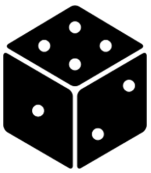
METODI PROBABILISTICI PER L'INFORMATICA

Prof. Massimiliano Goldwurm
6 CFU

Work In Progress

Lecture Notes
Year 2017/2018



Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
12 giugno 2018

Indice

1 Probabilità

1.1 Disuguaglianza di Chernoff

$$\mathbb{P}\left(\left|X_{n,p} - np\right| \geqslant n\epsilon\right) < 2e^{-2e^2 n}$$

Figura 1.1: Disuguaglianza di Chernoff per le binomiali

La **disuguaglianza di Chernoff** utilizza quando è necessario calcolare la probabilità di una **funzione** f che:

1. Non è semplice da calcolare, oppure,
2. Non è nota.

1.1.1 Caratteristiche

Variabili di indipendenti

Essa richiede che le **variabili siano indipendenti**, *condizione che la disuguaglianza di Markov non richiede* e nel caso delle disuguaglianza di Chebyshev è necessaria solo l'indipendenza da coppie di variabili casuali.

Non è una disuguaglianza vera

La disuguaglianza di Chernoff **non è una disuguaglianza vera**, ma piuttosto va vista come una tecnica per ottenere limiti esponenziali decrescenti sulle probabilità di coda.

Il valore di n è arbitrario

La disuguaglianza di Chernoff non fornisce un preciso valore di n oltre il quale siamo sicuri che la probabilità della coda sia minore di una δ fissata.

1.1.2 Applicazioni alle binomiali

Nell'analisi degli algoritmi probabilistici occorre spesso valutare la coda di una binomiale, ovvero la probabilità che questa variabili aleatoria disti dalla media per una quantità fissata.

Partendo dalla **disuguaglianza di Chebyshev** per una variabile X con $\mathrm{Var}(X)$ finita:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} \quad \forall a > 0$$

Figura 1.2: Disuguaglianza di Chebyshev

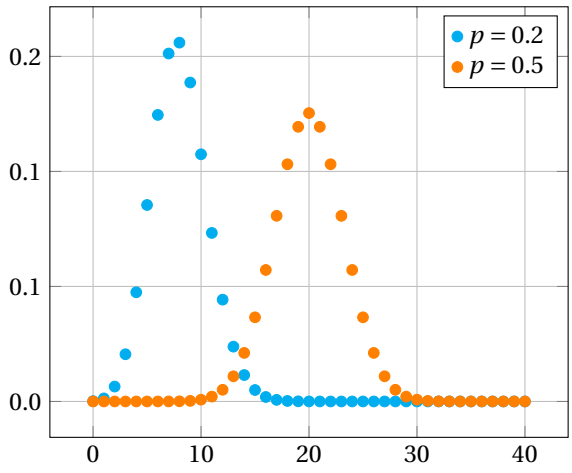


Figura 1.3: Distribuzioni binomiali al variare del parametro p

Nel caso di $X_{n,p}$ binomiale, con media $\mathbb{E}(X) = np$ e varianza $\mathrm{Var}(X) = npq$, $\forall \epsilon > 0$ vale che:

$$\mathbb{P}\left(\left|X_{n,p} - np\right| \geqslant n\epsilon\right) \leqslant \frac{pq}{\epsilon} \cdot \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Per il **teorema del limite centrale** vale che:

$$\frac{X_{n,p} - np}{\sqrt{npq}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Applico il limite ed ottengo:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n,p} - np}{\sqrt{npq}} \geqslant \epsilon\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Vado ad aggiungere il termine $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ come coefficiente a ϵ per consentire l'integrazione:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n,p} - np}{\sqrt{npq}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \epsilon\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\epsilon}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Maggioro l'integrale:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\epsilon}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\epsilon}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \epsilon} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2pq} n}\right)$$

Il risultato ottenuto, si avvicina allo 0 molto più velocemente del valore $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ ottenuto precedentemente tramite la disuguaglianza di Chebyshev.

La disuguaglianza di Chebyshev è più generale, di conseguenza è più debole. Per esempio nel caso della distribuzione gaussiana risulta molto debole, per cui se è necessario avere un'accuratezza maggiore conviene assolutamente usare la disuguaglianza di Chernoff.

1.1.3 Esempio: Riduzione della probabilità di errore di un algoritmo

Supponiamo di voler calcolare una funzione $f_I \to O$ difficile da calcolare e di disporre di un algoritmo probabilistico $\mathscr{A}$ tali che $\forall x \in I, T_{\mathscr{A}} \leqslant p(|x|)$ dove p è un polinomio di grado **piccolo** e che $\mathbb{P}\left(A(x) = f(x)\right) \geqslant \frac{3}{4}$, col valore di destra maggiore di $\frac{1}{2}$ e indipendente da x, altrimenti non potrei determinare il risultato corretto la frequenza con cui appare

Dato un intero $t > 0$, chiamiamo $\mathscr{A}_t$ l'algoritmo probabilistico che ripete $\mathscr{A}$ per un numero t di volte e ne restituisce il valore più frequente, se esso esiste.

L'algoritmo non garantisce che il risultato sia corretto, infatti anche con n iterazioni rimane possibile che l'algoritmo calcoli con frequenza maggiore la soluzione errata.

Algorithm 1: Riduzione della probabilità di errore

input : $x \in I$
output: Valore più frequente o non so

```
1  begin
2      for i ∈ [1,...,t] do
3          Esecuzioni indipendenti di 𝒜 su x;
4          A[i] = 𝒜(x)
5      end
6      if ∃z ∈ (A[1],...,A[t]) : #{j ∈ {1,...,t} : z = A[j]} > t/2 then
7          return z;
8      end
9      else
10         return non so rispondere;
11     end
12 end
```

Quante volte devo iterare l'algoritmo per ridurre la probabilità di errore ad un valore δ?

Utilizzando la disuguaglianza di Chernoff per le binomiali ottengo:

$$\mathbb{P}\left(\mathscr{A}_t \neq f(x)\right) \leqslant \mathbb{P}\left(X_{t,\frac{3}{4}} \leqslant \frac{t}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X_{t,\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}t \leqslant -\frac{t}{4}\right) \leqslant e^{-2\frac{1}{16}t} = e^{-\frac{1}{8}} \leqslant \delta$$

Calcolo il logaritmo naturale ed ottengo il valore di t per $\delta = 1000^{-1}$.

$$t \geqslant 8\ln\frac{1}{\delta} \Rightarrow t \geqslant 8\ln 1000 = 24\ln 10 \approx 56$$

Se avessimo invece utilizzato la **disequazione di Chebyshev** avremmo invece ottenuto un risultato molto peggiore:

$$\mathbb{P}\left(X_{t,\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}t \leqslant -\frac{t}{4}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|X_{t,\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}t\right| \geqslant \frac{t}{4}\right) \leqslant \frac{3}{t} \Rightarrow t \geqslant 3000$$

1.1.4 Esempio: Lancio di monete

Consideriamo il caso di una variabile aleatoria $X_{n,\frac{1}{2}}$ con media $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$:

$$\mathbb{P}\left(\left|X_{n,\frac{1}{2}} - \frac{n}{2}\right| \geqslant \sqrt{n\log n}\right) \leqslant 2e^{-2\log n} = \frac{2}{n^2}$$

Per esempio, posto $n = 100$ si ottiene:

$$\mathbb{P}\left(\left|X_{n,\frac{1}{2}} - 50\right| \geqslant 21\right) \leqslant \frac{1}{5000}$$

Rendendo la maggiorazione più aderente, dividendo il termine destro per due, si ottiene:

$$\mathbb{P}\left(\left|X_{n,\frac{1}{2}} - \frac{n}{2}\right| \geqslant \sqrt{\frac{n\log n}{4}}\right) \leqslant 2e^{\frac{-2\log n}{4}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Nuovamente risolvendo per $n = 100$ si ottiene:

$$\mathbb{P}\left(\left|X_{n,\frac{1}{2}} - 50\right| \geqslant 10.5\right) \leqslant \frac{1}{5} \rightarrow \mathbb{P}\left(39 \leqslant X_{n,\frac{1}{2}} \leqslant 61\right) \geqslant \frac{4}{5}$$

1.1.5 Esempio: Intervalli di confidenza

Si vuole valutare la probabilità p di un evento A disponendo di un test f sull'evento A che restituisce un valore:

$$f: \begin{cases} \text{SI} & \text{con probabilità } p \\ \text{NO} & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

$\frac{X_{n,p}}{n} = \overline{p}$ è una variabile aleatoria con media $\mathbb{E}\left(X_{n,p}\right) = np$.

$$\mathbb{P}\left(\left|p - \overline{p}\right| \geqslant \delta\right) = \mathbb{P}\left(\left|np - X_{n,p}\right| \geqslant n\delta\right) \leqslant 2e^{-2\delta^2 n} \leqslant t$$

$$-2\delta^2 n \leqslant \log\frac{2}{t} \Rightarrow n \leqslant \frac{1}{2\delta^2}\log\frac{2}{t}$$

Dove t rappresenta la probabilità di errore.

Ponendo $\delta = 0.1$ e $t = 100^{-1}$ si ottiene:

$$n \leqslant 50\log 200 = 50\left(\log 2 + 2\log 10\right) \approx 250 \Rightarrow n \geqslant 250$$

2

Algoritmi probabilistici

Gli algoritmi probabilistici richiedono un numero minore di calcoli degli algoritmi deterministici e quindi determinano una soluzione in un tempo minore.

2.1 Classificazione degli algoritmi probabilistici

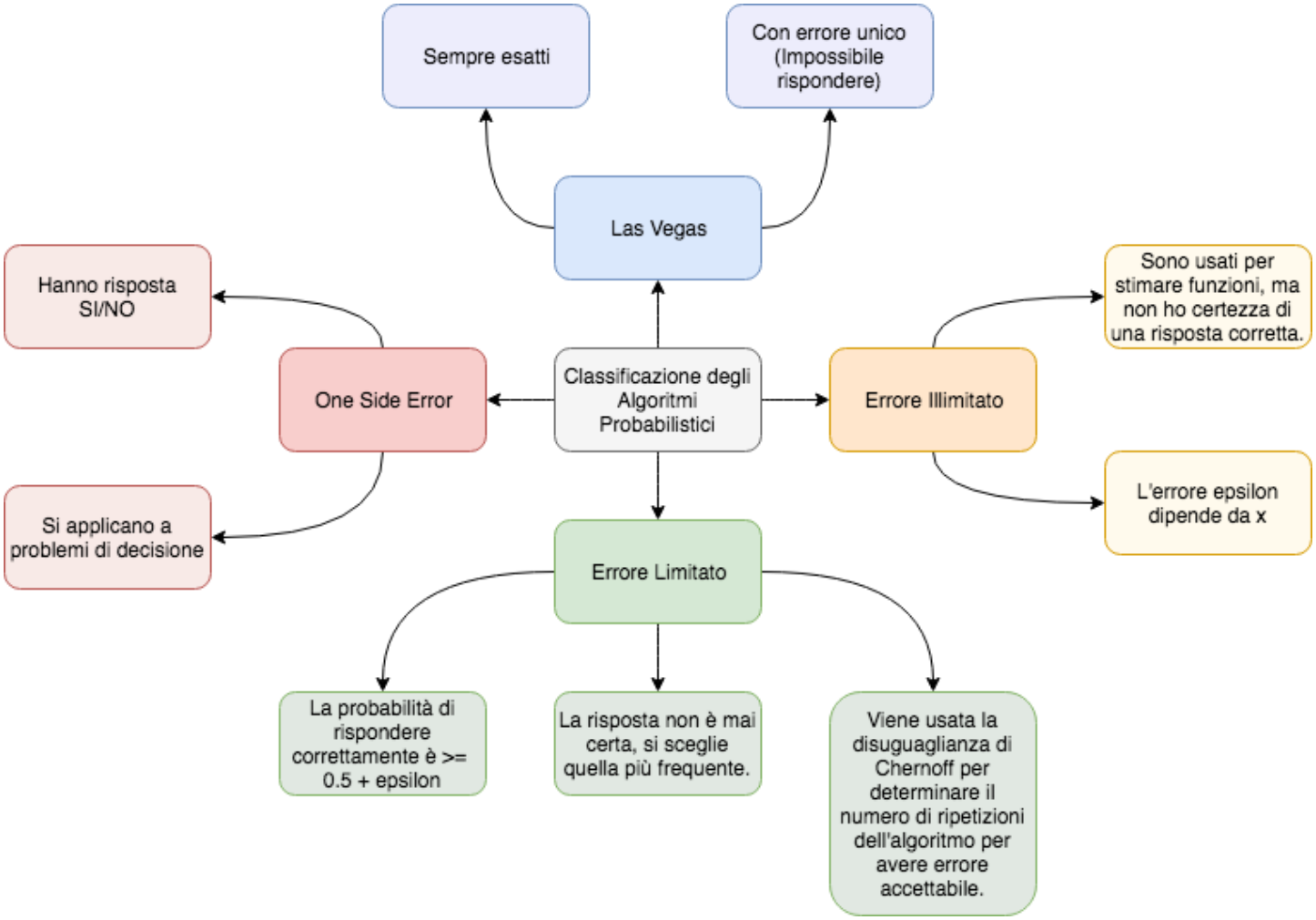


Figura 2.1: Mappa degli algoritmi probabilistici

2.1.1 1-Sided Error

Hanno risposta SI/NO e vengono applicati a problemi di decisione.

Esempio: Problema di protocollo di comunicazione

Si vuole determinare se due stringhe binarie a e b, lunghe n, salvate su due terminali separati sono uguali senza inviare una stringa completamente da un terminale all'altro.

Un approccio banale risolverebbe in n messaggi il problema.

Un approccio sofisticato utilizza i resti della divisione con numeri primi. Dato un numero primo $p \in \{2,\dots,n^2\}$ con probabilità uniforme, di dimensione $\lceil 2\log_2 n \rceil$ bit.

$$r_a = \text{resto}\left(\frac{a}{p}\right) \in \{0,1,\dots,p-1\} \qquad r_b = \text{resto}\left(\frac{b}{p}\right) \in \{0,1,\dots,p-1\}$$

$$r_a \neq r_b \Rightarrow a \neq b$$

$$r_a = r_b \Rightarrow a \text{ potrebbe essere uguale a } b$$

I valori del resto e di p sono inviati al secondo dei due nodi usando al più $2\lceil 2\log_2 n \rceil$ bit, dove viene ripetuta la divisione ed effettuato il controllo, rispondendo con un bit se diversi o zero se uguali.

Se $\mathscr{A}$ restituisce "diverso" la risposta è certamente corretta, mentre se restituisce "uguale" potrebbe essere sbagliato, con una probabilità pari a:

$$\mathbb{P}\left(\text{errore} \mid \mathscr{A} \text{ dice uguali}\right) = \mathbb{P}\left(p \text{ divide } a-b \;\middle|\; a \neq b\right)$$

Usando il **teorema dei numeri primi** che enuncia:

Teorema 2.1.1 (Teorema dei numeri primi). Se $\text{prim}(m) = \#\{i \in \{2,\dots,m\} : i \text{ è primo}\}$ allora vale che:

$$\text{prim}(m) \approx \frac{m}{\ln m} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\text{prim}(m)}{m} \ln m \longrightarrow 1$$

Inoltre è noto che:

$$\forall m > 67, \text{prim}(m) > \frac{m}{\ln m}$$

Ogni numero intero di k bit possiede al più $k-1$ divisori primi.

Si determina che la probabilità di scegliere un certo p risulta essere pari a:

$$\mathbb{P}(p) = \frac{1}{\text{prim}\left(n^2\right)}, \qquad \mathbb{P}(\text{errore}) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n^2\}, i \text{ primo e divisore di } a-b\}}{\text{prim}\,(n)^2}$$

$$\mathbb{P}(\text{errore}) \leqslant \frac{n-1}{n^2/2\log_2 n} \leqslant \frac{2\log_2 n}{n} \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{P}(\text{errore}) \leqslant 10^{-14}$$

Anche per n piccolo, se $\frac{2\ln n}{n} < \frac{1}{2}$ ripeto l'algoritmo t volte ed ottengo una probabilità di errore pari a $\mathbb{P}(\text{errore}) < \frac{1}{2}^t$

Esempio: Quicksort

Dato $\mathbb{E}(n)$, numero medio di confronti richiesto da **Quicksort** su un input di n elementi determinato come:

$$\mathbb{E}(n) = (n+1) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathbb{E}(k) + \mathbb{E}(n-1-k)\right]$$

Usando il corollario del **teorema delle probabilità totali** che ricordiamo essere:

Definizione 2.1.2 (Formula delle probabilità totali). Sia $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$ una partizione finita di ω, $\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \Omega$ e $F_h \cap F_k = \emptyset$ se $h \neq k$, tale che $\mathbb{P}(F_k) > 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n$. Allora ogni evento $E \in \mathscr{F}$ si ha:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E \mid F_k)\mathbb{P}(F_k)$$

Corollario 2.1.2.1 (Corollario sulla media).

$$\mathbb{E}(E) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(E \mid F_k)\mathbb{P}(F_k)$$

Ottengo che i **tempo di calcolo che Quicksort** impiegati con un input di dimensione n sono pari a:

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(T_n \mid B_i)\mathbb{P}(B_i) = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(T_i) + \mathbb{E}(T_{n-1-i})$$

$$\mathbb{E}(n) = 2(n+1)H_n - 4n$$

Dove H_n è l'n-esimo numero armonico, cioè $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Esempio: commutatività di matrici

L'approccio deterministico usualmente termina in $\mathscr{O}(k^3)$ o $\mathscr{O}(k^\alpha)$ con $2 < \alpha < 3$.

La procedura probabilistica cerca di determinare se $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Algorithm 2: Riduzione della probabilità di errore

input : $\boldsymbol{A} = (A[1], \ldots, A[n]), A \in \mathbb{U}^n$
output: Il k-esimo elemento di A

```
1  begin
2  |  Scegli a ∈ {−1,1}^k a caso in modo uniforme;
3  |  u = (a′ · A) B v = (a′ · B) A
4  |  if u ≠ v then
5  |  |  return "Sono diverse";
6  |  end
7  |  else
8  |  |  return "Sono uguali";
9  |  end
10 end
```

$$\mathbb{P}(\text{errore}) = \mathbb{P}\left(\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}\right)$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ una colonna di } \boldsymbol{C} : \underline{\boldsymbol{c}}_i \neq \underline{\boldsymbol{0}}$$

Supponiamo che $\underline{\boldsymbol{c}}_i \neq \underline{\boldsymbol{0}}$, sapendo che $\underline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{AB} = \underline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{BA}$. Prendiamo $\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}$, $a_i \in \{-1, 1\}$. Il prodotto quando $\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{v}}$ risulta essere:

$$\underline{\boldsymbol{a}}'\boldsymbol{AB} = \underline{\boldsymbol{a}}'\boldsymbol{BA} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{c}} = 0 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a}}' \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i c_i = 0$$

Modifichiamo il vettore:

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} -1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}$$

Uno di questi due vettori deve coincidere con A.

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{C} \quad \vee \quad \underline{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{C} = 0$$

È importante notare che non può capire che entrambe le relazioni siano vere allo stesso tempo poiché implicherebbe, ricordando la premessa $\underline{\boldsymbol{c}}_i \neq 0$, che $\underline{\boldsymbol{c}}_i = 0$.

2.1.2 Las Vegas

Sono sempre esatti o ritornano 'impossibile determinare soluzione'.

Esempio: RSEL

Si tratta di un algoritmo **Las Vegas** utilizzato per estrarre il k-esimo elemento da un vettore definito su dominio $\mathbb{U}$ totalmente ordinato (non esistono termini intercambiabili nell'ordine).

Algorithm 3: Riduzione della probabilità di errore

input : $A, B \in \mathbb{N}^{k\times k}$
output: Il k-esimo elemento di A

```
1  begin
2      if n=2 then
3          Risolvi il problema direttamente.
4      end
5      else
6          Scegli t ∈ {1,2,...,n} a caso in modo uniforme. Calcola A ⩽ {A[j], A[j] < A[t]}. Calcola A ⩾ {A[j], j ≠ t, A[j] ⩾ A[t]}.
7          if #{A} ⩽ k − 1 then
8              return A[t]
9          else if #{A<} ⩾ k then
10             return RSEL(A<, k)
11         else
12             return RSEL(A>, k − #{A<} − 1)
13         end
14     end
15 end
```

$$T(n,k) \leqslant T_{\text{Quicksort}}(n)$$

Caso pessimo $T(n,k) = \mathcal{O}\left(n^2\right)$

Caso medio $T(n,k) = \mathcal{O}\left(n\log n\right)$

Numero medio di confronti in RSEL

$$T(n,k) = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{l=k}^{n-1} T(l,k) + \frac{1}{n}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{k-2} T(n-1-l, k-l-1)$$

Con $k \leqslant n, \#\{A_<\} = l$.

Esempio: Protocollo 10

Si tratta di un algoritmo **Las Vegas** per la comunicazione, che vuole stabilire se esiste un termine condiviso tra le due liste: $\exists i : x_i = y_i$.

$$\begin{aligned} A &: x_i, x_2, \ldots, x_1 0, \qquad x_i \in \{0,1\}^n \qquad \forall i \in 1,\ldots,10 \\ B &: y_i, y_2, \ldots, y_1 0, \qquad y_i \in \{0,1\}^n \qquad \forall i \in 1,\ldots,10 \end{aligned}$$

1. A genera 10 numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_10$, anche uguali, poiché estratti a caso in modo uniforme in $[0, n^2]$.

   A calcola $r_i = \text{resto}\left(\frac{x_i}{p_i}\right) \quad \forall i, \ldots, 10$

   A invia le 10 coppie di resti e numeri primi.

2. B calcola $s_i = \text{resto}\left(\frac{y_i}{p_i}\right) \quad i = 1, \ldots, 10$.

   Se sono tutti diversi allora B risponde "NO".

   Altrimenti sia $j = \min\{i : r_i = s_i\}$ e B invia (y_j, J) ad A.

3. In quest'ultimo caso (2) A verifica se $x_j = y_j$ e risponde "SI", altrimenti risponde "non so".

L'algoritmo termina in $10n$ messaggi.

L'algoritmo nel caso di risposta "NO" richiede $10 \cdot n \cdot (2\log_2 n) + 1 = 40\log_2 n + 1$ e nel caso "SI" oppure "?" richiede $40\log n + 4 + n + 1$.

Le risposte "SI" e "NO" sono corrette.

Probabilità di errore del protocollo 10

Primo Caso $\mathbb{P}(? \mid \forall i\, x_i \neq y_i) = \mathbb{P}(\exists l \mid r_l = s_l : \forall i\, x_i \neq y_i) \leqslant \sum_{l=1}^{1} 0\mathbb{P}(r_l = s_l : \forall i\, x_i \neq y_i) = 10 \cdot \frac{2\ln n}{n} = \frac{10\ln n}{n} \Rightarrow n \geqslant 40\ln n$

Secondo Caso

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(? \mid \exists l : x_l = y_l) &\leqslant \mathbb{P}\left(\exists j < l : r_j = s_j \;\middle|\; l = \#\{i : x_i = y_i\}\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\exists j < 10 : r_j = s_j \;\middle|\; 10 = \min\{i : x_i = y_i\}\right) \\
&\leqslant g \cdot \mathbb{P}(r_1 = s_1 \mid x_1 \neq y_1) \\
&\leqslant g \cdot \frac{2\ln n}{n} = 18 \cdot \frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow n \geqslant 40\ln n
\end{aligned}$$

2.1.3 Errore limitato (2-Sided Error)

La probabilità di rispondere correttamente è $\mathbb{P}$ (corretto) $\geqslant \frac{1}{2} + \epsilon$. Non si è mai assolutamente certi della risposta ottenuta ma si sceglie quella che appare più frequentemente. Generalmente si usa la **disuguaglianza di Chernoff** per determinare il numero di ripetizioni dell'algoritmo per avere un errore accettabile.

2.1.4 Errore Illimitato

Sono una tipologia di algoritmi probabilistici usati per stimare funzioni ma non ho la certezza di una risposta corretta. L'errore ϵ dipende dalla x.

2.2 Metodi per l'eliminazione dell'errore

3

Catene di Markov

3.1 Proprietà di Grafi, matrici e vettori stocastici

3.1.1 Cos'è una matrice stocastica?

3.1.2 Cos'è una matrice primitiva?

3.1.3 Proprietà di autovalori ed autovettori di una matrice stocastica

3.1.4 Teoremi sulla periodicità

3.2 Definizione di una catena di Markov

3.3 Proprietà fondamentali sulle catene

3.4 Stati ricorrenti

3.4.1 Prima definizione

3.4.2 Seconda definizione

3.4.3 Terza definizione

3.4.4 Stati essenziali

3.4.5 Gli stati ricorrenti sono stati essenziali

3.5 Tempi medi di rientro

3.5.1 Caso degli stati ricorrenti (*)

3.6 Definizione di catena ergodica

3.7 Esistenza di distribuzioni stazionarie (*)

3.8 Ergodicità delle catene con matrici di transizione primitive (*)

4

Applicazioni algoritmiche

4.1 Catene reversibili

4.2 Passeggiate a cso su grafi

4.2.1 Algoritmo probabilistico per 2-SODD

4.3 Metodo MCMC (Monte Carlo Markov Chain): rappresentazione di algoritmo e proprietà

4.3.1 Generazione di insiemi indipendenti in grafi (anche di dimensione fissata)

4.4 Algoritmo di Metropolis

4.5 Campionatore di Gibbs

5

Velocità di convergenza degli algoritmi MCMC

5.1 La problematica

5.2 Come stimare la velocità di convergenza

5.3 Stimare il numero di passi

5.4 Metodo generale basato sul coefficiente ergodico

6 Coupling

6.1 Metodo di accoppiamento (Coupling method)

6.1.1 Caso del campionatore di set indipendenti di dimensione fissa

6.1.2 Campionatore di colorazioni

7 Colorazioni di grafi

7.1 Stima del numero di colorazioni di un grafo (algoritmo ed enunciati)