

0.1 MOSFET

0.1.1 NMOS ed PMOS

Esistono due tipi duali e complementari di MOSFET: NMOS (Piu' usati e con caratteristiche migliori) e i PMOS.

Definisco due costanti:

$$K_n = \frac{1}{2} \mu_n C'_{ox} \left(\frac{W}{L} \right)$$

$$K'_n = \frac{1}{2} \mu_n C'_{ox}$$

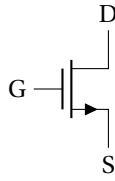
μ_n e' la costante di mobilita' degli elettroni

C'_{ox} e' la capacita' del condensatore che si forma tra il gate ed il canale

W e' la larghezza del canale

L e' la lunghezza del canale

quindi $K_n = K'_n \left(\frac{W}{L} \right)$

NMOS

Il NMOS e' spento se la $V_{GS} < V_t$

e quindi la corrente

$$I_{DS} = 0$$

Il NMOS e' in regime ohmico o lineare se $V_{DS} < V_{GS} - V_t$

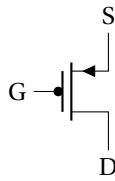
e quindi la corrente

$$I_{DS} = K_n [2 (V_{GS} - V_t) V_{DS} - V_{DS}^2]$$

Il NMOS e' in zona di saturazione se $V_{DS} > V_{GS} - V_t$

e quindi la corrente

$$I_{DS} = K_n (V_{GS} - V_t)^2$$

PMOS

ATTENZIONE AI SEGNI

Il PMOS e' spento se la $|V_{GS}| < |V_t|$

e quindi la corrente

$$I_{SD} = 0$$

Il PMOS e' in regime ohmico o lineare se $V_{SD} < V_{SG} - |V_t|$

e quindi la corrente

$$I_{SD} = K_p [2 (V_{GS} - |V_t|) V_{SD} - V_{SD}^2]$$

Il PMOS e' in zona di saturazione se $V_{SD} > V_{GS} - |V_t|$

e quindi la corrente

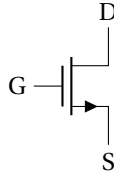
$$I_{SD} = K_p (|V_{GS}| - |V_t|)^2$$

0.1.2 Come capire in che stato di funzionamento e' il MOSFET

Prendiamo un NMOS per comodita'. Metodo per assurdo:

Si suppone che il mosfet sia in un certo funzionamento e poi si va avanti a risolvere fino ad un assurdo logico.

Metodo dei Diodi:



Il Mosfet essendo in fondo una giunzione NPN e' approssimabile a due diodi in antiserie. Quindi sostanzialmente ci sono 3 fasi di funzionamento del MOSFET: Off, Ohm, Sat (Spento, Ohmmica, Saturazione).

Off e' quando non vi e' canale da nessuno dei due lati.

Ohm e' quando vi e' canale da entrambi i lati.

Sat quando vi e' canale da solo un lato.

Le regole normali sono:

Se la tensione $V_{GS} < V_t$ allora il MOSFET e' Off

Altrimenti se $V_{DS} < V_{GS} - V_t$ Il MOSFET e' Ohm

Ed in fine se $V_{DS} > V_{GS} - V_t$ Il Mosfet e' Sat

Ora osserviamo che

$$V_{DS} < V_{GS} - V_t$$

$$V_{DS} - V_{GS} < -V_t$$

$$-V_{GS} < -V_t$$

$$V_{DG} > V_t$$

quindi se $V_{GS} < V_t$ allora vi e' canale dal lato del Source

e se $V_{DG} > V_t$ allora vi e' canale dal lato del Drain

ora se sono entrambe vere si e' in zona Ohmmica, se una sola delle due e' vera si e' in Saturazione, quando sono entrambe false il MOSFET e' spento.

Metodo Grafico : Basta seguire 4 punti:

(1) Verificare che la $V_{GS} > V_t$

(2) Calcolare la corrente I_{DS} del NMOS quando $V_{DS} = V_{ow} = V_{GS} - V_t$

(3) Calcolare le correnti ad un nodo a scelta tra SOURCE e DRAIN imponendo che $V_{DS} = V_{ow}$

(4) Confrontare i due valori.

Se la corrente del NMOS e' maggiore della somma di quelle del nodo allora il NMOS e' in zona ohmmica.

Altrimenti Se la somma delle correnti del nodo e' maggiore di quella del NMOS allora esso e' in saturazione.

Dimostrazione:

QUA METTI GRAFICI BELLI PLZ

0.1.3 Caratteristiche Importanti dei MOSFET

Tensione di Overdrive V_{ow}

$$V_{ow} = V_{GS} - V_t$$

e' utile per scrivere le formule in modo piu' compatto.

Tensione di soglia logica V_{th}

$$V_{th} \triangleq V \text{ t.c. } V_{in} = V_{out}$$

Potenza Statica P_{STAT} Sono le potenze consumate dalla porta per rimanere in ogni suo stato.

Potenza Statica P_{DIM} Sono le potenze consumate dalla porta per commutare da stato a stato.

Tempo di propagazione t_p Il Tempo di propagazione e' quanto ci mette la porta a fare da 0% al 50% della sua escursione di tensione. Vi sono due approssimazioni usabili per calcolarla:

(1) Approssimazione a corrente costante In questa approssimazione si considera il mosfet sempre in saturazione, questa approssimazione di solito sottostima del 10%.

$$I_{DS} = K_n (V_{GS} - V_t)^2$$

(2) Approssimazione a Resistenza In questa approssimazione si approssima il mosfet ad una resistenza di resistivita', questa approssimazione di solito sovrastima.

$$R_{eq} = \frac{V_f}{I_{sat}}$$

Comunque una volta decisa l'approssimazione si calcola la corrente del condensatore I_c poi si calcola il delta di carica che serve per caricare il condensatore:

$$Q_i = C V_i$$

$$Q_f = C V_f$$

$$\Delta Q = Q_f - Q_i = C (V_f - V_i)$$

a questo punto vale la relazione:

$$I_c = \frac{\Delta Q}{t_p}$$

e si ricava t_p :

$$t_p = \frac{\Delta Q}{I_c} = C \frac{V_f - V_i}{I_c}$$

0.1.4 Tips and Tricks

(1) I MOSFET sono simmetrici e quindi non ha senso parlare di Source e Drain pero' per aiutare convenzione si ha che:

La corrente nei MOSFET scorre sempre in senso concorde alla freccia.

La tensione V_{GS} si misura sempre tra il piedino dove vi e' la freccia e il gate ed ha sempre senso contrario alla freccia.

In pratica queste sono convenzioni per suggerire il funzionamento del MOSFET a chi sta studiando il circuito.

(2) Per Piccole V_{DS} si puo' approssimare:

$$I_n = K_n [2 (V_{GS} - V_t) V_{DS} - V_{DS}^2] \sim K_n [2 (V_{GS} - V_t) V_{DS}]$$

Poiche' se V_{DS} e' piccolo V_{DS}^2 e' ancora piu' piccolo e quindi si puo' trascurare senza grossi problemi.

La quale e' una equazione lineare e quindi piu' semplice da risolvere.

Per esempio sul circuito del esercizio 1 con la equazione corretta si ottiene

$$V_r = 0.1416V$$

mentre con la seconda equazione si ottiene

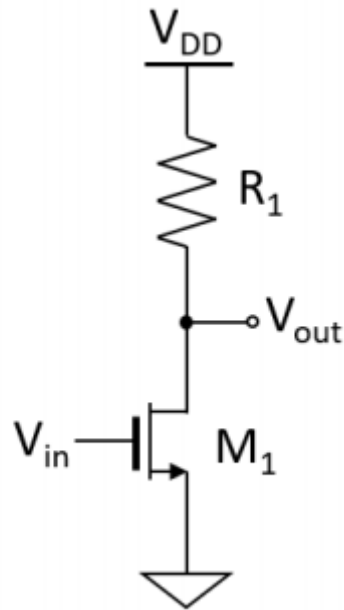
$$V_r = 0.1435V$$

0.1.5 Come Risolvere gli esercizi sui MOSFET

Esercizio 1

Dato il Circuito sottostante

1. Calcolare V_{out} nel caso $V_{in} = 0V$
2. Calcolare V_{out} nel caso $V_{in} = 3.3V$
3. Calcolare Soglia logica V_{th}
4. Potenza Statica P_{STAT}



$$V_{cc} = 3.3V$$

$$R = 1k\Omega$$

$$K_n = 5 \frac{mA}{V^2}$$

$$|V_t| = 1V$$

$$C_l = 10pF$$

Risoluzione Esercizio 1

$$V_{in} = 0V$$

poiche' sia V_{in} che la tensione al SOURCE allora la tensione $V_{GS} = V_G - V_S = 0$ quindi l'NMOS e' spento o in saturazione. la $V_{DG} = V_{in} - V_{out} = -V_{out}$ e picche' V_{out} ha solo valori positivi allora $-V_{out} < V_t$ a prescindere dal valore, quindi non vi e' canale sul lato del drain e quindi il NMOS e' spento quindi $I_n = 0$ e poiche' il NMOS si comporta come circuito aperto anche la corrente della resistenza $I_r = I_n = 0$ e di conseguenza anche la caduta di tensione sulla resistenza e' 0 poiche' la sua eq caratteristica e' $V = RI$ quindi non essendoci caduta di tensione sulla resistenza $V_{out} = V_{cc} = 3.3V$.

Quindi:

$$V_{in} = 0V \Rightarrow V_{out} = 3.3V$$

$$V_{in} = V_{GS} = 3.3V$$

quindi $V_{ow} = |V_{GS}| - |V_t| = 2,3V$ quindi $V_{GS} > V_t$ quindi l'NMOS e' Acceso. Ora bisogna stabilire se si trova in regime ohmmico o di saturazione e procediamo per metodo grafico:

(1) Calcoliamo la corrente I_{DS} quando $V_{DS} = V_{ow}$ e possiamo usare una qualunque tra le due equazioni poiche' in corrispondenza di V_{ow} si raccordano entrambe nello stesso punto, quindi usiamo quella in regime di saturazione poiche' piu' semplice.

$$I_n|_{ow} = K_n (V_{ow})^2 = 26mA$$

(2) Calcoliamo la corrente del carico $I_L = I_R$ che in questo caso coincide con quella della resistenza.

$$I_R|_{ow} = \frac{V_{cc} - V_{ow}}{R} = 1mA$$

(3) Ora si confrontano le due correnti:

Poiche' $I_n|_{ow} = 26mA > I_R|_{ow} = 1mA$ ci si trova in zona Ohmmica, nel caso opposto sarebbe in saturazione.

Quindi ora si calcola V_{DS} Col bilancio delle correnti $I_R = I_n$

$$\frac{V_{cc} - V_{DS}}{R} = K_n [2(V_{GS} - V_t) V_{DS} - V_{DS}^2]$$

Che e' una equazione di secondo grado in V_{DS}

$$(K_n R) V_{DS}^2 - (2K_n R (V_{GS} - V_t) + 1) V_{DS} + V_{cc} = 0$$

La quale parabola ha come radici:

$$V_{DS1} = 4.6V$$

$$V_{DS2} = 0.14V$$

Ovviamente ci puo' essere un solo valore vero, quindi uno e' da scartare. In questo caso Poiche' $V_{DS1} > V_{cc}$ e $V_{DS1} > V_{ow}$ ci porta a scartare V_{DS1}

Quindi $V_{DS} = V_{DS2} = 0.14V$

E poiche' $V_{out} = V_{DS}$ allora $V_{out} = 0.14V$

E quindi in sinossi:

$$V_{in} = 3.3V \Rightarrow V_{out} = 0.14V$$

Calcolo della soglia logica V_{th} :

La soglia logica e' la tensione che separa la zona che consideriamo ON da quella che consideriamo OFF.

L'ideale sarebbe $V_{th} = \frac{V_{cc}}{2}$

$$V_{in} = V_{out}$$

quindi la $V_{GD} = 0V$ quindi non vi e' canale dal lato del drain quindi il mosfet puo' essere o spento o in saturazione.

Procediamo per assurdo:

Supponiamo che il Mosfet fosse spento: Se il Mosfet e' spento allora $I_{DS} = 0A$ e (supponendo a regime quindi $I_c = 0A$) allora la tensione $V_r = I_{DS}R = 0V$ quindi $V_{out} = V_{in} = V_{GS} = V_{cc} = 3.3V$ Ma se $V_{GS} = 3.3V > V_t$ quindi il mosfet sarebbe acceso! ASSURDO.

Quindi il mosfet e' in saturazione

$$I_{DS} = K_n (V_{ow})^2$$

e quindi poiche' consideriamo a regime quindi $I_c = 0A$ da una KCL al nodo del drain abbiamo che

$$I_r = I_{DS}$$

quindi la tensione

$$V_{out} = V_{in} = V_{GS} = V_{cc} - V_r = V_{cc} - RI_r$$

$$V_{GS} = V_{cc} - RK_n (V_{GS} - V_t)^2$$

Ora si ha una eq di secondo grado da risolvere in V_{GS}

$$(RK_n)V_{GS}^2 - (2RK_nV_t + 1)V_{GS} + V_t^2 + V_{cc} = 0$$

questa la risolvo a casa couz sbatta

$$V_{GS,1} = 0.7753V$$

$$V_{GS,2} = 1.2047V$$

Ovviamente la prima e' sbagliata poiche' $0.7753V < V_t$ quindi il mos sarebbe spento e quindi in contraddizione con quanto detto prima.

Quindi La soglia logica e'

$$V_{th} = V_{GS,2} = 1.2047V$$

Calcolo Delle Potenze Statiche P_{STAT} :

In questo circuito abbiamo due potenze statiche, quando la porta e' ON e quando e' OFF

Caso ON $V_{in} = 0V$:

$$P_{STAT,On} = V_{cc}I_n = 0W$$

Poiche' non scorre corrente, il consumo di corrente e' 0 watt. Ottimo.

Caso OFF $V_{in} = 3.3V$:

$$P_{STAT,Off} = V_{cc}I_n = 3.3V * I_n$$

coi dati prima calcolati possiamo ricavare I_n

$$I_n = I_r = \frac{V_{cc} - V_{DS}}{R} = \frac{3.3V - 0.14V}{1k\Omega} = 3.16mA$$

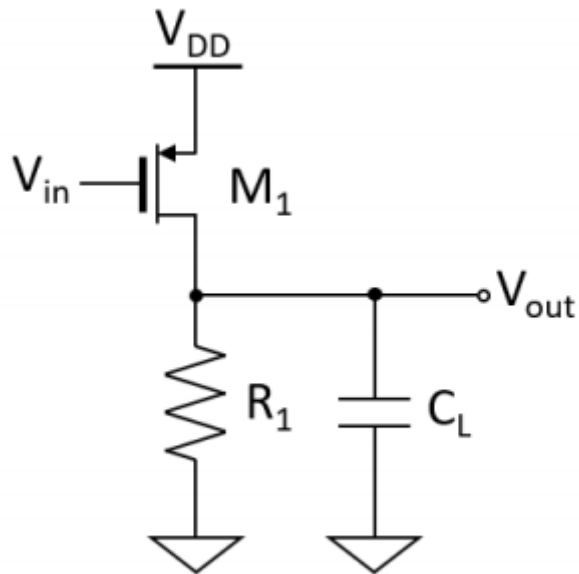
$$P_{STAT,Off} = V_{cc}I_n = 3.3V * 3.16mA = 10,4mW$$

Un consumo veramente grande per una porta cosi piccola. Si puo' fare di meglio.

Esercizio 2

Dato il Circuito sottostante

1. Calcolare V_{out} nel caso $V_{in} = 0V$
2. Calcolare V_{out} nel caso $V_{in} = 3.3V$
3. Calcolare soglia logica V_{th}
4. Potenza Statica P_{STAT}
5. Tempo di propagazione t_p



$$V_{cc} = 3.3V$$

$$R = 1k\Omega$$

$$C = 1pF$$

$$|K_p| = 2 \frac{mA}{V^2}$$

$$|V_t| = 1V$$

Risoluzione Esercizio 2

$$V_{in} = 3.3V$$

Poiche' $V_{cc} = V_{in} = 3.3V$ allora $V_{SG} = V_{cc} - V_{in} = 0V$ e $V_{SG} < |V_t|$ quindi il PMOS e' spento! Quindi $I_p = I_{SD} = 0A$ ora con una KCL al nodo del DRAIN otteniamo che $I_p = I_r + I_c$ quindi $I_r + I_c = 0$ ora poiche' l'eq caratteristica del condensatore e' $i_c(t) = C \frac{d}{dt} V_c$ e si suppone sempre che i transistori siano finiti allora il condensatore e' scarico $V_c = 0$ e quindi la sua corrente $I_c = 0$, il che implica che $I_r + I_c = I_r = 0$ e quindi la tensione $V_r = R I_r = 0$ e di conseguenza: $V_{out} = V_c = V_r = 0V$.

$$V_{in} = 3.3V \Rightarrow V_{out} = 0V$$

$$V_{in} = 0V$$

$V_{SG} = V_{in} - V_{cc} = -3.3V$ e $|V_{SG}| > |V_t|$ e $V_{ow} = |V_{SG}| - |V_t| = -2.3V$ quindi il PMOS e' Acceso. Ora bisogna stabilire in che zona di lavoro sia, procediamo per metodo grafico.

(1) Calcoliamo la corrente del PMOS alla tensione di overdrive V_{ow} :

$$I_{p|ow} = K_p (V_{ow})^2 = 10.58mA$$

(2) Calcoliamo la corrente di carico assumendo che $V_{DS} = V_{ow}$

Poiche' la resistenza ed il condensatore sono in parallelo $V_r = V_c$ e cosi con una KVL si ottiene che $V_r = V_c = V_{cc} - V_{DS} = 1V$ poiche' si calcola in condizioni di regime il condensatore e' completamente carico a $V_c = 1V$ e quindi come sopra poiche' il condensatore e' carico la sua corrente $I_c = 0$.

Quindi dalla KCL al nodo del DRAIN la corrente

$$I_{DS|ow} = I_r + I_c = I_r = \frac{V_r}{R} = \frac{V_{cc} - V_{ow}}{R} = \frac{V_{cc} - V_{cc} + V_t}{R} = \frac{V_t}{R} = 1mA$$

(3) Confrontando le due correnti $I_{DS|ow} = 1mA < I_{p|ow} = 26mA$ quindi il PMOS si trova in zona Ohmmica.

Stabilito cio' si calcola il punto di lavoro col bilancio delle correnti: $I_r = I_{DS,Ohm}$

$$\frac{V_{cc} - |V_{SD}|}{R} = K_p [2(|V_{GS}| - |V_t|) V_{SD} - V_{SD}^2]$$

e quindi otteniamo una equazione di secondo grado in V_{SD} che risolvendola ha come soluzioni:

$V_{SD1} = 4.75V$ che scarteremo poiche' $V_{SD1} > V_{cc}$ e $V_{SD1} > |V_{GS}| - |V_t|$ quindi dovrebbe essere in saturazione quando abbiamo gia' dimostrato che e' in zona ohmmica.

e

$V_{SD2} = V_{SD} = 0.347V$ che e' la soluzione corretta.

Ora concludiamo con una KVL dalla quale si ottiene $V_{out} = V_{cc} - V_{SD} = 2.96V$

In Sinossi:

$$V_{in} = 0V \Rightarrow V_{out} = 2.96V$$

Calcolo del Tempo Di Propagazione t_p :

Il Tempo di propagazione e' il tempo che la porta ci mette per fare dal 0% al 50% della transizione.

Calcoliamo il tempo di propagazione sul fronte di discesa:

Il PMOS e' spento quindi e' un circuito aperto ed il condensatore puo' scaricarsi solo sulla resistenza quindi

$$\tau_{FE} = R * C = 1ns$$

quindi

$$t_{p,FE} = 0.69 * \tau = 0.69ns$$

Calcoliamo il tempo di propagazione sul fronte di salita: Approssimiamo il PMOS acceso ad una resistenza

$$R_{eq} = \frac{V_{cc}}{I_{SAT}} \sim 330\Omega$$

quindi a questo punto la resistenza vista dal condensatore (poiche' si deve cortocircuitare masse ed alimentazioni) e' il parallelo tra le due resistenze. E poiche' $R_{eq} \ll R$ allora il loro parallelo $R_p \sim 320\Omega$ quindi

$$\tau_{RE} = C * R_p \ll \tau_{FE}$$

$$t_{p,RE} \ll t_{p,FE}$$

quindi prendiamo

$$t_p = t_{p,FE} = 0.69ns$$

Calcolo della Potenza Statica P_{STAT} :

Nel caso il PMOS sia spento la corrente che circola nel circuito e' 0A quindi la $P_{STAT,OFF} = 0W$

Nel caso il PMOS sia acceso la potenza, calcoliamo la corrente: precedentemente avevamo calcolato $V_{out} = 2.95V$ il condensatore e' gia' carico perche' guardiamo a regime quindi non assorbe corrente quindi la corrente

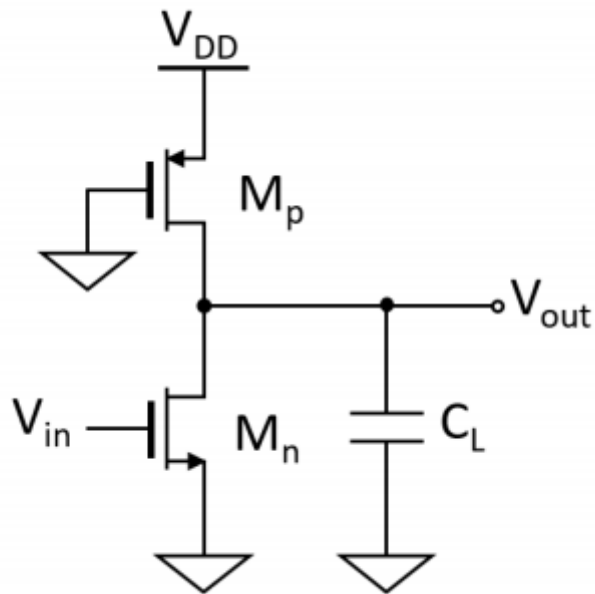
$$I_r = \frac{V_{out}}{R} = 2.95mA$$

$$P_{STAT,ON} = I_r V_{cc} = 9.74mW$$

Esercizio 3

Dato il Circuito sottostante,

1. Calcolare V_{out} quando $V_{in} = 0V$
2. Dimensionare $\frac{W}{L}$ in modo che $V_{in} = 5V \Rightarrow V_{out} = 0.5V$
3. Calcolare il tempo di propagazione t_p
4. Calcolare Potenze statiche P_{STAT} e dinamiche P_{DIN} con un clock di $T_{CLK} = 0.5\mu s$.



$$V_{cc} = 5V$$

$$C = 10pF$$

$$|K_p| = 200 \frac{\mu A}{V^2}$$

$$K'_n = 50 \frac{\mu A}{V^2}$$

$$|V_{t,n}| = |V_{t,p}| = 1V$$

$$T_{CLK} = 0.5\mu s$$

Risoluzione Esercizio 3

$$V_{in} = 0V$$

$V_{in} = V_{GS,n} = 0V < |V_{t,n}|$ quindi il NMOS e' spento o in saturazione. Pero' per essere in saturazione $V_{GD} = V_{out} - V_{in} = V_{out} < -V_{t,n}$ e poiche' V_{out} puo' assumere solo valori positivi cio' implica che il NMOS e' spento.

$|V_{SG,p}| = 5V > |V_{t,p}|$ quindi il PMOS e' acceso.

Poiche' il condensatore non assorbe corrente poiche' presupposto a regime e l'NMOS e' spento allora la corrente che passa da entrambi i MOS $I_{mos} = 0A$

Per caratteristica dei MOS il PMOS anche se acceso ha tensione $V_{DS,p} = 0V$

Per KVL si ha che $V_{out} = 5V - V_{DS,p} = 5V$

Quindi

$$V_{in} = 0V \Rightarrow V_{out} = 5V$$

Dimensionamento di $\frac{W}{L}$ in modo che $V_{in} = 5V \Rightarrow V_{out} = 0.5V$

$$K_n = K'_n \frac{W}{L}$$

Iniziamo a studiare le fasi di funzionamento dei MOS. la tensione $|V_{GD,p}| = 5V > |V_{t,p}|$ quindi il PMOS e' acceso.

la tensione $|V_{GS,p}| = |V_{out}| = 0.5V < |V_{t,p}|$ quindi il PMOS e' in Saturazione.

La tensione $V_{GS,n} = V_{in} > V_{t,n}$ quindi il NMOS e' acceso.

La tensione $|V_{GD,n}| = |V_{in} - V_{out}| > |V_{t,n}|$ quindi l'NMOS e' in Ohmmica.

La corrente dei due mos e' uguale poiche' sono in serie e il condensatore e' gia' a regime. Quindi dal bilancio delle correnti posso ricavare il parametro ricercato.

$$\begin{aligned} I_{SAT,p} &= I_{OHM,n} \\ K_p (V_{SG} - |V_{t,p}|)^2 &= K'_n \frac{W}{L} [2(V_{GS} - V_{t,n}) V_{DS} - V_{DS}^2] \\ \frac{W}{L} &= 17 \end{aligned}$$

Calcolo del tempo di propagazione t_p

Calcoliamo solo il tempo di propagazione del fronte di discesa del input poiche' con quello di salita il condensatore si scarica a massa attraverso l'NMOS ed ha sicuramente un tempo inferiore a quello di salita.

Usiamo l'approssimazione a corrente costante.

$$\begin{aligned} I_p &= K_p (|V_{GS}| - |V_{t,p}|)^2 = 3.2mA \\ I_p &= C \frac{V_f - V_i}{t_p} = C \frac{2.25V}{t_p} \end{aligned}$$

ora basta unire le due equazioni

$$\begin{aligned} K_p (|V_{GS}| - |V_{t,p}|)^2 &= 3.2mA = C \frac{2.25V}{t_p} \\ t_p &= C \frac{2.25V}{3.2mA} = 7.03ns \end{aligned}$$

VALORE DA CONTROLLARE NON SON SICURO SIA GIUSTO

Calcolo delle Potenze Statiche P_{STAT}

(a) $V_{in} = 0V$ per i motivi sopra scritti il NMOS e' spento quindi la corrente del generatore e' $I = 0$ quindi la potenza statica off

$$P_{STAT,Off} = 0W$$

(b) $V_{in} = 5V$ abbiamo già calcolato che la corrente nei MOS è $I = 3.2mA$ quindi

$$P_{STAT,On} = IV_{cc} = 16mW$$

Calcolo delle Potenze Dinamiche P_{DIN} con un clock $T_{CLK} = 10\mu s$

$$I = \frac{\Delta Q}{T_{CLK}} = C \frac{V_f - V_i}{T_{CLK}}$$

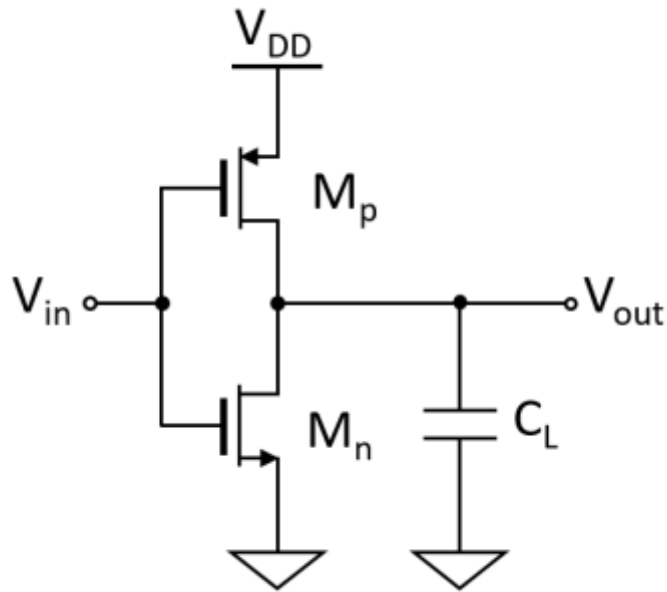
$$P_{DIN} = V_{cc}I = V_{cc}C \frac{V_f - V_i}{T_{CLK}}$$

$$P_{DIN} = V_{cc}C \Delta V f_{CLK} = 225\mu W$$

Esercizio 4

Dato il Circuito sottostante,

1. Trovare la tabella di verita' della porta (aka Calcolare V_{out} quando $V_{in} = 0V$ e quando $V_{in} = V_{cc}$)
2. Calcolare la soglia logica V_{th}
3. Calcolare il tempo di propagazione t_p sul fronte di salita del ingresso
4. Calcolare le Potenze statiche P_{STAT} e dinamiche P_{DIN} con un clock TTL¹ ideal di $T_{CLK} = 0.5\mu s$.



$$V_{cc} = 5V$$

$$C = 100fF$$

$$K_n = |K_p| = 500 \frac{\mu A}{V^2}$$

$$|V_{t,n}| = |V_{t,p}| = 1V$$

$$T_{CLK} = 0.5\mu s$$

¹Tensioni secondo lo standard Transistor Transistor Logic, LOW = 0V , HIGH = 5V

Risoluzione Esercizio 4