RICERCA OPERATIVA

Prof. Marco Trubian
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018

Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
28 dicembre 2017

Indice

1
Introduzione

1.1 Libri adottati

1. Lezioni di ricerca operativa (M. Fischetti)
2. 120 esercizi di ricerca operativa (M. Dell'Amico)

1.2 Risorse extra

È possibile ottenere le video lezione all'indirizzo https://vc.di.unimi.it/?courseid=57.

1.3 Di cosa si occupa la Ricerca Operativa

Vengono realizzati **modelli prescrittivi**, cioè modelli di problemi di ottimizzazione che ci suggeriscono cosa fare. La ricerca operativa affronta la risoluzione di processi decisionali complessi tramite modelli matematici ed algoritmi.

1.4 Programmazione matematica

Significa ottimizzare una funzione di più variabili, spesso soggette ad un insieme di vincoli $\min f(x_1, \dots, x_n) \text{s.t.} \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$.

1.4.1 Risoluzione di un problema di programmazione matematica

1. Analisi del problema e scrittura di un modello matematico.
2. Definizione ed applicazione di un metodo di soluzione.

A seconda del tipo di modello si utilizzano tipi di programmazione distinti (in grassetto quelle prese in considerazione in questo corso):

1. **Programmazione lineare continua**
2. **Programmazione lineare intera**
3. **Programmazione booleana**
4. Programmazione non lineare
5. Programmazione stocastica

2

Modelli di programmazione lineare e programmazione lineare intera

In questo capitolo vedremo una serie di modelli che vengono risolto utilizzando la **programmazione lineare (PL)** e la **programmazione lineare intera**.

2.1 Problema di assegnamento

Dati n lavoratori, n attività e considerando maggiore o uguale di zero il tempo impiegato dal lavoratore i per svolgere l'attività j ($t_{ij} > 0$), assegnare a ciascun lavoratore una ed una sola attività in modo che tutte le attività vengano svolte.

Obbiettivo: minimizzare la somma dei tempi impiegati per svolgere le attività.

Variabili: utilizzo solo una variabile booleana per indicare se il lavoro i-esimo è svolto dal lavoratore j-esimo:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ è svolto da } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.1.1 Modello

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

Figura 2.1: Funzione di cui calcolare il minimo, pari alla somma dei tempi per eseguire ogni azione

$$\sum_{i=1}^{n} x_i j = 1 \forall j = 1 \ldots n$$

Figura 2.2: Ogni attività viene svolta da un lavoratore.

$$\sum_{j=1}^{n} x_i j = 1 \forall j = 1 \ldots n$$

Figura 2.3: Ogni lavoratore svolge un'attività.

2.2 Problema del mix produttivo

Dato un sistema produttivo caratterizzato da:

1. m risorse produttive limitate.
2. b_j, con $i = 1...m$ quantità massima della risorsa i.
3. n diversi prodotti che ottengo dalle risorse.
4. a_{ij} assorbimento unitario di risorsa i per il prodotto j (quantità di risorsa i che utilizzo per produrre un'unità di j).
5. c_j profitto unitario per il prodotto j.

Sia data inoltre l'ipotesi aggiuntiva che tutta la produzione venga venduta e non sono costretto a produrre tutti i prodotti. Si chiede di determinare quali prodotti produrre e in quali quantità.

Obbiettivo: massimizzare il profitto complessivo.

Variabili: definisco una variabile intera che rappresenta il numero di unità di prodotte di un determinato prodotto.

$$X_j \geq 0$$

2.2.1 Modello

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_j c_j$$

Figura 2.4: Funzione da massimizzare.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \leq b_i \forall i = 1...m$$

Figura 2.5: Numero di unità per ogni prodotto.

2.2.2 Esempio 1

	Modello light	Modello plus	Ore uomo
Profitto unitario	30	20	#
Assemblaggio	8	4	640
Finitura	4	6	540
Controllo qualità	1	1	100

A

Struttura del tema d'esame

Un tema d'esame di Ricerca Operativa risulta composto da 4/5 esercizi pratici e talvolta alcune domande di teoria.

Gli argomenti più frequenti negli esercizi sono, in ordine, i seguenti:

1. Risolvere graficamento un problema di programmazione lineare. Si evidenzi il vertice ottimo e si riporti il valore di z per tutte le variabili del modello, compreso scarto e surplus. [12]
2. Risolvere mediante scarti complementari la soluzione duale del problema. [11]
3. Formulare un modello di Programmazione Lineare [11]
4. Applicare Algoritmo di Ford-Fulkerson [10]
5. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia. [9]
6. Trovare un taglio di capacità minima [8]
7. Branch & Bound, Problema dello zaino [7]
8. Taglio di Gomory relativo al primo vincolo del PL. [6]
9. Si costruisca un reinstradamento che vada a ridurre il costo (o se ci si trova in condizione di minimo, di aumentarlo) modificandolo solo una volta e fornire la variazione di costo così ottenuta. [6]
10. Forma canonica del Tableau [4]
11. Determinare e disegnare il flusso massimo di un grafo [4]

Seguono le tipologie di esercizi.

A.1 Primo esercizio (8 punti)

A.1.1 Problema di Programmazione Lineare

1. Disegnare la regione ammissibile dai vincoli forniti. Si evidenzi il vertice ottimo e si riporti il valore di z per tutte le variabili del modello, compreso scarto e surplus. [12]
2. Vi sono vertici ammissibili ai quali corrispondono basi degeneri?
3. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia. [9]
4. Da quali variabili è composta la base associata al vertice di una data intersezione?[2]
5. Quanto può variare il termine noto senza che la composizione della base ottima cambi?
6. Risolvere mediante scarti complementari la soluzione duale del problema. [11]

A.1.2 Problema di Programmazione Lineare Grafico

1. Verso dei vincoli rappresentati graficamente.
2. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia.

A.2 Secondo esercizio

A.2.1 Problema di Minimo con Tableau [3]

1. Forma canonica del Tableau [4]
2. Per quale dei valori rimanenti il Tableau corrisponde a:
   (a) Valori per ottimo finito [3]
   (b) Soluzione non ottima e degenere [3]
   (c) Problema illimitato [3]
3. Disegnare la regione ammissibile al rilassamento continuo del problema. [2]
4. Individuare l'elemento di pivot individuato dal simplesso duale.[2]

A.3 Terzo Esercizio

A.3.1 Problema di Programmazione Lineare Intero

Dato un problema di PL, si consideri una data base e si ricavi:

1. Vettore dei coefficienti di costo ridotto.
2. Verificare che la soluzione è ottima per il rilassamento lineare del problema.
3. Nel modello duale ottenuto mediante gli scarti complementari una data X, questa è ottima?
4. Porre il problema in forma canonica.
5. Calcolare il vettore della soluzione duale corrispondente.
6. Taglio di Gomory relativo al primo vincolo. [6]

A.3.2 Modello di Programmazione Lineare con Grafi [3]

Costruire un Modello per determinare in un grafo due cicli hamiltoniani disgiunti.

A.3.3 Modello di Programmazione Lineare Intero [4]

Fornire un modello di PLI partendo da alcuni dati forniti.

A.3.4 Branch & Bound, Problema dello zaino [7]

Risolvere un problema dello zaino con l'algoritmo Branch & Bound con strategia Depth First con alcuni parametri dati.

A.4 Quarto esercizio: Formulare un modello di Programmazione Lineare [7]

Date alcune informazioni si chiede di formulare un problema di Programmazione Lineare e quindi di aggioralo dopo aver ricevuto ulteriori informazioni.

A.5 Quinto Esercizio: Grafi

Dati due grafi si chiede di calcolare:

1. Flusso iniziale lungo un dato arco.
2. Applicare Algoritmo di Ford-Fulkerson [10]
   (a) Si riportino tutti i cammini aumentati, come sequenze di nodi, il corispondente incremento di flusso e valore di flusso massimo. [4]
   (b) Determinare e disegnare il flusso massimo di un grafo [4]
3. Trovare un taglio di capacità minima [8]
4. Determinare se il flusso massimo è inviato a costo minimo. [2]
5. Si costruisca un reinstradamento che vada a ridurre il costo (o se ci si trova in condizione di minimo, di aumentarlo) modificandolo solo una volta e fornire la variazione di costo così ottenuta. [6]
6. Si riporti il modello di programmazione matematica del generico problema di ottimizzazione appena risolto.

A.6 Domande di teoria

A.6.1 Domande su Branch & Bound

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C) e la miglior soluzione ammissibile disponibile vale 100. L'upper bound associato al nodo A vale 110, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 99 e 100.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso ☐
b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso ☐
c) il nodo A viene chiuso ☐
d) una tale situazione non si può mai verificare ☐

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da minimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C). Analizzando l'ultimo nodo chiuso l'algoritmo ha identificato la miglior soluzione ammissibile disponibile, di valore 100. Il lower bound associato al nodo A vale 90, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 101 e 99.8. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso ☐
b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso ☐
c) il nodo A viene chiuso ☐
d) una tale situazione non si può mai verificare ☐

. Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono solo tre nodi ancora aperti (A, B, C) e l'attuale valore della miglior soluzione ammissibile è 120. L'upper bound associato al nodo A vale 190.5, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 120 e 97.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia highest first, si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera:

a) si possono chiudere i nodi B e C ☐
b) solo il nodo C può essere chiuso ☐
c) il nodo B sarà il prossimo nodo visitato ☐
d) l'algoritmo si arresta ☐

A.6.2 Domande su problema duale

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :

a) Se P è illimitato allora D è illimitato ☐
b) Se D è illimitato allora P è inammissibile ☐
c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita ☐
d) nessuna delle precedenti ☐

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :
a) Se P è illimitato allora D è illimitato ☐
b) Se D è illimitato allora P è inammissibile ☐
c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita ☐
d) nessuna delle precedenti ☐

. Con riferimento al metodo a due fasi per la soluzione di problemi di PL continua, si consideri la risoluzione del problema ausiliario e si immagini che il valore ottimo di tale problema risulti positivo ($z^*_{AUS} > 0$). Cosa si può dedurre con certezza per il duale D del problema originale?

a) D è illimitato ☐
b) D è limitato ☐
c) D è o inammissibile, o illimitato ☐
d) D è inammissibile ☐

A.6.3 Domande su rilassamento del problema lineare continuo

Sia dato un problema di PLI ammissibile e se ne consideri il rilassamento continuo PLC. Quale delle seguenti affermazioni è vera :

a) esiste sempre almeno un taglio che consente di restringere la regione ammissibile di PLC lasciando invariata quella di PLI ☐
b) esiste sempre un vertice intero di PLC ☐
c) se esiste un vertice intero di PLC, questo è un ottimo di PLI ☐
d) se esiste un vertice non intero di PLC, esiste un taglio valido per il problema di PLI ☐

Sia dato un problema di PLI ammissibile e se ne consideri il rilassamento continuo PLC. Quale delle seguenti affermazioni è vera :

a) esiste sempre almeno un taglio che consente di restringere la regione ammissibile di PLC lasciando invariata quella di PLI ☐
b) esiste sempre un vertice intero di PLC ☐
c) se esiste un vertice intero di PLC, questo è un ottimo di PLI ☐
d) se esiste un vertice non intero di PLC, esiste un taglio valido per il problema di PLI ☐

Si consideri un problema di programmazione lineare intera ed il suo rilasciamento continuo. Quale delle seguenti affermazioni è **falsa**:

a) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ammissibile per il problema intero ☐
b) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ottima per il problema intero ☐
c) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere inammissibile per il problema intero ☐
d) la soluzione ottima del rilassamento continuo, nel caso sia intera, non è necessariamente ammissibile per il problema intero ☐

A.6.4 Domande su Max/Min

Si consideri un un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da massimizzare. Siano b_i e p_i il termine noto ed il prezzo ombra associati al vincolo i-esimo nella soluzione ottima, il cui valore è z. Dall'analisi di sensitività sappiamo che l'intervallo di variazione di b_i che lascia inalterata la base ottima vale $[\alpha,\beta]$. Se sommiamo la quantità $\delta>0$ al termine noto b_i, con $b_i + \delta=\beta$ il valore della funzione obiettivo diviene:

b) z ☐
b) $z+\delta^* p_i$ ☐
c) $z-\delta^* p_i$ ☐
d) non si può dire con le informazioni a disposizione ☐

Si consideri un un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da massimizzare. Siano b_i e p_i il termine noto ed il prezzo ombra associati al vincolo i-esimo nella soluzione ottima, il cui valore è z. Dall'analisi di sensitività sappiamo che l'intervallo di variazione di b_i che lascia inalterata la base ottima vale $[\alpha,\beta]$. Se sommiamo la quantità $\delta>0$ al termine noto b_i, con $b_i + \delta=\beta$ il valore della funzione obiettivo diviene:
a) z ☐
b) $z+\delta^* p_i$ ☐
c) $z-\delta^* p_i$ ☐
d) non si può dire con le informazioni a disposizione ☐

Siano dati un problema $\boldsymbol{P_I}$ di programmazione lineare a numeri interi con funzione obiettivo da massimizzare ed il corrispondente rilassamento continuo $\boldsymbol{P_C}$. È nota una soluzione ammissibile $\boldsymbol{x}$ di $\boldsymbol{P_I}$ di valore w. Sia x_C la soluzione ottimale di $\boldsymbol{P_C}$ di valore z.
Se $w=z$ se ne deduce che:
a) la soluzione x_C ha coordinate intere ☐
b) la soluzione $\boldsymbol{x}$ è soluzione ottimale di $\boldsymbol{P_I}$ ☐
c) tutte le soluzioni di base ammissibili di $\boldsymbol{P_C}$ hanno coordinate intere ☐
d) le precedenti affermazioni non si possono dedurre con certezza ☐

Si consideri un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da minimizzare. Se sommando la quantità $\delta>0$ al termine noto b_i del vincolo i-esimo il valore della funzione obiettivo subisce una variazione $\varepsilon<0$ ne deduciamo che il vincolo era
a) di minore uguale ☐
b) di maggiore uguale ☐
c) di uguaglianza ☐
d) non si può dire con le informazioni a disposizione ☐

Si consideri un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da minimizzare. Se sommando la quantità $\delta>0$ al termine noto b_i del vincolo i-esimo il valore della funzione obiettivo subisce una variazione $\varepsilon<0$ ne deduciamo che il vincolo era
a) di minore uguale ☐
b) di maggiore uguale ☐
c) di uguaglianza ☐
d) non si può dire con le informazioni a disposizione ☐

A.6.5 Domande varie

Si riportino i modelli di PLI del problema del commesso viaggiatore (TSP) e dell'albero di supporto di costo minimo (MST) su grafo non orientato G=(N,E).
Si fornisca un modello di PLI per il problema di trovare nel grafo G sia un ciclo hamiltoniano, sia un albero di supporto. I lati scelti devono avere costo complessivo minimo e almeno metà di essi deve appartenere sia al ciclo, sia all'albero. (Suggerimento: si aggiunga una variabile per ogni lato che vale 1 se quel lato fa parte di entrambi gli alberi).

Si consideri un problema di "mix produttivo". Relativamente ai prodotti A, B, C e D, è necessario imporre la condizione che A e B vengano prodotti solo se C oppure D sono in produzione (cioè almeno uno fra C e D deve essere realizzato). Quale fra le seguenti alternative rappresenta l'insieme minimo di vincoli necessari alla corretta rappresentazione del problema come modello di programmazione lineare a numeri interi? (Se la variabile binaria y_i è uguale a 1 significa che il prodotto i è in produzione e se è uguale a 0 significa che non lo è).?

a) $y_C \geq y_A;\ y_D \geq y_A;\ y_C \geq y_B;\ y_D \geq y_B$ ☐

b) $y_A \leq y_C + y_D;\ y_B \leq y_C + y_D$ ☐

c) $2y_A \geq y_C + y_D;\ 2y_B \geq y_C + y_D$ ☐

d) $y_C \leq y_A;\ y_D \leq y_A;\ y_C \leq y_B;\ y_D \leq y_B$ ☐