

METODI PROBABILISTICI PER L'INFORMATICA

Prof. Massimiliano Goldwurm
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018



Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
9 giugno 2018

Indice

1	Probabilità	3
1.1	Disuguaglianza di Chernoff	3
1.1.1	Applicazioni alle binomiali	3
1.1.2	Perchè in alcuni casi è meglio della disuguaglianza di Chebichev?	3
1.1.3	Esempi	3
2	Algoritmi probabilistici	4
2.1	Classificazione degli algoritmi probabilistici	4
2.1.1	Las Vegas	4
2.1.2	1-Sided Error	4
2.1.3	2-Sided Error	4
2.1.4	Errore Illimitato	4
2.2	Metodi per l'eliminazione dell'errore	4
2.3	Metodi per l'eliminazione dell'errore	4
3	Catene di Markov	5
3.1	Proprietà di Grafi, matrici e vettori stocastici	5
3.1.1	Cos'è una matrice stocastica?	5
3.1.2	Cos'è una matrice primitiva?	5
3.1.3	Proprietà di autovalori ed autovettori di una matrice stocastica	5
3.1.4	Teoremi sulla periodicità	5
3.2	Definizione di una catena di Markov	5
3.3	Proprietà fondamentali sulle catene	5
3.4	Stati ricorrenti	5
3.4.1	Prima definizione	5
3.4.2	Seconda definizione	5
3.4.3	Terza definizione	5
3.4.4	Stati essenziali	5
3.4.5	Gli stati ricorrenti sono stati essenziali	5
3.5	Tempi medi di rientro	5
3.5.1	Caso degli stati ricorrenti (*)	5
3.6	Definizione di catena ergodica	5
3.7	Esistenza di distribuzioni stazionarie (*)	5
3.8	Ergodicità delle catene con matrici di transizione primitive (*)	5
4	Applicazioni algoritmiche	6
4.1	Catene reversibili	6
4.2	Passeggiate a caso su grafi	6
4.2.1	Algoritmo probabilistico per 2-SODD	6
4.3	Metodo MCMC (Monte Carlo Markov Chain): rappresentazione di algoritmo e proprietà	6
4.3.1	Generazione di insiemi indipendenti in grafi (anche di dimensione fissata)	6
4.4	Algoritmo di Metropolis	6
4.5	Campionatore di Gibbs	6
5	Velocità di convergenza degli algoritmi MCMC	7
5.1	La problematica	7
5.2	Come stimare la velocità di convergenza	7
5.3	Stimare il numero di passi	7
5.4	Metodo generale basato sul coefficiente ergodico	7

6	Coupling	8
6.1	Metodo di accoppiamento (Coupling method)	8
6.1.1	Caso del campionario di set indipendenti di dimensione fissa	8
6.1.2	Campionatore di colorazioni	8
7	Colorazioni di grafi	9
7.1	Stima del numero di colorazioni di un grafo (algoritmo ed enunciati)	9

1.1 Disuguaglianza di Chernoff

1.1.1 Applicazioni alle binomiali

1.1.2 Perché in alcuni casi è meglio della disuguaglianza di Chebichev?

In quali casi?

1.1.3 Esempi

2

Algoritmi probabilistici

2.1 Classificazione degli algoritmi probabilistici

2.1.1 Las Vegas

Esempio

2.1.2 1-Sided Error

Esempio

2.1.3 2-Sided Error

Esempio

2.1.4 Errore Illimitato

Esempio

2.2 Metodi per l'eliminazione dell'errore

2.3 Metodi per l'eliminazione dell'errore

3

Catene di Markov

3.1 Proprietà di Grafi, matrici e vettori stocastici

3.1.1 Cos'è una matrice stocastica?

3.1.2 Cos'è una matrice primitiva?

3.1.3 Proprietà di autovalori ed autovettori di una matrice stocastica

3.1.4 Teoremi sulla periodicità

3.2 Definizione di una catena di Markov

3.3 Proprietà fondamentali sulle catene

3.4 Stati ricorrenti

3.4.1 Prima definizione

3.4.2 Seconda definizione

3.4.3 Terza definizione

3.4.4 Stati essenziali

3.4.5 Gli stati ricorrenti sono stati essenziali

3.5 Tempi medi di rientro

3.5.1 Caso degli stati ricorrenti (*)

3.6 Definizione di catena ergodica

3.7 Esistenza di distribuzioni stazionarie (*)

3.8 Ergodicità delle catene con matrici di transizione primitive (*)

4

Applicazioni algoritmiche

4.1 Catene reversibili

4.2 Passeggiate a caso su grafi

4.2.1 Algoritmo probabilistico per 2-SODD

4.3 Metodo MCMC (Monte Carlo Markov Chain): rappresentazione di algoritmo e proprietà

4.3.1 Generazione di insiemi indipendenti in grafi (anche di dimensione fissata)

4.4 Algoritmo di Metropolis

4.5 Campionatore di Gibbs

Velocità di convergenza degli algoritmi MCMC

- 5.1 La problematica**
- 5.2 Come stimare la velocità di convergenza**
- 5.3 Stimare il numero di passi**
- 5.4 Metodo generale basato sul coefficiente ergodico**

6

Coupling

6.1 Metodo di accoppiamento (Coupling method)

6.1.1 Caso del campionario di set indipendenti di dimensione fissa

6.1.2 Campionario di colorazioni

7

Colorazioni di grafi

7.1 Stima del numero di colorazioni di un grafo (algoritmo ed enunciati)