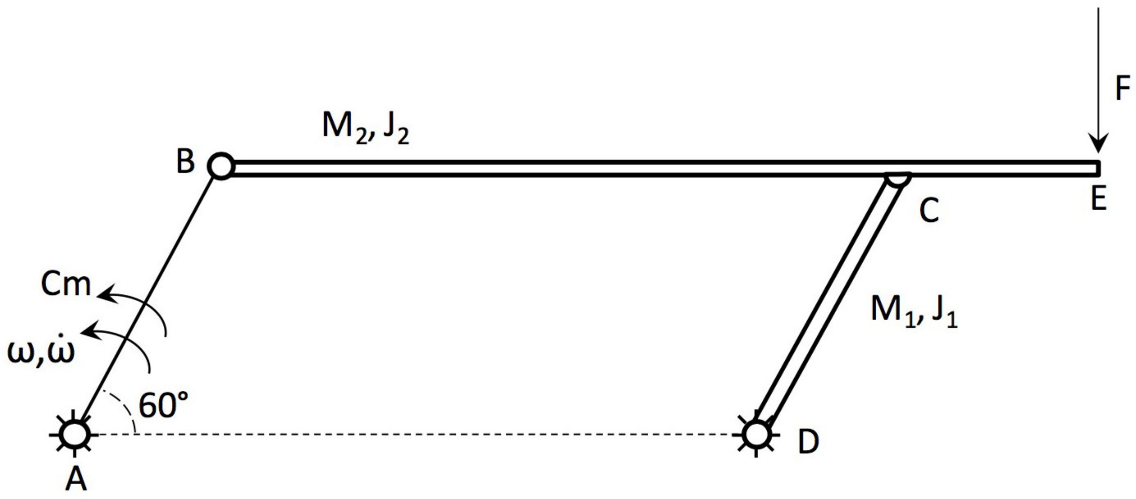
0.0.1 Primo esercizio



$$J_2 = 1\,Kg\,m^2 \quad M_2 = 20\,Kg \quad J1 = 2\,Kg\,m^2 \quad M_1 = 30\,Kg \quad BE = 1\,m$$

$$AB = CD = 0.5\,m \quad AD = BC = 0.8\,m \quad F = 500\,N \quad \omega = 5\,rad/s \quad \dot{\omega} = 0.5\,rad/s^2$$

Il sistema rappresentato in figura é posto nel piano verticale.

L'asta AB, incernierata a terra in A, é collegata attraverso una cerniera in B all'asta BE che a sua volta é collegata attraverso una cerniera in C all'asta CD. Quest'ultima asta é incernierata a terra in D.

Si consideri trascurabile la massa dell'asta AB, mentre l'asta omogenea CD ha massa M_1 e momento d'inerzia baricentrico J_1 e l'asta omogenea BE ha massa M_2 e momento d'inerzia baricentrico J_2. Sull'asta AB, che si muove con velocitá angolare ω e accelerazione angolare $\dot{\omega}$ note, agisce la coppia C_m incognita, mentre sul punto E é applicata in direzione verticale una forta $\vec{F}$ nota.

Nota la geometria, si chiede di calcolare per la condizione di moto assegnata:

1. La velocità ed accelerazione del punto E.

2. La coppia C_m necessaria per garantire la condizione di moto assegnata.

0.0.2 Soluzione primo esercizio

Osservazioni importanti

- È **vitale** in questi esercizi intuire come il sistema si possa muovere.
- Nessuna asta cambia lunghezza (Questo può capitare in alcune condizioni, per esempio nel caso di *glifo oscillante* o di *compressore idraulico*).
- Gli unici oggetti con massa son l'asta BE e l'asta CD.
- Il sistema è posto sul piano verticale, quindi gli oggetti dotati di massa subiscono un'accelerazione verso il basso g e ovviamente una forza peso F_g che viene posta nel centro di massa.
- Nella struttura, le due aste inferiori agiscono come un *doppio pendolo*, ognuna ha le caratteristiche di una *biella* (o *pendolo semplice*). L'asta superiore, di conseguenza, sarà sempre parallela al suolo e non avrà mai moto rotatorio ma solo traslatorio.
- L'asta BE è un corpo rigido in moto unicamente traslatorio. La velocità ed accelerazione dovranno essere quindi uguale in qualsiasi punto (in particolare, $v_B = v_E$ e $a_B = a_E = a_{t_B} + a_{n_B}$).
- Il punto B può essere considerabile un punto posto su una circonferenza di raggio AB, con conseguenti leggi per **velocità** ($v_B = \omega r$), **accelerazione normale** ($a_{n_B} = \frac{v_B^2}{r}$) ed **accelerazione tangente** ($a_{t_B} = \dot{\omega} r$).

Primo punto Il calcolo di velocità ed accelerazione del punto E, in questo caso, risulta banale.

Riassumiamo i passaggi fondamentali per cui diventa immediato, già evidenziati più estensivamente nelle osservazioni sovrariportate:

1. L'asta BE é un corpo rigido in moto esclusivamente traslatorio. Ogni suo punto, quindi, possiede la medesima velocità ed accelerazione.

2. Il punto B è considerabile un punto posto su una circonferenza di raggio AB, per cui risultano applicabili le relative leggi del moto.

3. Per rispettare la condizione di moto assegnata (come la coppia C_m è direzionata) il versore $\vec{t}$ sarà orientato a $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, mentre il versore $\vec{n}$ a $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{3}$.

$$v_B = AB\omega = 2.5\, m/s$$

$$\vec{v}_B = 2.5\vec{t}\, m/s$$

$$a_{t_B} = AB\dot{\omega} = 0.25\, m/s^2$$

$$a_{n_B} = \frac{v_B^2}{AB} = \frac{AB^2\omega^2}{AB} = AB\omega^2 = 12.5\, m/s^2$$

$$\vec{a}_B = 0.25\vec{t} + 12.5\vec{n}\, m/s^2$$

Secondo punto Per calcolare la coppia C_m proseguo col **bilancio di potenze** (figura 2):

Calcolo le potenze totali:

$$\begin{aligned}\sum W_i = &\ (\text{Coppie}) \bullet (\text{Velocità angolari}) \\ &+ (\text{Forze peso}) \bullet (\text{Velocità baricentriche}) \\ &+ (\text{Forze}) \bullet (\text{Velocità del punto di applicazione})\end{aligned}$$

$$\sum W_i = \vec{C}_m \bullet \vec{\omega} + \vec{F}_{g_{BE}} \bullet \vec{v}_{g_{BE}} + \vec{F}_{g_{CD}} \bullet \vec{v}_{g_{CD}} + \vec{F} \bullet \vec{v}_E$$

La velocità baricentrica $v_{g_{BE}}$ è parte di un corpo rigido che non compie rotazioni, per cui è uguale a quella di qualsiasi altro punto. $v_{g_{BE}} = v_B$

La velocità baricentrica $v_{g_{CD}}$ è calcolabile tramite la formula usuale $v_{g_{CD}} = r\omega$, dove r è la distanza dal centro di rotazione, in questo caso D, al baricentro dell'asta CD, per cui $r = \frac{CD}{2}$ e la velocità angolare ω coincide a quella di A, per cui $v_{g_{CD}} = \frac{CD}{2}\omega$.

$$\sum W_i = \vec{C}_m \bullet \vec{\omega} + M_2\vec{g} \bullet \vec{v}_B + M_1\vec{g} \bullet (\frac{CD}{2}\vec{\omega}) + \vec{F} \bullet v_B$$

Risolvo il prodotto scalare, controllando direzione e verso dei vettori.

1. La coppia C_m e la velocità angolare ω sono date come orientate con stessa direzione e verso.
2. La velocità v_B, per garantire il moto assegnato, è orientata verso l'alto con un angolo di $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$. Ovviamente la forza peso è orientata verso il basso, per cui l'angolo compreso tra i due vettori sarà pari a $\pi - \frac{\pi}{3}$.
3. Discorso analogo per l'asta CD.
4. Discorso analogo per l'asta BE

$$\begin{aligned}\sum W_i &= C_m\omega + M_2 g v_B \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + M_1 g(\frac{CD}{2}\omega)\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + F v_B \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= C_m\omega - \frac{1}{2}M_2 g(AB\omega) - \frac{1}{2}M_1 g(\frac{CD}{2}\omega) - \frac{1}{2}F(AB\omega) \\ &= C_m\omega - \frac{1}{4}M_2 g\omega - \frac{1}{8}M_1 g\omega - \frac{1}{4}F\omega\end{aligned}$$

$$E_{m_i} = \frac{1}{2}m_i v^2_{i_{baricentrica}}, \qquad E_{J_i} = \frac{1}{2}J_i\omega_i^2,$$

Figure 1: Teorema dell'energia cinetica per le masse e per i momenti di inerzia

Calcolo l'energia cinetica totale:

$$\begin{aligned}E_c = &\text{(T. dell'en. cinetica per le masse)} \\ &+ \text{(T. dell'en. cinetica per i momenti di inerzia)}\end{aligned}$$

$$E_c = \frac{1}{2}M_2 v_{g_{BE}}^2 + \frac{1}{2}M_1 v_{g_{CD}}^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_{CD}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_{BC}^2$$

Alcune considerazioni sulle *velocità angolari* presenti nell'equazione:

1. Per le velocità vengono fatte le stesse considerazioni precedenti.
2. ω_{BC} è l'accelerazione angolare dell'asta BC, ma questa non ruota affatto, il moto che compie è solamente traslatorio. Quindi $\omega_{BC} = 0$.
3. ω_{CD} corrispende a ω_A.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}M_2 v_B^2 + \frac{1}{2}M_1(\frac{CD}{2}\omega)^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}M_2(AB\omega)^2 + \frac{1}{2}M_1(\frac{CD}{2}\omega)^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2 \\ &= \frac{M_2}{8}\omega^2 + \frac{M_1}{32}\omega^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n} W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

Figure 2: Bilancio delle potenze

Derivo l'energia cinetica totale e applico il bilancio delle potenze:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{M_2}{4}\omega\dot{\omega} + \frac{M_1}{16}\omega\dot{\omega} + J_1\omega\dot{\omega}$$

$$C_m\omega - \frac{M_2}{4}g\omega - \frac{M_1}{8}g\omega - \frac{1}{4}F\omega = \frac{M_2}{4}\omega\dot{\omega} + \frac{M_1}{16}\omega\dot{\omega} + J_1\omega\dot{\omega}$$

Ora possiamo semplificare tutte le velocità angolari ω contemporaneamente:

$$C_m - \frac{M_2}{4}g - \frac{M_1}{8}g - \frac{1}{4}F = \frac{M_2}{4}\dot{\omega} + \frac{M_1}{16}\dot{\omega} + J_1\dot{\omega}$$

$$C_m - 5g - \frac{15}{4}g - 125 = 5\dot{\omega} + \frac{15}{8}\dot{\omega} + 2\dot{\omega}$$

$$
\begin{aligned}
C_m &= 5\dot{\omega} + \frac{15}{8}\dot{\omega} + 2\dot{\omega} + \frac{35}{4}g + 125 \\
C_m &= \dot{\omega}(5 + \frac{15}{8} + 2) + \frac{35}{4}g + 125 \\
C_m &= \frac{1}{2}(5 + \frac{15}{8} + 2) + \frac{35}{4}g + 125
\end{aligned}
$$

Posto $g = 9.81 m/s^2$ risolvo:

$$
\begin{aligned}
C_m &= \frac{1}{2}(5 + \frac{15}{8} + 2) + \frac{35}{4}9.81 + 125 \\
&= 215,275 Nm \\
&\approx 215 Nm
\end{aligned}
$$