

0.1 Cinematica del corpo rigido

0.1.1 Analisi dimensionali e come può aiutare.

Un **forte aiuto** nella risoluzione di esercizi, in meccanica, è *l'analisi dimensionale*. Quando ci si trova di fronte ad equazioni di una grossa mole, come per esempio quella in figura 1, ci si può sentire istintivamente intimoriti, ma un ottimo strumento per identificare eventuali errori è proprio il *controllo delle unità di misura*.

$$\dot{\omega}_m = \frac{gR_p\tau(m - \frac{M}{2}(\sin(\alpha) + f_v\cos(\alpha))) + \mu_d C_m}{\mu_d J_m + m(R_p\tau)^2 + \frac{1}{4}M(R_p\tau)^2 + J_p\tau^2 + \frac{1}{4}J\frac{(R_p\tau)^2}{R^2}} \quad (1)$$

Figure 1: Soluzione di uno dei punti di un esercizio d'esame, che descrive l'accelerazione di un motore, dato un determinato sistema.

Esempio 1 Prendiamo ad esempio un sottoinsieme della formula qui sopra. Potrebbe risultare possibile che, per distrazione ricopiando oppure con un errore di derivazione, al posto della formula corretta (figura 2a) si finisce per scrivere un errore (figura 2b).

$$m - \frac{M}{2}(\sin(\alpha) + f_v\cos(\alpha))$$

(a) Formula corretta.

$$m - \omega \frac{M}{2}(\sin(\alpha) + f_v\cos(\alpha))$$

(b) Formula con un errore.

Figure 2: Sottoinsieme della formula vista sopra.

Nel nostro esempio, appare una velocità angolare che fa assumere un significato dimensionalmente completamente diverso. Ora, questo errore posto nella formula di grosse dimensioni può sfuggire di vista, ma ogni singola somma e sottrazione **deve** essere tra termini nella stessa unità di misura, altrimenti risulta priva di senso.

Possiamo quindi controllare per ogni sottoinsieme dove viene effettuata un'addizione aritmetica se i due termini (previa assenza di sostituzioni precedenti) abbiano dimensionalmente lo stesso significato.

Per quanto ovvio possa essere che non è possibile sommare mele e pere, questo piccolo strumento può risultare molto utile controllando i passaggi di equazioni di grande dimensione, senza dover immediatamente rifare completamente i calcoli.

0.1.2 Considerazioni ed errori comuni nelle derivate in meccanica

Quando si eseguono derivazioni in meccanica, è importante tenere a mente che non si sta derivando in funzione dell'incognita (figura 3), ma del tempo (figure 4 e 5), e la dipendenza delle variabili sul tempo è spesso implicita:

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{df(t)}{dx} = 2x$$

Figure 3: Derivata in funzione dell'incognita x .

$$f(t) = be^{i\alpha} + b$$

$$\frac{df(t)}{dt} = b\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$$

Figure 4: Derivata in funzione del tempo, con α variabile nel tempo e b costante.

$$f(t) = be^{i\alpha} + b$$

$$\frac{df(t)}{dt} = b\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + \dot{b}e^{i\alpha} + \dot{b}$$

Figure 5: Derivata in funzione del tempo, con α e b variabili nel tempo.

0.2 Statica del corpo rigido

0.2.1 Fonti di studio

Un ottimo canale youtube è "Romaprof", ricco di esercizi di statica risolti sia per metodo grafico che analitico, passo passo con spiegazioni.

0.2.2 Gradi di libertà

Un corpo rigido possiede, nel piano, 3 gradi di libertà, 2 traslazionali e uno rotazionale, ovvero può muoversi in 3 direzioni (in orizzontale, verticale e ruotare). Nello spazio, un corpo rigido possiede 6 gradi di libertà, 3 traslazionali e 3 rotazionali. In questo corso presteremo attenzione unicamente al caso piano.

0.2.3 Asta nel piano

Un'asta (figura ??), nel piano, viene rappresentata con una linea che viene chiamata asse baricentrico della trave (o asta).



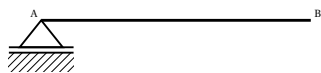
Figure 6: Asta nel piano.

0.2.4 Vincoli

Un vincolo è un oggetto che viene applicato ad un corpo rigido e ne va a limitare il moto. Esistono diverse tipologie di vincoli, ed ogni vincolo possiede caratteristiche particolari.

Carrello

Vincolo semplice che impedisce un moto perpendicolare ad esso, cioè un modo che farebbe "staccare" il carrello dalla parete. In questa dispensa sarà indicato con il simbolo in figura ??. Questo vincolo impone 1 grado di vincolo.



(a) Un carrello applicato ad un'asta.

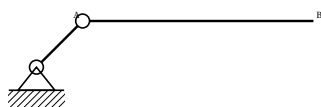


(b) La reazione vincolare di un carrello.

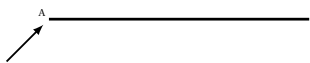
Figure 7: Il vincolo Carrello.

Pendolo semplice o Biella

Vincolo semplice (figura ??) che si oppone ad un moto lungo la propria direzione assiale. Questo vincolo impone 1 grado di vincolo.



(a) Un pendolo applicato ad un'asta.



(b) La reazione vincolare di un pendolo.

Figure 8: Il vincolo Pendolo.

Cerniera

Vincolo doppio (figura ??) che consente unicamente la rotazione, quando è bloccato a terra, o blocca i movimenti assiali delle aste quando interna.



(a) Una cerniera ancorata applicata ad un'asta impone $2gdl$.
 (b) Una cerniera interna applicata a 3 aste impone $2(3 - 1) = 4gdl$.

Figure 9: Il vincolo Cerniera.

Incastro

Vincolo triplo (figura ??) che impedisce qualsiasi movimento quando applicato ad un corpo rigido.



(a) Un incastro applicato ad un'asta impone $3gdl$.
 (b) Le reazioni vincolari di un incastro.

Figure 10: Il vincolo Incastro.

0.2.5 L'analisi (o computo) dei vincoli

Per computo dei vincoli si intende contare tutti i gradi di libertà e di vincolo di un sistema di corpi rigidi e vincoli per dare una prima approssimazione alla categoria in cui questo sistema va ad appartenere. Si tratta di una approssimazione perché esistono casi particolari in cui questa fallisce, che sono illustrati alla fine di questa sotto sezione. È importante tenere a mente il teorema delle cerniere interne mentre si procede con il calcolo.

Struttura Isostatica: $gdl = gdl$

Le strutture isostatiche sono oggetto di questo corso. Il calcolo delle reazioni interne in questi sistemi è sempre risolubile tramite un sistema lineare.

Struttura Iperstatica: $gdl > gdl$

Viene chiamato livello di iperstaticità della struttura i il delta tra gdl e gdl ed indica il numero di incognite aggiuntive che vengono introdotte per risolvere il sistema delle reazioni interne.

Struttura Labile: $gdl < gdl$

Una struttura che potrebbe essere mossa da una forza esterna.

0.2.6 Limiti del computo dei vincoli

Esempio 1

Struttura (figura ??) apparentemente iperstatica ma con vincoli a carrello con e senza cerniera "ridondanti", per cui risulta labile.

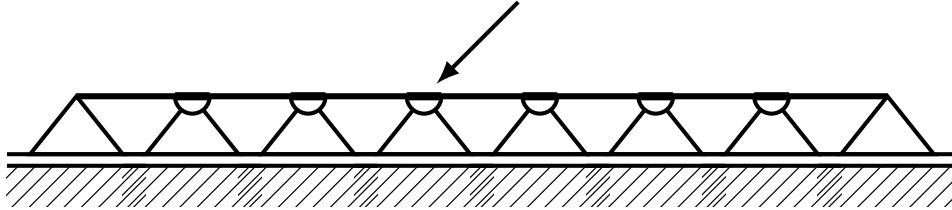


Figure 11: Esempio 1: Struttura apparentemente *iperstatica*.

Esempio 2

Struttura (figura ??) che al calcolo dei vincoli risulta isostatica, potrebbe sembrare labile in base all'esempio precedente, ma che in seguito all'applicazione di un'unica forza verticale risulta addirittura iperstatica.

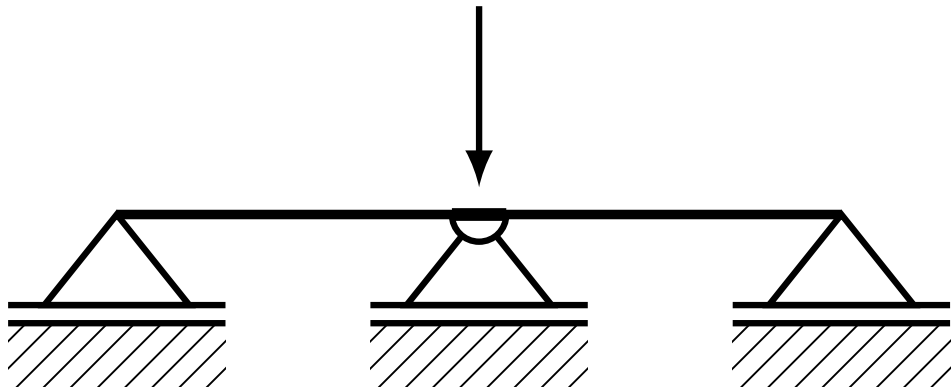


Figure 12: Esempio 1: Struttura apparentemente *iperstatica*.

0.2.7 Caratteristiche della sollecitazione interna

Immaginiamo di tagliare un'asta (figura ??) in un punto S_1 , ottenendo così due tronchi, t_1 e t_2 . In quel punto agiscono un **taglio** T verticale, una **forza normale** N ed un **momento flettente** M .

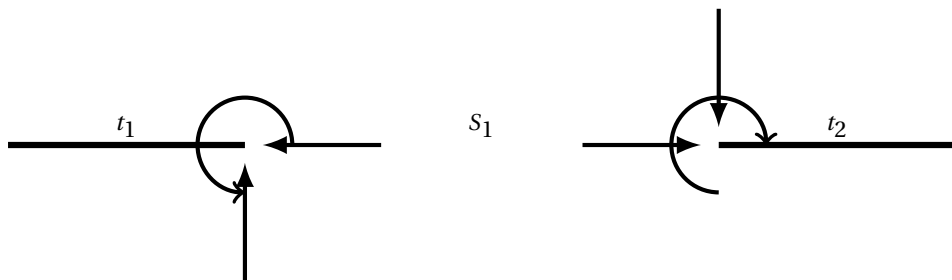


Figure 13: Le caratteristiche di sollecitazione interne nel punto S_1 .

Se ora andiamo a fare un secondo taglio S_2 , punto definito come $S_2 = S_1 + ds$, costruiamo un segmento infinitesimo di tronco che viene chiamato concio elementare. In particolare, siccome noi

stiamo guardando proiezioni sul piano di corpi rigidi, viene chiamato sezione laterale di concio elementare, che è da ambo i lati soggetto alle sollecitazioni interne dell'asta.

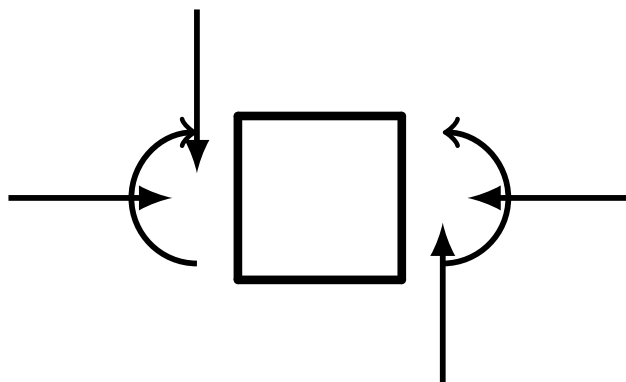
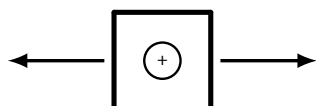


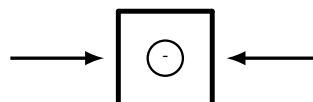
Figure 14: Sezione di concio elementare.

Convenzione per lo sforzo normale baricentrico

Viene considerato positivo quando esso impone una trazione (figura ??), mentre viene considerato negativo se esso impone una contrazione (figura ??).



(a) Sforzo normale di *trazione*, positivo.

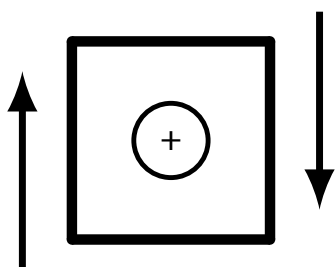


(b) Sforzo normale di *compressione*, negativo.

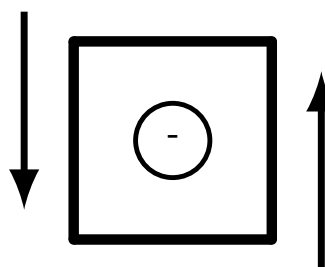
Figure 15: Convenzione dello sforzo normale baricentrico.

Convenzione per il taglio

Viene considerato positivo quando esso impone al concio una rotazione oraria (figura ??), cioè a sinistra del concio il taglio va verso l'alto e a destra verso il basso, mentre è negativo quando esso impone al concio una rotazione anti-oraria (figura ??), cioè a sinistra del concio il taglio va verso il basso e a destra verso l'alto.



(a) Taglio con *rotazione oraria*, positivo.



(b) Taglio con *rotazione anti-oraria*, negativo.

Figure 16: Convenzione del taglio.

Convenzione per il momento flettente

È considerato positivo (figura ??) quando tende le fibre inferiori ed è sempre disegnato dalla parte delle fibre tese.

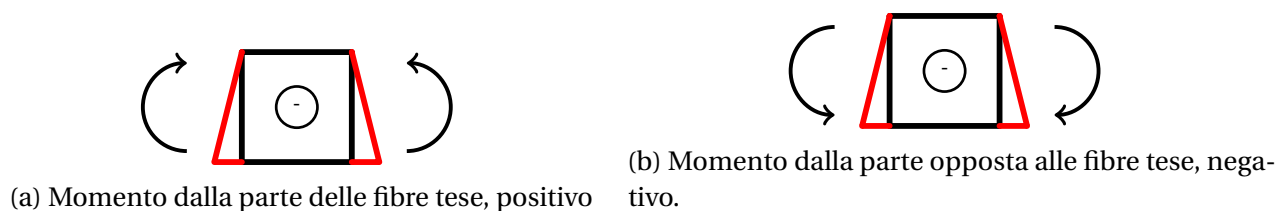


Figure 17: Convezione del momento flettente.

0.2.8 Grafici della sollecitazione interna

Si tratta di una serie di convenzioni adottate per comodità nel lavoro di chi fa studi di statica. Per comprendere al meglio come questi grafici vengono realizzati, guardate agli esercizi svolti più avanti nella dispensa.

Convezione grafica dello sforzo normale

In alto positivo, in basso negativo. A destra positivo, a sinistra negativo.

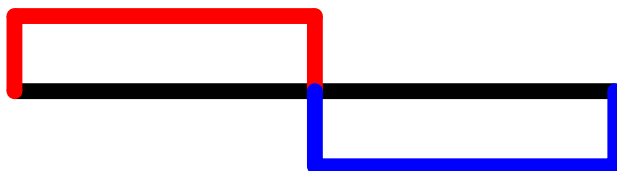


Figure 18: Convezione grafica dello sforzo normale.

Convezione grafica del taglio

In alto positivo, in basso negativo. A destra positivo, a sinistra negativo.

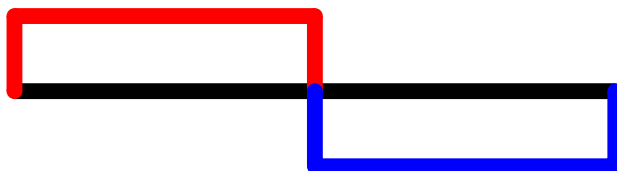


Figure 19: Convezione grafica del taglio.

Convezione grafica del momento flettente

Sempre dalla parte delle fibre tese, cioè dalla parte dove le forze di taglio vanno a tirare le fibre dell'asta (nel disegno, nel caso della figura qui riportata, le fibre sono dalla parte inferiore), o alternativamente in alto negativo, in basso positivo. A destra negativo, a sinistra positivo.

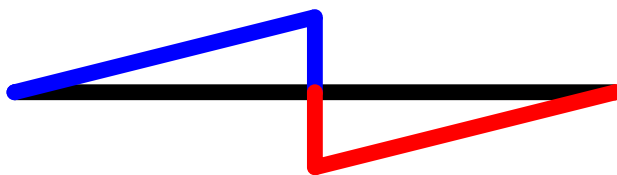


Figure 20: Convezione grafica del momento flettente.

0.3 Principio del lavoro virtuale (PLV)

A differenza dell'approccio che studia l'equilibrio di *forze* e *momenti*, esiste un approccio basato su considerazioni di tipo energetico.

Definition 0.3.1 (Spostamento o rotazione virtuale) *Uno spostamento o rotazione virtuale, è rispettivamente uno spostamento o una rotazione che rispetta le seguenti caratteristiche:*

1. È infinitesimo.
2. È arbitrario.
3. È compatibile con i vincoli (non rompe le condizioni di vincolo).
4. È reversibile, cioè può avvenire in entrambi i sensi.
5. Avviene in tempo congelato.

Vengono indicati con il simbolo: $\delta \vec{S}_i$ e $\delta \vec{\theta}_j$.

Definition 0.3.2 (Principio del lavoro virtuale) *In un sistema meccanico con vincoli fissi e in assenza di attrito, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che sia nullo il lavoro virtuale compiuto dalle forze e dalle coppie attive per qualsiasi spostamento virtuale del sistema. Viene calcolato come il prodotto scalare di forze e spostamenti virtuali sommati a quello di coppie e rotazioni virtuali.*

$$\delta L = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{S}_i + \sum_j \vec{C}_j \cdot \delta \vec{\theta}_j = 0$$

0.3.1 Cosa cambia dal metodo delle equazioni cardinali della statica

Per risolvere un esercizio con il metodo delle **equazioni cardinali della statica** venivano aggiunte come incognite le reazioni vincolari (le reazioni orizzontali, verticali e momenti), ma in questo metodo esse vengono interamente ignorate poichè non compiono lavoro.

Nel caso, per esempio, di un'asta inclinata di massa non trascurabile su cui viene applicata una forza F_1 esterna, nel bilancio del **PLV** sarebbero considerate unicamente la forza peso F_g agente sul centro di massa dell'asta e la forza F_1 . Le incognite introdotte saranno gli spostamenti e rotazioni virtuali che le forze producono sul sistema.

0.4 Motori

0.4.1 Come identificare il tipo di moto, se diretto o retrogrado

Definita W_m (o W_1) come la potenza motrice, W_r (o W_2) come la potenza resistente, chiamata a volte anche potenza dell'utilizzatore W_u e W_p come potenza perduta, procediamo a identificare il tipo del moto in condizioni di regime e di transitorio.

$$\frac{dE_{c_m}}{dt} = J_m \omega \dot{\omega}$$

Figure 21: Spesso la derivata dell' E_{c_m} assume questo valore.

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt} \Rightarrow \frac{dE_{c_r}}{dt} = \frac{dE_c}{dt} - \frac{dE_{c_m}}{dt}$$

Figure 22: Come si definisce la derivata di E_{c_r} .

$$\text{Moto diretto: } \begin{cases} W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} > 0 \\ W_u - \frac{dE_{c_u}}{dt} < 0 \end{cases}$$

(a) Condizioni di moto diretto.

$$\text{Moto retrogrado: } \begin{cases} W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} < 0 \\ W_u - \frac{dE_{c_u}}{dt} > 0 \end{cases}$$

(b) Condizioni di moto retrogrado.

Figure 23: Analisi del tipo di moto.

$$\text{Moto diretto: } \begin{cases} W_m > 0 \\ W_u < 0 \end{cases}$$

(a) Condizioni di moto diretto a regime.

$$\text{Moto retrogrado: } \begin{cases} W_m < 0 \\ W_u > 0 \end{cases}$$

(b) Condizioni di moto retrogrado a regime.

Figure 24: Analisi del tipo di moto a regime.