TITLEPAGE NOT RENDERED!
RECOMPILE WITH LUATEX!

Contents

Chapter 1

Introduction

1.1 Dispense

Sono disponibili dispense sul sito del corso.

Chapter 2

Problemi di Decisione

2.0.1 Problemi complessi

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figure 2.1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1. X rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **soluzioni** o anche delle **soluzioni ammissibili**.
2. Ω rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3. F rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4. f rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5. D rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6. Π insieme delle **preferenze**.

X viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{se } \boldsymbol{x} \in X \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine x_i viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

Ω viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{se } \boldsymbol{\omega} \in \Omega \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine ω_i viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

F viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{se } \boldsymbol{f} \in F \Rightarrow \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le $f_l \in \mathbb{R}$ vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obbiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La f viene definita come:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) : X \times \Omega \to F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La Π viene definita come

$$\Pi : D \to 2^{F \times F}$$

, dove $\pi_d \subseteq F \times F$. $F \times F$ rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre $2^{F \times F}$ rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo $F = \{f, f', f''\}$, otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f, f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \preccurlyeq_d f' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il $\preccurlyeq_d$, minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi $\succcurlyeq_d$.

Definizione 2.0.1 (indifferenza) *Due preferenze f' e f'' sono dette **indifferenti** quando:*

$$f' \; f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.0.2 (Preferenza Stretta) *Una preferenza f' è detta **preferenza stretta** quando:*

$$f' <_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.0.3 (Incomparabilità) *Due preferenze f' e f'' sono dette **incomparabili** quando:*

$$f' \bowtie_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \not\preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

2.0.2 Proprietà delle preferenze

Proprietà riflessiva

$$f \preccurlyeq f \qquad \forall f \in F$$

Proprietà di completezza

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \not\preccurlyeq f' \Rightarrow f' \preccurlyeq f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà di anti-simmetria

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f \Rightarrow f' = f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà Transitiva

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale. Viene generalmente considerata verificata.

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f'' \Rightarrow f \preccurlyeq f'' \qquad \forall f, f', f'' \in F$$

2.0.3 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore v, ha in mente una relazione di preferenza Π **riflessiva**, **completa**, **non necessariamente anti simmetrica** e **transitiva**. Quando una relazione possiede queste proprietà viene chiamata **ordine debole**, debole perché possono esiste dei *pari merito*. Un campo di applicazione sono i campionati sportivi.

$$\exists v : F \to \mathbb{R} : f \preccurlyeq f' \Leftrightarrow v_{(f)} \succcurlyeq v_{(f')}$$

Condizioni di preordine

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** si ottiene la condizione di **preordine**.

Ordini deboli

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **completezza** si ha la condizione di ordine debole, che è molto utilizzata.

Ordine parziale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine parziale**.

Ordine totale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività**, **completezza** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine totale**.

2.0.4 Tabella riassuntiva

Proprietà	**Preordine**	**Ordine debole**	**Ordine parziale**	**Ordine totale**
Riflessività	✓	✓	✓	✓
Transitività	✓	✓	✓	✓
Completezza		✓		✓
Antisimmetria			✓	✓

2.1 Conto di Borda

La formula in figura 2.2 utilizzato per costruire una **funzione valore**:

$$v(f) = |\{f' \in F : f \preccurlyeq f'\}|$$

Figure 2.2: Conto di Borda

Il valore di un impatto è pari al numero di impatti cui esso è preferibile, compreso l'impatto stesso.

Quando la cardinalità dell'insieme è $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ è possibile ottenere una **funzione valore**, ma quando ci si trova in condizioni come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che non risultano più mappabili sull'insieme $\mathbb{R}$ non risulta più possibile realizzare una **funzione valore**.

2.2 Problemi semplici

Un problema viene detto *semplice* quando essi possiedono queste caratteristiche:

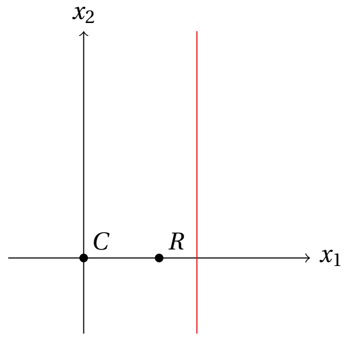
1. $\exists v(f)$ conforme
2. $|\Omega| = 1 \Rightarrow f : X \to \mathbb{R}$, cioè esiste un $f(x)$

3. $|D| = 1$
4. $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0 \forall j = 1, \ldots, n\}$ con $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$

2.2.1 Esempio: programmazione matematica

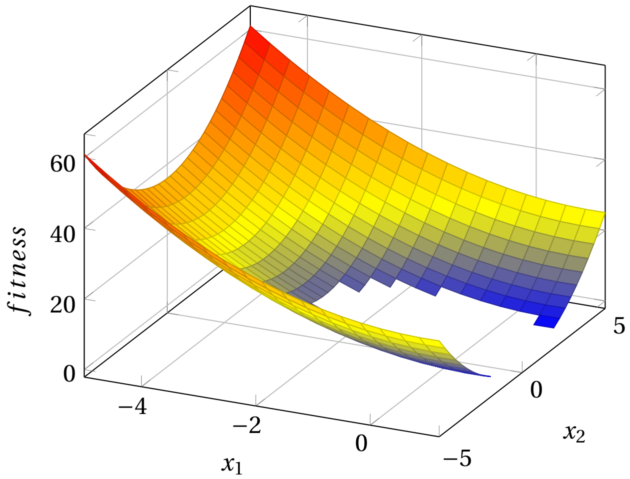
Minimizzo $f(x)$, con la condizione di $g_j(x) \leq 0 \forall j = 1 \ldots n$.

Supponiamo di voler identificare la posizione migliore di una discarica, e che il punto in cui i rifiuti vengono prodotti sia $R = (1,0)$, che in punto $C = (0,0)$ vi sia in una città e che si debba avere una distanza di almeno 2 dalla città. Inoltre, la nostra discarica deve trovarsi a sinistra di $\frac{3}{2}$, cioè $x_0 < \frac{3}{2}$, perché li vi è un confine.



La funzione di minimo che vado a definire risulta:

$$\min f(x) = \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1 < \frac{3}{2} \end{cases}$$



Bibliography

Einstein, Albert (1905). “Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]”. In: *Annalen der Physik* 322.10, pp. 891–921. DOI: http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004.

Knuth, Donald (1984). *Knuth: Computers and Typesetting*. URL: http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html.

Goossens, Michel, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin (1993). *The LaTeX Companion*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.