RICERCA OPERATIVA

Prof. Marco Trubian
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018

Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
17 gennaio 2018

Indice

1

Modelli di programmazione lineare

1.1 Formulazione di un modello PL

Un modello di programmazione lineare si ottiene assumendo che **funzione obbiettivo** e **vincoli** e viene espresso come:

$$
\begin{aligned}
\min x(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
\vdots \\
a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m
\end{aligned}
$$

Esso include anche i vincoli di non negatività delle variabili di decisione:

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

In forma matriciale (compatta) il modello di PL può essere formulato nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\min z(x) = c^T x \\
Ax \geq b \\
x \geq 0
\end{aligned}
$$

Dove $c \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei coefficienti della funzione obbiettivo mentre $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti dei vincoli ed A è la matrice dei coefficienti delle variabili di decisioni nei vincoli.

1.2 Modelli di pianificazione della produzione

Dato un numero di risorse m disponibile per la produzione di n prodotti, a_{ij} con $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$ la quantità di risorsa i necessaria per produrre una unità di prodotto j, b_i la quantità della risorsa disponibile i e p_j il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita di un prodotto j, il modello PL è costituito come segue:

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Figura 1.1: Modello di pianificazione della produzione

1.3 Modelli di miscelazione

Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità degli m componenti, a_{ij} la quantità di componente i presente nell'ingrediente j mentre b_i rappresenta la quantità minima di componente i richiesto nella miscela. Il costo unitario dell'ingrediente j è indicato con c_j.

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Figura 1.2: Modello di miscelazione

Ulteriori vincoli tipici potrebbero essere la presenza di un componente i minore di un valore d_i:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le d_i$$

1.4 Modelli di flusso su rete

1.4.1 Problema di flusso a costo minimo

Dato un grafo orientato $\mathscr{D} = (\mathscr{N}, \mathscr{A})$ dove $\mathscr{N}$ è l'insieme dei nodi, mentre $\mathscr{A}$ è l'insieme degli archi, si indica con b_i con $i \in \mathscr{N}$ la fornitura (se positivo) o domanda (se negativo) del nodo i e con c_{ij}, l_{ij} e u_{ij} rispettivamente il costo, la capacità minima e massima dell'arco $(i, j), \forall (i, j) \in \mathscr{A}$. La sestupla $R = (\mathscr{N}, \mathscr{A}, b, c, l, u)$ si definisce **rete**.

Il vincolo afferma che la differenza tra la quantità di flusso entrante e la quantità uscente dal nodo deve essere uguale alla fornitura / domanda.

$$\min z(x) = \sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\mathscr{A}} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in \mathscr{N}$$

Figura 1.3: Problema di flusso a costo minimo

1.4.2 Problema del cammino orientato di costo minimo

Basandosi sul caso base visto nel **problema di flusso a costo minimo** 1.4.1 aggiungiamo i nodi s (origine) e t (destinazione), considerando quindi $i \neq s \neq t$ e le forniture $b_i = 0$, $b_s = 1$ e $b_t = -1$:

$$\begin{aligned}
\min z(x) = \sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} c_{ij} x_{ij} \\
\sum_{(s,j)\in\mathscr{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in\mathscr{A}} x_{js} = b_s = 1 \\
\sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\mathscr{A}} x_{ji} = b_i = 0 \quad \forall i \in \mathscr{N} \\
\sum_{(t,j)\in\mathscr{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in\mathscr{A}} x_{jt} = b_t = -1
\end{aligned}$$

Figura 1.4: Problema del cammino orientato di costo minimo

1.4.3 Problema del massimo flusso

Basandosi sempre sul caso base del **problema di flusso a costo minimo** 1.4.1, poniamo i costi c_{ij}, capacità minime l_{ij} e le forniture b_i a 0. L'obbiettivo posto è di inviare la massima quantità di flusso possibile da un nodo di ingresso s (detto sorgente) ed uno di uscita t (detto pozzo). Viene indicata con v la fornitura del nodo s (che non è un parametro ma una variabile dipendente dalle x_{ij}, rappresentante il flusso netto uscente da s)

$$\begin{aligned}
\min z(x) = v \\
\sum_{(s,j)\in\mathscr{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in\mathscr{A}} x_{js} = b_s = v \\
\sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\mathscr{A}} x_{ji} = b_i = 0 \quad \forall i \in \mathscr{N} \\
\sum_{(t,j)\in\mathscr{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in\mathscr{A}} x_{jt} = b_t = -v \\
x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i,j) \in \mathscr{A}
\end{aligned}$$

Figura 1.5: Problema del massimo flusso

1.4.4 Problema di trasporto

Dati n nodi di origine (stabilimenti di produzione) con una produzione di $a_i, i \in \{1,\dots,n\}$ e m nodi di destinazione (punti vendita), ciascuno caratterizzato da una domanda $b_j, j \in \{1,\dots,m\}$ ed un costo unitario di trasporto c_{ij}. L'obbiettivo del problema è di determinare il quantitativo di prodotto da inviare da ciascuna origine verso ciascuna destinazione in modo tale da minimizzare il costo complessivo di trasporto rispettando i vincoli sulla quantità di prodotto disponibile in ciascuna origine e garantendo il soddisfacimento delle domande di ogni destinazione.

$$\begin{aligned}
\min z(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\
\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j
\end{aligned}$$

Figura 1.6: Problema di trasporto

Per ricondursi al caso in cui vale il vincolo $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$ è sempre possibile aggiungere una destinazione fittizia $m+1$ che funge da discarica.

Una variante del problema di trasporto considera la possibilità di includere p nodi intermedi di transito, che possono scambiare il materiale anche tra loro. Questo porta il numero delle origini e destinazioni a divenire $n+p$ e $m+p$ (ogni origine può inviare a p nuovi nodi ed ogni destinazione può ricevere da p nuovi nodi). Diviene necessario aggiungere due vincoli ulteriori per modellare i nodi p come intermedi, cioè che ogni punto di transito abbia un flusso entrante coincidente con il flusso uscente e che non ponga ulteriori limitazioni:

$$\begin{aligned}
\min z(x) = \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{m+p} c_{ij} x_{ij} \\
\sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} \le a_i \quad \forall i \\
\sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} = b_j \quad \forall j \\
\sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j \quad \forall i \\
\sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j \quad \forall j
\end{aligned}$$

Figura 1.7: Problema di trasporto con p nodi intermedi

1.4.5 Problema dell'assegnamento

Supponiamo di avere n oggetti (per esempio lavoratori) ed altrettanti posti (per esempio postazioni di lavoro) associate da un costo di assegnamento c_{ij}. Il problema consiste nel determinare il modo più conveniente di assegnare ogni oggetto i ad uno e un solo posto j. Il problema è a variabili di tipo binario ($x_{ij} \in \{0,1\}$).

$$\begin{aligned}
\min z(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j
\end{aligned}$$

Figura 1.8: Problema dell'assegnamento

Varianti tipiche possono essere sull'assegnare un numero oggetti diverso dal numero di posti, che vanno a modificare i vincoli di uguaglianza a $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1$.

1.5 Modelli multi periodo

Modelli in cui viene utilizzata un intervallo di tempo, con $t \in \{1,\ldots,T\}$ la generica frazione di tempo, genericamente utilizzata per la minimizzazione dei costi su un intervallo o massimizzazione di un'utilità.

1.6 Riassunto

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

(a) Modello di pianificazione della produzione

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

(b) Modello di miscelazione

$$\min z(x) = \sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\mathscr{A}} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in \mathscr{N}$$

(c) Problema di flusso a costo minimo

$$\min z(x) = \sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{(s,j)\in\mathscr{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in\mathscr{A}} x_{js} = b_s = 1$$
$$\sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\mathscr{A}} x_{ji} = b_i = 0 \quad \forall i \in \mathscr{N}$$
$$\sum_{(t,j)\in\mathscr{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in\mathscr{A}} x_{jt} = b_t = -1$$

(d) Problema del cammino orientato di costo minimo

$$\min z(x) = v$$
$$\sum_{(s,j)\in\mathscr{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in\mathscr{A}} x_{js} = b_s = v$$
$$\sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\mathscr{A}} x_{ji} = b_i = 0 \quad \forall i \in \mathscr{N}$$
$$\sum_{(t,j)\in\mathscr{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in\mathscr{A}} x_{jt} = b_t = -v$$
$$x_{ij} \le u_{ij} \quad (i,j) \in \mathscr{A}$$

(e) Problema del massimo flusso

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i \quad \forall i$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j$$

(f) Problema di trasporto

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{m+p} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} \le a_i \quad \forall i$$
$$\sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} = b_j \quad \forall j$$
$$\sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j \quad \forall i$$
$$\sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j \quad \forall j$$

(g) Problema di trasporto con p nodi intermedi

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

(h) Problema dell'assegnamento

2
Modelli di programmazione intera

In questi modelli tutte o alcune variabili di decisione sono vincolate ad assumere valori interi o binari. Talvolta è possibile svincolare dall'interezza tramite il rilassamento continuo, arrotondando poi i valori frazionari ottenuti, con un risultato trascurabile sul soddisfacimento dei vincoli.

2.1 Modelli di taglio ottimo

Obbiettivo: Minimizzare lo scarto di prodotto derivato dal taglio di moduli di materiale.

Nel caso base **monodimensionale** si assume di dover tagliare moduli di dimensione D in moduli di dimensioni $d_i, i \in \{1, \dots, m\}$, in numero $r_i, i \in \{1, \dots, m\}$ (per ogni dimensione d_i). Ogni modulo standard può essere tagliato in modo differente, considerando n possibili schemi di taglio: a_{ij} sarà il numero di moduli di dimensione d_i ottenuti da un modulo standard tagliato secondo lo schema j. Per minimizzare lo sfrido (scarto) sarà quindi sufficiente minimizzare il numero di moduli tagliati.

Chiamo x_j il numero di moduli tagliati secondo lo schema j.

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq r_i, \forall i$$
$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{N}, \forall j$$

Figura 2.1: Modello di taglio ottimo

Qualora i moduli avessero più dimensioni il problema diviene molto più difficile da risolvere.

2.2 Modelli dello zaino

Obbiettivo: Massimizzare il valore degli oggetti nello zaino.

Si ha un insieme di n oggetti, ciascuno con un valore c_j ed un peso p_j e uno zaino con un limite di capacità b.

Chiamo x_j la variabile binaria che indica se aggiungo o meno l'oggetto $j-esimo$ nello zaino.

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq b, \forall i$$
$$x_j \in \{0, \ldots, 1\}, \forall j$$

Figura 2.2: Modello dello zaino

2.3 Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

Obbiettivo: Minimizzare i costi di avvio e di produzione.

Avviando una nuova produzione si hanno costi fissi f_j e costi per unità prodotta c_j. Rappresentiamo con $x_j \geq 0$ il numero di prodotti che si decide di produrre, e introduciamo una variabile $y_j \in \{1, 0\}$ che rappresenta se decidiamo o meno di produrre un prodotto j per eliminare la discontinuità all'origine causata dal costo fisso f_j. Per ogni prodotto, consideriamo una domanda b_j ed un vincolo di produzione massima M_j.

$$\min z(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j$$
$$\min z(x, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j - x_j$$
$$x_j \leq M_j \forall j$$

Figura 2.3: Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

2.4 Modelli di localizzazione

Obbiettivo: Posizionare centri di servizio in modo da soddisfare la domanda e minimizzare una funzione di costo.

2.4.1 Capacitated Plant Location (CPL)

Posizionamento di impianti di produzione o immagazzinamento di prodotti da cui deve essere trasportato il prodotto a dei punti vendita. Viene modellato tramite un grado $\mathcal{G} = (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2, \mathcal{A})$, con $\mathcal{N}_1$ nodi rappresentanti i siti potenziali e $\mathcal{N}_2$ i nodi successori. Chiamiamo $d_j, j \in \mathcal{N}_2$ la domanda del nodo successore $j - esimo$, $q_i, i \in \mathcal{N}_1$ il massimo livello di attività del nodo sito candidato $i - esimo$, k_{ij} il costo unitario di trasporto da nodo candidato i a nodo successore j, f_i il costo fisso di avviamento del nodo candidato i.

Chiamo $y_i \in \{0, 1\}$ la variabile binaria rappresentante l'approvazione o meno del nodo candidato $i - esimo$ e s_{ij} il flusso di prodotto dal nodo i a j.

$$\min z(s, y) = \sum_{i \in \mathcal{N}_1} \sum_{j \in \mathcal{N}_2} k_{ij} s_{ij} + \sum_{i \in \mathcal{N}_1} f_i y_i$$
$$\sum_{i \in \mathcal{N}_1} s_{ij} = d_j, \forall j$$
$$\sum_{j \in \mathcal{N}_2} s_{ij} \leq q_i y_i, \forall i$$

Figura 2.4: Capacitated Plant Location (CPL)

Modelli più completi considerano una soglia di attivazione minima per considerare l'approvazione di un nodo candidato.

2.5 Modello di caricamento di contenitori

Si tratta di una generalizzazione del problema dello zaino, in cui sono considerati n zaini o contenitori sempre di dimensione uguale q.

Obbiettivo: Utilizzare meno contenitori il possibile inserendo tutti gli oggetti.

Ogni oggetto ha un peso p_i, la variabile $x_{ij} \in \{0,1\}$ è vera quando l'oggetto i è inserito del contenitore j e $y_j \in \{0,1\}$ è vera quando il contenitore j è utilizzato.

$$\min z(x,y) \sum_{j=1}^{n} y_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \le q y_j, \forall j$$

Figura 2.5: Modello di caricamento di contenitori

Un'alternativa di modello è considerare le capacità dei contenitori diverse q_j ed assegnare ad ogni contenitore un costo c_j.

2.6 Modelli di copertura, di riempimento e di partizionamento d'insieme

Definito un insieme I di m elementi ed una collezione $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ di sottoinsiemi di I, ognuno dei quali con un valore c_j, e una sotto-collezione SC di C. Viene usata una matrice A di dimensione $m \times n$ detta *di copertura* il cui elemento $a_{ij} \in \{0,1\}$ assume valore 1 se $i \in C_j$.

Le variabili di decisione sono $x_j \in \{0,1\}$ e sono vere se $C_j \in SC$.

2.6.1 Modelli di copertura o set-covering

Obbiettivo: Determinare una sotto-collezione SC di valore minimo, detta **copertura**, tale che ogni elemento di I appartenga ad almeno un sottoinsieme di SC.

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1, \forall i$$

Figura 2.6: Modelli di copertura o set-covering

2.6.2 Modelli di riempimento d'insieme o set-packing

Obbiettivo: Determinare una sotto-collezione SC di valore massimo, detto **riempimento**, tale che ogni elemento di I appartenga ad al più una sotto-collezione di SC.

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \forall i$$

Figura 2.7: Modelli di riempimento d'insieme o set-packing

2.6.3 Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning

Obbiettivo: Determinare una sotto-collezione SC di valore minimo, detta **partizione**, tale che ogni elemento di I appartenga esattamente ad una sotto-collezione di SC. Essa costituisce sia una **copertura** sia un **riempimento** di I.

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \forall i$$

Figura 2.8: Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning

3

Modelli di programmazione lineare

3.1 Geometria poliedrale

3.1.1 Combinazione di vettori

Dati k vettori $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ e k scalati $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il vettore $v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ si dice:

Combinazione affine se $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$.

Combinazione conica se $\lambda_j \geq 0 \forall j$.

Combinazione convessa se è sia *conica* che *affine*.

3.1.2 Poliedro

Un poliedro P è intersezione di un numero finito di semispazi.

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \right\}$$

Se il poliedro definisce un'area limitata viene chiamato **politopo**.

3.2 Problema duale

Teorema 3.2.1 (Problema duale)**.** Dato un problema P di PL in forma standard (funzione in forma di minimizzazione):

$$\begin{aligned} \min z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

ogni soluzione ammissibile $\tilde{x}$ di P è tale che:

$$c^T \tilde{x} \geq b^T \tilde{y}$$

dove $\tilde{y}$ è una soluzione ammissibile del seguente problema D (detto **duale** di P) di PL:

$$\max w(y) = b^T y$$
$$A^T y \leq c$$

3.2.1 Regole di simmetria generali

1. A un vincolo di disuguaglianza primale corrisponde una variabile vincolata nel duale.
2. A una variabile vincolata in segno nel primale un vincolo di disuguaglianza nel duale.
3. A un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale.
4. A una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale.
5. Se la funzione del primale è in forma di minimo, nel duale sarà di massimo e viceversa.

Il duale del problema duale è il problema primale.

3.2.2 Condizioni sufficienti di ottimalità

Teorema 3.2.2 (Condizioni sufficienti di ottimalità)**.** Date due soluzioni $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ ammissibili rispettivamente nel problema primale e duale. Se vale la relazione 3.1:

$$c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$$

Figura 3.1: Condizione sufficiente di ottimalità

allora $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi.

Una soluzione $\tilde{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione nel problema duale $\tilde{y}$ che rispetti la relazione 3.1. In tal caso, sia $\tilde{x}$ che $\tilde{y}$ sono ottime.

3.2.3 Relazioni tra primale e duale

Teorema 3.2.3 (Relazioni tra primale e duale)**.** Dato un problema ed il suo duale, è vera esattamente **una** delle seguenti affermazioni:

a) I due problemi ammettono soluzioni ottime finite, x^* e y^* rispettivamente, tali da rispettare la relazione 3.1.
b) Il problema primale è illimitato inferiormente ed il duale è inammissibile.
c) Il problema duale è illimitato superiormente ed il primale è inammissibile.
d) I problemi primale e duale sono entrambi inammissibili.

3.2.4 Condizioni di ortogonalità (Condizioni di ottimalità nel caso vettoriale)

Teorema 3.2.4 (Condizioni Ortogonalità)**.** Date due soluzioni $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n e \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, soluzioni ammissibili nel problema primale e duale rispettivamente ($a_{ij} \in A$, matrice dei coefficienti dei vincoli nei problemi), esse sono ottime se vale la relazione 3.2 (forma vettoriale di 3.1):

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{y}_i)\tilde{x}_j = 0 \quad \forall j$$

Figura 3.2: Condizioni Ortogonalità

3.3 Analisi di Sensitività

Si tratta di un'analisi svolta *dopo* aver identificato la soluzione ottima di un problema di PL volta a determinare la qualità del modello, attraverso la modifica di coefficienti di costo c_j, di risorse b_k, dei vincoli a_{ij} oppure introducendo ulteriori variabili e/o vincoli e osservando in che modo la soluzione ottima va a variare.

3.3.1 Variazione di un costo c_j

Non modifica il poliedro del problema, la soluzione ottima precedente rimane ammissibile ma potrebbe non essere più ottima.

3.3.2 Variazione di una risorsa b_k

Cambia il poliedro del problema (la regione ammissibile) per cui la soluzione ottima potrebbe non essere più ammissibile

3.3.3 Variazione di un vincolo a_{ij}

Va ad introdurre una variazione analoga alla variazione del costo, con l'aggiunta che la matrice A potrebbe diventare invertibile e quindi porterebbe la soluzione di base a non rispettare più le condizioni di ammissibilità o di ottimalità.

3.3.4 Ulteriore variabile

Viene inserita come fosse una variabile precedentemente esistente con costi e coefficienti dei vincoli nulli, che quindi vengono variati con le implicazioni viste nella sezione 3.3.1 e 3.3.3.

3.3.5 Ulteriore vincolo

Si procede analogamente all'aggiunta di variabile.

3.4 Interpretazioni economiche della dualità

Il problema duale può essere interpretato come il problema della determinazione del minimo prezzo a cui all'impresa produttrice converrebbe vendere in blocco le risorse disponibili piuttosto che utilizzarle ai fini produttivi.

3.4.1 Prezzo ombra

Definizione 3.4.1 (Prezzo ombra)**.** Data una variazione δ di una risorsa b_h nel problema primale, con una rispettiva variazione dell'ottimo Δz^*, si definisce **prezzo ombra** la variabile y_h^* del problema duale tale per cui:

$$y_h^* = \frac{\Delta z^*}{\delta}$$

Figura 3.3: Prezzo ombra

Massimizzazione

In un problema in cui la funzione obbiettivo è da massimizzare , il prezzo ombra della risorsa $h-esima$ sarà:

Non negativo nel caso in cui il vincolo h è del tipo $\leq$.

Non positivo nel caso in cui il vincolo h è del tipo $\geq$.

Minimizzazione

In un problema in cui la funzione obbiettivo è da minimizzare , il prezzo ombra della risorsa $h-esima$ sarà:

Non negativo nel caso in cui il vincolo h è del tipo $\geq$.

Non positivo nel caso in cui il vincolo h è del tipo $\leq$.

A

Struttura del tema d'esame

Un tema d'esame di Ricerca Operativa risulta composto da 4/5 esercizi pratici e talvolta alcune domande di teoria.

Gli argomenti più frequenti negli esercizi sono, in ordine, i seguenti:

1. Risolvere graficamento un problema di programmazione lineare. Si evidenzi il vertice ottimo e si riporti il valore di z per tutte le variabili del modello, compreso scarto e surplus. [12]
2. Risolvere mediante scarti complementari la soluzione duale del problema. [11]
3. Formulare un modello di Programmazione Lineare [11]
4. Applicare Algoritmo di Ford-Fulkerson [10]
5. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia. [9]
6. Trovare un taglio di capacità minima [8]
7. Branch & Bound, Problema dello zaino [7]
8. Taglio di Gomory relativo al primo vincolo del PL. [6]
9. Si costruisca un reinstradamento che vada a ridurre il costo (o se ci si trova in condizione di minimo, di aumentarlo) modificandolo solo una volta e fornire la variazione di costo così ottenuta. [6]
10. Forma canonica del Tableau [4]
11. Determinare e disegnare il flusso massimo di un grafo [4]

Seguono le tipologie di esercizi.

A.1 Primo esercizio (8 punti)

A.1.1 Problema di Programmazione Lineare

1. Disegnare la regione ammissibile dai vincoli forniti. Si evidenzi il vertice ottimo e si riporti il valore di z per tutte le variabili del modello, compreso scarto e surplus. [12]
2. Vi sono vertici ammissibili ai quali corrispondono basi degeneri?
3. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia. [9]
4. Da quali variabili è composta la base associata al vertice di una data intersezione?[2]
5. Quanto può variare il termine noto senza che la composizione della base ottima cambi?
6. Risolvere mediante scarti complementari la soluzione duale del problema. [11]

A.1.2 Problema di Programmazione Lineare Grafico

1. Verso dei vincoli rappresentati graficamente.
2. Risolvere per via grafica valori per cui la composizione della base ottima non cambia.

A.2 Secondo esercizio

A.2.1 Problema di Minimo con Tableau [3]

1. Forma canonica del Tableau [4]
2. Per quale dei valori rimanenti il Tableau corrisponde a:
   (a) Valori per ottimo finito [3]
   (b) Soluzione non ottima e degenere [3]
   (c) Problema illimitato [3]
3. Disegnare la regione ammissibile al rilassamento continuo del problema. [2]
4. Individuare l'elemento di pivot individuato dal simplesso duale.[2]

A.3 Terzo Esercizio

A.3.1 Problema di Programmazione Lineare Intero

Dato un problema di PL, si consideri una data base e si ricavi:

1. Vettore dei coefficienti di costo ridotto.
2. Verificare che la soluzione è ottima per il rilassamento lineare del problema.
3. Nel modello duale ottenuto mediante gli scarti complementari una data X, questa è ottima?
4. Porre il problema in forma canonica.
5. Calcolare il vettore della soluzione duale corrispondente.
6. Taglio di Gomory relativo al primo vincolo. [6]

A.3.2 Modello di Programmazione Lineare con Grafi [3]

Costruire un Modello per determinare in un grafo due cicli hamiltoniani disgiunti.

A.3.3 Modello di Programmazione Lineare Intero [4]

Fornire un modello di PLI partendo da alcuni dati forniti.

A.3.4 Branch & Bound, Problema dello zaino [7]

Risolvere un problema dello zaino con l'algoritmo Branch & Bound con strategia Depth First con alcuni parametri dati.

A.4 Quarto esercizio: Formulare un modello di Programmazione Lineare [7]

Date alcune informazioni si chiede di formulare un problema di Programmazione Lineare e quindi di aggioralo dopo aver ricevuto ulteriori informazioni.

A.5 Quinto Esercizio: Grafi

Dati due grafi si chiede di calcolare:

1. Flusso iniziale lungo un dato arco.
2. Applicare Algoritmo di Ford-Fulkerson [10]
   (a) Si riportino tutti i cammini aumentati, come sequenze di nodi, il corispondente incremento di flusso e valore di flusso massimo. [4]
   (b) Determinare e disegnare il flusso massimo di un grafo [4]
3. Trovare un taglio di capacità minima [8]
4. Determinare se il flusso massimo è inviato a costo minimo. [2]
5. Si costruisca un reinstradamento che vada a ridurre il costo (o se ci si trova in condizione di minimo, di aumentarlo) modificandolo solo una volta e fornire la variazione di costo così ottenuta. [6]
6. Si riporti il modello di programmazione matematica del generico problema di ottimizzazione appena risolto.

A.6 Domande di teoria

A.6.1 Domande su Branch & Bound

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C) e la miglior soluzione ammissibile disponibile vale 100. L'upper bound associato al nodo A vale 110, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 99 e 100.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso ☐
b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso ☐
c) il nodo A viene chiuso ☐
d) una tale situazione non si può mai verificare ☐

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da minimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C). Analizzando l'ultimo nodo chiuso l'algoritmo ha identificato la miglior soluzione ammissibile disponibile, di valore 100. Il lower bound associato al nodo A vale 90, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 101 e 99.8. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso ☐
b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso ☐
c) il nodo A viene chiuso ☐
d) una tale situazione non si può mai verificare ☐

. Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono solo tre nodi ancora aperti (A, B, C) e l'attuale valore della miglior soluzione ammissibile è 120. L'upper bound associato al nodo A vale 190.5, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 120 e 97.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia highest first, si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera:

a) si possono chiudere i nodi B e C ☐
b) solo il nodo C può essere chiuso ☐
c) il nodo B sarà il prossimo nodo visitato ☐
d) l'algoritmo si arresta ☐

A.6.2 Domande su problema duale

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :

a) Se P è illimitato allora D è illimitato ☐
b) Se D è illimitato allora P è inammissibile ■
c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita ☐
d) nessuna delle precedenti ☐

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :
a) Se P è illimitato allora D è illimitato ☐
b) Se D è illimitato allora P è inammissibile ■
c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita ☐
d) nessuna delle precedenti ☐

Con riferimento al metodo a due fasi per la soluzione di problemi di PL continua, si consideri la risoluzione del problema ausiliario e si immagini che il valore ottimo di tale problema risulti positivo ($z^*_{AUS} > 0$). Cosa si può dedurre con certezza per il duale D del problema originale?

a) D è illimitato ☐
b) D è limitato ■
c) D è o inammissibile, o illimitato ☐
d) D è inammissibile ☐

A.6.3 Domande su rilassamento del problema lineare continuo

Sia dato un problema di PLI ammissibile e se ne consideri il rilassamento continuo PLC. Quale delle seguenti affermazioni è vera :

a) esiste sempre almeno un taglio che consente di restringere la regione ammissibile di PLC lasciando invariata quella di PLI ☐
b) esiste sempre un vertice intero di PLC ☐
c) se esiste un vertice intero di PLC, questo è un ottimo di PLI ☐
d) se esiste un vertice non intero di PLC, esiste un taglio valido per il problema di PLI ☐

Sia dato un problema di PLI ammissibile e se ne consideri il rilassamento continuo PLC. Quale delle seguenti affermazioni è vera :
a) esiste sempre almeno un taglio che consente di restringere la regione ammissibile di PLC lasciando invariata quella di PLI ☐
b) esiste sempre un vertice intero di PLC ☐
c) se esiste un vertice intero di PLC, questo è un ottimo di PLI ☐
d) se esiste un vertice non intero di PLC, esiste un taglio valido per il problema di PLI ☐

Si consideri un problema di programmazione lineare intera ed il suo rilasciamento continuo. Quale delle seguenti affermazioni è **falsa**:

a) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ammissibile per il problema intero ☐
b) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ottima per il problema intero ☐
c) la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere inammissibile per il problema intero ☐
d) la soluzione ottima del rilassamento continuo, nel caso sia intera, non è necessariamente ammissibile per il problema intero ☐

Siano dati un problema P_I di programmazione lineare a numeri interi con funzione obiettivo da massimizzare ed il corrispondente rilassamento continuo P_C. È nota una soluzione ammissibile x di P_I di valore w. Sia x_C la soluzione ottimale di P_C di valore z.
Se $w=z$ se ne deduce che:

a) la soluzione x_C ha coordinate intere ☐
b) la soluzione x è soluzione ottimale di P_I ☐
c) tutte le soluzioni di base ammissibili di P_C hanno coordinate intere ☐
d) le precedenti affermazioni non si possono dedurre con certezza ☐

A.6.4 Domande su Analisi di sensitività

Si consideri un un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da massimizzare. Siano b_i e p_i il termine noto ed il prezzo ombra associati al vincolo i-esimo nella soluzione ottima, il cui valore è z. Dall'analisi di sensitività sappiamo che l'intervallo di variazione di b_i che lascia inalterata la base ottima vale $[\alpha,\beta]$. Se sommiamo la quantità $\delta>0$ al termine noto b_i, con $b_i + \delta=\beta$ il valore della funzione obiettivo diviene:

a) z □
b) $z+\delta^* p_i$ ■
c) $z-\delta^* p_i$ □
d) non si può dire con le informazioni a disposizione □

Si consideri un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da minimizzare. Se sommando la quantità $\delta>0$ al termine noto b_i del vincolo i-esimo il valore della funzione obiettivo subisce una variazione $\varepsilon<0$ ne deduciamo che il vincolo era

a) di minore uguale ■
b) di maggiore uguale □
c) di uguaglianza □
d) non si può dire con le informazioni a disposizione □

A.6.5 Domande varie

Si riportino i modelli di PLI del problema del commesso viaggiatore (TSP) e dell'albero di supporto di costo minimo (MST) su grafo non orientato G=(N,E).
Si fornisca un modello di PLI per il problema di trovare nel grafo G sia un ciclo hamiltoniano, sia un albero di supporto. I lati scelti devono avere costo complessivo minimo e almeno metà di essi deve appartenere sia al ciclo, sia all'albero. (Suggerimento: si aggiunga una variabile per ogni lato che vale 1 se quel lato fa parte di entrambi gli alberi).

Si consideri un problema di "mix produttivo". Relativamente ai prodotti A, B, C e D, è necessario imporre la condizione che A e B vengano prodotti solo se C oppure D sono in produzione (cioè almeno uno fra C e D deve essere realizzato). Quale fra le seguenti alternative rappresenta l'insieme minimo di vincoli necessari alla corretta rappresentazione del problema come modello di programmazione lineare a numeri interi? (Se la variabile binaria y_i è uguale a 1 significa che il prodotto i è in produzione e se è uguale a 0 significa che non lo è).?

a) $y_C \geq y_A;\ y_D \geq y_A;\ y_C \geq y_B;\ y_D \geq y_B$ □
b) $y_A \leq y_C + y_D;\ y_B \leq y_C + y_D$ □
c) $2y_A \geq y_C + y_D;\ 2y_B \geq y_C + y_D$ □
d) $y_C \leq y_A;\ y_D \leq y_A;\ y_C \leq y_B;\ y_D \leq y_B$ □