Per quale dei valori rimanenti il Tableau corrisponde a:
 - (a) Valori per ottimo finito [3]
 - (b) Soluzione non ottima e degenere [3]
 - (c) Problema illimitato [3]
3. Disegnare la regione ammissibile al rilassamento continuo del problema. [2]
4. Individuare l'elemento di pivot individuato dal simplex duale. [2]

A.3 Terzo Esercizio

A.3.1 Problema di Programmazione Lineare Intero

Dato un problema di PL, si consideri una data base e si ricavi:

1. Vettore dei coefficienti di costo ridotto.
2. Verificare che la soluzione è ottima per il rilassamento lineare del problema.
3. Nel modello duale ottenuto mediante gli scarti complementari una data X, questa è ottima?
4. Porre il problema in forma canonica.
5. Calcolare il vettore della soluzione duale corrispondente.
6. Taglio di Gomory relativo al primo vincolo. [6]

A.3.2 Modello di Programmazione Lineare con Grafi [3]

Costruire un Modello per determinare in un grafo due cicli hamiltoniani disgiunti.

A.3.3 Modello di Programmazione Lineare Intero [4]

Fornire un modello di PLI partendo da alcuni dati forniti.

A.3.4 Branch & Bound, Problema dello zaino [7]

Risolvere un problema dello zaino con l'algoritmo Branch & Bound con strategia Depth First con alcuni parametri dati.

A.4 Quarto esercizio: Formulare un modello di Programmazione Lineare [7]

Date alcune informazioni si chiede di formulare un problema di Programmazione Lineare e quindi di aggiorarlo dopo aver ricevuto ulteriori informazioni.

A.5 Quinto Esercizio: Grafi

Dati due grafi si chiede di calcolare:

1. Flusso iniziale lungo un dato arco.
2. Applicare Algoritmo di Ford-Fulkerson [10]
 - (a) Si riportino tutti i cammini aumentati, come sequenze di nodi, il corrispondente incremento di flusso e valore di flusso massimo. [4]
 - (b) Determinare e disegnare il flusso massimo di un grafo [4]
3. Trovare un taglio di capacità minima [8]
4. Determinare se il flusso massimo è inviato a costo minimo. [2]
5. Si costruisca un reinstradamento che vada a ridurre il costo (o se ci si trova in condizione di minimo, di aumentarlo) modificandolo solo una volta e fornire la variazione di costo così ottenuta. [6]
6. Si riporti il modello di programmazione matematica del generico problema di ottimizzazione appena risolto.

A.6 Domande di teoria

A.6.1 Domande su Branch & Bound

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C) e la miglior soluzione ammissibile disponibile vale 100. L'upper bound associato al nodo A vale 110, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 99 e 100.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

- a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso
- b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso
- c) il nodo A viene chiuso
- d) una tale situazione non si può mai verificare

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da minimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C). Analizzando l'ultimo nodo chiuso l'algoritmo ha identificato la miglior soluzione ammissibile disponibile, di valore 100. Il lower bound associato al nodo A vale 90, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 101 e 99.8. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

- a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso
- b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso
- c) il nodo A viene chiuso
- d) una tale situazione non si può mai verificare

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono solo tre nodi ancora aperti (A, B, C) e l'attuale valore della migliore soluzione ammissibile è 120. L'upper bound associato al nodo A vale 190.5, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 120 e 97.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia highest first, si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera:

- a) si possono chiudere i nodi B e C
- b) solo il nodo C può essere chiuso
- c) il nodo B sarà il prossimo nodo visitato
- d) l'algoritmo si arresta

A.6.2 Domande su problema duale

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :

- a) Se P è illimitato allora D è illimitato
- b) Se D è illimitato allora P è inammissibile
- c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita
- d) nessuna delle precedenti

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :

- a) Se P è illimitato allora D è illimitato
- b) Se D è illimitato allora P è inammissibile
- c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita
- d) nessuna delle precedenti

Con riferimento al metodo a due fasi per la soluzione di problemi di PL continua, si consideri la risoluzione del problema ausiliario e si immagini che il valore ottimo di tale problema risulti positivo ($z_{AUS}^* > 0$). Cosa si può dedurre con certezza per il duale D del problema originale?

- a) D è illimitato
- b) D è limitato
- c) D è o inammissibile, o illimitato
- d) D è inammissibile

A.6.3 Domande su rilassamento del problema lineare continuo

Sia dato un problema di PLI ammissibile e se ne consideri il rilassamento continuo PLC. Quale delle seguenti affermazioni è vera :

- a) esiste sempre almeno un taglio che consente di restringere la regione ammissibile di PLC lasciando invariata quella di PLI
- b) esiste sempre un vertice intero di PLC
- c) se esiste un vertice intero di PLC, questo è un ottimo di PLI
- d) se esiste un vertice non intero di PLC, esiste un taglio valido per il problema di PLI

I Sia dato un problema di PLI ammissibile e se ne consideri il rilassamento continuo PLC. Quale delle seguenti affermazioni è vera :

- a) esiste sempre almeno un taglio che consente di restringere la regione ammissibile di PLC lasciando invariata quella di PLI
- b) esiste sempre un vertice intero di PLC
- c) se esiste un vertice intero di PLC, questo è un ottimo di PLI
- d) se esiste un vertice non intero di PLC, esiste un taglio valido per il problema di PLI

Si consideri un problema di programmazione lineare intera ed il suo rilasciamento continuo. Quale delle seguenti affermazioni è falsa:

- a) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ammissibile per il problema intero
- b) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ottima per il problema intero
- c) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere inammissibile per il problema intero
- d) la soluzione ottima del rilassamento continuo, nel caso sia intera, non è necessariamente ammissibile per il problema intero

Siano dati un problema P_I di programmazione lineare a numeri interi con funzione obiettivo da massimizzare ed il corrispondente rilassamento continuo P_C . È nota una soluzione ammissibile \mathbf{x} di P_I di valore w . Sia \mathbf{x}_C la soluzione ottimale di P_C di valore z .

Se $w=z$ se ne deduce che:

- a) la soluzione \mathbf{x}_C ha coordinate intere
- b) la soluzione \mathbf{x} è soluzione ottimale di P_I
- c) tutte le soluzioni di base ammissibili di P_C hanno coordinate intere
- d) le precedenti affermazioni non si possono dedurre con certezza

A.6.4 Domande su Analisi di sensitività

Si consideri un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da massimizzare. Siano b_i e p_i il termine noto ed il prezzo ombra associati al vincolo i -esimo nella soluzione ottima, il cui valore è z . Dall'analisi di sensitività sappiamo che l'intervallo di variazione di b_i che lascia inalterata la base ottima vale $[\alpha, \beta]$. Se sommiamo la quantità $\delta > 0$ al termine noto b_i , con $b_i + \delta = \beta$ il valore della funzione obiettivo diviene:

- a) z
- b) $z + \delta * p_i$
- c) $z - \delta * p_i$
- d) non si può dire con le informazioni a disposizione

Si consideri un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da minimizzare. Se sommando la quantità $\delta > 0$ al termine noto b_i del vincolo i -esimo il valore della funzione obiettivo subisce una variazione $\epsilon < 0$ ne deduciamo che il vincolo era

- a) di minore uguale
- b) di maggiore uguale
- c) di uguaglianza
- d) non si può dire con le informazioni a disposizione

A.6.5 Domande varie

Si riportino i modelli di PLI del problema del commesso viaggiatore (TSP) e dell'albero di supporto di costo minimo (MST) su grafo non orientato $G=(N,E)$.

Si fornisca un modello di PLI per il problema di trovare nel grafo G sia un ciclo hamiltoniano, sia un albero di supporto. I lati scelti devono avere costo complessivo minimo e almeno metà di essi deve appartenere sia al ciclo, sia all'albero. (Suggerimento: si aggiunga una variabile per ogni lato che vale 1 se quel lato fa parte di entrambi gli alberi).

Si consideri un problema di "mix produttivo". Relativamente ai prodotti A, B, C e D, è necessario imporre la condizione che A e B vengano prodotti solo se C oppure D sono in produzione (cioè almeno uno fra C e D deve essere realizzato). Quale fra le seguenti alternative rappresenta l'insieme minimo di vincoli necessari alla corretta rappresentazione del problema come modello di programmazione lineare a numeri interi? (Se la variabile binaria y_i è uguale a 1 significa che il prodotto i è in produzione e se è uguale a 0 significa che non lo è).?

- a) $y_C \geq y_A; y_D \geq y_B; y_C \geq y_B; y_D \geq y_B$
- b) $y_A \leq y_C + y_D; y_B \leq y_C + y_D$
- c) $2y_A \geq y_C + y_D; 2y_B \geq y_C + y_D$
- d) $y_C \leq y_A; y_D \leq y_B; y_C \leq y_B; y_D \leq y_B$

B

Temi d'esame risolti

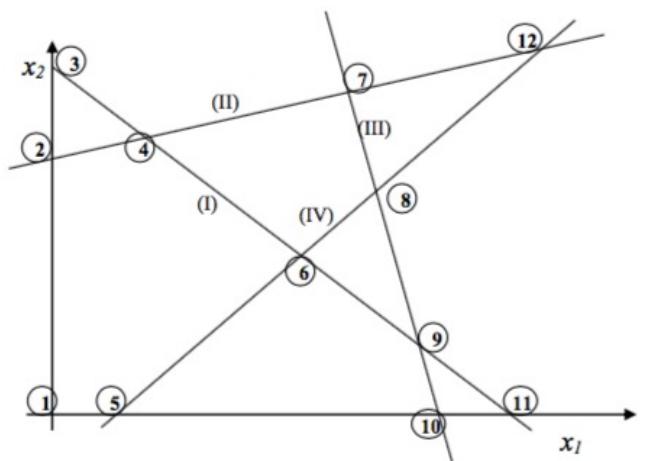
B.1 Esame del 04/07/2016

B.1.1 Esercizio 1

In figura B.1a sono rappresentati gli iperpiani di supporto della regione ammissibile di un modello di PL.

Si determini quale verso devono avere i vincoli in modo che i vertici della regione ammissibile siano individuati dai punti 6, 8 e 9.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - 2x_2 \\ (I) \quad x_1 + x_2 &= 16 \\ (II) \quad -x_1 + 3x_2 &= 32 \\ (III) \quad 5x_1 + x_2 &= 64 \\ (IV) \quad x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$



(a) Iperpiani di supporto

Figura B.1: Esercizio 1

Si determini quindi il vertice ottimo e si riporti il valore di tutte le variabili del modello, incluso scarto e surplus.

Si ricavi per via grafica i valori di b_2 per cui la composizione della base ottima non cambia.

Si risolva il duale del problema tramite il metodo degli scarti complementari.

B.1.2 Soluzione esercizio 1

Determino il segno dei vincoli

$$\max z = x_1 - 2x_2$$

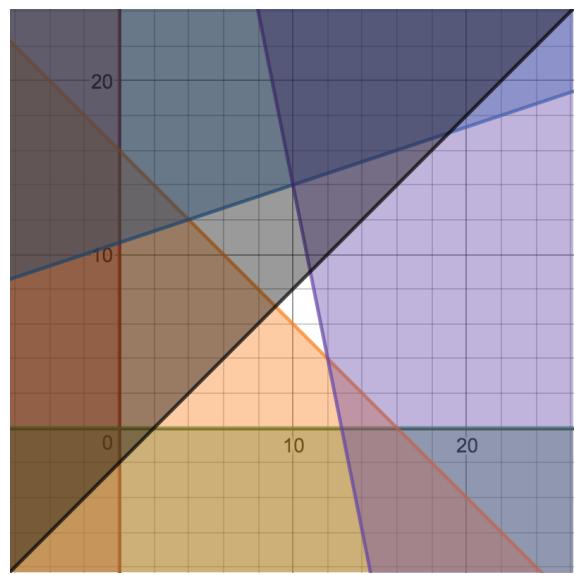
$$(I) \quad x_1 + x_2 \geq 16$$

$$(II) \quad -x_1 + 3x_2 \leq 32$$

$$(III) \quad 5x_1 + x_2 \leq 64$$

$$(IV) \quad x_1 - x_2 \geq 2$$

(a) Problema con vincoli a disequazione



(b) Regione di definizione del problema
Figura B.2: Determino il segno dei vincoli

Determino soluzione ottima

Dalla funzione di ottimo data, bisogna identificare il punto con ascissa massima e ordinata minima. Il punto 9, intersezione tra i vincoli I e III, pari a (12, 4) è evidentemente il punto ottimo: $z = 4$.

$$x_1 = 12$$

$$x_2 = 4$$

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -32$$

$$s_3 = 0$$

$$s_4 = 6$$

Verifico soluzione ottima

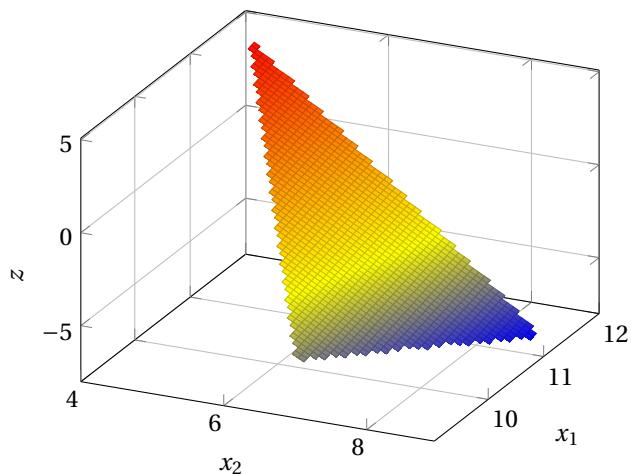


Figura B.3: Il grafo conferma la soluzione ottima in (12, 4)

Analisi di sensitività

Fino a che b_2 non tale per cui il vincolo II supera il punto di ottimo 9, quindi b_2 non modifica la base ottima sino a:

$$b_{2\min} = -1(12) + 3(4) = 0$$

Problema duale con scarti complementari

$$\begin{aligned} \min & 16y_1 + 31y_2 + 64y_3 + 2y_4 \\ & y_1 - y_2 + 5y_3 + y_4 \geq 1 \\ & y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 \geq -2 \end{aligned}$$

Figura B.4: Problema duale

Costruisco il sistema degli scarti complementari:

$$\begin{cases} y_1(x_1 + x_2 - 16) = 0 \\ y_2(-x_1 + 3x_2 - 32) = 0 \\ y_3(5x_1 + x_2 - 64) = 0 \\ y_4(x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ x_1(y_1 - y_2 + 5y_3 + y_4 - 1) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_1 + 5y_3 - 1 = 0 \\ y_1 + y_3 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_1 = 1 - 5y_3 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{15}{4} \Rightarrow y_1 = -\frac{11}{4} \\ 1 - 5y_3 + y_3 + 2 = 0 \Rightarrow 4y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

La soluzione ottima del problema duale risulta essere:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{11}{4} \\ y_2 &= 0 \\ y_3 &= \frac{3}{4} \\ y_4 &= 0 \\ s_1 &= -\frac{11}{4} + 5 \cdot \frac{3}{4} - 1 \Rightarrow s_1 = 0 \\ s_2 &= \frac{11}{4} + \frac{3}{4} + 2 \Rightarrow s_2 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

B.1.3 Esercizio 2

Si consideri il seguente **tableau di minimo**:

B	E	D	4	-1
0	-8	1	-1	4
1	A	C	6	F

Tabella B.1: Tableau esercizio 2

- a) Si dica per quali valori dei parametri il tableau è in forma canonica.
- b) Per quali dei parametri rimanenti il tableau corrisponde a:

Un problema con ottimo finito.

Una soluzione non ottima e degenera.

Un problema illimitato.

B.1.4 Soluzione esercizio 2

Forma canonica

Le uniche colonne che possono essere variabili in base sono quelle indicate dai parametri B e D , che devono quindi essere zero, e le colonne devono formare una matrice identità. La base scelta, quindi, per essere ammissibile, deve essere tale che $\tilde{b} = B^{-1}b \geq 0$, quindi $F \geq 0$.

0	E	0	4		-1
0	-8	1	-1		4
1	A	0	6		F

Tabella B.2: Forma canonica

Problema con ottimo finito

Un problema è limitato se non esistono variabili fuori base per cui coefficiente di costo e coefficienti sono negativi. Risulta quindi sufficiente dare valore non negativo a E o A od entrambi. In particolare, dando valore non negativo ad E si garantisce per il **criterio di ottimalità** che la soluzione data è ottima.

Soluzione non ottima e degenere

Una soluzione è degenere quando uno dei termini del vettore \tilde{b} è pari a zero, quindi $F = 0$.

TODO: Non so come definirla "non ottima".

Problema illimitato

Se, per una variabile fuori base x_k si ha \tilde{A}_k e coefficiente di costo ridotto per k negativo, allora il problema è illimitato inferiormente, per cui:

$$E < 0 \quad \wedge \quad A < 0$$

B.1.5 Esercizio 3

Si risolva mediante un algoritmo di Branch & Bound il problema di zaino definito dai seguenti dati:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} 16 \\ 14 \\ 12 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad b = 18 \quad (c) \text{ Capacita}$$

(a) Profitti
(b) Pesi

Si utilizzi come rilassamento quello lineare, risolto mediante un opportuno algoritmo. Si rinominino gli indici delle variabili in base all'ordinamento ricavato.

Si adotti una strategia di esplorazione Depth First e si esplori per primo, ad ogni livello, il ramo dell'albero di branching associato al vincolo $x_i = 1$, dove la variabile di branching x_i è quella che assume un valore frazionario nel rilassamento lineare.

Si noti inoltre che una variabile libera può venir fissata a zero qualora la capacità residua dello zaino sia strettamente minore del suo peso.

Si riporti a fianco l'albero di branching. Per ogni nodo si riportino: il suo numero progressivo, i (partendo dal valore 0 del nodo radice), il valore UB_i ed il vettore con il corrispondente valore delle variabili.

B.1.6 Risoluzione esercizio 3

Costruisco modello

$$\begin{aligned} \max_{\underline{x}} z &= \underline{\mathbf{p}}^T \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{w}}^T \underline{\mathbf{x}} &\leq b \\ x_i &\in \{0, 1\} \forall x \end{aligned}$$

Figura B.6: Modello dello zaino

Rilassamento lineare del modello

$$\begin{aligned} \max_{\underline{x}} z &= \underline{\mathbf{p}}^T \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{w}}^T \underline{\mathbf{x}} &\leq b \\ x_i &\in [0, 1] \forall x \end{aligned}$$

Figura B.7: Rilassamento lineare

Inizio algoritmo di Branch & Bound

1. Ordino gli oggetti per valori non crescenti del rapporto $\frac{\text{profitto}}{\text{volume}}$.
2. Associo all'oggetto $j - \text{esimo}$ il livello $j - \text{esimo}$ dell'albero.
3. Al livello j del ramo, genero due problemi figli:
 - Primo: impongo che l'oggetto $j - \text{esimo}$ sia inserito.
 - Secondo: impongo che l'oggetto $j - \text{esimo}$ non sia inserito.
4. La regola di esplorazione è deep-first

Prima di tutto calcolo la fitness per ogni oggetto:

$f(x_1) = 16/10 = 1.6$	$x'_1 = x_3$	$\underline{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 14 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\underline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$
$f(x_2) = 14/8 = 1.75$	$x'_2 = x_4$		
$f(x_3) = 12/6 = 2$	$x'_3 = x_2$		
$f(x_4) = 9/5 = 1.8$	$x'_4 = x_1$		
$f(x_5) = 10/7 = 1.4$	$x'_5 = x_5$		

(a) Fitness

(b) Rimappamento

Figura B.8: Riordino gli oggetti

(c) Profitti ordinati

(d) Pesi ordinati

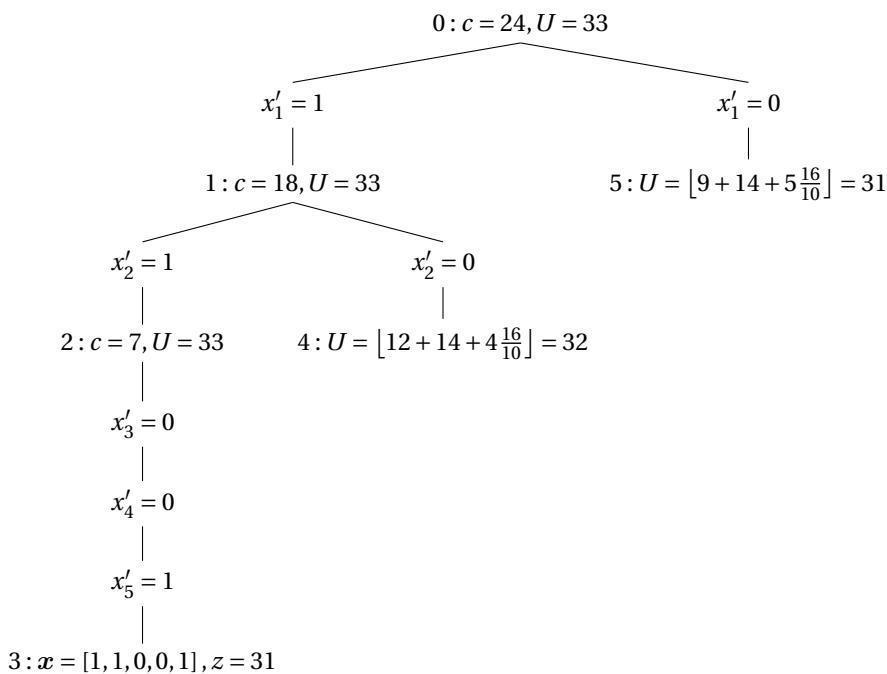
Identifico **l'oggetto critico** al nodo radice, cioè l'oggetto il cui peso supera il limite massimo dello zaino: $6 + 5 + 8 > b \rightarrow = 3$.

Identifico **l'upperbound di Dantzig** della radice, cioè il valore definito come:

$$U = \left\lfloor \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \tilde{c} \frac{p_s}{w_s} \right\rfloor$$

Figura B.9: Upperbound di Danzig

In questo caso $U = 33$.



La soluzione ottima ottenuta risulta essere quindi: $\underline{x} = [1, 1, 0, 0, 1]$, con $z = 31$.

B.2 Esame del 24/01/2017

B.2.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL, si risolva graficamente e si ottenga il valore della soluzione ottima e di tutte le variabili di scarto. Vi sono vertici ammissibili ai quali corrispondono basi degeneri?

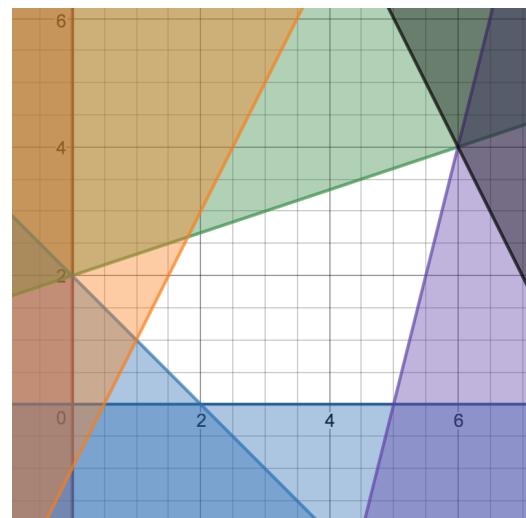
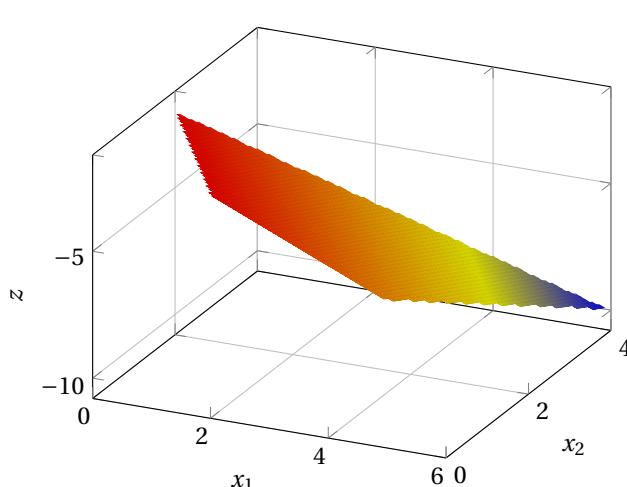
Si ricavi, per via grafica, per quali valori di b_3 , inizialmente pari a -1 , la **composizione** della base ottima non cambia.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 - x_2 \leq -2 \\
 & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
 & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\
 & 4x_1 - x_2 \leq 20 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Figura B.10: Esercizio 1

B.2.2 Soluzione esercizio 1

Disegno l'area di definizione del problema



Identifico la soluzione ottima

Dall'area di definizione e dalla composizione della funzione si intuisce che il vincolo ottimo sarà quello con x_1 minimo e x_2 massimo. Procedo quindi a calcolare il valore assunto da x_1 e x_2 nell'intersezione tra il vincolo 2 e 3:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 6 \\ -2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3(2x_1 - 1) = 6 \\ x_2 = 2x_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 3 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{5} \\ x_2 = 2x_1 - 1 \Rightarrow x_2 = \frac{18-5}{5} = \frac{13}{5} \end{cases}$$

La soluzione ottima si trova nel vertice tra il vincolo 2 e 3 in $(\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$ ed ha valore $z = \frac{13}{5} - \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$.

Identifico basi degeneri

Definizione B.2.1 (Determinante di matrice 2×2). Risulta possibile calcolare il determinante di una matrice A di dimensione 2×2 tramite la formula:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Figura B.12: Determinante di matrice 2×2

Definizione B.2.2 (Inversa di matrice 2×2). Risulta possibile ottenere l'inversa A^{-1} di una matrice A di dimensione 2×2 tramite la formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Figura B.13: Inversa di matrice 2×2

Definizione B.2.3 (Base degenere). Una base A_B è **degenera** quando nel risultato del vettore risultato del prodotto $A_B^{-1}\underline{b}$ appaiono degli 0.

Definizione B.2.4 (Base degenere 2×2). Dato un vettore di risorse $\underline{b} = [b_1, b_2]$, una base A_B di dimensione 2×2 è **degenera** quando almeno una delle seguenti relazioni è vera:

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0 \quad \vee \quad a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$$

Non riesco ad identificare vincoli per i quali valga la relazione di base degenere.

Analisi di sensitività

Modifica il valore di b_3 significa traslare il vincolo 3, che è uno dei due che definisce il punto di ottimo $(\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$. Non è pertanto possibile alterare il valore di b_3 senza modificare il valore ottimo.

Per quanto riguarda la composizione della base ottima, essa rimane invariata tra $b_{3_{max}}$ dove il vincolo v_3 incontra il vincolo v_1 nel punto $(0, 2)$ e $b_{3_{min}}$ dove il vincolo v_3 incrocia v_4 nel punto $(6, 4)$. Per calcolare il valore assunto da b_3 nei due punti di interesse è sufficiente sostituire i punti nella disequazione del vincolo.

$$b_{3_{max}} = -2(0) + 1(2) = 2 \quad b_{3_{min}} = -2(6) + 1(4) = -8$$

B.2.3 Esercizio 2

Dato il seguente problema di PL, calcolare il duale, verificare mediante **scarti complementari** se $x = (0, 0, 3, \frac{1}{2})$ è ottima e riportare il vettore della soluzione duale corrispondente.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.14: Esercizio 2

B.2.4 Soluzione esercizio 2

Problema duale

1. P è un problema di minimo, quindi D sarà di massimo.
2. La z di P è in funzione di 4 variabili, quindi D avrà 4 vincoli.
3. P ha 2 vincoli di uguaglianza, per cui D avrà due variabili libere $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ in segno o 4 accoppiate positive $\omega_1 = y_1 - y_2, \omega_2 = y_3 - y_4$, con $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3\omega_1 + 4\omega_2 \\ \text{s.t.} \quad & \omega_1 + \omega_2 \leq 2 \\ & -\omega_1 \leq 5 \\ & \omega_1 + \omega_2 \leq 1 \\ & 2\omega_2 \leq 1 \\ & \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Duale con variabili libere

$$\begin{aligned} \max \quad & 3(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \\ \text{s.t.} \quad & (y_1 - y_2) + (y_3 - y_4) \leq 2 \\ & -(y_1 - y_2) \leq 5 \\ & (y_1 - y_2) + (y_3 - y_4) \leq 1 \\ & 2(y_3 - y_4) \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Duale con variabili positive

Figura B.15: Problema duale

Scarti complementari

$$\begin{aligned}
 \omega_1(x_1 - x_2 + x_3 - 3) &= 0 & \omega_1(0 - 0 + 3 - 3) &= 0 \\
 \omega_2(x_1 + x_3 + 2x_4 - 4) &= 0 & \omega_2(0 + 3 + 2\frac{1}{2} - 4) &= 0 & \omega_1 = \frac{1}{2} \\
 x_1(\omega_1 + \omega_2 - 2) &= 0 & 0(\omega_1 + \omega_2 - 2) &= 0 \\
 x_2(-\omega_1 - 5) &= 0 & 0(-\omega_1 - 5) &= 0 & \omega_2 = \frac{1}{2} \\
 x_3(\omega_1 + \omega_2 - 1) &= 0 & 3(\omega_1 + \omega_2 - 1) &= 0 \\
 x_4(2\omega_2 - 1) &= 0 & \frac{1}{2}(2\omega_2 - 1) &= 0 \\
 \end{aligned}$$

(c) Semplifico

(a) Imposto sistema

(b) Sostituisco i valori della soluzione
Figura B.16: Scarti complementari

Il sistema ha soluzione, per cui la soluzione proposta $x = (0, 0, 3, \frac{1}{2})$ è ottima.

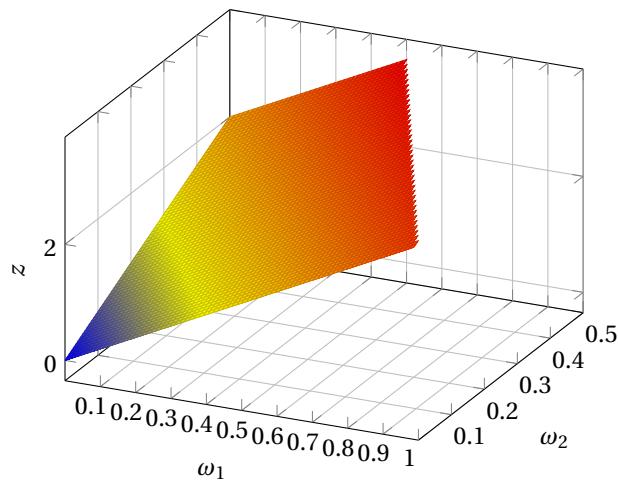
Vettore della soluzione duale in corrispondenza dell'ottimo

Indico le variabili di *slack* dei 4 vincoli come s_1, s_2, s_3 e s_4 :

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{1}{2} \\
 \omega_2 &= \frac{1}{2} \\
 s_1 &= 1 \\
 s_2 &= -\frac{9}{2} \\
 s_3 &= 0 \\
 s_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Verifico le soluzioni ottenute

Non potendo plottare il grafico di P essendo in 4 variabili vado a disegnare il duale.

(a) La funzione z del problema D

Nel grafico duale appare $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ come soluzione ottima.

B.2.5 Esercizio 3

Dato il seguente problema di PI e una base formata dalle variabili x_2, x_3 , si ricavi il vettore dei coefficienti a costo ridotto delle variabili fuori base e si verifichi che la soluzione corrispondente alla base data è ottima per il rilassamento lineare del problema.

Si ricavi il taglio di Gomory relativo al primo vincolo.

$$\begin{aligned} \min z &= 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ -3x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ \underline{x} &\geq \underline{0}, \underline{x} \in \mathbb{Z}^4 \end{aligned}$$

Figura B.18: Esercizio 3

B.2.6 Soluzione esercizio 3

Calcolo i coefficienti di costo ridotto

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ B^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definizione B.2.5 (CCR fuori base). Il **vettore dei coefficienti di costo ridotto per le variabili fuori base** si calcola tramite il prodotto B.19, dove \underline{c}_F è il vettore dei costi fuori base, \underline{c}_B è il vettore dei costi in base, B è la base, F è la matrice dei vincoli restante tolta la base B .

$$CCR = \underline{c}_F^T - \underline{c}_B^T B^{-1} F$$

Figura B.19: Vettore dei coefficienti di costo ridotto fuori base

Definizione B.2.6 (Base ottima). Una base B è **ottima** quando il vettore dei coefficienti di costo ridotto per le variabili fuori base è $\geq \underline{0}$ nel caso di problemi di minimo o $\leq \underline{0}$ nel caso di problemi di massimo.

$$CCR = [7 \quad -4] - [1 \quad -3] \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Si tratta di un problema di minimo, per cui controllo se il vettore dei coefficienti di costo per le variabili fuori base è maggiore del vettore $\underline{0}$.

Tutti i valori sono positivi, pertanto la base è ottima.

Taglio di Gomory

Definizione B.2.7 (Taglio di Gomory). Si tratta di un metodo per determinare un piano di taglio per qualsiasi problema di PI a partire dalla soluzione ottima del corrispondente rilassamento lineare.

$$x_h + \sum \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$$

(a) Taglio di Gomory con resto in variabile x_h

$$\sum (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$$

(b) Taglio di Gomory per vincolo i – esimo

Definizione B.2.8 (Forma canonica). Dato un problema di PL:

$$\begin{aligned} z &= \underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{x}} \\ A\underline{\mathbf{x}} &= \underline{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$\underline{\mathbf{c}}^T$	0
A	$\underline{\mathbf{b}}$

(a) Forma a equazioni del problema di PL

(b) Forma a tableau del problema di PL

Considerata una base B e partizionando A in due sottomatrici $A = [B \quad F]$ viene chiamata forma canonica del problema di PL la forma B.22a ottenuta sostituendo $\underline{\mathbf{x}}_B$ (cioè le variabili in base) tramite l'equazione $\underline{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\underline{\mathbf{b}} - B^{-1}F\underline{\mathbf{x}}_F$, cioè premoltiplicando per l'inversa della matrice di base B .

$$\begin{aligned} z &= \underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} \underline{\mathbf{b}} + (\underline{\mathbf{c}}_F^T - \underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} F) \underline{\mathbf{x}}_F \\ I\underline{\mathbf{x}}_B + B^{-1}F\underline{\mathbf{x}}_F &= B^{-1}\underline{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{c}}_F^T - \underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} F$	$-\underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} \underline{\mathbf{b}}$
I	$B^{-1}F$	$B^{-1}\underline{\mathbf{b}}$

(a) Forma a equazioni del problema di PL

(b) Forma a tableau del problema di PL

$\underline{\mathbf{0}}$	CCR fuori base	$\tilde{\mathbf{c}}\underline{\mathbf{0}}$
I	\tilde{F}	$\tilde{\mathbf{b}}$

(c) Forma a tableau in termini canonici

Costruisco la forma canonica del sistema:

$$\tilde{\mathbf{c}}\underline{\mathbf{0}} = -\underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} \underline{\mathbf{b}} = -\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10}{3}$$

$$\tilde{F} = B^{-1}F = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = B^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

x_2	x_3	x_1	x_4	$\tilde{\mathbf{b}}$
0	0	1	$1/3$	$10/3$
1	0	$4/3$	$-7/3$	$1/3$
0	1	-1	$2/3$	$1/3$

Figura B.23: Tableau in forma canonica

Applico la formula del taglio di Gomory (formula B.20b) al primo vincolo, evidenziato in verde:

$$\begin{aligned} (1-1)x_2 + (0)x_3 + \left(\frac{4}{3}-1\right)x_1 + \left(-\frac{7}{3}+3\right)x_4 &\leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_4 &\leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il taglio di Gomory risulta quindi:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_4 \leq \frac{1}{3}$$

B.2.7 Esercizio 4

Un caseificio vuole pianificare la produzione settimanale di burro (B), ricotta (R), mozzarella (M), sapendo che la domanda massima è rispettivamente di 230, 150, 140Kg alla settimana e che il prezzo di vendita è rispettivamente di 3,5, 8^{euro/kg}.

In una settimana sono disponibili fino a 45 ore-macchina per la produzione e fino a 450 litri di latte, al costo di $0.5^{\text{euro/litro}}$. Per produrre 1Kg di burro, ricotta o mozzarella, servono rispettivamente 5, 2, 4Kg di latte, mentre le quote di produzione (il numero di Kg che sarebbe prodotto in un'ora se tutte le macchine fossero utilizzate per un solo tipo di prodotto) sono rispettivamente di 15, 6, 11Kg. Come deve produrre settimanalmente il caseificio per massimizzare i profitti?

Come cambia il modello se il caseificio deve scegliere in alternativa (o l'uno o l'altro) fra due tipi di mozzarella, quella sopra descritta, (M), e un tipo (M_1) caratterizzata da una domanda pari a 120Kg, un prezzo di vendita di $9^{\text{euro/Kg}}$, una richiesta di 4,5Kg di latte per ogni Kg di prodotto finito ed una quota di produzione di 12Kg?

Si deve formulare (non risolvere) il problema, definendo le variabili, la funzione obiettivo, i vincoli.

B.2.8 Soluzione esercizio 4

Identifico i dati

$$T = 45$$

$$L = 450$$

$$c_l = 0.5$$

(a) Totale ore macchina

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 230 \\ 150 \\ 140 \end{bmatrix}$$

(b) Totale latte disponibile

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(c) Costo latte per litro

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

(d) Domanda dei prodotti

(e) Prezzo di vendita

(f) Latte per kg di prodotto

(g) Quote produzione per prodotto

Figura B.24: Dati del problema

Identifico le variabili

Le variabili sono le quantità di prodotto per questa settimana, in Kg:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_{1=\text{burro}} \\ x_{2=\text{ricotta}} \\ x_{3=\text{mozzarella}} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}_{>0}^3$$

Identifico la funzione obiettivo

Se si intende massimizzare i profitti, la funzione obiettivo sarà il ricavato meno i costi:

$$\max_{\underline{x}} z = \underline{p}^T \underline{x} - c_l \underline{l}^T \underline{x}$$

Figura B.25: Funzione obiettivo

Identifico i vincoli del problema

$$\sum_{i=1}^{\|\underline{x}\|} \frac{x_i}{q_i} \leq T$$

(a) Vincolo ore macchina

$$\underline{l}^T \underline{x} \leq L$$

(b) Vincolo su latte totale

$$\underline{x} \leq \underline{d}$$

(c) Vincolo su domanda

Modello

$$\begin{aligned} \max_{\underline{x}} z &= \underline{p}^T \underline{x} - c_l \underline{l}^T \underline{x} \\ \text{s.v.} \quad & \sum_{i=1}^{\|\underline{x}\|} \frac{x_i}{q_i} \leq T \\ & \underline{l}^T \underline{x} \leq L \\ & \underline{x} \leq \underline{d} \end{aligned}$$

Modifiche al modello

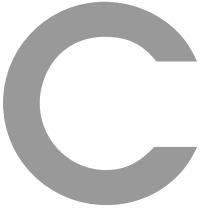
Si aggiunge ad ogni vettore il rispettivo nuovo valore del prodotto M_1 e si aggiunge un vincolo di mutua esclusività, aggiungendo un vettore binario definito come:

$$y_i \in \underline{y}, \quad y_i : \begin{cases} 1 & x_i > 0 \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$$

$$y_3 + y_4 \leq 1$$

Modello modificato

$$\begin{aligned} \max_{\underline{x}} z &= \underline{p}^T \underline{x} - c_l \underline{l}^T \underline{x} \\ \text{s.v.} \quad & \sum_{i=1}^{\|\underline{x}\|} \frac{x_i}{q_i} \leq T \\ & \underline{l}^T \underline{x} \leq L \\ & \underline{x} \leq \underline{d} \\ & y_3 + y_4 \leq 1 \end{aligned}$$



Teoria

C.1 Lista degli argomenti

Esistenza di un vertice ottimo

Teorema Minkowsky-Weyl

Teorema fondamentale della PL

Corollario: Se P è politopo allora esiste almeno una soluzione di base ottima per un problema PL definito su P .

Criterio di ottimalità della base

Regola di Bland

Teorema di convergenza dell'algoritmo del simplesso (con dimostrazione)

Lemma di Farkas (con dimostrazione)

Il duale del duale è primale (con dimostrazione)

Teorema di dualità forte (segue dal Lemma di Farkas)

Teorema di dualità debole (con dimostrazione)

Condizioni di ottimalità (segue da dualità debole)

Condizioni sufficienti affinché una matrice sia TUM (con dimostrazione).

Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo (con dimostrazione)

Teorema MaxFlow = MinCut.

C.2 Criterio di ottimalità della base

Teorema C.2.1 (Criterio di ottimalità della base). Sia B una base ammissibile. Se $\bar{\mathbf{c}}^T = \underline{\mathbf{c}}^T - \underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} A \geq \underline{\mathbf{0}}^T$ allora la soluzione di base associata a B è ottima, cioè i coefficienti di costo ridotto dei termini fuori base sono non negativi.

Inoltre, se B è ottima e non degenere, i coefficienti di costo ridotto sono non negativi: $\bar{\mathbf{c}}^T \geq \underline{\mathbf{0}}^T$.

N.B.: nel caso di basi degeneri non è possibile fare affermazioni sull'ottimalità.

Dimostrazione. Riscrivendo la funzione obiettivo come $\underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} \underline{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{x}}$, nell'ipotesi che $\bar{\mathbf{c}}^T \geq \underline{\mathbf{0}}^T$ si ha che:

$$\underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} \underline{\mathbf{b}} \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}$$

e quindi vale che, $\forall \underline{x} \in P$, la funzione obiettivo in corrispondenza della soluzione di base ammissibile associata a B assume il valore $\underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = [\underline{c}_B^T \quad \underline{c}_F^T] \begin{bmatrix} B^{-1} \underline{b} \\ 0 \end{bmatrix}$.

□

C.3 Teorema Minkowsky-Weyl

Teorema C.3.1 (Minkowsky-Weyl, forma sintetica). Ogni punto di un politopo si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici.

C.4 Esistenza di vertice ottimo

Teorema C.4.1. Se $P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ è un politopo, allora esiste almeno un vertice di P ottimo per il problema:

$$\min \{\underline{c}^T \underline{x} : \underline{x} \in P\}$$

Dimostrazione. Siano $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k$ i vertici di P e sia $z^* = \min \{\underline{c}^T \underline{y}_i, i = 1, \dots, k\}$. Sia $\underline{x} \in P$.

Per il teorema di Minkowsky-Weil $\exists \underline{\lambda} \geq \underline{0} : \underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{y}_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

$$\underline{c}^T \underline{x} = \underline{c}^T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{y}_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{c}^T \underline{y}_i \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i z^* = z^*$$

□

C.5 Teorema fondamentale della programmazione lineare

Teorema C.5.1 (Teorema fondamentale della programmazione lineare). Un punto \underline{x} è un vertice del poliedro non vuoto $P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ se e solo se \underline{x} è soluzione di base ammissibile.

Dimostrazione. Consideriamo una soluzione ammissibile $\underline{x}^T = [x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0]$ e per assurdo \underline{x} non sia un vertice. Allora:

$$\begin{aligned} \exists \underline{y}, \underline{z} \in P, \underline{y} \neq \underline{z} : \underline{x} &= \lambda \underline{y} + (1 - \lambda) \underline{z} \\ \text{con } \lambda &\in [0, 1], \\ \underline{y}^T &= [y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0] \geq \underline{0}^T, \\ \underline{z}^T &= [z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0] \geq \underline{0}^T \end{aligned}$$

Inoltre sono $A\underline{y} = \underline{b}, A\underline{z} = \underline{b} \Rightarrow A(\underline{y} - \underline{z}) = \underline{0}$.

Considero $\underline{\alpha} = \underline{y} - \underline{z} \neq \underline{0}$ e $\underline{\alpha}^T = [y_1 - z_1, \dots, y_k - z_k, 0, \dots, 0]$, ma dal punto precedente sappiamo che $A\underline{\alpha} = \underline{0}$.

Osserviamo che basta dimostrare che \underline{x} vertice di P è soluzione di base, essendo infatti un vertice di P sarà sicuramente ammissibile. Per assurdo sia \underline{x} vertice di P , soluzione non di base. Lo ordiniamo in modo che $\underline{x}^T = [x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0]$. Avremo che A_1, \dots, A_k sono linearmente dipendenti, altrimenti \underline{x} sarebbe soluzione di base.

Allora $\exists \tilde{\alpha} : A_1 \tilde{\alpha}_1 + \dots + A_k \tilde{\alpha}_k = \underline{0}, \tilde{\alpha} \neq \underline{0}$. Considero $\underline{\alpha}^T = [\tilde{\alpha}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^n$.

Sappiamo inoltre che $A\underline{x} = \underline{b}, A\underline{\alpha} = \underline{0} \Rightarrow A(\underline{x} \pm \epsilon \underline{\alpha}) = \underline{b} \Rightarrow A_1(x_1 \pm \epsilon \alpha_1) + \dots + A_k(x_k \pm \epsilon \alpha_k) = \underline{b}$.

Scegliamo ϵ in modo che $x_j + \epsilon \alpha_j \geq 0, x_j - \epsilon \alpha_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, k$.

Poniamo $\underline{y} = \underline{x} + \epsilon \underline{\alpha}, \underline{z} = \underline{x} - \epsilon \underline{\alpha}$:

$$\begin{cases} A\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{y}} \geq 0 \\ A\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{z}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \in P \wedge \underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{z}}$$

Ma $\underline{\mathbf{x}}$ è vertice, quindi non può essere combinazione convessa di due punti del poliedro. \square

Corollario C.5.1.1 (Esistenza di soluzione ottima). Ogni problema del tipo $\min\{\underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{x}} : \underline{\mathbf{x}} \in P\}$ definito su un politopo $P = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}\} \neq \emptyset$ ha almeno una soluzione ottima che è soluzione di base ammissibile.

C.6 Regola di Bland

Teorema C.6.1 (Regola di Bland). Quando è lecito scegliere, preferire sempre la variabile x_j entrante o uscente con indice minimo (regola lessicografica).

C.7 Teorema di convergenza del simplex

Teorema C.7.1 (Teorema di convergenza del simplex). Usando la regola di Bland, l'algoritmo del simplex converge in al più $\binom{n}{m}$ passi, cioè termina senza compiere cicli.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che, applicando la regola di Bland, l'algoritmo compia dei cicli.

Consideriamo il più piccolo tableau che genera una sequenza ciclica pur applicando la regola di Bland, cioè tutte le variabili, a turno, entrano ed escono di base: $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow B_1$.

Consideriamo un tableau T e supponiamo che x_h entri in base e x_n esca. Perché questo avvenga deve essere valido che:

1. $\bar{b} = \underline{0}$, altrimenti uscirei dal ciclo.
 2. $\bar{c}_h < 0$, coefficiente che entra in base.
 3. $\bar{c}_{B[i]}$, in base.
 4. I rapporti $\left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$ sono tutti nulli, quindi uso la regola di Bland e scelgo il primo indice i tale per cui il coefficiente del vincolo \bar{a}_{ih} sia positivo.
 5. $\bar{a}_{ih} \leq 0$ e $\bar{a}_{th} > 0$ perché con la regola di Bland di scelga x_h .
- (a) Le condizioni iniziali

	$x_{B[i]}$	x_h	x_n	
$-z$	0	\bar{c}_h	0	
	0	\bar{a}_{1h}	0	0
\vdots				
$x_{B[i]}$	1	\bar{a}_{ih}	0	0
\vdots				
$x_{B[t]=n}$	0	\bar{a}_{th}	1	0
\vdots				
	0	\bar{a}_{mh}	0	0

(b) Tableau iniziale T

Figura C.1: Condizioni iniziali di T

Considero ora \tilde{T} quando, dopo qualche iterazione, rientra in base x_n e quindi, siccome seguendo la regola di Bland, \tilde{c}_n deve essere l'unico coefficiente di costo ridotto negativo.

La riga 0 di \tilde{T} è ottenibile come la riga 0 di T sommata a una combinazione lineare di righe di T (figura C.2a), quindi è possibile ottenere il coefficiente di costo ridotto \tilde{c}_n come una combinazione lineare dei coefficienti di vincolo (figura C.2b).

$$\tilde{T}_0 = T_0 + \sum_{i=1}^m \mu_i T_i \quad \tilde{c}_n = \bar{c}_n + \sum_{i=1}^m \mu_i \bar{a}_{in} = \bar{c}_n + \mu_t \quad \tilde{c}_{B[i]} = \bar{c}_{B[i]} + \sum_{j=1}^m \mu_j \bar{a}_{jB[i]} = \bar{c}_{B[i]} + \mu_i \text{ con } i \neq t$$

(a) Comb. lin. della prima riga di \tilde{T}_0

(b) Comb. lin. del CCN di base entrante \tilde{c}_n
Figura C.2: Combinazioni lineari

(c) Comb. lin. del CCN di base $\tilde{c}_{B[i]}$

Ma \bar{c}_n in T è nullo e l'unico coefficiente di vincolo \bar{a}_{in} non nullo è \bar{a}_{tn} che è pari a 1. Ne segue che il coefficiente della combinazione μ_t deve essere negativo se \tilde{c}_n deve essere negativo.

Anche i coefficienti di costo in base sono ottenibili tramite combinazioni lineari (figura C.2b).

Tutti i coefficienti $\tilde{c}_{B[i]}$, con $i \neq t$, devono essere non negativi poiché seguendo la regola di Bland. $\bar{c}_{B[i]}$ è certamente nullo per la costruzione di T , in quanto è in base. Ne segue che μ_i deve essere non negativo.

Il coefficiente di costo ridotto della variabile x_h che viene rimossa dalla base deve essere positivo. Anche questo termine può essere ottenuto tramite una combinazione lineare di termini:

$$\tilde{c}_h = \bar{c}_h + \sum_{i=1, i \neq t}^m \mu_i \bar{a}_{ih} + \mu_t \bar{a}_{th}$$

Inizialmente avevamo scelto di inserire la variabile x_h in base poiché per la regola di Bland valeva che $\bar{a}_{ih} \leq 0, i \neq t, \bar{a}_{th} > 0$ e $\bar{c}_h < 0$.

In base alle relazioni C.2b e C.2c, risulta che \tilde{c}_h deve essere strettamente negativo, mentre, siccome viene rimossa dalla base la variabile x_h , \tilde{c}_h dovrebbe essere non negativo, da cui l'assurdo. \square

C.8 Lemma di Farkas

Teorema C.8.1 (Lemma di Farkas). La diseguaglianza

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq c_0$$

Figura C.3: Diseguaglianza di Farkas

è valida per il poliedro non vuoto $P = \{\underline{x} \geq 0 : A\underline{x} = \underline{b}\}$ se e solo se esiste un $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ tale per cui:

$$\underline{c}^T \geq \underline{u}^T A$$

$$\underline{u}^T \underline{b} \geq c_0$$

(a) Prima disequazione

Figura C.4: Condizioni del lemma di Farkas

(b) Seconda disequazione

Dimostrazione. Il fatto che la condizione sia sufficiente è vero dato che per ogni $\underline{x} \geq 0 : A\underline{x} = \underline{b}$ vale che:

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{u}^T A \underline{x} = \underline{u}^T \underline{b} \geq c_0$$

Procediamo ora a dimostrare che la condizione sia anche necessaria.

Dalle ipotesi di validità si ha che:

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq c_0 \quad \forall \underline{x} \in P \Rightarrow P' = \min_{\underline{x}} \{\underline{c}^T \underline{x} : \underline{x} \in P\} \text{ non è illimitato inferiormente e } P \neq \emptyset$$

Allora esiste una soluzione ottima finita e per il teorema di convergenza del simplex esiste una soluzione ottima di base.

Chiamiamo B la base ottima di P' e sia $\underline{u}^T = \underline{c}_B^T B^{-1}$. I costi ridotti, calcolati in corrispondenza della base ottima devono essere:

$$\bar{\underline{c}}^T = \underline{c}^T - \underline{c}_B^T B^{-1} A \geq \underline{0}^T \Rightarrow \bar{\underline{c}}^T \geq \underline{u}^T A$$

Figura C.5: Dalla regola dei costi ridotti si ottiene la prima disequazione C.4a

Infine per ipotesi vale che $\underline{c}^T \underline{x} \geq 0 \forall \underline{x} \in P$, da cui:

$$c_0 \leq \underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{c}_B^T \underline{x}_B^* + \underline{c}_F^T \underline{x}_F^* = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = \underline{u}^T \underline{b}$$

Figura C.6: Dall'ipotesi iniziale si ottiene la seconda disequazione C.4b

□

C.9 Il duale del duale è il primale

Teorema C.9.1. Il duale del problema duale è il problema primale.

Dimostrazione. Considerando un problema primale in forma canonica ed applicando le note regole di equivalenza e trasformazione si ottiene che:

$$\begin{cases} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} \geq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max \underline{u}^T \underline{b} \\ \underline{c}^T \geq \underline{u}^T A \\ \underline{u} \geq \underline{0} \end{cases} \equiv \begin{cases} -\min(-\underline{b}^T) \underline{u} \\ (-A^T) \underline{u} \geq -\underline{c} \\ \underline{u} \geq \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\max \underline{y}^T(-\underline{c}) \\ -\underline{b}^T \geq \underline{y}^T(-A^T) \\ \underline{y} \geq \underline{0} \end{cases} \equiv \begin{cases} \min \underline{c}^T \underline{y} \\ A\underline{y} \geq \underline{b} \\ \underline{y} \geq \underline{0} \end{cases}$$

□

C.10 Teorema di dualità forte

Teorema C.10.1 (Dualità forte). Sia $P = \{\underline{x} \geq \underline{0} : A\underline{x} \geq \underline{b}\} \neq \emptyset$ con soluzione ottima **finita**. Allora la soluzione ottima del primale coincide con la soluzione ottima del duale.

$$\min \{\underline{c}^T \underline{x} : A\underline{x} \geq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\} = \max \{\underline{u}^T \underline{b} : \underline{c}^T \geq \underline{u}^T A, \underline{u} \geq \underline{0}\}$$

Figura C.7: Teorema di dualità forte: la soluzione ottima primale coincide con la soluzione ottima duale

Dimostrazione. Segue direttamente dal lemma di Farkas (C.8.1). □

C.11 Teorema di dualità debole

Teorema C.11.1 (Dualità debole). Siano dati un problema P ed il suo duale D , entrambi non vuoti:

$$P = \{\underline{x} \geq \underline{0} : A\underline{x} \geq \underline{b}\} \quad D = \{\underline{u} \geq \underline{0} : \underline{c}^T \geq \underline{u}^T A\}, \quad P, D \neq \emptyset$$

Per ogni coppia di punti $\bar{x} \in P$, $\bar{u} \in D$ si ha che:

$$\bar{u}^T \bar{b} \leq \underline{c}^T \bar{x}$$

Figura C.8: Teorema di dualità debole: ogni soluzione del duale è minore o uguale a ogni soluzione del primale

Dimostrazione. Dati $\bar{x} \in P$ e $\bar{u} \in D$, si ha che $A\bar{x} \geq \underline{b}$, $\bar{x} \geq \underline{0}$ e $\underline{c}^T \geq \bar{u}^T A$, da cui segue:

$$\bar{u}^T \bar{b} \leq \bar{u}^T A\bar{x} \leq \underline{c}^T \bar{x}$$

□

Corollario C.11.1.1. Si consideri una coppia di problemi primale e duale. Sono possibili solo 4 casi:

1. Entrambi i problemi hanno ottimo finito, che coincide (da teorema di dualità forte C.10.1).
2. Il problema primale è illimitato ed il duale è impossibile (da teorema di dualità debole C.11.1).
3. Il problema duale è illimitato ed il primale è impossibile (da teorema di dualità debole C.11.1).
4. Entrambi i problemi sono impossibili (banalmente non è escluso da nessuna proprietà).

C.12 Condizioni di ottimalità

Teorema C.12.1 (Condizioni di ottimalità). I due vettori $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sono ottimi per i problemi primale P e duale D rispettivamente se valgono le seguenti proprietà:

1. $\bar{x} \in P$ (ammissibilità primale)
2. $\bar{y} \in D$ (ammissibilità duale)
3. $\underline{c}^T \bar{x} = \bar{u}^T \bar{b}$ (condizioni di ortogonalità)

Dimostrazione. Segue dal teorema di dualità debole (teorema C.11.1) □

C.13 Matrici totalmente unimodulari

Definizione C.13.1 (Matrice totalmente unimodulare). Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si dice **totalmente unimodulare** (TUM) se per ogni sua sotto-matrice quadrata Q vale che $\det(Q) \in \{-1, 0, 1\}$.

Teorema C.13.2. Se A è TUM e \underline{b} è intero, allora P ha solo vertici interi, cioè $\text{conv}(\underline{x}) = P$.

Teorema C.13.3 (Condizioni necessarie per TUM). Se A è TUM, allora deve valere che:

1. Ogni termine della matrice A $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$.
2. A^T è TUM.
3. $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ è TUM.
4. Moltiplicando una riga o colonna per -1 A rimane TUM.
5. Scambiando righe o colonne A rimane TUM.
6. L'operazione di pivot lascia A TUM.

Teorema C.13.4 (Condizioni sufficienti per TUM). Sia A una matrice con $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Condizione sufficiente perché A sia TUM è che valgano:

1. In ogni colonna vi siano al più due elementi non nulli.
2. Esiste una partizione $\begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix}$ delle righe di A tale che ogni colonna con due elementi non nulli ha questi elementi su righe appartenenti ad insiemi I_1 e I_2 diversi se e solo se i due elementi sono concordi in segno.

Dimostrazione. Per dimostrare che A sia TUM è necessario dimostrare che il determinante di ogni sotto-matrice Q è $\det(Q) \in \{-1, 0, 1\}$, con ordine k . Procediamo per induzione su k .

Se $k = 1$ allora $Q = a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$.

Supponiamo ora che $\det(Q') \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni sotto-matrice Q' di ordine $k' \geq 1$, ove k' è un valore fissato. Consideriamo quindi una qualsiasi sotto-matrice Q di ordine $k = k' + 1$. Possono avvenire solo tre casi:

1. Q ha una colonna di zeri: in questo caso $\det(Q) = 0$.
2. Q ha una colonna con un solo elemento diverso da zero: in questo caso, $\det(Q) = \pm \det(Q') \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Ogni colonna di Q ha esattamente due elementi diversi da zero: in questo caso, le righe di Q risultano linearmente dipendenti e $\det(Q) = 0$.

□

C.14 Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo

Teorema C.14.1 (Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo). Sia $G_{T^*} = (\mathcal{V}, T^*)$ un albero di costo minimo. Per un qualunque $line$ si ha che $l \in T^*$ se e solo se esiste un $S \subset \mathcal{V}$ tale che $l = \text{argmin} \{c_f : f \in \delta(S)\}$, dove $\delta(S)$ è un taglio, cioè un insieme di lati che hanno un vertice in S ed un vertice in $\mathcal{V} \setminus S$.

Dimostrazione. Per assurdo sia $l \notin T^*$. Allora $T^* \cup \{l\}$ contiene un ciclo $C(T^*, l)$. Sia $f \in C(T^*, l) \cap \delta(S) \Rightarrow T^* \cup \{l\} \setminus \{f\}$ è albero ricoprende. Essendo T^* minimo e $l = \text{argmin} c_f$, allora $c_l \leq c_f$, da cui l'assurdo. □

Dimostrazione. Dato $l \in T^*$, sia S uno degli insiemi di nodi di una delle componenti connesse in $G' = (\mathcal{N}, T \setminus \{l\})$. Per assurdo $\exists f \in \delta(S) \setminus \{l\}$ con $c_f < c_l$. Allora $T^* \cup \{f\} \setminus \{l\}$ costa meno di T^* , da cui l'assurdo. □

C.15 MAX-FLOW = MIN-CUT

Teorema C.15.1 (Max-flow = Min-cut). Un flusso ammissibile \underline{x} è ottimo per il problema di flusso massimo se e solo se esiste un taglio $(S^*, \mathcal{V} \setminus S^*)$ tale che $\phi(S^*)$ è pari alla capacità $u(S^*, \mathcal{V} \setminus S^*)$.