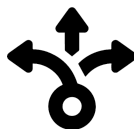


METODI E MODELLI PER LE DECISIONI

Prof. Roberto Cordone
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018



Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
17 dicembre 2017

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Dispense	2
2	Problemi di Decisione	3
2.1	Problemi complessi	3
2.2	Proprietà delle preferenze	4
2.3	Ipotesi funzione del valore	5
2.4	Tabella riassuntiva	5
2.5	Conto di Borda	6
2.6	Problemi semplici	6
3	Programmazione matematica	7
3.1	Programmazione matematica	8
3.2	Lemma di Farkas	9
3.3	Condizioni di KarushKuhnTucker (KKT)	9
3.4	Metodo dei vincoli	9
3.5	Metodo Lessicografico	9
3.6	Metodo lessicografico con livelli di aspirazione	10
3.7	Metodo del punto utopia	10
4	Teoria dell'utilità a molti attributi (MAUT)	11
4.0.1	Indipendenza preferenziale	12
A	Temi d'esame risolti	13
A.1	Tema d'esame - 11 Aprile 2017	13
A.1.1	Esercizio 1	13
A.1.2	Soluzione esercizio 1	13

1

Introduzione

1.1 Dispense

Sono disponibili dispense sul sito del corso.

2

Problemi di Decisione

2.1 Problemi complessi

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figura 2.1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1. X rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **soluzioni** o anche delle **soluzioni ammissibili**.
2. Ω rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3. F rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4. f rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5. D rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6. Π insieme delle **preferenze**.

X viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ se } 2005/06/28 \text{ ver : 1.3 subfigpackage} \in X \Rightarrow 2005/06/28 \text{ ver : 1.3 subfigpackage} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine x_i viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

Ω viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{ se } \omega \in \Omega \Rightarrow \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine ω_i viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

F viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{ se } 2005/06/28ver : 1.3subfigpackage \in F \Rightarrow 2005/06/28ver : 1.3subfigpackage = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le $f_l \in \mathbb{R}$ vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obbiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La f viene definita come:

$$f(2005/06/28ver : 1.3subfigpackage, \omega) : X \times \Omega \rightarrow F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La Π viene definita come

$$\Pi : D \rightarrow 2^{F \times F}$$

, dove $\pi_d \subseteq F \times F$. $F \times F$ rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre $2^{F \times F}$ rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo $F = \{f, f', f''\}$, otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f', f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \preceq_d f'' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il \preceq_d , minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi \succsim_d .

Definizione 2.1.1 (indifferenza). Due preferenze f' e f'' sono dette **indifferenti** quando:

$$f' \sim f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preceq_d f'' \\ f' \succsim_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.1.2 (Preferenza Stretta). Una preferenza f' è detta **preferenza stretta** quando:

$$f' <_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preceq_d f'' \\ f' \not\succsim_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.1.3 (Incomparabilità). Due preferenze f' e f'' sono dette **incomparabili** quando:

$$f' \not\preceq_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \not\preceq_d f'' \\ f' \not\succsim_d f'' \end{cases}$$

2.2 Proprietà delle preferenze

Proprietà riflessiva

$$f \preceq f \quad \forall f \in F$$

Proprietà di completezza

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \not\prec f' \Rightarrow f' \preceq f \quad \forall f, f' \in F$$

Proprietà di anti-simmetria

$$f \preceq f' \wedge f' \preceq f \Rightarrow f' = f \quad \forall f, f' \in F$$

Proprietà Transitiva

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale. Viene generalmente considerata verificata.

$$f \preceq f' \wedge f' \preceq f'' \Rightarrow f \preceq f'' \quad \forall f, f', f'' \in F$$

2.3 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore v , ha in mente una relazione di preferenza Π **riflessiva, completa, non necessariamente anti simmetrica e transitiva**. Quando una relazione possiede queste proprietà viene chiamata **ordine debole**, debole perché possono esistere dei *pari merito*. Un campo di applicazione sono i campionati sportivi.

$$\exists v : F \rightarrow \mathbb{R} : f \preceq f' \Leftrightarrow v(f) \geq v(f')$$

Condizioni di preordine

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività** si ottiene la condizione di **preordine**.

Ordini deboli

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività e completezza** si ha la condizione di ordine debole, che è molto utilizzata.

Ordine parziale

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività e antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine parziale**.

Ordine totale

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività, completezza e antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine totale**.

2.4 Tabella riassuntiva

Proprietà	Preordine	Ordine debole	Ordine parziale	Ordine totale
Riflessività	✓	✓	✓	✓
Transitività	✓	✓	✓	✓
Completezza		✓		✓
Antisimmetria			✓	✓

2.5 Conto di Borda

La formula in figura 2.2 utilizzato per costruire una **funzione valore**:

$$v(f) = |\{f' \in F : f \preceq f'\}|$$

Figura 2.2: Conto di Borda

Il valore di un impatto è pari al numero di impatti cui esso è preferibile, compreso l'impatto stesso.

Quando la cardinalità dell'insieme è $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ è possibile ottenere una **funzione valore**, ma quando ci si trova in condizioni come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che non risultano più mappabili sull'insieme \mathbb{R} non risulta più possibile realizzare una **funzione valore**.

2.6 Problemi semplici

Un problema viene detto *semplice* quando essi possiedono queste caratteristiche:

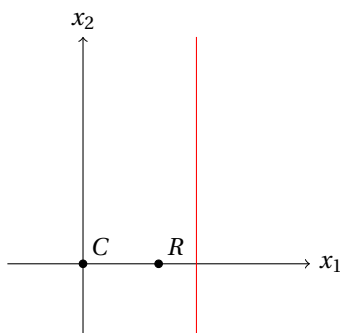
1. $\exists v(f)$ conforme
2. $|\Omega| = 1 \Rightarrow f : X \rightarrow \mathbb{R}$, cioè esiste un $f(x)$
3. $|D| = 1$
4. $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0 \forall j = 1, \dots, n\}$ con $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$

3

Programmazione matematica

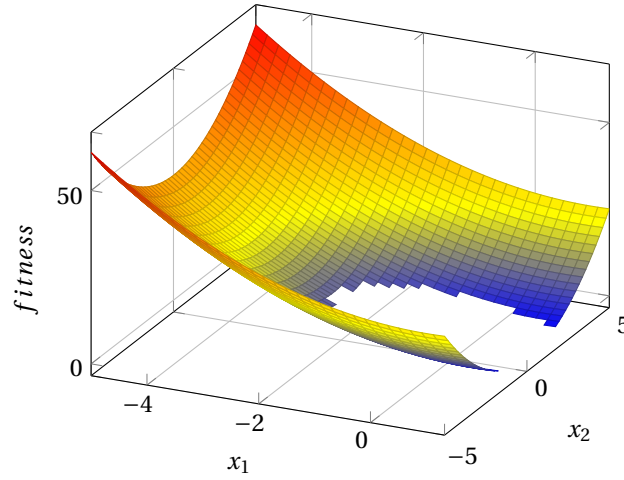
Minimizzo $f(x)$, con la condizione di $g_j(x) \leq 0 \forall j = 1 \dots n$.

Supponiamo di voler identificare la posizione migliore di una discarica, e che il punto in cui i rifiuti vengono prodotti sia $R = (1, 0)$, che in punto $C = (0, 0)$ vi sia in una città e che si debba avere una distanza di almeno 2 dalla città. Inoltre, la nostra discarica deve trovarsi a sinistra di $\frac{3}{2}$, cioè $x_0 < \frac{3}{2}$, perché lì vi è un confine.



La funzione di minimo che vado a definire risulta:

$$\min f(x) = \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1 < \frac{3}{2} \end{cases}$$



3.1 Programmazione matematica

Definizione 3.1.1. *Ottimo locale* \tilde{x} *ottimo locale* $\Leftrightarrow f(x) \geq f(\tilde{x}) \forall x \in \mathbb{U}_{\tilde{x}, \epsilon}$

Dato \tilde{x} come un **ottimo locale**, e $\xi(\alpha)$ un **arco ammissibile** con la caratteristica di:

$$\xi(0) = \tilde{x} \quad \xi(\alpha) \in X \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha})$$

Allora vale che ξ risulta **non migliorante**:

$$f(\xi(\alpha)) \geq f(\tilde{x}) = f(\xi(0)) \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha})$$

La formula sovra riportata può essere espressa più semplicemente tramite:

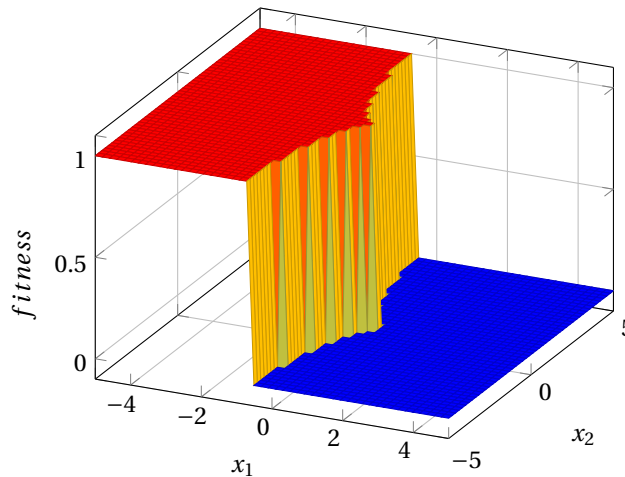
$$[\nabla f(\tilde{x})]^T P_{\xi} \geq 0$$

Definizione 3.1.2 (Punti non regolari).

$$\tilde{x} \text{ regolare} \Leftrightarrow \nabla g_j(\tilde{x}) \text{ per } g_j \text{ attivo, con le varie funzioni } g_j \text{ linearmente indipendenti}$$

Definizione 3.1.3 (Punti non regolari). *Sono dei punti per cui non vale*

$$[\nabla g_j(\tilde{x})]^T P_{\xi}(\tilde{x}) \geq 0 \text{ per } g_j \text{ attivo} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi \text{ arco ammissibile} \\ \tilde{x} \text{ ottimo locale} \end{cases} \Rightarrow [\nabla f(\tilde{x})]^T P_{\xi} \geq 0$$



3.2 Lemma di Farkas

$$C_j = \{p \in \mathbb{R}^2 : g_j^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.1: Cono direzioni "opposte" ai vettori g_j

$$C_f = \{p \in \mathbb{R}^2 : f^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.2: Cono direzioni "opposte" a f

Se $\exists \mu_j \geq 0 : f = \sum_j \mu_j g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - f^T p \leq 0 \forall p : g_j^T p \leq 0 \forall j$

Posso riscrivere questa formula usando i gradienti:

Se $\exists \mu_j \geq 0 : \nabla f = \sum_j \mu_j \nabla g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - \nabla f^T p \leq 0 \forall p : \nabla g_j^T p \leq 0 \forall j$

che cosa è la combinazione lineare? e convessa? e conica?

3.3 Condizioni di KarushKuhnTucker (KKT)

Se \tilde{x} è un **ottimo locale** e **regolare**, allora $\exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{j: g_j \text{ attivo}} \mu_j \nabla g_j = 0$

Questo viene posto a sistema con $\mu_j g_j(\tilde{x}) = 0 \forall j = 1 \dots n$:

$$\begin{cases} \exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{j: g_j \text{ attivo}} \mu_j \nabla g_j = 0 \\ \mu_j g_j(\tilde{x}) = 0 \forall j = 1 \dots n \\ g_j(\tilde{x}) < 0 \Rightarrow \mu_j = 0 \\ g_j(x) \leq 0 \forall j = 1 \dots m \end{cases}$$

3.4 Metodo dei vincoli

Dato un punto x^* **globalmente paretiano** per $\begin{cases} \min f_1 \\ \vdots \\ \min f_p \end{cases} \Rightarrow x^*$ è un **ottimo globale** per $f_l(x)$, cioè vale che $f_l(x) \leq \epsilon_l = f_l(x^*)$ con $x \in X$

3.5 Metodo Lessicografico

1. Si chiede al **decisore** di introdurre un **ordinamento totale** sugli indicatori, cioè $1, \dots, P \rightsquigarrow \pi_1, \dots, \pi_P$, dove π_1 viene considerato l'**indicatore principale**.
2. Vado a selezionare tutti i **cammini a costo minimo**, limitandomi all'indicatore principale: $\min_{x \in X} f_{\pi_1} \rightarrow X_1^*$
3. Continuo a cercare i cammini a costo minimo degli indicatori successivi, sino a che rimango con un'unica soluzione minimante valida. Se arrivo all'ultimo indicatore con più di una soluzione ne scelgo una a caso. La soluzione così ottenuta è **globalmente paretiana** (benchè tendenzialmente molto squilibrata e che non da un compromesso) perchè è un ottimo per tutte le funzioni.

3.6 Metodo lessicografico con livelli di aspirazione

In aggiunta al passaggio preliminare visto precedentemente fisso i **livelli di aspirazione** $\epsilon_l \quad \forall l \neq \pi_1$

3.7 Metodo del punto utopia

Viene aggiunto un punto che viene descritto dal decisore come il migliore possibile, ignorando temporaneamente i vincoli, e si va quindi ad identificare una regione paretiana come quella che ne minimizza la distanza.

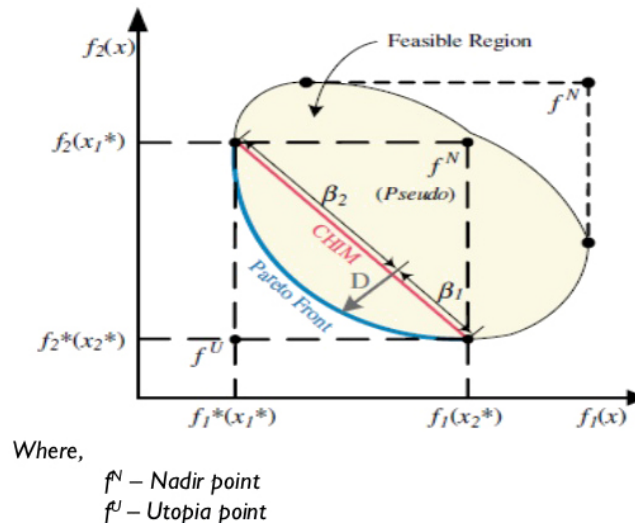


Figura 3.3: Metodo del punto utopia

4

Teoria dell'utilità a molti attributi (MAUT)

La teoria MAUT (multiple attribute utility theory) ipotizza di trovarsi nella situazione in cui un decisore è in grado di ordinare gli indicatori, creando un set Π con un ordine debole. Ipotizza inoltre l'esistenza di una funzione valore $u(f)$ conforme a Π . Spesso la $u(f)$ non si conosce ed è necessario costruire il passaggio da π a $u(f)$



Figura 4.1: MAUT in progress

Campiono quindi gli impatti e connetto quelli che risultano indifferenti preferenzialmente, cercando di identificare forme analitiche che le descrivano.

$$u(b) = f_1 f_2 \rightarrow u(b) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}$$

Definita quindi una formula vado a verificare che valga su quei punti:

$$u(f_1) = u(f_2) \Rightarrow f_1^{\alpha_1} f_1^{\alpha_2} = f_2^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}$$

$$u(f) = \prod_{l=1}^p f_l^{\alpha_l}$$

Figura 4.2: **Funzioni di Cobb-Douglas:** descrive un consumatore, viene usata in economia

Questo procedimento diventa rapidamente insolubile all'aumentare dei decisori e degli indicatori. Viene quindi *ipotizzato* che la funzione di utilità sia **additiva**, cioè che valga:

$$u(f) = \sum_{l=1}^p u_l(f_l)$$

4.0.1 Indipendenza preferenziale

Dato un insieme $P = \{1, \dots, p\}$ degli indici, $L \subset P$ con L preferenzialmente indipendente da $P \setminus L$.

Esempio sui viaggi

Viaggiare bene prima implica voler viaggiare bene dopo?

$$\begin{bmatrix} f_L \\ f \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} f'_L \\ f \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_L \\ \xi \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} f'_L \\ \xi \end{bmatrix} \quad \forall f_L \forall f'_L \forall f \forall \xi$$

Esempio sui pranzi

Primo e secondo non sono preferenzialmente indipendenti.

$$f = \begin{bmatrix} primo \\ secondo \end{bmatrix}$$



Temi d'esame risolti

A.1 Tema d'esame - 11 Aprile 2017

A.1.1 Esercizio 1

Si definisca in modo formale un problema di decisione complesso $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$ descrivendo brevemente il significato dei suoi elementi. Si indichino le proprietà di cui deve godere la relazione di preferenza Π per essere un ordine debole e si spieghi se, in tal caso, essa ammette una funzione valore conforme.

A.1.2 Soluzione esercizio 1

Un problema di decisione complesso viene descritto da una sestupla $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$, i cui simboli rappresentano rispettivamente:

X L'insieme delle **soluzioni possibili**.

Ω L'insieme degli **scenari o esiti possibili**.

F L'insieme degli **impatti possibili**.

$f: X \times \Omega \rightarrow F$ La **funzione impatto**:

1. Ogni coppia $(x, \omega) \in X \times \Omega$ descrive una configurazione del sistema sul quale si intende prendere una decisione.
2. La funzione f associa a ogni configurazione (x, ω) del sistema un impatto $f(x, \omega) \in F$ che descrive tutte le caratteristiche della configurazione (x, ω) che sono rilevanti ai fini della decisione.

D L'insieme dei **decisori**.

$\Pi: D \rightarrow 2^{F \times F}$ La **relazione di preferenza**, una funzione che associa ad ogni decisore $d \in D$ un sottoinsieme di coppie di impatti, $\Pi(d) \subseteq F \times F$.

La **relazione di preferenza** Π per essere un *ordine debole* deve godere delle proprietà **riflessiva**, **transitiva** e di **completezza**.

Proprietà riflessiva Ogni impatto è **indifferente** a se stesso: $f \preceq f$.

Proprietà transitiva Se un impatto f_1 è preferibile ad un altro f_2 e questo ad un terzo f_3 , allora il primo è preferibile al terzo: $f_1 \preceq f_2 \wedge f_2 \preceq f_3 \Rightarrow f_1 \preceq f_3$.

Proprietà di completezza Dati due impatti, uno dei due è certamente **preferibile** all'altro, o al limite sono **indifferenti**.

Una **funzione valore** (o *funzione di utilità*) $v : F \rightarrow \mathbb{R}$ associa ad ogni impatto un valore reale, ed è conforme ad una relazione di preferenza Π quando il valore di un impatto f_1 preferibile ad un impatto f_2 è maggiore del valore dell'impatto f_2 : $f_1 \preceq f_2 \Leftrightarrow v(f_1) \geq v(f_2) \forall f_1, f_2 \in F$.

Se una relazione di preferenza Π ammette una funzione valore, allora Π è un ordine debole. **Non vale però il contrario**, per esempio un *ordine lessicografico* è un ordine totale che non ammette una funzione valore conforme.

Una relazione Π di ordine debole su F ammette una funzione valore conforme **se e solo se** $\exists \tilde{F} \subseteq F$ numerabile e denso in F .