METODI E MODELLI PER LE DECISIONI

Prof. Roberto Cordone
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018

Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
28 dicembre 2017

Indice

1 Introduzione **2**
1.1 Dispense 2

2 Problemi di Decisione **3**
2.1 Problemi complessi 3
2.2 Proprietà delle preferenze 4
2.3 Ipotesi funzione del valore 5
2.4 Tabella riassuntiva 5
2.5 Conto di Borda 5
2.6 Problemi semplici 6

3 Programmazione matematica **7**
3.1 Programmazione matematica 8
3.2 Lemma di Farkas 8
3.3 Condizioni di KarushKuhnTucker (KKT) 9
3.4 Metodo dei vincoli 9
3.5 Metodo Lessicografico 9
3.6 Metodo lessicografico con livelli di aspirazione 9
3.7 Metodo del punto utopia 9

4 Teoria dell'utilità a molti attributi (MAUT) **11**
4.0.1 Indipendenza preferenziale 12

A Temi d'esame risolti **13**
A.1 Tema d'esame - 11 Aprile 2016 13
A.1.1 Esercizio 1 13
A.1.2 Soluzione esercizio 1 13
A.2 Tema d'esame - 14 Giugno 2016 15
A.2.1 Esercizio 1 15
A.2.2 Soluzione esercizio 1 15
A.3 Tema d'esame - 22 Marzo 2016 16
A.3.1 Esercizio 1 16
A.3.2 Soluzione esercizio 1 16
A.4 Tema d'esame - 10 Febbraio 2016 17
A.4.1 Esercizio 1 17
A.4.2 Soluzione esercizio 1 17
A.4.3 Esercizio 2 18
A.4.4 Soluzione esercizio 2 18

1 Introduzione

1.1 Dispense

Sono disponibili dispense sul sito del corso.

2
Problemi di Decisione

2.1 Problemi complessi

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figura 2.1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1. X rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **soluzioni** o anche delle **soluzioni ammissibili**.
2. Ω rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3. F rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4. f rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5. D rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6. Π insieme delle **preferenze**.

X viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{se } \boldsymbol{x} \in X \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine x_i viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

Ω viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{se } \boldsymbol{\omega} \in \Omega \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \ldots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine ω_i viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

F viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{se } \boldsymbol{f} \in F \Rightarrow \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le $f_l \in \mathbb{R}$ vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obbiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La f viene definita come:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) : X \times \Omega \to F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La Π viene definita come

$$\Pi : D \to 2^{F \times F}$$

, dove $\pi_d \subseteq F \times F$. $F \times F$ rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre $2^{F \times F}$ rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo $F = \{f, f', f''\}$, otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f, f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \preccurlyeq_d f' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il $\preccurlyeq_d$, minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi $\succcurlyeq_d$.

Definizione 2.1.1 (indifferenza)**.** Due preferenze f' e f'' sono dette **indifferenti** quando:

$$f' \; f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.1.2 (Preferenza Stretta)**.** Una preferenza f' è detta **preferenza stretta** quando:

$$f' \prec_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.1.3 (Incomparabilità)**.** Due preferenze f' e f'' sono dette **incomparabili** quando:

$$f' \bowtie_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \not\preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

2.2 Proprietà delle preferenze

Proprietà riflessiva

$$f \preccurlyeq f \qquad \forall f \in F$$

Proprietà di completezza

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \not\preccurlyeq f' \Rightarrow f' \preccurlyeq f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà di anti-simmetria

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f \Rightarrow f' = f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà Transitiva

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale. Viene generalmente considerata verificata.

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f'' \Rightarrow f \preccurlyeq f'' \qquad \forall f, f', f'' \in F$$

2.3 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore v, ha in mente una relazione di preferenza Π **riflessiva**, **completa**, **non necessariamente anti simmetrica** e **transitiva**. Quando una relazione possiede queste proprietà viene chiamata **ordine debole**, debole perché possono esiste dei *pari merito*. Un campo di applicazione sono i campionati sportivi.

$$\exists v : F \to \mathbb{R} : f \preccurlyeq f' \Leftrightarrow v_{(f)} \succcurlyeq v_{(f')}$$

Condizioni di preordine

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** si ottiene la condizione di **preordine**.

Ordini deboli

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **completezza** si ha la condizione di ordine debole, che è molto utilizzata.

Ordine parziale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine parziale**.

Ordine totale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività**, **completezza** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine totale**.

2.4 Tabella riassuntiva

Proprietà	**Preordine**	**Ordine debole**	**Ordine parziale**	**Ordine totale**
Riflessività	✓	✓	✓	✓
Transitività	✓	✓	✓	✓
Completezza		✓		✓
Antisimmetria			✓	✓

2.5 Conto di Borda

La formula in figura 2.2 utilizzato per costruire una **funzione valore**:

$$v(f) = |\{f' \in F : f \preccurlyeq f'\}|$$

Figura 2.2: Conto di Borda

Il valore di un impatto è pari al numero di impatti cui esso è preferibile, compreso l'impatto stesso.

Quando la cardinalità dell'insieme è $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ è possibile ottenere una **funzione valore**, ma quando ci si trova in condizioni come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che non risultano più mappabili sull'insieme $\mathbb{R}$ non risulta più possibile realizzare una **funzione valore**.

2.6 Problemi semplici

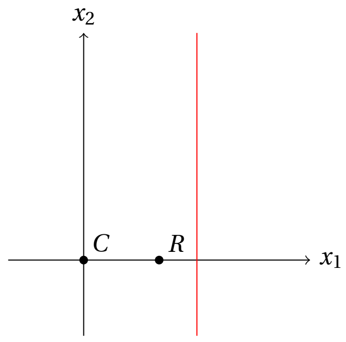
Un problema viene detto *semplice* quando essi possiedono queste caratteristiche:

1. $\exists v(f)$ conforme
2. $|\Omega| = 1 \Rightarrow f : X \to \mathbb{R}$, cioè esiste un $f(x)$
3. $|D| = 1$
4. $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0 \forall j = 1, \ldots, n\}$ con $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$

3
Programmazione matematica

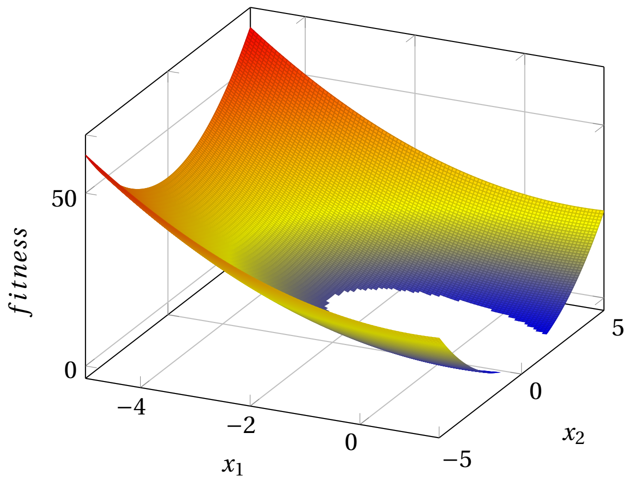
Minimizzo $f(x)$, con la condizione di $g_j(x) \leq 0 \forall j = 1 \ldots n$.

Supponiamo di voler identificare la posizione migliore di una discarica, e che il punto in cui i rifiuti vengono prodotti sia $R = (1,0)$, che in punto $C = (0,0)$ vi sia in una città e che si debba avere una distanza di almeno 2 dalla città. Inoltre, la nostra discarica deve trovarsi a sinistra di $\frac{3}{2}$, cioè $x_0 < \frac{3}{2}$, perché li vi è un confine.



La funzione di minimo che vado a definire risulta:

$$\min f(x) = \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1 < \frac{3}{2} \end{cases}$$



3.1 Programmazione matematica

Definizione 3.1.1. Ottimo locale $\tilde{x}$ ottimo locale $\Leftrightarrow f(x) \geq f(\tilde{(x)}) \forall x \in \mathbb{U}_{\tilde{x},\epsilon}$

Dato $\tilde{x}$ come un **ottimo locale**, e $\xi(\alpha)$ un **arco ammissibile** con la caratteristica di:

$$\xi(0) = \tilde{x} \qquad \xi(alpha) \in X \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha})$$

Allora vale che ξ risulta **non migliorante**:

$$f(\xi(\alpha)) \geq f(\tilde{x}) = f(\xi(0)) \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha})$$

La formula sovra riportata può essere espressa più semplicemente tramite:

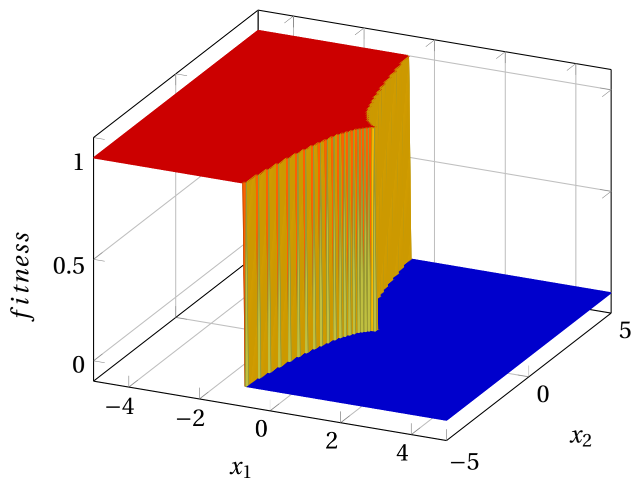
$$[\nabla f(\tilde{x})]^T P_\xi \geq \emptyset$$

Definizione 3.1.2 (Punti non regolari)**.**

$$\tilde{x} \text{ regolare } \Leftrightarrow \nabla g_j(\tilde{x}) \text{per } g_j \text{ attivo, con le varie funzioni } g_j \text{ linearmente indipendenti}$$

Definizione 3.1.3 (Punti non regolari)**.** Sono dei punti per cui non vale

$$[\nabla g_j \tilde{()}]^T P_\xi(\tilde{x}) \geq 0 \text{ per } g_j \text{ attivo } \Leftarrow \begin{cases} \xi \text{ arco ammissibile} \\ \tilde{x} \text{ ottimo locale} \end{cases} \Rightarrow [\nabla f(\tilde{x})]^T P_\xi \geq \emptyset$$



3.2 Lemma di Farkas

$$C_j = \{p \in \mathbb{R}^2 : g_j^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.1: Cono direzioni "opposte" ai vettori g_j

$$C_f = \{p \in \mathbb{R}^2 : f^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.2: Cono direzioni "opposte" a f

Se $\exists \mu_j \geq 0 : f = \sum_j \mu_j g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - f^T p \leq 0 \forall p : g_j^T p \leq 0 \forall j$

Posso riscrivere questa formula usando i gradienti:

Se $\exists \mu_j \geq 0 : \nabla f = \sum_j \mu_j \nabla g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - \nabla f^T p \leq 0 \forall p : \nabla g_j^T p \leq 0 \forall j$

che cosa è la combinazione lineare? e convessa? e conica?

3.3 Condizioni di KarushKuhnTucker (KKT)

Se $\tilde(x)$ è un **ottimo locale** e **regolare**, allora $\exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{j:g_j \text{ attivo}} \mu_j \nabla g_j = \emptyset$

Questo viene posto a sistema con $\mu_j g_j(\tilde{x}) = \emptyset \forall j = 1...n$:

$$\begin{cases} \exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{j:g_j \text{ attivo}} \mu_j \nabla g_j = \emptyset \\ \mu_j g_j(\tilde{x}) = \emptyset \forall j = 1...n \\ g_j(\tilde{x}) < 0 \Rightarrow \mu_j = 0 \\ g_j(x) \leq 0 \forall j = 1...m \end{cases}$$

3.4 Metodo dei vincoli

Dato un punto x^* **globalmente paretiano** per $\begin{cases} \min f_1 \\ \vdots \\ \min f_p \end{cases} \Rightarrow x^*$ è un **ottimo globale** per $f_l(x)$, cioè vale che $f_l(x) \leq \epsilon_l = f_l(x^*)$ con $x \in X$

3.5 Metodo Lessicografico

1. Si chiede al **decisore** di introdurre un **ordinamento totale** sugli indicatori, cioè $1, \ldots, P \rightsquigarrow \pi_1, \ldots, \pi_P$, dove π_1 viene considerato **l'indicatore principale**.
2. Vado a selezionare tutti i **cammini a costo minimo**, limitandomi all'indicatore principale: $\min_{x \in X} f_{\pi_1} \rightarrow X_1^*$
3. Continuo a cercare i cammini a costo minimo degli indicatori successivi, sino a che rimango con un'unica soluzione minimante valida. Se arrivo all'ultimo indicatore con più di una soluzione ne scelgo una a caso. La soluzione così ottenuta è **globalmente paretiana** (benchè tendenzialmente molto squilibrata e che non da un compromesso) perchè è un ottimo per tutte le funzioni.

3.6 Metodo lessicografico con livelli di aspirazione

In aggiunta al passaggio preliminare visto precedentemente fisso i **livelli di aspirazione** $\epsilon_l \quad \forall l \neq \pi_1$

3.7 Metodo del punto utopia

Viene aggiunto un punto che viene descritto dal decisore come il migliore possibile, ignorando temporaneamente i vincoli, e si va quindi ad identificare una regione paretiana come quella che ne minimizza la distanza.

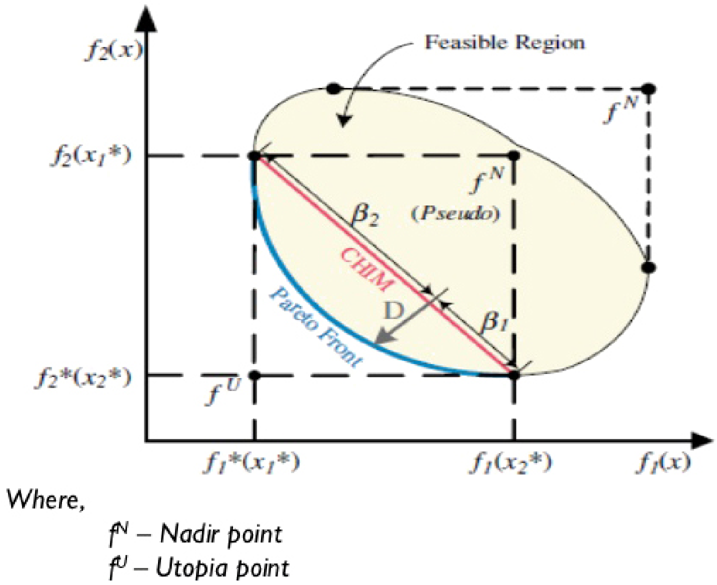


Figura 3.3: Metodo del punto utopia

4

Teoria dell'utilità a molti attributi (MAUT)

La teoria MAUT (multiple attribute utility theory) ipotizza di trovarsi nella situazione in cui un decisore è in grado di ordinare gli indicatori, creando un set Π con un ordine debole. Ipotizza inoltre l'esistenza di una funzione valore $u(f)$ conforme a Π. Spesso la $u(f)$ non si conosce ed è necessario costruire il passaggio da π a $u(f)$

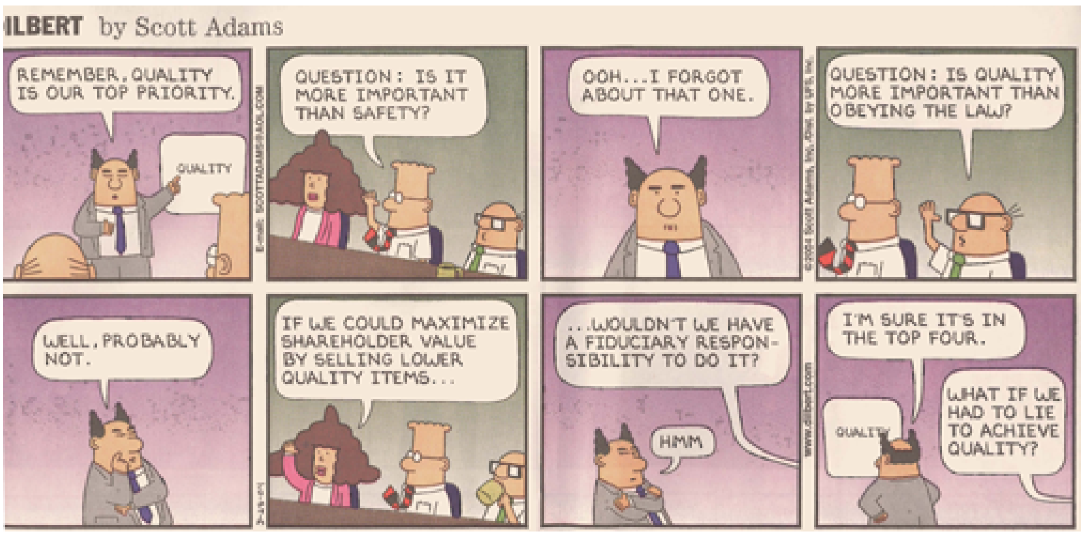


Figura 4.1: MAUT in progress

Campiono quuindi gli impatti e connetto quelli che risultano indifferenti preferenzialmente, cercando di identificare forme analitiche che le descrivano.

$$u(b) = f_1 f_2 \rightarrow u(b) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}$$

Definita quindi una formula vado a verificare che valga su quei punti:

$$u(f_1) = u(f_2) \Rightarrow f_1^{\alpha_1} f_1^{\alpha_2} = f_2^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}$$

$$u(f) = \prod_{l=1}^{p} f_l^{\alpha_l}$$

Figura 4.2: **Funzioni di Cobb-Douglas:** descrive un consumatore, viene usata in economia

Questo procedimento diventa rapidamente insolubile all'aumentare dei decisori e degli indicatori. Viene quindi *ipotizzato* che la funzione di utilità sia **additiva**, cioè che valga:

$$u(f) = \sum_{l=1}^{p} u_l(f_l)$$

4.0.1 Indipendenza preferenziale

Dato un insieme $P = \{1, \dots, p\}$ degli indici, $L \subset P$ con L preferenzialmente indipendente da $P \setminus L$.

Esempio sui viaggi

Viaggiare bene prima implica voler viaggiare bene dopo?

$$\begin{bmatrix} f_L \\ f \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} f'_L \\ f \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_L \\ \xi \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} f'_L \\ \xi \end{bmatrix} \quad \forall f_L \forall f'_L \forall f \forall \xi$$

Esempio sui pranzi

Primo e secondo non sono preferenzialmente indipendenti.

$$f = \begin{bmatrix} primo \\ secondo \end{bmatrix}$$

A
Temi d'esame risolti

In linea di principio, gli 8 esercizi dell'esame valgono 4 punti l'uno e sono abbastanza chiaramente scanditi in sottoesercizi da 0.5, 1, 1.5, a volte 2 punti.

A.1 Tema d'esame - 11 Aprile 2016

A.1.1 Esercizio 1

Si definisca in modo formale un problema di decisione complesso $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$ descrivendo brevemente il significato dei suoi elementi.

Si indichino le proprietà di cui deve godere la relazione di preferenza Π per essere un ordine debole e si spieghi se, in tal caso, essa ammette una funzione valore conforme.

A.1.2 Soluzione esercizio 1

Un problema di decisione complesso viene descritto dalla sestupla $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$:

X L'insieme delle **soluzioni possibili**.

Ω L'insieme degli **scenari o esiti possibili**.

F L'insieme degli **impatti possibili**.

$f(x, \omega) : X \times \Omega \to F$ La **funzione impatto**.

D L'insieme dei **decisori**.

$\Pi(d) : D \to 2^{F \times F}$ La **relazione di preferenza**.

La **relazione di preferenza** Π per essere un *ordine debole* deve godere delle proprietà **riflessiva**, **transitiva** e **di completezza**.

Proprietà riflessiva Ogni impatto è **indifferente** a se stesso: $f \preceq f$.

Proprietà transitiva Se un impatto f_1 è preferibile ad un altro f_2 e questo ad un terzo f_3, allora il primo è preferibile al terzo: $f_1 \preceq f_2 \wedge f_2 \preceq f_3 \Rightarrow f_1 \preceq f_3$.

Proprietà di completezza Dati due impatti, un dei due è certamente **preferibile** all'altro, o al limite sono **indifferenti**.

Una **funzione valore** $v : F \to \mathbb{R}$ associa ad ogni impatto un valore reale, ed è conforme ad una relazione di preferenza Π quando il valore di un impatto f_1 preferibile ad un impatto f_2 è maggiore del valore dell'impatto f_2:

$$f_1 \preceq f_2 \Leftrightarrow v(f_1) \geq v(f_2) \forall f_1, v_2 \in F$$

Se una relazione di preferenza Π ammette una funzione valore, allora Π è un ordine debole.

Non vale però il contrario, per esempio un *ordine lessicografico* è un ordine totale che non ammette una funzione valore conforme.

Una relazione Π di ordine debole su F ammette una funzione valore conforme **se e solo se** $\exists \tilde{F} \subseteq F$ numerabile e denso in F.

A.2 Tema d'esame - 14 Giugno 2016

A.2.1 Esercizio 1

Si definisca brevemente il concetto di impatto in un problema decisionale complesso, specificando che ruolo svolga nel processo decisionale.

Si descrivano alcune possibili rappresentazioni degli impatti di un problema finito (cioè con un numero finito, e piuttosto piccolo, di alternative).

Che cosa si intende dicendo che due impatti sono indifferenti? E incomparabili?

A.2.2 Soluzione esercizio 1

Gli impatti descrivono tutto ciò che è rilevante ai fine della decisione. Essi vengono modellati matematicamente tramite la **funzione impatto** $f : X \times \Omega \to F$, dove F è l'insieme degli impatti possibili, Ω quello degli esiti possibili ed X quello delle decisioni possibili.

Le componenti f_l di una funzione impatto f vengono chiamate **indicatori** e definiscono un aspetto dell'impatto.

Nel caso **finito** gli impatti possono essere rappresentati tramite la **matrice di valutazione**, le cui righe sono le *configurazioni* (x, ω) mentre le colonne sono gli *indicatori* f_l ed in ogni cella vi è il valore dell'indicatore per quella configurazione.

In alternativa è possibile utilizzare la **rosa dei venti** (A.1), un grafico bidimensionale:

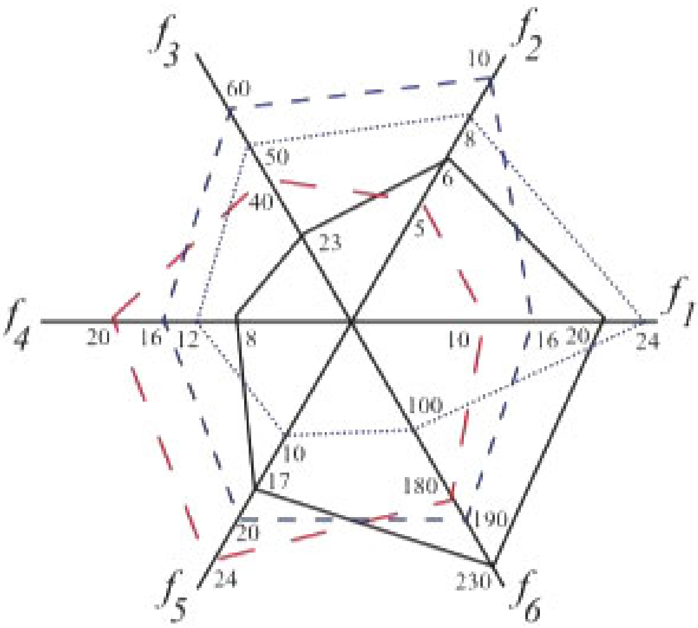


Figura A.1: Rosa dei venti

Due impatti sono **indifferenti** quando il decisore accetta di scambiarli in entrambi i versi: $f_1 \preceq f_2 \wedge f_2 \preceq f_1 \Rightarrow f_1 \approx f_2$.

Due impatti sono **incomparabili** quando il decisore non accetta di scambiarli in alcun verso: $f_1 \npreceq f_2 \wedge f_2 \npreceq f_1 \Rightarrow f_1 \bowtie f_2$.

A.3 Tema d'esame - 22 Marzo 2016

A.3.1 Esercizio 1

Si introduca formalmente un problema di decisione complesso $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$, descrivendo brevemente il significato dei suoi elementi.

Si descriva brevemente la distinzione tra modelli prescrittivi e modelli descrittivi e si indichino i ruoli che essi possono svolgere in un processo decisionale complesso.

A.3.2 Soluzione esercizio 1

Un problema di decisione complesso viene descritto dalla sestupla $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$:

X L'insieme delle **soluzioni possibili**.

Ω L'insieme degli **scenari o esiti possibili**.

F L'insieme degli **impatti possibili**.

$f(x, \omega) : X \times \Omega \to F$ La **funzione impatto**.

D L'insieme dei **decisori**.

$\Pi(d) : D \to 2^{F \times F}$ La **relazione di preferenza**.

In un **modello prescrittivo** vengono usati come dati gli impatti e le preferenze e danno come risultato un'alternativa ottima mentre in un **modello descrittivo** vengono usati come dati la descrizione del sistema, gli scenari e le alternative e danno come risultati gli impatti. In generale, i modelli vengono utilizzati per prendere decisioni e prevederne i risultati.

A.4 Tema d'esame - 10 Febbraio 2016

A.4.1 Esercizio 1

Dato un problema decisionale con insieme di impatti $F = \{a, b, c, d, e, f\}$ e relazione di preferenza Π:

$$\Pi = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d),(d,d),(e,b),(e,c),(e,d),(e,e),(f,b),(f,c),(f,d),(f,f)\}$$

1. Si spieghi il significato della relazione per il problema decisionale.
2. Si elenchino le proprietà principali di cui Π gode.
3. Si derivi la relazione di indifferenza associata Ind_Π.
4. Si dica se la relazione è un ordine di qualche genere e quali conseguenze questo ha sul problema decisionale.

A.4.2 Soluzione esercizio 1

1. La relazione Π è binaria, cioè specifica coppie di impatti $(f_1, f_2) : f_1 \preceq f_2$.

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	0	0
b	0	1	1	1	0	0
c	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	1	1	1	1	0
f	0	0	1	1	0	1

Tabella A.1: Rappresentazione a tabella di Π

2. La relazione Π gode della proprietà **riflessiva** (la diagonale principale della matrice è composta da soli 1, evidenziati in verde).

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	0	0
b	0	1	1	1	0	0
c	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	1	1	1	1	0
f	0	0	1	1	0	1

Tabella A.2: Rappresentazione a tabella di Π, con Ind_Π evidenziata.

3. La **relazione di indifferenza** Ind_Π è composta dalle coppie indifferenti, cioè che il decisore accetta di scambiare in entrambe le direzioni (nella tabella evidenziate in rosso).

$$\Pi = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c),(c,b),(d,d),(e,e),(f,f)\}$$

4. Tutte le tipologie di ordine richiedono la proprietà **transitiva**, che nella relazione Π non è rispettata:

$$a \preceq b, b \preceq e \not\Rightarrow a \preceq e$$

Di conseguenza non è possibile definire una funzione valore, perchè questa richiede almeno un ordine debole come condizione necessaria.

A.4.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_2^2 + x_1 - 4x_2 \\ g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 \leq 0 \\ g_2(x) &= x_2 - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

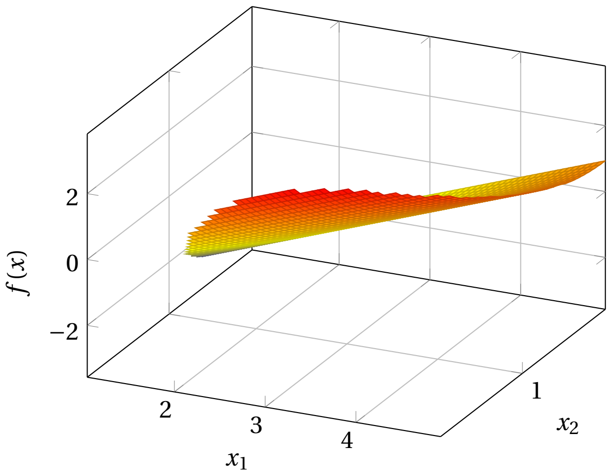
a) Si rappresenti il problema graficamente.

b) Si scrivano le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker.

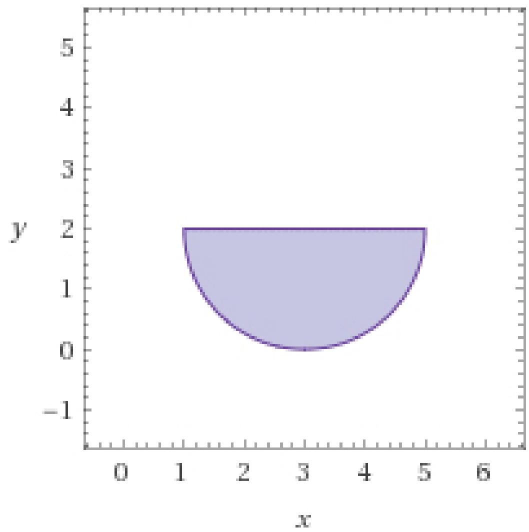
c) Si determinino i punti candidati, e in particolare quello/i di minimo.

A.4.4 Soluzione esercizio 2

a) La funzione nel suo dominio di definizione è la seguente:



(a) La funzione $f(x)$



(b) Dominio della funzione $f(x)$

b) Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono le seguenti:

Teorema A.4.1 (Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker)**.** Sia f una funzione, h_i con $i \in \{1,\ldots,s\}$ dei vincoli bilateri e g_j con $j \in \{1,\ldots,m\}$ dei vincoli monolateri e sia l'insieme X definito come:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, h_i(x) = 0 \quad \forall i,j\} \quad \text{e} \quad f, g_j, h_i \in C^1(X) \quad \forall i,j$$

Se x^* è un punto regolare in X e un punto di minimo locale per $f \in X$, allora esistono s moltiplicatori $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e m $\mu_j \geq 0$ tali che:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

c) Calcolo dei punti candidati.

Calcolo dei punti non regolari I punti regolari sono quei punti nei quali i gradienti dei vincoli attivi sono fra loro linearmente indipendenti. Punti interni alle regioni di ammissibilità sono tutti regolari. Vanno investigati i punti che annullano il gradiente.

Calcolo quindi i gradienti dei due vincoli, $\nabla g_1(x)$ e $\nabla g_2(x)$:

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 6 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il primo gradiente si annulla per $P = (x_1 = 3, x_2 = 2)$, che è posto dove si attiva il vincolo g_2. Il secondo gradiente non si annulla mai. Il punto P viene considerato un punto candidato.

Identifichiamo ora i punti di intersezione dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

I punti candidati quindi sono $A = (1,2)$ e $B = (5,2)$.

Verifichiamo che i gradienti siano linearmente indipendenti tramite il metodo della matrice: se per uno di essi fossero dipendenti (cioè la matrice ha determinante 0) allora A non sarebbe regolare e le condizioni KKT perderebbero di validità.

$$\det M_g(A) = \det \begin{bmatrix} \nabla g_1(A) & \nabla g_2(A) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\det M_g(B) = \det \begin{bmatrix} \nabla g_1(B) & \nabla g_2(B) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

I gradienti sono linearmente indipendenti sia in A che in B.

Calcolo della lagrangiana generalizzata La formula della lagrangiana generalizzata (figura A.3) assomiglia molto alle condizioni KKT ma si applica sulle primitive (non i gradienti).

$$l(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x)$$

Figura A.3: Formula della lagrangiana generalizzata

$$\begin{aligned} l(x) &= f(x) + \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) \\ &= x_2^2 + x_1 - 4x_2 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9) + \mu_2(x_2 - 2) \end{aligned}$$

Costruisco il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1(2x_1 - 6) \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9) = 0 \\ \mu_2(x_2 - 2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 \leq 0 \\ x_2 - 2 \leq 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_2(x_2 - 2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leq 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che μ_1 deve essere strettamente maggiore di 0, altrimenti la prima equazione $\mu_1(2x_1 - 6) = -1$ non sarebbe rispettata. Se $\mu_1 > 0$, allora $g_1 = 0$.

Impostiamo un albero di ricerca dicotomico per risolvere il sistema, dividendo tra:

$$\mu_j = 0 \wedge g_j \leq 0 \quad \vee \quad \mu_j > 0 \wedge g_j = 0 \qquad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Iniziamo scegliendo il vincolo più semplice, nel nostro caso g_2:

Caso in cui $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leq 0$:

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leq 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ \mu_1 = -1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leq 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases}$$

Ponendo $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leq 0$ si ottiene che $\mu_1 = -1 \wedge \mu_1 > 0$, per cui il sistema è impossibile. Se restringiamo il caso in analisi a $\mu_2 = 0 \wedge g_2 = 0$ è possibile rispettare il vincolo $\mu_1 > 0$ proseguendo così:

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ x_1^2 - 6x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -\frac{1}{2x_1 - 6} \\ x_1 = 3 \pm \sqrt{9+5} = 3 \pm \sqrt{14} \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases}$$

Solamente $x_1 = 3 - \sqrt{14}$ è accettabile poiché $\mu_1 > 0$:

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{1}{3 - \sqrt{14} - 6} = \frac{1}{\sqrt{14} + 3} = \frac{\sqrt{14} - 3}{5} \\ x_1 = 3 - \sqrt{14} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ne otteniamo quindi il punto candidato $C = (3 - \sqrt{14}, 2)$ con $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{14}-3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Caso in cui $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$:

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 4 - 4 + \mu_1(4 - 4) + 2\mu_2 = 0 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ \mu_2 = 0 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases}$$

Ponendo $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$ si ottiene che $\mu_2 = 0 \wedge \mu_2 > 0$, per cui il sistema è impossibile. Ne segue che il caso in analisi è impossibile.

Calcolo del valore dei punti candidati Sostituisco i punti candidati nella funzione da minimizzare ed ottengo:

$$\begin{cases} f(P) = f(3,2) = 4 + 3 - 8 = -1 \\ f(A) = f(1,2) = 4 + 1 - 8 = -3 \\ f(B) = f(5,2) = 4 + 5 - 8 = 1 \\ f(C) = f(3 - \sqrt{14}, 2) \approx -4.74 \end{cases}$$

Il punto di ottimo locale risulta essere quello ottenuto con le condizioni di KKT, $C = (3 - \sqrt{14}, 2)$.