

0.1 Modelli quadratici

Algoritmi di ottimizzazione che approssimano localmente f con modelli quadratici:

$$\min f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x, \text{ t.c. } x \in \mathbb{R}^n$$

dove Q è una matrice quadrata di ordine n .

0.1.1 Casi Possibili

- Q non è semi-definita positiva: f non ha un minimo. - Q è definita positiva: $x^* = Q^{-1}b$ è l'unico minimo locale. Il punto x^* è il **punto di ottimo globale**. - Q è definita semi-positiva: - Q non è singolare: $x^* = Q^{-1}b$ è l'unico minimo globale. - Q è singolare: - non ho soluzioni. - ho infinite soluzioni.

0.1.2 Esempio

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) - x$$

Riscrivo nei termini della formula per l'algoritmo:

$$f(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

0.2 Introduzione agli algoritmi

Metodi di ottimizzazione continua:

- Dato un punto di inizio x_0 , generiam una sequenza $x_{k=0}^\infty$. - Terminato l'algoritmo, quando le condizioni necessarie sono soddisfatte con una certa precisione, per esempio $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$ - Monotone algorithms requires that $f(x_k) < f(x_{k-1}) \forall k$

0.2.1 Quanto è buono un algoritmo di ottimizzazione?

Un algoritmo è **decente** se **converge**.

Definition 0.2.1 (Convergente globalmente) Un algoritmo è chiamato convergente globalmente se converge a un punto x^*

// PERSE COSE DA SLIDE QUI

Un algoritmo è **buono** se **converge rapidamente**

Chiamando x_k una sequenza in \mathbb{R}^n che converge a x^* . La **convergenza** è chiamata:

- **Q-lineare** se $\exists r \in (0, 1)$ s.t. $\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \leq r$, for $k \geq \bar{k}$
- **Q-superlineare** se $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0$
- **Q-quadratica** se $\exists C > 0$ s.t. $\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^2} \leq C$, for $k \geq \bar{k}$

Q-quadratica implica superlineare che implica lineare.

0.2.2 Come determiniamo un punto di minimo

Line search

Dato il punto corrente determino la direzione e dopo di che determino di quanto muovermi.

Trust Region

Costruisco un modello quadratico in base alle informazioni locali, quindi scelgo un parametro Δk , un raggio, e scelgo la direzione risolvendo un problema di ottimizzazione vincolato al parametro Δ_k .

0.2.3 Condizioni di Wolf

// Iniziare a guardare queste