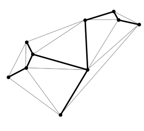
OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA

Prof. Marco Trubian
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018



Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
18 settembre 2018

Indice

1 Introduzione

L' **Ottimizzazione combinatoria** propone modelli di soluzioni ad innumerevole problemi, tra i quali vi sono:

Matching covers Consideriamo due insiemi A e B, di cardinalità n: ad ogni coppia di valori del prodotto cartesiano dei due insiemi è associato un valore positivo che descrive la compatibilità tra i due valori. Si vanno a scegliere n coppie, senza che gli elementi vengano ripetuti, in modo da massimizzare la compatibilità totale.

Set Covering Data una *matrice binaria* ed un vettore di costi associati alle colonne si va a realizzare il sottoinsieme di costo minimo che copra tutte le righe.

Set Packing Data una *matrice binaria* ed un vettore di valori associati alle colonne, si cerca il sottoinsieme di colonne di valore massimo tali che non coprino entrambe una stessa riga.

Set Partitioning Data una *matrice binaria* ed un vettore di cosi associati alle colonne, si cerca il sottoinsieme di colonne di costo minimo che copra tutte le righe senza conflitti.

Vertex Cover Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ si cerca il sottoinsieme di vertici di cardinalità minima tale che ogni lato del grafo vi incida.

Maximum Clique Problem Dato un grafo non orientato e una funzione peso definita sui vertici, si cerca il sottoinsieme di vertici fra loro adiacenti di peso massimo.

Maximum Independent Set Problem Dato un grafo non orientato e una funzione di peso definita sui vertici, si cerca il sottoinsieme di vertici fra loro non adiacenti di peso massimo.

Minimum Steiner Tree Dato un grafo non orientato e una funzione costo definita sui lati, si cerca un albero ricoprente di costo minimo.

Boolean satisfiability problem or SAT Data una forma normale congiunta (CNF), si cerca un assegnamento di verità alle variabili logiche che la soddisfi.

Versione pesata (MAX-SAT) Viene considerata anche una funzione peso associata alle formule che compongono la CNF. L'obbiettivo è massimizzare il peso totale delle formule soddisfatte.

2

Matching Covers

2.1 Matching

Definizione 2.1.1 (Matching o Accoppiamento). Dato un grafo $G = (V, E)$, un **matching** è un sottoinsieme $M \subseteq E$ di archi *a due a due non adiacenti*.

Definizione 2.1.2 (Matching massimo). Matching M^* di cardinalità massima.

Definizione 2.1.3 (Matching ripartito). Se il grafo G è **bipartito**, allora anche M si dice **bipartito**.

Definizione 2.1.4 (Matching perfetto). Se la cardinalità del matching è pari a metà del numero di vertici, allora si dice **perfetto**:

$$|M| = \frac{|V|}{2}$$

Definizione 2.1.5 (Matching massimale). Un matching M si dice **massimale** se ogni elemento di $E \setminus M$ è adiacente ad almeno un elemento di M.

Un matching massimale **non** necessariamente è massimo, mentre un matching massimo è sempre massimale.

2.2 Insieme stabile

Definizione 2.2.1 (Insieme stabile o indipendente). Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un qualunque sottoinsieme S di vertici si dice **indipendente** o **stabile** se esso è costituito da elementi a due a due non adiacenti.

Definizione 2.2.2 (Insieme stabile massimo). Un insieme stabile S^* si dice **massimo** se $|S^*| \geqslant |S|$, per ogni insieme stabile S di G.

Definizione 2.2.3 (Insieme stabile massimale). Un insieme stabile S si dice **massimale** se ogni elemento di $V \setminus S$ è adiacente ad almeno un elemento di S.

2.3 Copertura

Definizione 2.3.1 (Copertura). Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, un qualunque sottoinsieme T di vertici (F di archi) tale che ogni arco di E (vertice di V) incide su almeno un elemento di T (di F) si dice **copertura**. In particolare, l'insieme T è detto **trasversale** o **vertex cover** mentre l'insieme F è detto **edge cover**.

Definizione 2.3.2 (Copertura minima). Una copertura X^* si dice **minima** se $|X^*| \leqslant |X|$, per ogni insieme copertura X di G.

Definizione 2.3.3 (Copertura minimale). Una copertura X si dice **minimale** se $X \setminus \{x\}$ non è una copertura per ogni $x \in X$.

2.4 Disuguaglianze duali deboli

Teorema 2.4.1 (Disuguaglianze duali deboli). Indichiamo con $\alpha(G)$ l'**insieme stabile massimo** di G, con $\mu(G)$ il **matching massimo** di G, con $\rho(G)$ l'**edge cover minimo** di G e $\tau(G)$ **trasversale minimo** di G. Per un grafo G valgono le seguenti due disuguaglianze:

$$\alpha(G) \leqslant \rho(G)$$
$$\mu(G) \leqslant \tau(G)$$

Disuguaglianze duali deboli. Siano X l'**insieme stabile** di G e Y l'**edge cover** di G.

Poiché Y copre V, ogni elemento di X incide su almeno un elemento di Y.

D'altra parte, nessun elemento di Y copre contemporaneamente due elementi di X altrimenti i due elementi sarebbero adiacenti e quindi non potrebbero appartenere all'insieme stabile X.

Pertanto, per ogni $x \in X$ esiste un distinto $y \in Y$ che lo copre, e quindi $|X| \leqslant |Y|$.

Riscrivendo la precedente relazione per gli insiemi massimi X^* e Y^* si ottiene:

$$\alpha(G) \leqslant \rho(G)$$

Scambiando il ruolo di V ed E, si ottiene $\mu(G) \leqslant \tau(G)$. □

2.5 Teorema di Gallai

Teorema 2.5.1 (Teorema di Gallai). Per ogni grafo G con n nodi si ha:

$$\alpha(G) + \tau(G) = n$$

Se inoltre G non ha nodi isolati

$$\mu(G) + \rho(G) = n$$

Teorema di Gallai. **Iniziamo ottenendo la prima equazione:** Sia S un insieme stabile di G. Allora $V \setminus S$ è un insieme trasversale. In particolare, $|V \setminus S| \geqslant \tau(G)$. Se consideriamo l'insieme stabile massimo S^*, otteniamo:

$$\tau(G) \geqslant \left|V \setminus S^*\right| = n - \alpha(G)$$

da cui ricaviamo:

$$\alpha(G) + \tau(G) \leqslant n$$

Viceversa, sia T un insieme trasversale di G. Allora $V \setminus T$ è un insieme stabile.

In particolare, $|V - T| \leqslant \alpha(G)$.

Se consideriamo l'insieme trasversale minimo T^*, otteniamo:

$$\alpha(G) \geqslant \left|V \setminus T^*\right| = n - \tau(G)$$

da cui ricaviamo

$$\alpha(G) + \tau(G) \geqslant n$$

Considerando la condizione ottenuta precedentemente possiamo concludere che:

$$\alpha(G) + \tau(G) = n$$

Procediamo a dimostrare la seconda equazione Sia G un grafo privo di nodi isolati e sia M^* il matching massimo di G. Indichiamo con V_{M^*} i nodi che sono estremi degli archi in M^*.

Sia H un insieme minimale di archi tale che ogni nodo in $V \setminus V_{M^*}$ è estremo di qualche arco in H.

Segue che:

$$|H| = |V \setminus V_{M^*}| = n - 2\left|M^*\right|$$

Osserviamo che l'insieme $C = H \cup M^*$ è un edge-cover di G.

Sicuramente, $|C| \geqslant \rho(G)$, quindi:

$$\rho(G) \leqslant |C| = \left|M^*\right| + |H| = \left|M^*\right| + n - 2\left|M^*\right| = n - \left|M^*\right| = n - \mu(G)$$

da cui ricaviamo:

$$\rho(G) + \mu(G) \leqslant n$$

Sia C il minimo edge-cover su G, cioè tale che $|C| = \rho(G)$ e sia $H = (V, C)$ il sottografo indotto da C. Valgono quindi le seguenti proprietà:

1. H è un grafo aciclico.
2. Ogni cammino di H è composto al più da due archi.

Dalle proprietà precedenti concludiamo che il grafo $H = (V, C)$ ha $|V| = n$ vertici e $|C| = \rho(G)$ archi. Può infine essere decomposto in N componenti connesse aventi la forma di stella.

Consideriamo l'i-esima componente connessa di H. Indichiamo con s_i il numero di nodi della componente connessa e con $s_i - 1$ il numero di archi della componente connessa. Pertanto:

$$n = \sum_{i=1}^{N} s_i \quad \text{e} \quad \rho(G) = \sum_{i=1}^{N} (s_i - 1) = n - N \Rightarrow N = n - \rho(G)$$

Sia M un matching con un arco per ogni componente di H. Si ottiene:

$$\mu(G) \geqslant |M| = n - \rho(G) \Rightarrow \rho(G) + \mu(G) \geqslant n$$

Considerando la condizione ottenuta precedentemente, possiamo concludere che:

$$\rho(G) + \mu(G) = n$$

□

2.6 Cammino alternante e aumentante

Sia M un matching di $G = (V, E)$.

Definizione 2.6.1 (Arco accoppiato). Un arco $\left(i, j\right) \in E$ si dice **accoppiato** se:

$$\left(i, j\right) \in M$$

Altrimenti è detto **libero**.

Definizione 2.6.2 (Vertice accoppiato). Un vertice $i \in V$ si dice **accoppiato** se su di esso incide un arco di M. Altrimenti si dice che **non incide**.

Definizione 2.6.3 (Cammino alternante). Un cammino P sul grafo G si dice **alternante** rispetto a M se esso è costituito alternativamente da archi accoppiati e liberi.

Definizione 2.6.4 (Cammino aumentante). Un cammino P *alternante* rispetto ad M che abbia entrambi gli estremi esposti si dice **aumentante**.

Teorema 2.6.5. Sia M un matching di G e sia P un cammino aumentante rispetto a M. La differenza simmetrica:

$$M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

È un matching di cardinalità $|M| + 1$.

Dimostrazione. Sia M un matching di G e sia P un cammino aumentante rispetto a M. L'insieme $M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ gode delle seguenti proprietà:

1. M' è un matching:
   (a) I nodi che non sono toccati da P non è cambiato nulla: su di essi incide un solo arco di M che ora appartiene anche ad M'.
   (b) Sui nodi intermedi di P incide soltanto un arco di $P \setminus M$, e quindi di M'.
   (c) I nodi estremi di P prima erano esposti e adesso sono accoppiati e su di essi incide soltanto un arco di $P \setminus M$.
2. M' ha un elemento in più di M:
   (a) Sia $|M| = m_1 + m_2$ con $m_1 = |M \setminus P|$ ed m_2 = numero di archi del matching appartenenti al cammino.
   (b) Poiché P è aumentante, $|P| = m_2 + (m_2 + 1)$ dove $m_2 + 1 = |P \setminus M|$.
   (c) $\left|M'\right| = |M \setminus P| + |P \setminus M| = m_1 + m_2 + 1 = |M| + 1$

□

Teorema 2.6.6 (Teorema di Berge). Un matching M di G è massimo **se e solo se** G non ammette cammini aumentanti rispetto a M.

Teorema di Berge. La condizione sufficiente segue dal teorema precedente. Per la condizione necessaria, facciamo vedere che, se non esistono cammini aumentanti rispetto a un certo matching M, allora quel matching M è massimo:

Supponiamo che G ammetta un matching M' con un elemento in più di M. Vogliamo dimostrare che allora esiste un cammino aumentante per M.

Consideriamo l'insieme di archi:

$$F = \left\{M' \cup M\right\} \setminus \left\{M' \cap M\right\}$$

e sia G' il sottografo di G avente gli stessi nodi di G ma contenente solo l'insieme di archi di F. Analizziamo il grado di ciascun nodo di G', considerando tutti i casi possibili:

1. Un nodo su cui incide lo stesso arco appartenente sia ad M che ad M' è un nodo isolato su G' e quindi ha grado 0.
2. Un nodo su cui incide sia un arco di M sia un arco di M' è un nodo che ha grado 2 su G'.
3. Un nodo su cui incide un arco di M e nessun arco di M' o viceversa è un nodo che ha grado 1 su G'.
4. Un nodo esposto sia rispetto ad M che rispetto ad M' è un nodo isolato su G' e quindi ha grado 0.

Pertanto in G' nessun nodo ha un grado superiore a 2 e possiamo concludere che le componenti connesse di G' sono o nodi isolati o percorsi o cicli.

Nessun ciclo può essere dispari altrimenti ci sarebbero due archi dello stesso matching incidenti sullo stesso nodo e questo è impossibile.

Non possono essere tutti cicli pari altrimenti $|M| = |M'|$. Deve esistere una componente connessa che è un percorso.

Non tutti i percorsi possono essere pari altrimenti, nuovamente, $|M| = |M'|$.

Quindi, senza perdita di generalità, possiamo assumere che esista un percorso dispari che inizia e termina con un arco di M'.

Questo percorso è aumentante per M. □

2.7 Teorema del cammino aumentante

Teorema 2.7.1 (Teorema del cammino aumentante). Sia v un vertice esposto in un matching M. Se non esiste un cammino aumentante per M che parte da v, allora esiste un matching massimo avente v esposto.

Teorema del cammino aumentante. Sia M^* un matching massimo in cui v è accoppiato. Consideriamo $\{M^* \cup M\} \setminus \{M^* \cap M\}$: questo insieme non può contenere un cammino alternante con i vertici degli archi di M esposti, altrimenti sarebbe aumentante per esso.

Però deve contenere un cammino composto dallo stesso numero di archi dei due insiemi, M e M^*: un cammino con un solo arco di un insieme, infatti, sarebbe aumentante per l'altro e viceversa.

Consideriamo quindi un cammino P composto da un ugual numero di archi dai due insiemi e consideriamo un nuovo matching $M' = \{M^* \cup P\} \setminus \{M^* \cap P\}$. Vanno osservate due proprietà:

1. La cardinalità del nuovo insieme e del matching massimo sono uguali:

$$|M'| = |M^*|$$

2. Il nodo v è esposto rispetto ad M'.

Pertanto abbiamo individuato un nuovo matching massimo con v esposto. □

2.8 Teorema di König

Teorema 2.8.1 (Teorema di König). Se $G = (X, Y, E)$ è un grafo bipartito, allora $\mu(G) = \tau(G)$.

Teorema di König. Sia M^* un matching massimo, e siano:

1. X_1 un insieme dei nodi x di X **accoppiati** rispetto ad M^*
2. X_2 un insieme dei nodi x di X **esposti** rispetto ad M^*
3. Y_1 insieme dei nodi y di Y raggiungibili da x in X_2. Questi nodi, per definizione, sono **accoppiati** altrimenti M^* non sarebbe massimo.
4. $Y_2 = Y \setminus Y_1$

Definizione 2.8.2 (Nodo raggiungibile). Un nodo $y \in Y$ è raggiungibile se esiste P alternante rispetto ad M^* da x in X_2 tale che l'ultimo arco non appartiene ad M^*.

Consideriamo un set di nodi Z definito come:

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{\mu(G)}\} \quad \text{con} \quad \begin{cases} z_i = y_i & \text{se } y_i \text{ è raggiungibile} \\ z_i = x_i & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Procediamo ora a dimostrare che il set Z è *trasversale*.

Iniziamo dimostrando che non esistono archi da nodi in X_2 verso nodi in Y non coperti da Z:

1. Non può esistere un arco non coperto da Z tra un nodo in X_2 e un nodo in Y_2, altrimenti il matching non sarebbe massimo.
2. Non può esistere un arco non coperto da Z tra un nodo in X_2 e un nodo in Y_1 perché i nodi in Y_1 sono raggiungibili e quindi l'arco necessariamente deve essere coperto.

Dimostriamo ora che non esistono archi da nodi in X_1 verso nodi in Y non coperti da Z:

Consideriamo un arco da X_1 a Y_2: se non fosse coperto, allora esisterebbe un nodo, estremo dell'arco del matching, raggiungibile da X_2 in Y_2. Ciò implicherebbe l'esistenza di un cammino aumentante ed il matching sarebbe pertanto non massimo.

Consideriamo ora un arco da X_1 a Y_1: se il nodo terminale non fosse coperto non sarebbe raggiungibile (per la definizione di Y_1 e di Z) e non apparterrebbe in primo luogo a Y_1, quindi l'arco non esisterebbe.

Pertanto, Z è un insieme trasversale di cardinalità pari a $\mu(G)$. □