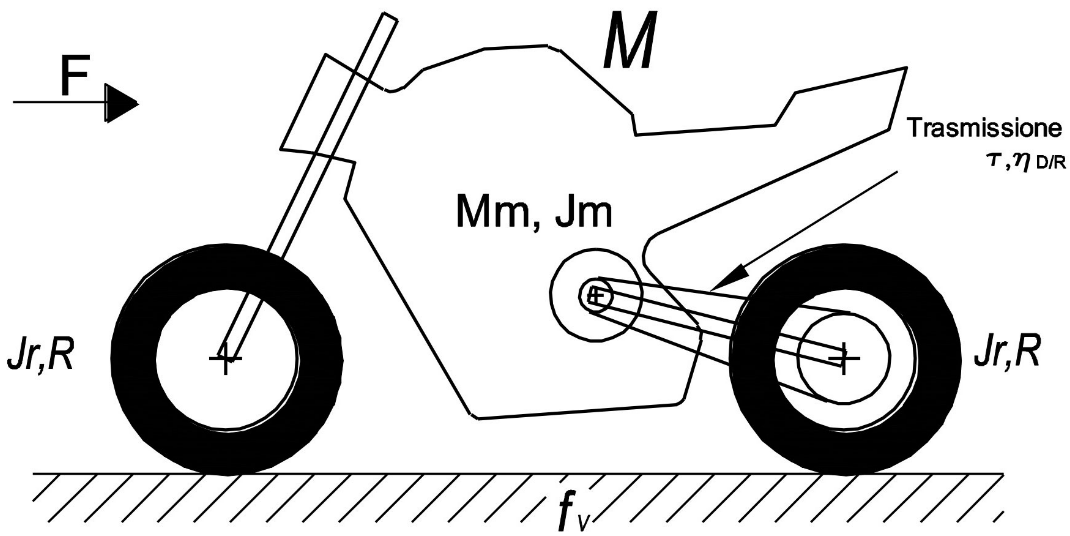
0.0.1 Terzo esercizio



$$M = 250\,kg \quad J_r = 0.6\,kgm^2 \quad R = 0.25\,m \quad J_m = 0.1\,kgm^2 \quad f_v = 0.03$$

$$k = 0.3\,kg/m \quad \tau = \frac{1}{6} \quad \mu_D = 0.9 \quad \mu_R = 0.8$$

Il veicolo rappresentato in figura, posto nel piano verticale, procede su strada piana. Il motore, avente momento d'inerzia J_m e coppia motrice M_m, è collegato alla ruota posteriore mediante una trasmissione a catena di caratteristiche note (rapporto di trasmissione τ, rendimento in moto diretto μ_D, rendimento in moto retrogrado μ_R). Al veicolo è applicata una forza aerodinamica resistente $F = kv^2$. Si consideri la resistenza al rotolamento nel contatto tra ruote e asfalto (coefficiente f_V). Si trascurino le masse non esplicitamente indicate nel disegno. Si chiede di:

1. Calcolare la velocità del veicolo a regime, nota la coppia motrice M_m pari a 15 Nm.

2. Partendo dalla situazione del punto 1, calcolare l'accelerazione del veicolo a fronte di una coppia motrice M_m erogata dal motore pari a 30 Nm.

0.0.2 Soluzione terzo esercizio

Primo punto

Legami cinematici Data una velocità angolare motrice ω_m, posso andare a definire la velocità con cui il veicolo si muove come:

$$v = R\omega_r = R\tau\omega_m$$

Potenza motrice

$$W_m = M_m\omega_m$$

Potenza resistente La potenza resistente è composta da tutte le forze ed attriti agenti sul sistema. In questo caso esse sono:

1. Forza peso F_g della massa M è contro bilanciata da una forza normale uguale ed opposta.
2. Forza areodinamica resistente F_{aria}, che forma un angolo di π con la velocità.
3. Forza di attrito volvente F_v, che forma un angolo di π con la velocità.

Risolvo il *prodotto scalare* tramite la formula $|a||b|\cos\theta$ con θ definito come l'angolo tra i due vettori, ed ottengo:

$$\begin{aligned} W_r &= \vec{F}_{aria} \bullet \vec{v} + \vec{F}_v \bullet \vec{v} \\ &= F_{aria} v \cos\pi + F_v v \cos\pi \\ &= -F_{aria} v - F_v v \end{aligned}$$

Forza d'attrito volvente La forza d'attrito volvente è definita come la reazione normale del piano $\vec{N}$ moltiplicata per il coefficiente d'attrito f_v. In questo caso, la reazione normale risulta uguale, in modulo, alla forza peso.

$$F_v = F_g f_v = M g f_v$$

Forza areodinamica resistente Viene definita tramite la formula fornita dal testo:

$$F_{aria} = kv^2$$

Sostituisco i termini nell'espressione della potenza resistente ed ottengo:

$$W_r = -kv^3 - Mgf_v v$$

Identificazione del tipo di moto Siamo in condizione di regime, per cui la variazione di energia cinetica è nulla. Per identificare il tipo di moto uso la seguente disequazione:

$$W_r > 0$$

Se essa risulta vera, il moto è **retrogrado**, altrimenti diretto:

$$-kv^3 - Mgf_v v > 0$$

Siccome tutti i coefficienti dell'equazione hanno segno negativo, l'equazione è falsa. Il moto è quindi **diretto**.

Potenze perduta Vista la condizione di regime e di moto diretto, uso la formula corrispondente per calcolare la potenza perduta:

$$W_p = -(1-\mu_D)W_m$$

Bilancio di potenze Utilizzo il bilancio delle potenze e risolvo in funzione della velocità:

$$W_m + W_r + W_p = 0 \tag{1}$$

$$W_m + W_r - (1-\mu_D)W_m = 0 \tag{2}$$

Semplifico la potenza motrice:

$$W_r + \mu_D W_m = 0 \tag{3}$$

Sostituisco le espressioni:

$$M_m \omega_m \mu_D - kv^3 - Mgf_v v = 0 \tag{4}$$

Sostituisco il legame cinematico tra velocità e velocità angolare $v = R\tau\omega_m$:

$$\frac{M_m \mu_D v}{R\tau} - kv^3 - Mgf_v v = 0 \tag{5}$$

Semplifico la velocità:

$$\frac{M_m \mu_D}{R\tau} - kv^2 - Mgf_v = 0 \tag{6}$$

Risolvo in funzione di v:

$$v = \sqrt{\frac{\frac{M_m \mu_D}{R\tau} - Mgf_v}{k}} \tag{7}$$

Per le condizioni di moto, la velocità deve essere positiva, per cui solo la risposta positiva può essere accettata.

$$v = 28.9\, m/s \tag{8}$$

Secondo punto

Non siamo più in condizioni di regime, ma di transitorio. È dunque necessario calcolare la variazione di energia cinetica del sistema.

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_r(\tau\omega_m)^2 + \frac{1}{2}J_r(\tau\omega_m)^2 + \frac{1}{2}J_m\omega_m^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}M(\tau R\omega_m)^2 + 2\frac{1}{2}J_r(\tau\omega_m)^2 + \frac{1}{2}J_m\omega_m^2$$

$$E_c = \omega_m^2(\frac{1}{2}M\tau^2R^2 + J_r\tau^2 + \frac{1}{2}J_m)$$

Derivo l'espressione ed ottengo:

$$\frac{dE_c}{dt} = \omega_m\dot{\omega}_m(M\tau^2R^2 + 2J_r\tau^2 + J_m)$$

Verifico il tipo di moto Verrebbe istintivo dire che siamo sempre in condizioni di moto diretto, ma verifico comunque il tipo di moto:

$$W_r - \frac{dE_{c_r}}{dt} > 0$$

$$-kv^3 - Mgf_v v - \omega_m \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r \tau^2) > 0$$

Nuovamente i coefficienti sono tutti negativi, e il moto non può che essere diretto.

Potenza perduta Siccome siamo in condizioni di transitorio, è necessarrio includere la variazione nel tempo dell'energia cinetica del motore [1] nella formula della potenza perduta:

$$W_p = -(1-\mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt})$$

Bilancio di potenze

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt} \tag{1}$$

$$W_m + W_r - (1-\mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_c}{dt} \tag{2}$$

Semplifico l'espressione:

$$W_m + W_r - (1-\mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt} \tag{3}$$

$$W_m + W_r - W_m + \frac{dE_{c_m}}{dt} + \mu_D(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt} \tag{4}$$

$$W_r + \mu_D(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{M_r}}{dt} \tag{5}$$

$$W_r + \mu_D W_m = \frac{dE_{M_r}}{dt} + \mu_D \frac{dE_{c_m}}{dt} \tag{6}$$

$$-kv^3 - Mgf_v v + \mu_D M_m \omega_m = \omega_m \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r \tau^2 + \mu_D J_m) \tag{7}$$

[1] Perchè siamo in condizioni di moto *diretto*, in condizioni di moto *retrogrado* si include la variazione di energia cinetica resistente.

Sostituisco col legame cinematico $v = R\tau\omega_m$:

$$-kv^2 R\tau\omega_m - Mgf_v R\tau\omega_m + \mu_D M_m \omega_m = \omega_m \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r\tau^2 + \mu_D J_m) \tag{8}$$

Semplifico ω_m:

$$-kv^2 R\tau - Mgf_v R\tau + \mu_D M_m = \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r\tau^2 + \mu_D J_m) \tag{9}$$

$$-kv^2 R\tau - Mgf_v R\tau + \mu_D M_m = \dot{\omega}_m (\tau^2 (MR^2 + 2J_r) + \mu_D J_m) \tag{10}$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{\mu_D M_m - kv^2 R\tau - Mgf_v R\tau}{\tau^2 (MR^2 + 2J_r) + \mu_D J_m} \tag{11}$$

$$\dot{\omega}_m = 24.2\, rad/s^2 \tag{12}$$

$$a = R\tau\dot{\omega} = 1.01\, m/s^2 \tag{13}$$