METODI E MODELLI PER LE DECISIONI

Prof. Roberto Cordone
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018

Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
15 febbraio 2018

Indice

1 Introduzione

1.1 Dispense

Sono disponibili dispense sul sito del corso: https://homes.di.unimi.it/cordone/courses/2017-mmd/2017-mmd.html.

1.2 Flash card

Sono disponibili flashcards[1], realizzate dall'autore della dispensa, dal sito cram, utilizzabili tramite l'omonima applicazione:

Problemi decisionali

http://www.cram.com/flashcards/metodi-e-modelli-per-le-decisioni-problemi-decisionali-9495432

Soluzioni paretiane

http://www.cram.com/flashcards/metodi-e-modelli-per-le-decisioni-soluzione-paretiana-9495565

Programmazione in condizioni di incertezza

http://www.cram.com/flashcards/metodi-e-modelli-per-le-decisioni-programmazione-in-condizioni-di-incertezza-

Programmazione in condizioni di rischio

http://www.cram.com/flashcards/metodi-e-modelli-per-le-decisioni-programmazione-in-condizioni-di-rischio-94

Metodi a razionalità debole

http://www.cram.com/flashcards/metodi-e-modelli-per-le-decisioni-metodi-a-razionalita-debole-9495965

Giochi simmetrici

http://www.cram.com/flashcards/metodi-e-modelli-per-le-decisioni-giochi-simmetrici-9496162

[1] Per maggiori informazioni su come usare delle flashcards guarda questo video: https://www.youtube.com/watch?v=mzCEJVtED0U

Decisioni di gruppo

http://www.cram.com/flashcards/metodi-e-modelli-per-le-decisioni-decisioni-di-gruppo-9496282

2
Problemi complessi

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figura 2.1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1. X rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **soluzioni** o anche delle **soluzioni ammissibili**.
2. Ω rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3. F rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4. f rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5. D rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6. Π insieme delle **preferenze**.

X viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{se } \underline{\boldsymbol{x}} \in X \Rightarrow \underline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine x_i viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

Ω viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{se } \underline{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine ω_i viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

F viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{se } \underline{\boldsymbol{f}} \in F \Rightarrow \underline{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le $f_l \in \mathbb{R}$ vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obbiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La f viene definita come:

$$f(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) : X \times \Omega \to F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La Π viene definita come

$$\Pi : D \to 2^{F \times F}$$

, dove $\pi_d \subseteq F \times F$. $F \times F$ rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre $2^{F \times F}$ rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo $F = \{f, f', f''\}$, otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f, f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \preccurlyeq_d f' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il $\preccurlyeq_d$, minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi $\succcurlyeq_d$.

Definizione 2.0.1 (indifferenza). Due preferenze f' e f'' sono dette **indifferenti** quando:

$$f' \; f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.0.2 (Preferenza Stretta). Una preferenza f' è detta **preferenza stretta** quando:

$$f' <_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.0.3 (Incomparabilità). Due preferenze f' e f'' sono dette **incomparabili** quando:

$$f' \not\bowtie_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \not\preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

2.1 Proprietà delle preferenze

2.1.1 Proprietà riflessiva

Un impatto è sempre preferibile (debolmente) a sé stesso.

$$f \preccurlyeq f \qquad \forall f \in F$$

2.1.2 Proprietà di completezza

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \not\preccurlyeq f' \Rightarrow f' \preccurlyeq f \qquad \forall f, f' \in F$$

2.1.3 Proprietà di anti-simmetria

Se un impatto è preferibile ad un altro e questo al primo, allora i due impatti sono lo stesso.

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f \Rightarrow f' = f \qquad \forall f, f' \in F$$

2.1.4 Proprietà Transitiva

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale. Viene generalmente considerata verificata.

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f'' \Rightarrow f \preccurlyeq f'' \qquad \forall f, f', f'' \in F$$

2.2 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore v, ha in mente una relazione di preferenza Π **riflessiva**, **completa**, **non necessariamente anti simmetrica** e **transitiva**. Quando una relazione possiede queste proprietà viene chiamata **ordine debole**, debole perché possono esiste dei *pari merito*. Un campo di applicazione sono i campionati sportivi.

$$\exists v : F \to \mathbb{R} : f \preccurlyeq f' \Leftrightarrow v_{(f)} \succcurlyeq v_{(f')}$$

2.2.1 Condizioni di preordine

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** si ottiene la condizione di **preordine**.

2.2.2 Ordini deboli

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **completezza** si ha la condizione di ordine debole, che è molto utilizzata.

2.2.3 Ordine parziale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine parziale**.

2.2.4 Ordine totale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività**, **completezza** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine totale**.

2.3 Tabella riassuntiva

Proprietà	**Preordine**	**Ordine debole**	**Ordine parziale**	**Ordine totale**
Riflessività	X	X	X	X
Transitività	X	X	X	X
Completezza		X		X
Antisimmetria			X	X

3
Programmazione in condizioni di incertezza

Viene applicata in problemi in cui uno scenario ω viene svelato dopo che il decisore ha scelto l'alternativa x. Un problema di questo tipo può appartenere a una di due categorie:**decisione in condizioni di ignoranza** o **decisioni in condizioni di rischio**.

3.1 Dominanza forte

Definizione 3.1.1 (Dominanza forte). Si dice che un'alternativa x domina fortemente un'alternativa x' quando il suo impatto è almeno altrettanto buono in tutti gli scenari $\omega \in \Omega$ e migliore in almeno uno:

$$x \preceq x' \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,\omega) \leqslant f(x',\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \\ \exists \omega' \in \Omega : f(x,\omega') < f(x',\omega') \end{cases}$$

3.2 Criteri

3.2.1 Criterio del caso pessimo

Si assume che qualsiasi scelta si faccia condurrà al proprio caso pessimo, per cui si sceglie l'opzione che ha valore migliore nel proprio caso pessimo.

3.2.2 Criterio del caso ottimo

Si assume che qualsiasi scelta si faccia consurrà al proprio caso migliore, per cui si sceglie l'opzione che ha valore migliore nel proprio caso ottimo.

3.2.3 Criterio di Hurwicz

Esegue la combinazione convessa del criterio del caso pessimo ed ottimo usando un coefficiente α detto **coefficiente di pessimismo**. Quindi prima si assume che qualsiasi scelta condurrà al caso indicato dalla combinazione convessa e poi si sceglie la migliore tra queste.

Il coefficiente α può essere determinato ponendo due scelte certamente indifferenti tra loro come uguali nell'equazione della combinazione convessa, andando anche a costruire questa scelta se necessario.

3.2.4 Criterio di equiprobabilità o di Laplace

Combina gli scenari sommandoli con un dato peso (uguale per tutti), per esempio la media degli scenari (caso di equiprobabilità, da cui il nome). Quindi va a scegliere l'opzione che porta al valore ottimo.

3.2.5 Criterio del rammarico

Questo criterio va a minimizzare il rammarico, cioè la differenza tra l'alternativa ottima di uno scenario e quella che andrebbe ad accadere con una determinata scelta. Per ogni scelta si cerca il rammarico massimo, e quindi si sceglie l'opzione che lo minimizza, procedendo secondo il criterio del caso pessimo.

3.2.6 Criterio delle eccedenze

Si tratta del complementare al criterio del rammarico: si va a calcolare la differenza tra l'aternativa pessima di uno scenario e quella che andrebbe ad accadere con una determinata scelta. Per ogni scelta si cerca l'eccedenza minima e quindi si sceglie l'opzione che la massimizza, procedendo secondo il criterio del caso ottimo.

3.3 Programmazione Robusta

In programmazione robusta il *criterio del caso pessimo* è chiamato **robustezza assoluta** ed il *criterio del rammarico* è chiamato **decisione robusta**. Un criterio della programmazione robusta che non ha controparte si chiama **robustezza relativa**.

3.3.1 Robustezza relativa

$$u_{\text{robustezza relativa}}(x) = \max_{\omega \in \Omega} \left[\frac{f(x,\omega) - f(x^o,\omega)}{f(x^o,\omega)} \right]$$

Figura 3.1: Robustezza relativa

4

Programmazione in condizioni di rischio

Rispetto alle condizioni di ignoranza, il modello include anche una definizione di probabilità.

4.1 Criterio del valore atteso (o medio)

Va a definire l'utilità di un impatto per il suo valore atteso:

Per ogni scelta, si sommano le utilità di ogni scenario per quella scelta moltiplicate con la probabilità dello scenario, quindi si sceglie la scelta che garantisce utilità ottima.

$$u(x) = E\left|f(x,\omega)\right|$$

(a) Caso generale

$$u(x) = \sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega) f(x,\omega)$$

(b) Caso discreto

$$u(x) = \int_{\Omega} \pi(\omega) f(x,\omega) d\omega$$

(c) Caso continuo

Figura 4.1: Criterio del valore atteso

4.2 Teoria dell'utilità stocastica

Si basa sull'idea che un decisore può definire una relazione di preferenza anche tra impatti definiti come variabili aleatorie.

Definizione 4.2.1 (Lotteria). Definiamo **lotteria finita** una coppia di funzioni definite come:

$$l_{f,\pi} = (f(\omega), \pi(\omega))$$
$f(\omega) : \Omega \to F$ variabile aleatoria su spazio campionario finito.
$\pi(\omega) : \Omega \to [0,1]$ probabilità di ogni scenario in Ω.

Indichiamo con L_F l'insieme di tutte le lotterie definibili su F.

Definizione 4.2.2. Lotteria degenere Definiamo **lotteria degenere** una lotteria $l_{f,1}$ con un solo impatto f ed un solo scenario di probabilità unitaria (certo di accadere).

Definizione 4.2.3. Lotteria composta Definiamo **lotteria composta** una lotteria i cui impatti sono altre lotterie.

Definizione 4.2.4. Preferenza tra lotterie Data una relazione di preferenza fra lotterie $\Pi \subset 2^{L \times L}$ si dice che essa ammette una **funzione conforme di utilità stocastica** $u : L \to \mathbb{R}$ quando, per ogni coppia di lotterie l e l', l'utilità della preferita supera l'utilità dell'altra.

$$l \preceq l' \Leftrightarrow u(l) \geqslant u(l')$$

4.2.1 Assiomi fondativi dell'utilità stocastica

Sono assiomi che una relazione di preferenza fra lotterie deve rispettare per essere considerata razionale.

Ordinamento debole La relazione è **riflessiva**, **transitiva** e **completa**.

Monotonia Lotterie che assegnano probabilità più alte sono preferite.

Continuità Date due lotterie, per qualsiasi impatto intermedio è possibile costruire una lotteria indipendente all'impatto con un adeguato valore di probabilità.

Indipendenza (o sostituzione) La preferenza tra due lotterie non cambia se si aggiunge o si toglie una stessa lotteria.

Riduzione Qualsiasi lotteria composta è indifferente alla lotteria semplice ottenuta elencando tutti gli impatti distinti finali della lotteria composta ed assegnando ad ognuno una probabilità data dalle regole di composizione.

4.2.2 Teorema dell'utilità stocastica

Teorema 4.2.5 (Teorema dell'utilità stocastica). Dato un insieme di impatti F e una relazione relazione di preferenza Π fra lotterie su F che rispetti gli assiomi fondativi 4.2.1, esiste una e una sola funzione di utilità $u(l)$ conforme a Π normalizzata in modo da assumere valore nullo nell'impatto pessimo e unitario in quello ottimo.

4.2.3 Avversione e propensione al rischio

Definizione 4.2.6 (Profilo di rischio). Il **profilo di rischio** è l'andamento dell'utilità stocastica delle lotterie degeneri $u(f, 1)$ al variare dell'impatto $f \in F$.

In particolare si possono fare affermazioni in base alla natura della funzione di utilità:

Concava Il decisore preferisce l'impatto certo ed è quindi **avverso al rischio**.

Lineare Il decisore è indifferente ed è quindi **neutrale al rischio**.

Convessa Il decisore preferisce la lotteria ed è quindi **propenso al rischio**.

4.2.4 Equivalente certo e premio di rischio

Definizione 4.2.7 (Equivalente certo e premio di rischio). Data una lotteria l, si dice **equivalente certo** l'impatto f_l che le equivale e **premio di rischio** la differenza fra il valore atteso della lotteria ed il suo equivalente certo.

$$f \preceq f' \wedge f' \preceq f \Rightarrow f = f' \quad \forall f, f' \in F$$

5
Teoria dei Giochi

Studia le situazioni in cui ogni decisore (qui chiamato giocatore) $d \in D$ ha proprie variabili $x \in X$ di decisione che fissa in modo indipendente dagli altri decisori, cercando di massimizzare le funzioni impatto $f^{(d)}$ (qui chiamati payoff).

$$\begin{aligned} \max f^{(d)} &= f^{(d)}(x^{(1)}, \dots, x^{(|D|)}) \\ x^{(d)} &\in X^{(d)} \end{aligned}$$

Figura 5.1: Problema di teoria dei giochi

I giochi possono essere rappresentati a **forma estesa** nella quale il gioco è rappresentato ad albero delle possibili scelte sino al termine del gioco o in **forma strategica** nella quale il gioco è rappresentato con una tabella dei payoff per ogni combinazione di scelte del giocatore e degli avversari.

Definizione 5.0.1 (Strategia). Un strategia per il giocare $d \in D$ corrisponde a un sottoinsieme di archi dell'albero di gioco che sia:

1. Costituito da archi associati al giocatore d.
2. Coerente, cioè che non contenga più archi uscenti dallo stesso nodo.
3. Massimale, cioè che contenga un arco per ogni nodo dotato di archi uscenti.

Definizione 5.0.2 (Dominanza fra strategie). Date due strategie $x^{(d)}$ e $x'^{(d)}$ per il giocatore d, si dice che $x^{(d)}$ domina $x'^{(d)}$ quando, per qualsiasi comportamento di un altro giocatore, la strategia $x^{(d)}$ da un payoff $f^{(d)}$ maggiore.

Definizione 5.0.3 (Equilibrio di Nash). Un vettore di strategie è detto **punto di equilibrio** o **equilibrio di Nash** quando a nessuno dei giocatori conviene cambiare la propria strategia (allontanarsi da quella nel vettore di strategie dell'equilibrio) perché avrebbe un payoff peggiore se nessuno degli altri giocatori cambia la propria strategia.

5.1 Calcolare gli equilibri di Nash

Nei giochi finiti in forma strategica l'equilibrio di Nash è una (o più) delle caselle della tabella dei payoff. Per individuarlo, se esiste, si procede nel modo seguente:

a) Si marca ogni colonna con utilità massima per il giocatore di riga.

b) Si marca ogni riga con utilità massima per il giocatore di colonna.

c) Le celle in cui tutte le utilità sono marcate sono equilibri di Nash.

5.2 Criteri per la scelta di strategie

5.2.1 Strategia del caso pessimo

Il giocatore d considera che l'avversario farà sempre la mossa volta a danneggiarlo maggiormente, e segue la strategia che quindi, nel caso pessimo, gli garantisce il massimo guadagno.

Definizione 5.2.1 (Valore di gioco). Si definisce **valore di gioco** (formula 5.2) per il giocatore d l'utilità massima ottenibile dal giocatore d nel caso pessimo, cioè la miglior garanzia possinile sulla sua prestazione:

$$u^{(d)} = \max_{x^{(d)} \in X^{(d)}} \min_{x^{(j)} \in X^{(j)}, j \neq d} f^{(j)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(|D|)})$$

(a) Valore di gioco a n giocatori

$$u^{(r)} = \max_{x^{(r)} \in X^{(r)}} \min_{x^{(c)} \in X^{(c)}} f^{(c)}(x^{(r)}, x^{(c)})$$

(b) Valore di gioco a 2 giocatori (r riga, c colonna)

Figura 5.2: Valore di gioco

Nei **giochi a somma zero a 2 giocatori** si determina il valore di gioco del giocatore di riga $u^{(r)}$ e si indica quello del giocatore di colonna con $-u^{(r)}$, talvolta lasciato implicito nella notazione.

6

Giochi a somma zero

Categoria di giochi in cui la vincita di un giocatore equivale alla perdita dell'altro. La matrice delle utilità del giocatore di colonna è opposta a quella del giocatore di riga sicchè $u^{(r)} = -u^{(c)}$.

6.1 Equilibri di Nash nei giochi a somma zero

Nei giochi a somma zero una cella è equilibrio di Nash se e solo se è anche un **punto di sella**, cioè è un punto di massimo per la colonna e punto di minimo per la riga.

6.2 Strategie miste (probabilità)

Definizione 6.2.1 (Strategia mista). Definiamo **strategia mista** per un giocatore un vettore di probabilità ξ di n elementi, dove n indica il numero delle strategie pure disponibili per il giocatore.

$$\underline{\boldsymbol{\xi}} = [\xi_1, \dots, \xi_n]' \in \Xi = \left\{ \xi \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1 \wedge \xi_i \geqslant 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \right\}$$

Definizione 6.2.2 (Valore atteso del gioco). Defimiamo **valore atteso del gioco** F il valore atteso del guadagno per il giocatore di riga e della perdita per il giocatore di colonna.

$$v(F) = E\left[f(\xi^{(r)}, \xi^{(c)})\right] = \sum_{i=1}^{n^{(r)}} \sum_{j=1}^{n^{(c)}} \xi^{(r)} \xi^{(c)} f_{ij}$$

$$v^{(r)}(F) = \max_{\xi^{(r)} \in \Xi^{(r)}} \min_{\xi^{(c)} \in \Xi^{(c)}} E\left[f(\xi^{(r)}, \xi^{(c)})\right]$$

(a) Valore atteso per il giocatore di riga

$$v^{(c)}(F) = \min_{\xi^{(c)} \in \Xi^{(c)}} \max_{\xi^{(r)} \in \Xi^{(r)}} E\left[f(\xi^{(r)}, \xi^{(c)})\right]$$

(b) Valore atteso per il giocatore di colonna

Figura 6.1: Valore atteso

Teorema 6.2.3 (Il caso pessimo è sempre una strategia pura). Qualunque strategia mista un giocatore adotti, il caso pessimo per lui sarà rappresentato da una strategia pura dell'aversario. Di conseguenza, il valore atteso del gioco per i giocatori può essere espresso come:

$$v^{(r)}(F) = \sum_{i=1}^{n^{(r)}} \xi^{(r)} f_{ij}$$

(a) Valore atteso per il giocatore di riga

$$v^{(r)}(F) = \sum_{i=1}^{n^{(r)}} \xi^{(r)} f_{ij}$$

(b) Valore atteso per il giocatore di colonna

Figura 6.2: Valore atteso, considerando che il caso pessimo è sempre una strategoa pura.

6.3 Teorema del minimax

Teorema 6.3.1 (Teorema del minimax). Per ogni gioco finito a somma zero a due persone, i valori attesi dei giocatori coincidono. Inoltre, esistono due strategie miste ottimali $\xi^{*(r)}$ e $\xi^{*(c)}$ tali per cui:

$$u^{(r)} = u^{(c)} = E\left[f(\xi^{*(r)}, \xi^{*(c)})\right]$$

6.3.1 Determinazione della strategia mista di equilibrio

Gioco semplice

Se il gioco è particolarmente semplice ed i giocatori hanno un numero n basso di strategie è sufficiente risolvere dei problemi di ottimizzazione.

Nel caso $n = 2$, è sufficiente risolvere con due variabili di decisione rappresentanti le probabilità di procedere per una strategia o l'altra che essendo appunto probabilità (e quindi hanno somma unitaria) possono essere risolti monodimensionalmente.

Gioco complesso, metodo dei pivot

Si risolve tramite un problema di programmazione matematica non lineare.

7
Giochi simmetrici

Definizione 7.0.1 (Gioco simmetrico). Un gioco è **simmetrico** quando tutti i giocatori hanno lo stesso numero di strategie pure e per ogni permutazione delle strategie (se i giocatori scambiano strategia) si permutano allo stesso modo i payoff risultanti.

Definizione 7.0.2 (Gioco simmetrico a due persone). In un gioco simmetrico a due persone, la matrice dei guadagni del secondo giocatore è la trasposta della matrice dei guadagni del primo giocatore.

7.1 Tassonomia dei giochi simmetrici a due persone e due strategie

7.1.1 Matrimonio perfetto

$$f_{11} > f_{21} > f_{12} > f_{22}$$

	C	NC
C	$(\tilde{3},\tilde{3})$	$(\tilde{1},2)$
NC	$(2,\tilde{1})$	$(0,0)$

Figura 7.1: Gioco del matrimonio perfetto

C Il coniuge collabora.

NC Il coniuge non collabora.

Quando entrambi collaborano si ha il payoff massimo, ma anche quando uno non collabora e il secondo si, per quando si trovi in una situazione non preferibile è comunque migliore che non collaborare entrambi.

7.1.2 Caccia al cervo

$$f_{11} > f_{21} > f_{22} > f_{12}$$

	C	NC
C	$(\tilde{3},\tilde{3})$	$(0,2)$
NC	$(2,0)$	$(\tilde{1},\tilde{1})$

Figura 7.2: Gioco della caccia al cervo

C Il cacciatore collabora.

NC Il cacciatore non collabora.

Se i due cacciatori collaborano probabilmente catturano il cervo, se uno non collabora e l'altro cerca di collaborare probabilmente quello che non collabora riesce a catturare una preda minore (es. lepre) mentre se entrambi non collaborano forse possono catturare ognuno una preda minore.

7.2 Giochi di coordinamento puro

7.2.1 Gioco del coniglio

$$f_{21} > f_{11} > f_{12} > f_{22}$$

	C	NC
C	$(2,2)$	$(\tilde{1},\tilde{3})$
NC	$(\tilde{3},\tilde{1})$	$(0,0)$

Figura 7.3: Corsa del coniglio

C Il pilota frena.

NC Il pilota non frena.

Nella corsa del coniglio due piloti si sfidano a chi frenerà per ultimo prima di un precipizio. Se uno dei due frena l'altro vince ed entrambi rimangono vivi. Se entrambi frenano, nessuno vince ma rimandono vivi. Se nessuno dei due frena si schiantano.

7.2.2 La guerra dei sessi

$$f_{12} > f_{21} > f_{22} > f_{11} \wedge f_{21} > f_{12} > f_{22} > f_{11}$$

	C	NC
C	$(0,0)$	$(\tilde{2},\tilde{3})$
NC	$(\tilde{3},\tilde{2})$	$(1,1)$

Figura 7.4: La guerra dei sessi

C L'innamorato decide di seguire il piano dell'altro.

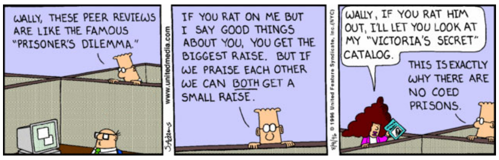
NC L'innamorato decide di seguire il proprio piano.

Due innamorati litigano al telefono su che piano seguire per la serata. Cade la linea e devono decidere che cosa fare, considerando che andare da soli rimanda sgradevole.

Se ognuno segue il piano stabilito dall'altro ognuno segue da solo qualcosa che non vuole. Se ognuno non collabora, ognuno segue qualcosa che vuole da solo. Se uno solo dei due collabora, segue qualcosa che non vuole ma almeno lo fa in compagnia.

7.2.3 Il dilemma del prigioniero

$$f_{21} > f_{11} > f_{22} > f_{12}$$



	C	NC
C	$(2,2)$	$(0,\tilde{3})$
NC	$(\tilde{3},0)$	$(\tilde{1},\tilde{1})$

Figura 7.5: La guerra dei sessi

C Il prigioniero non tradisce l'altro arrestato.

NC Il prigioniero tradisce l'altro arrestato.

Due persone vengono arrestato con prove sufficienti per incriminare almeno uno e l'altro per collaborazione. I poliziotti sanno chi dei due sia effettivamente più colpevole.

Se un prigioniero parla e l'altro tace prende uno sconto sulla pena e l'altro la pena massima. Se entrambi tacciono nessuno prende la pena massima ma nemmeno lo sconto. Se entrambi parlano avranno entrambi la pena massima.

8

Decisioni di gruppo

Nelle decisioni di gruppo il numero di decisori è maggiore di uno. Pertanto, oltre ai meccanismi di selezione delle decisioni visti per i casi a singolo decisore, vanno considerati dei metodi per unire nel modo migliore le scelte dei vari decisori.

Definizione 8.0.1 (Costituzione). Si dice **costituzione** o **funzione di benessere collettivo** una funzione che associa ad ogni $|\mathscr{D}| - upla$ di ordini deboli su un insieme di soluzioni dato un ordine debole (di gruppo) sullo stesso insieme:

$$g : \mathscr{D}(X)^{|\mathscr{D}|} \to \mathscr{D}(X)$$

8.1 Metodo di Condorcet o delle maggioranze

Una soluzione x_1 è preferibile ad una seconda x_2 se il gruppo dei decisori che preferisce x_1 a x_2 è maggiore del gruppo che preferisce x_2 a x_1.

Questo metodo è soggetto ad un caso limite dove non può costruire un ordine debole, cioè quando le soluzioni sono espresse in modo tale per cui i gruppi creano un ciclo di preferenze.

$Ordine$	d_1	d_2	d_3	d_4
1	a	b	c	d
2	b	c	d	c
3	c	d	a	a
4	d	a	b	b

Tabella 8.1: Preferenze circolari: caso in cui Condorcet fallisce

8.2 Metodo di Borda

Assegna un punteggio ad una soluzione in base alla posizione che essa assume sulla lista di preferenze di ogni decisore, somma questi punteggi e va a scegliere quella soluzione che ha il punteggio più alto.

Talvolta è soggetto al **rank reversal**, cioè eliminando una soluzione (anche mediocre) soluzioni precedentemente non ottime lo diventano.

8.3 Metodo lessicografico

Il primo decisore (trattato come monarca o capo) sceglie per tutti la preferenza tra due soluzioni, e solo se è per lui è indifferente si passa al secondo decisore etc..

8.4 Sistema di Pluralità

Si sceglie la soluzione più condivisa come ottima tra i decisori. Qualora vi fosse un pareggio, si elimina la soluzione meno condivisa e si ripete il conteggio, sino ad arrivare ad una maggioranza.

Questo metodo permette però a soluzioni fortemente gradite da una minoranza di prevalere qualora piacesse sufficientemente a tutti gli altri.

8.5 Teorema di Arrow (Approccio assiomatico)

Arrow, definendo tramite assiomi delle proprietà che sono desiderabili in un sistema di voto democratico dimostra che non è possibile realizzare un metodo di voto che goda di tutti gli assiomi contemporaneamente.

8.5.1 Assiomi di Arrow

Assioma di non banalità Esistono almeno due decisori e 3 alternative.

Assioma del dominio universale La funzione di costituzione g è definita su tutti i profili di preferenza.

Assioma di ordine debole La funzione di costituzione g restituisce sempre una relazione di preferenza di gruppo che sia un ordine debole.

Assioma di rilevanza binaria La funzione di costituzione non soffre di **rank reversal**.

Assioma di unanimità Se tutti i decisori sono concordi, la preferenza di gruppo è la preferenza di ogni singolo decisore.

Assioma di non dittatorialità Non esiste nessun dittatore, cioè un decisore che imponga la propria preferenza sul gruppo.

A
Esercizi risolti

A.1 Exercises on paretian solutions

A.1.1 Esercizio 1

Si consideri il seguente problema con due indicatori che rappresentano costi:

$$
\begin{aligned}
\min f_1(x) &= \frac{1}{4}(x_1-4)^2 + \frac{1}{4}x_2^2 \\
\min f_2(x) &= 2 - x_2 \\
2x_1 + x_2 &\leqslant 5 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Si determini la soluzione che si avrebbe ipotizzando una funzione di utilit‘a con tasso marginale di sostituzione uniforme fra f_1 e f_2 e pesi $\omega_1 = \frac{1}{3}$ e $\omega_2 = \frac{2}{3}$.

A.1.2 Soluzione esercizio 1

Costruisco funzione obbiettivo composta

$$
\begin{aligned}
f^*(x) &= \frac{1}{3}\frac{1}{4}\left((x_1-4)^2 + x_2^2\right) + \frac{2}{3}(2-x_2) \\
&= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + x_2^2\right) + \frac{2}{3}(2-x_2) \\
&= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + x_2^2 + 8(2-x_2)\right) \\
&= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + x_2^2 + 16 - 8x_2\right) \\
&= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right)
\end{aligned}
$$

Risolvo il problema

Si tratta di una funzione distanza, con centro in $C = (4,4)$

$$\begin{aligned}\min f^*(x) &= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2+(x_2-4)^2\right)\\ 2x_1+x_2 &\leqslant 5\\ x_1,x_2 &\geqslant 0\end{aligned}$$

Il punto di ottimo è quello che giace sulla retta $2x_1 + x_2 = 5$ più vicino al centro del cerchio $C = (4,4)$.

Ottengo la retta perpendicolare al vincolo passante per C:

$$g: x_2 = -2x_1+5 \rightarrow m = -2, m' = \frac{1}{2} \Rightarrow g': x_2 = \frac{1}{2}x_1 + q'$$

Ottengo il termine costante della retta:

$$q' = 4 - \frac{1}{2}4 = 2$$

La retta perpendicolare passante per C risulta quindi:

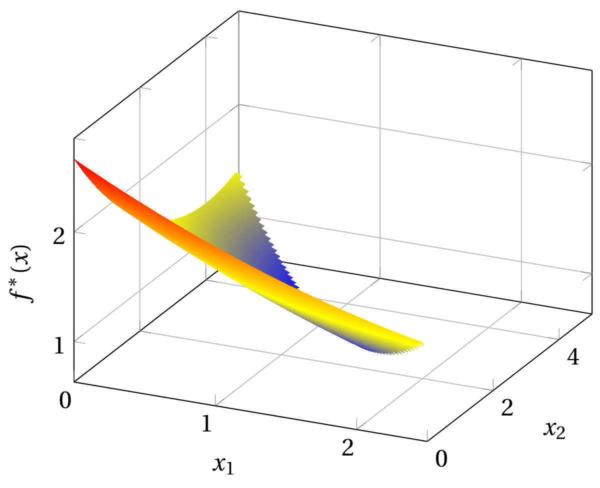
$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 2$$

Identifico quindi il punto più vicino a C tramite l'intersezione delle due rette:

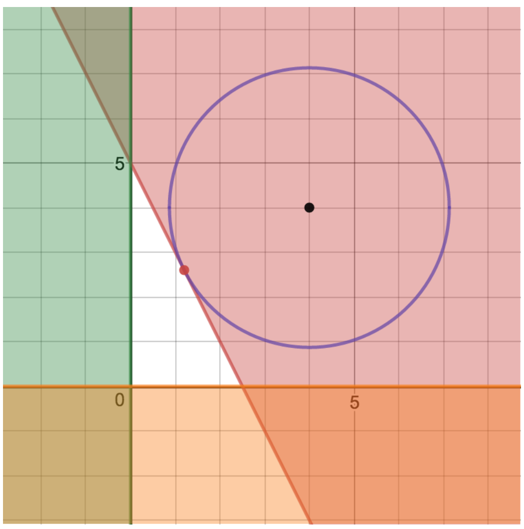
$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1+x_2=2\\ 2x_1+x_2=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2 = 2+\frac{3}{5} = \frac{13}{5}\\ x_1 = \frac{6}{5}\end{cases}$$

Il punto di ottimo risulta essere quindi $O = (\frac{6}{5}, \frac{13}{5})$

Verifico la soluzione



(a) La funzione $f^*(x)$



(b) Dominio della funzione $f^*(x)$

Il risultato ottenuto è valido.

A.2 Esercizi su MAUT

A.2.1 Esercizio 1

Si consideri il seguente problema con due indicatori che rappresentano costi:

$$\min f_1(x) = \frac{1}{4}(x_1-4)^2 + \frac{1}{4}x_2^2$$
$$\min f_2(x) = 2 - x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 5$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Si determini la soluzione che si avrebbe ipotizzando una funzione di utilit'a con tasso marginale di sostituzione uniforme fra f_1 e f_2 e pesi $\omega_1 = \frac{1}{3}$ e $\omega_2 = \frac{2}{3}$.

A.2.2 Soluzione esercizio 1

Costruisco funzione obbiettivo composta

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{3}\frac{1}{4}\left((x_1-4)^2 + x_2^2\right) + \frac{2}{3}(2-x_2) \\ &= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + x_2^2\right) + \frac{2}{3}(2-x_2) \\ &= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + x_2^2 + 8(2-x_2)\right) \\ &= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + x_2^2 + 16 - 8x_2\right) \\ &= \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right) \end{aligned}$$

Risolvo il problema

Si tratta di una funzione distanza, con centro in $C = (4,4)$

$$\min f^*(x) = \frac{1}{12}\left((x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right)$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 5$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Il punto di ottimo è quello che giace sulla retta $2x_1 + x_2 = 5$ più vicino al centro del cerchio $C = (4,4)$.

Ottengo la retta perpendicolare al vincolo passante per C:

$$g : x_2 = -2x_1 + 5 \to m = -2, m' = \frac{1}{2} \Rightarrow g' : x_2 = \frac{1}{2}x_1 + q'$$

Ottengo il termine costante della retta:

$$q' = 4 - \frac{1}{2}4 = 2$$

La retta perpendicolare passante per C risulta quindi:

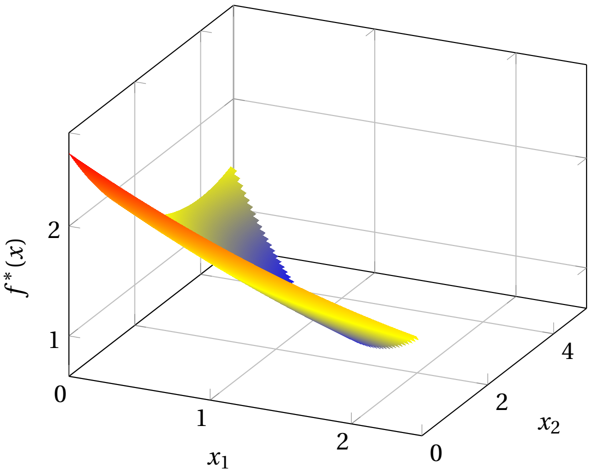
$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 2$$

Identifico quindi il punto più vicino a C tramite l'intersezione delle due rette:

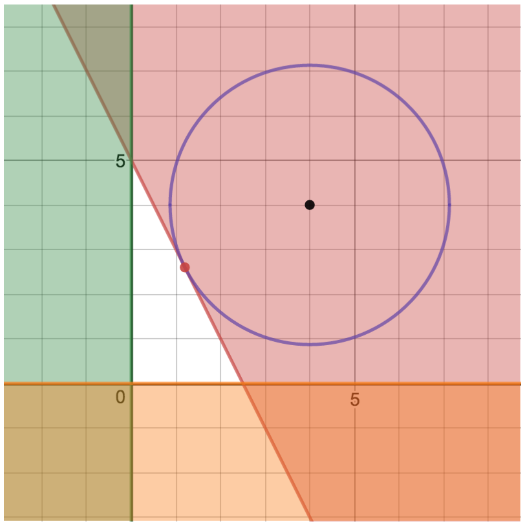
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \\ x_1 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Il punto di ottimo risulta essere quindi $O = (\frac{6}{5}, \frac{13}{5})$

Verifico la soluzione



(a) La funzione $f^*(x)$



(b) Dominio della funzione $f^*(x)$

Il risultato ottenuto è valido.

A.2.3 Esercizio 2

Si consideri il seguente problema con due indicatori che rappresentano benefici:

$$
\begin{aligned}
\max f_1 &= x_1 - x_2 \\
\max f_2 &= x_2 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\
x_1 &\leqslant 2 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Si determini la soluzione ottima rispetto alla funzione di utilit'a che combina i due indicatori con pesi $\omega_1 = 1/3$ e $\omega_2 = 2/3$.

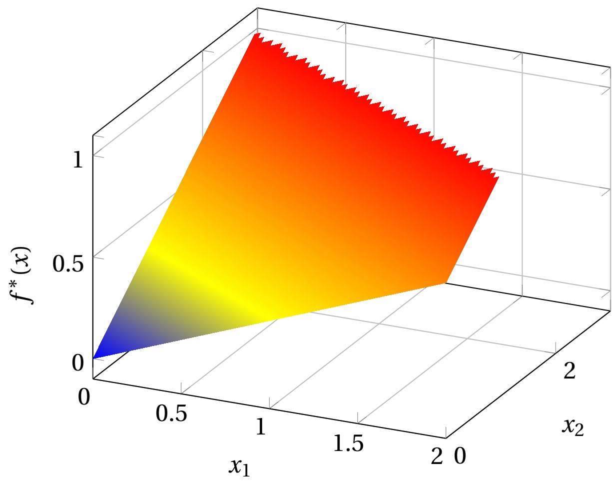
A.2.4 Risoluzione esercizio 2

$$
f^* = \frac{1}{3}(x_1 - x_2) + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2)
$$

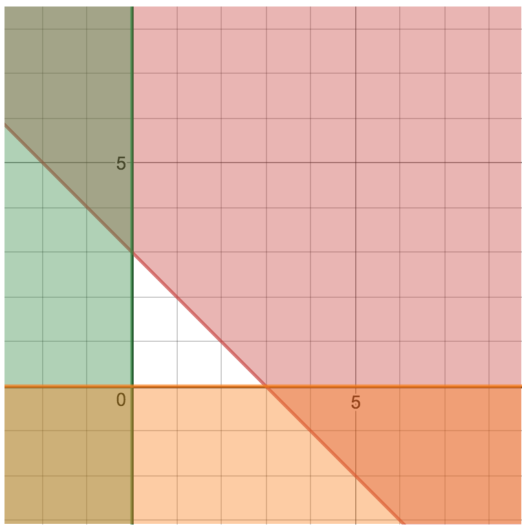
$$
\begin{aligned}
\max f_1 &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2) \\
x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\
x_1 &\leqslant 2 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Il problema ha soluzione ottima su tutto il segmento tra $A = (2,1)$ e $B = (1,2)$

Verifico soluzione



(a) La funzione $f^*(x)$



(b) Dominio della funzione $f^*(x)$

A.2.5 Esercizio 3

Si consideri il problema:

$$
\begin{aligned}
\max f_1 &= x_1 + 3x_2 \\
\max f_2 &= -3x_1 + 2x_2 \\
2x_1 + x_2 &\leqslant 32 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 20 \\
x_1 + 5x_2 &\leqslant 72 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Usando curve di indifferenza del tipo $u(f_1, f_2) = 2f_1 + f_2$, si determini la soluzione ottima.

A.2.6 Risoluzione esercizio 3

Costruisco funzione di ottimo

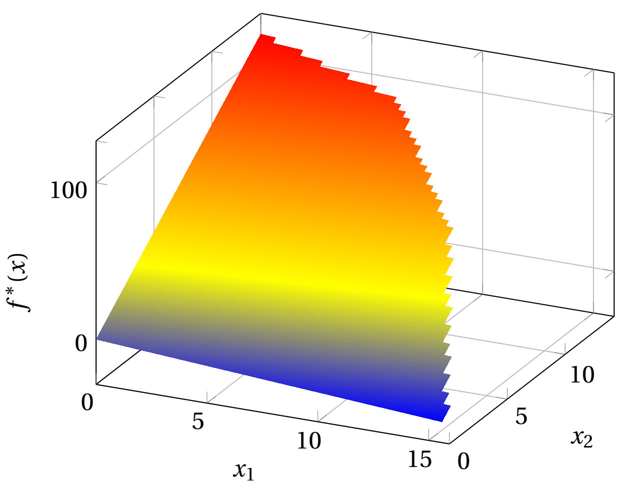
$$u(f_1, f_2) = 2(x_1 + 3x_2) + -3x_1 + 2x_2 = -x_1 + 8x_2$$

Costruisco problema PL

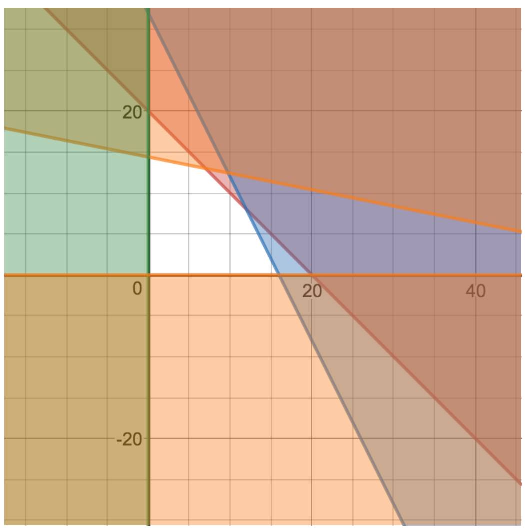
$$
\begin{aligned}
\max u &= -x_1 + 8x_2 \\
2x_1 + x_2 &\leqslant 32 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 20 \\
x_1 + 5x_2 &\leqslant 72 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

La soluzione ottima si trova in $O = (0, \frac{72}{5})$

Verifico soluzione



(a) La funzione $f^*(x)$



(b) Dominio della funzione $f^*(x)$

A.2.7 Esercizio 4

Si determini la soluzione preferita assegnando al primo indicatore peso pari alla metà del secondo ($\omega_1 = \omega 2_{/} 2$).

$$\max f_1 = -x_1 - x_2$$
$$\max f_2 = x_1$$
$$3x_1^2 + 4x_2 \leqslant 12 x_2 \geqslant 0$$

A.2.8 Risoluzione esercizio 4

Costruisco funzione obbiettivo

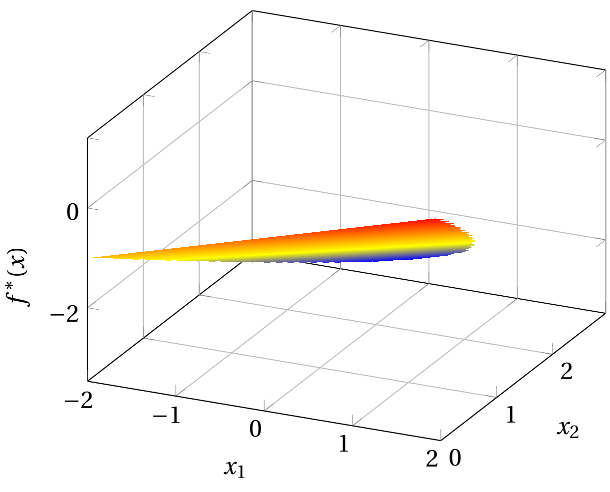
$$f^* = \frac{1}{2}x_1 - x_2$$

Risolvo il problema

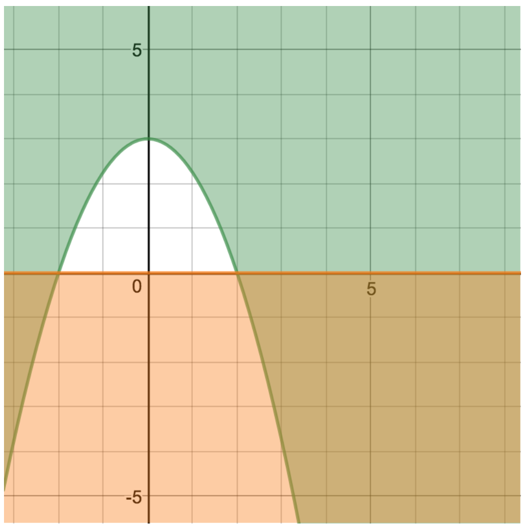
$$\max f^* = \frac{1}{2}x_1 - x_2$$
$$3x_1^2 + 4x_2 \leqslant 12 x_2 \geqslant 0$$

Il valore minimo di x_2 è 0, mentre il valore massimo di $x_1 = 2$.

Verifico la soluzione



(a) La funzione $f^*(x)$



(b) Dominio della funzione $f^*(x)$

A.2.9 Esercizio 5

Si determini la soluzione ottima con la funzione di utilità $u = f_1 - 9f_2^2$ del seguente problema di programmazione a due obbiettivi:

$$
\begin{aligned}
\max f_1 &= 9x_1^2 + 4x_2^2 - 18x_1 - 16x_2 \\
\max f_2 &= -x_1 \\
3x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
3x_1 + 2x_2 &\leqslant 9 \\
x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Figura A.6: Esercizio 5

A.2.10 Soluzione esercizio 5

Costruisco funzione obbiettivo composta

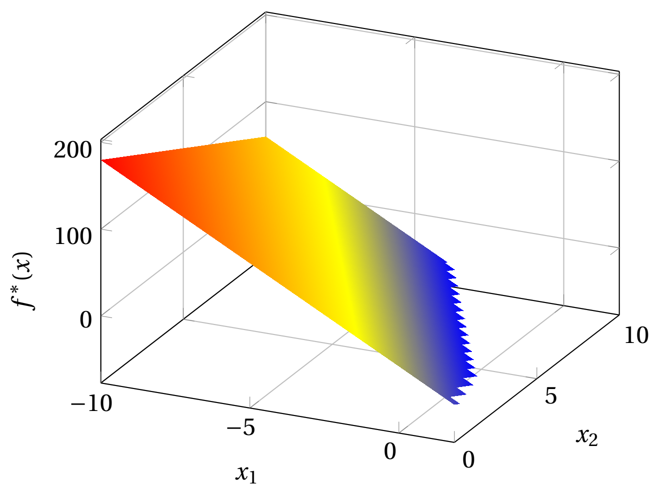
$$
\begin{aligned}
f^*(\underline{x}) &= 9x_1^2 + 4x_2^2 - 18x_1 - 16x_2 - 9(-x_1)^2 \\
&= 4x_2^2 - 18x_1 - 16x_2
\end{aligned}
$$

Risolvo il problema

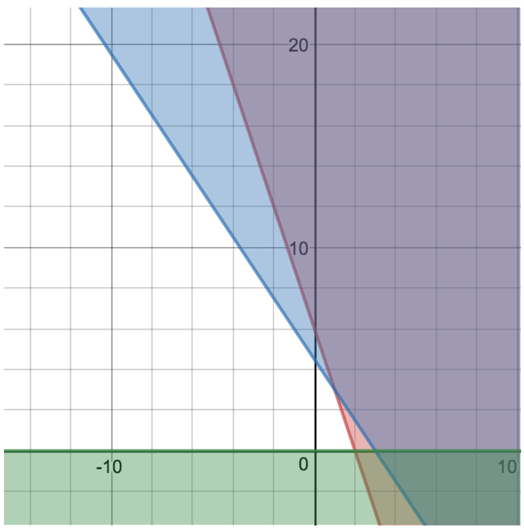
$$
\begin{aligned}
\max f^* &= 4x_2^2 - 18x_1 - 16x_2 \\
3x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
3x_1 + 2x_2 &\leqslant 9 \\
x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Il problema non è vincolato, per cui la soluzione ottima si ha per $x_1 = \infty$.

Verifico la soluzione



(a) La funzione $f^*(x)$



(b) Dominio della funzione $f^*(x)$

Si conferma che il problema non è vincolato.

A.2.11 Esercizio 6

La tabella seguente rappresenta le prestazioni di cinque alternative rispetto a quattro criteri decisionali (tutti da massimizzare), in una scala di valori tra 0 e 100.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
f_1	100	70	60	40	20
f_2	60	45	40	100	80
f_3	60	25	20	80	100
f_4	20	100	90	50	40

Quale alternativa risulta migliore se le curve di indifferenza sono del tipo:

$$u(f) = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \omega_3 f_3 + \omega_4 f_4 \quad \omega_i = 0.25 \quad \forall i$$

Di quanto bisogna aumentare il valore di ω_1 (mantenendo gli altri costanti) affinchè a_1 risulti l'alternativa migliore? E ω_4?

A.2.12 Soluzione esercizio 6

Tabella ponendo $\omega_i = 0.25$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u	60	60	52.5	67.5	60

La soluzione migliore risulta essere a_4.

Identifico valore di ω_1 che identifica a_1 come soluzione ottima

$$\begin{cases} 100\omega_1 + 35 \geqslant 70\omega_1 + 42.5 \\ 100\omega_1 + 35 \geqslant 60\omega_1 + 37.5 \\ 100\omega_1 + 35 \geqslant 40\omega_1 + 57.5 \\ 100\omega_1 + 35 \geqslant 20\omega_1 + 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30\omega_1 \geqslant 7.5 \\ 40\omega_1 \geqslant 2.5 \\ 60\omega_1 \geqslant 22.5 \\ 80\omega_1 \geqslant 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 \geqslant 0.25 \\ \omega_1 \geqslant 0.0625 \\ \omega_1 \geqslant 0.375 \\ \omega_1 \geqslant 0.25 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 \geqslant 0.375$$

Per cui il valore minimo di ω_1 da cui a_1 diviene la soluzione ottima è 0.375.

Identifico valore di ω_4 che identifica a_1 come soluzione ottima

Sicchè a_1 ha in f_4 il valore più basso di tutte le opzioni non potrà essere la scelta ottima. Verifico algebricamente:

$$\begin{cases} 20\omega_4 + 55 \geqslant 100\omega_4 + 35 \\ 20\omega_4 + 55 \geqslant 90\omega_4 + 30 \\ 20\omega_4 + 55 \geqslant 50\omega_4 + 55 \\ 20\omega_4 + 55 \geqslant 40\omega_4 + 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20\omega_4 \geqslant 100\omega_4 - 20 \\ 20\omega_4 \geqslant 90\omega_4 - 25 \\ 20\omega_4 \geqslant 50\omega_4 \\ 20\omega_4 \geqslant 40\omega_4 - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -80\omega_4 \geqslant -20 \\ -70\omega_4 \geqslant -25 \\ -30\omega_4 \geqslant 0 \\ -20\omega_4 \geqslant -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_4 \leqslant 0.25 \\ \omega_4 \leqslant 0.35 \\ \omega_4 \leqslant 0 \\ \omega_4 \leqslant 0.25 \end{cases} \Rightarrow \omega_4 \leqslant 0$$

Bisognerebbe abbassare ω_4 a 0 per garantire di avere a_1 come soluzione ottima, non è possibile quindi trovare un valore di w_4 maggiore di 0.25 che risolva la richiesta.

A.2.13 Esercizio 7

Si determini la soluzione ottima con la funzione di utilità $u = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2$ con $\omega_1 = 0.25$ e $\omega_2 = 0.75$ del seguente problema di programmazione a due obbiettivi:

$$\begin{aligned} \max f_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \max f_1 &= 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\ x_1 - x_2 &\leqslant 3 \\ x_1, x_2 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Figura A.8: Esercizio 7

Si supponga ora di aggiungere un terzo obbiettivo, anch'esso da massimizzare $f_3 = 2x_1 + x_2$ e si disegnino nel piano $\omega_1 - \omega_2$ le regioni nelle quali ciascuna soluzione di base ammissibile del problema lineare risulta ottima.

A.2.14 Soluzione esercizio 7

Costruisco funzione obbiettivo

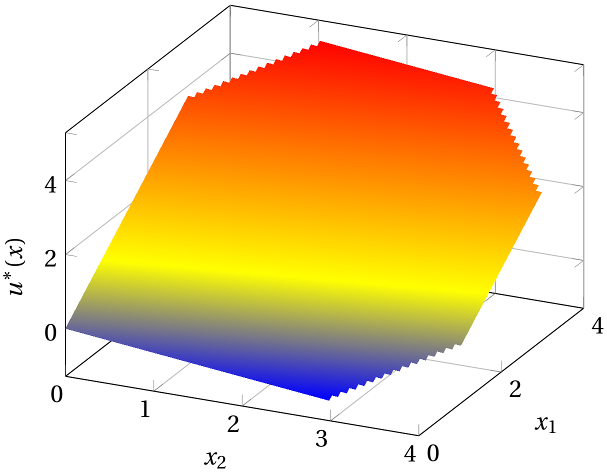
$$u = 0.25(-x_1 + 2x_2) + 0.75(2x_1 - x_2) = 1.25x_1 + 0.75x_2$$

Risolvo il problema lineare con la nuova funzione obbiettivo

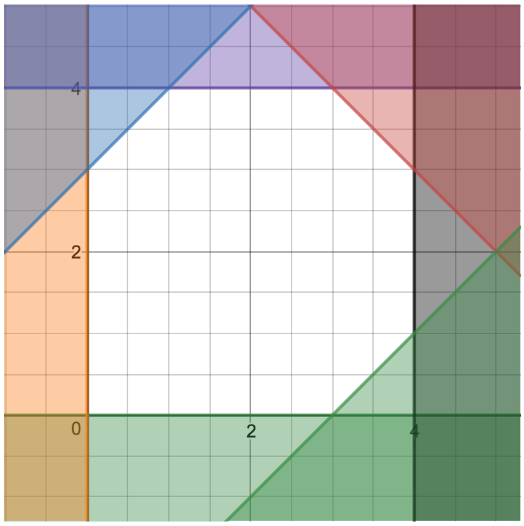
$$\begin{aligned} u^* &= 1.25x_1 - 0.25x_2 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\ x_1 - x_2 &\leqslant 3 \\ x_1, x_2 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La variabile con cofficiente massimo è x_1, che può assumere al massimo valore 4. Il valore di x_2 è invece da minimizzare, e può assumere valore minimo 1 se fissiamo $x_1 = 4$.

Verifico la soluzione



(a) La funzione $u^*(x)$



(b) Dominio della funzione $u^*(x)$

Aggiungo funzione obbiettivo aggiuntiva

Considerando il peso di $w_3 = 1 - \omega_1 - \omega_2$ e $\omega_1 + \omega_2 \leqslant 1$, procedo ad identificare le soluzioni ottime al variare dei pesi.

La nuova funzione obbiettivo risulta:

$$u' = \omega_1(-x_1 + 2x_2) + \omega_2(2x_1 - x_2) + (1 - \omega_1 - \omega_2)(2x_1 + x_2) = \omega_1(-3x_1 + x_2) - 2\omega_2 x_2 + 2x_1 + x_2$$

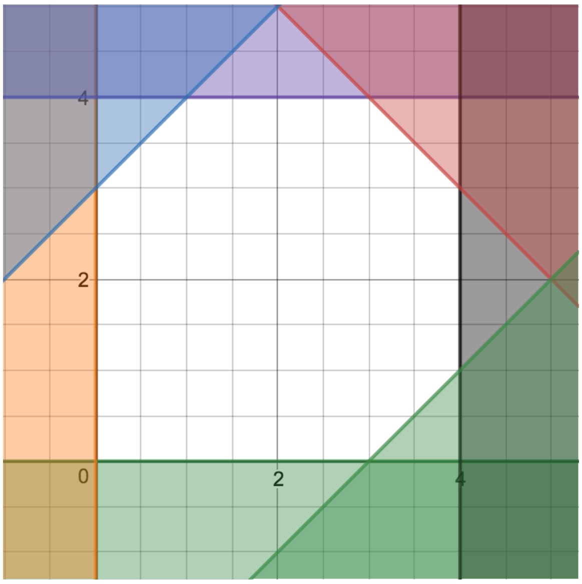


Figura A.10: Area di definizione

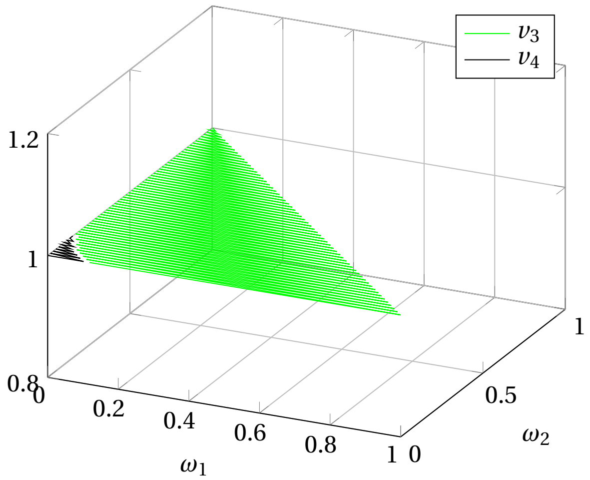
I vertici sono in $v_1 = (0,3)$, $v_2 = (1,4)$, $v_3 = (3,4)$, $v_4 = (4,3)$, $v_5 = (4,1)$, $v_6 = (3,0)$ e $v_7 = (0,0)$.

Il vertice v_7 non può mai essere soluzione ottima, essendo tutte le funzioni di massimo.

Per risolvere l'esercizio è sufficiente risolvere i seguenti sistemi 6 lineari.

$$
\begin{aligned}
-6y+3 &\geqslant \max\left(-6y+3, -x-4y+4, -5x-8y+10, -9x-6y+11, -11x-2y+9, -9x+6\right)\\
-x-4y+4 &\geqslant \max\left(-6y+3, -x-4y+4, -5x-8y+10, -9x-6y+11, -11x-2y+9, -9x+6\right)\\
-5x-8y+10 &\geqslant \max\left(-6y+3, -x-4y+4, -5x-8y+10, -9x-6y+11, -11x-2y+9, -9x+6\right)\\
-9x-6y+11 &\geqslant \max\left(-6y+3, -x-4y+4, -5x-8y+10, -9x-6y+11, -11x-2y+9, -9x+6\right)\\
-11x-2y+9 &\geqslant \max\left(-6y+3, -x-4y+4, -5x-8y+10, -9x-6y+11, -11x-2y+9, -9x+6\right)\\
-9x+6 &\geqslant \max\left(-6y+3, -x-4y+4, -5x-8y+10, -9x-6y+11, -11x-2y+9, -9x+6\right)
\end{aligned}
$$

Mi limito a plottare il risultato calcolato dal computer.



A.2.15 Esercizio 8

Si determini la soluzione ottima supponendo che il decisore dichiari un tasso marginale di sostituzione uniforme di 4 unità di f_1 per una unità di f_2.

$$\begin{aligned} \max f_1 &= x_1 - 3x_2 \\ \max f_2 &= -4x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leqslant 7 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 11 \\ x_1 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Figura A.11: Esercizio 8

A.2.16 Soluzione esercizio 8

Costruisco funzione obbiettivo

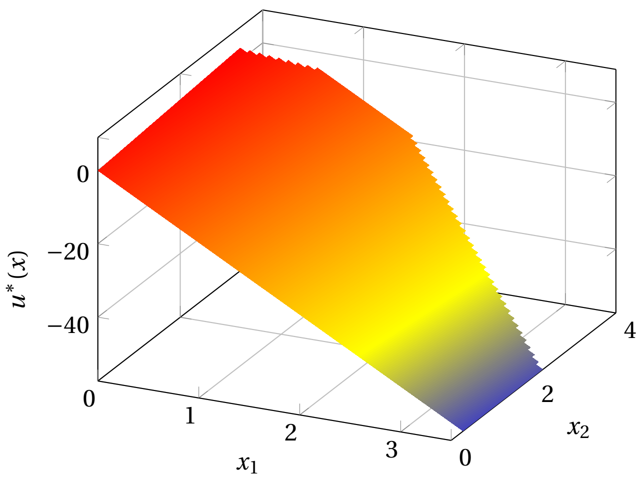
$$u^* = f_1 + 4f_2 = x_1 - 3x_2 + 4(-4x_1 + x_2) = -15x_1 + x_2$$

Risolvo il problema lineare

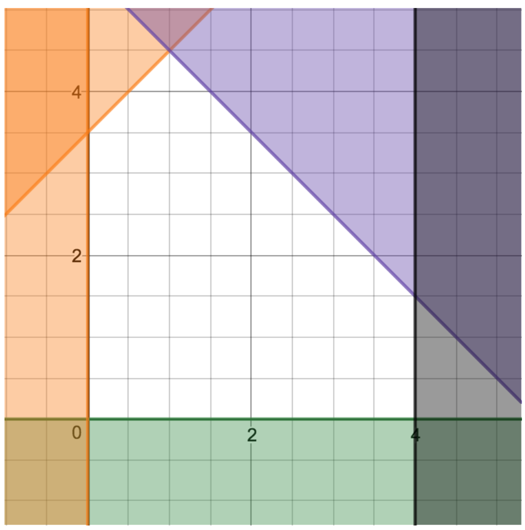
$$\begin{aligned} \max -15x_1 + x_2 & \\ -2x_1 + 2x_2 &\leqslant 7 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 11 \\ x_1 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La variabile con coefficiente maggiore è la x_1 e ll valore minimo che essa può assumere è 0, il valore massimo invece che può assumere la x_2 è $\frac{7}{2}$.

Il punto di ottimo risulta quindi: $(0, \frac{7}{2})$.



(a) La funzione $u^*(x)$



(b) Dominio della funzione $u^*(x)$

A.2.17 Esercizio 9

Dato il problema:

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 \\ \max f_2(x) &= x_2 \\ x_2 &\leqslant 10 \end{aligned}$$

Figura A.13: Esercizio 9

Si esprima analiticamente l'utilità associata a $f_1(x)$ come:

$$u_1(f_1) \begin{cases} 10 - \frac{f_1}{20} & 0 \leqslant f_1 \leqslant 200 \\ 0 & f_1 \geqslant 200 \end{cases}$$

cioè tale utilità decresce linearmente fino ad annullarsi per $f_1 = 200$, mentre l'utilità associata a f_2 coincide con il valore stesso di f_2.

Si indichino le coordinate del punto utopia nello spazio delle utilità e nello spazio degli indicatori.

A.2.18 Soluzione esercizio 9

Il punto utopia rappresenta il punto in cui le funzioni acquisiscono il valore massimo, ignorando i vincoli di variabili tra le varie funzioni.

Il valore massimo di u_1 è 10, per $f_1 = 0$.

Il valore massimo di u_2 è 10, per $f_2 = 10$.

Da cui i due punti utopia risultano $U = (10, 10)$ e $F = (0, 10)$.

A.2.19 Esercizio 10

Un centro sociale cerca una nuova sede: esistono quattro alternative (A, B, C, D) oltre all'alternativa 0 (restare nella sede attuale). Si è stabilito che la scelta tra le cinque alternative debba essere definitiva e che sarà fatta in base a tre fattori: costi, accessibilità e prestigio. E fornita una tabella indicante le utilità per ciascuna alternativa e fattore in una scala tra 0 e 100. E fornito anche un vettore di pesi dei tre fattori.

Indicatori	A	B	C	D	0		Pesi
Costi	90	90	90	1	100	ω_1	$1/3$
Accessibilità	12	13	10	100	37	ω_2	$1/3$
Prestigio	30	1	5	100	10	ω_3	$1/3$

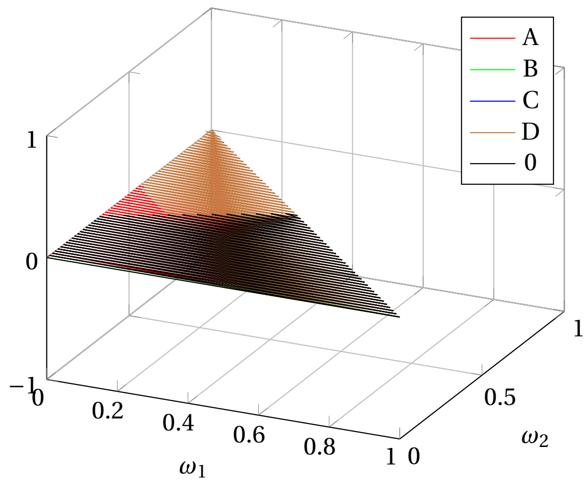
1. Si ordinino le alternative in base ai pesi assegnati.
2. Si faccia un'analisi di sensitività rispetto al peso dei costi, per stabilire l'intervallo di pesi in cui l'alternativa scelta resta la migliore.
3. Si rappresentino nello spazio dei pesi i supporti delle diverse alternative.

A.2.20 Soluzione esercizio 10

	A	B	C	D	0
Utilità	44	34.66	35	67	49

In ordine le alternative risultano essere: $D, 0, A, C, B$.

Assegnando $\omega_1 = 1 - \omega_2 - \omega_3$ e $\omega_2 + \omega_3 \leqslant 1$ si può rappresentare lo spazio dei supporti come:



A.2.21 Exercise 11

The following problem is given:

$$\begin{aligned}\min f_1(x) &= x^2 - 4x\\ \min f_2(x) &= -x^2\\ x &\geqslant 0\\ x &\leqslant 3\end{aligned}$$

Represent the utopy point U in the space of the objectives and identify which one of the impacts $A' = (-4,-4)$ and $B' = (-3,-9)$ is preferable according to the euclidean distance from U.

Add another objective $f_3 = x$, always to minimize, and identify the values for which the relative weight ω_3 the point $x = 3$ constitutes the optimal solution, considering $\omega_1 = \omega_2$.

A.2.22 Resolution exercise 11

The minimum value the objectives can reach is, in the given domain, respectively -4 and -9, so the utopy point is $U = (-4,-9)$.

The euclidean distance from the points A' and B' is 5 and 1 respectively, so B' is preferable.

If the weights $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1-\omega_3}{2}$. Therefore, the objective function is:

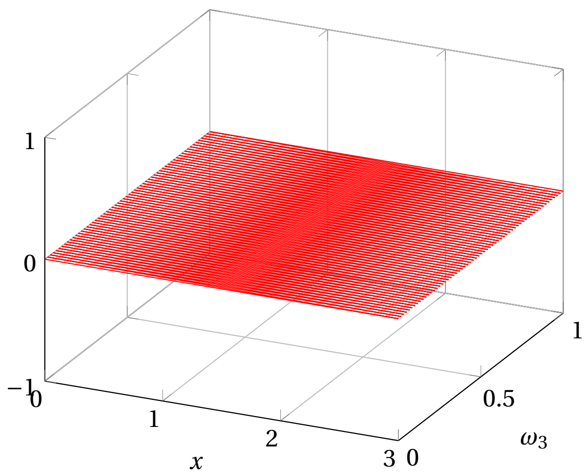
$$f^* = \frac{1-\omega_3}{2}(x^2+4x) - \frac{1-\omega_3}{2}x^2 + \omega_3 x = 2(1-\omega_3)x + \omega_3 x = 2x - \omega_3 x$$

The range is obtainable by replacing $x = 3$ in the function and resolving the following inequality:

$$\begin{aligned}6 - 3\omega_3 &\geqslant 2x - \omega_3 x \quad \forall x \in [0,3]\\ 6 - 2x &\geqslant (3-x)\omega_3\\ \omega_3 &\leqslant \frac{6-2x}{3-x} = 2\end{aligned}$$

Since the maximum value of ω_3 is 1, there is no value for which $x = 3$ isn't an optimal solution.

Let's verify graphically:



A.2.23 Exercise 12

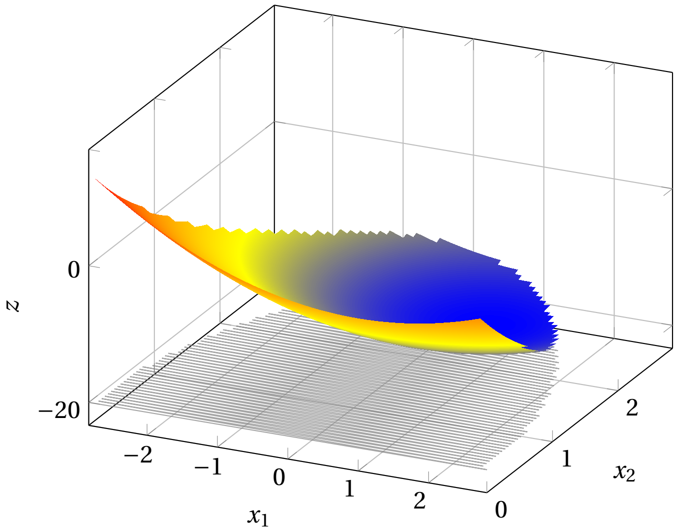
The following problem is given:

$$
\begin{aligned}
\min f_1(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 16x_2 \\
\min f_2(x) = -5x_1 - x_2 \\
x_1^2 + x_2^2 \leqslant 8 \\
x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

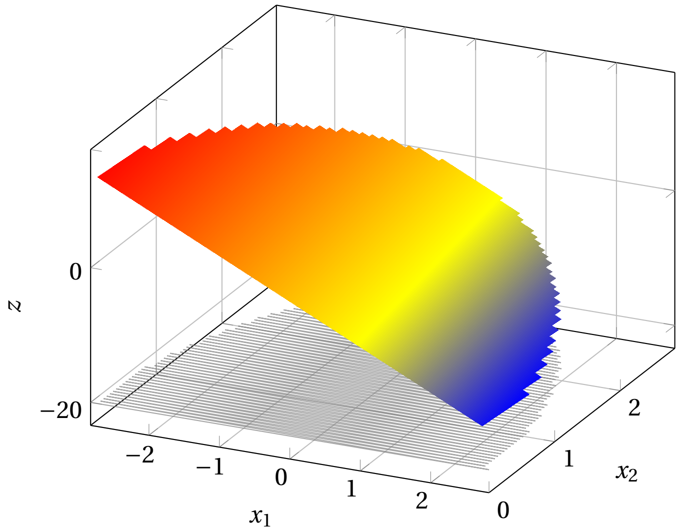
Represent the utopy point U in the space of the objectives.

A.2.24 Exercise 12 resolution

The domain is an semicircle with a radius of $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, the section in the positive ordinates.



(a) The objective function f_1



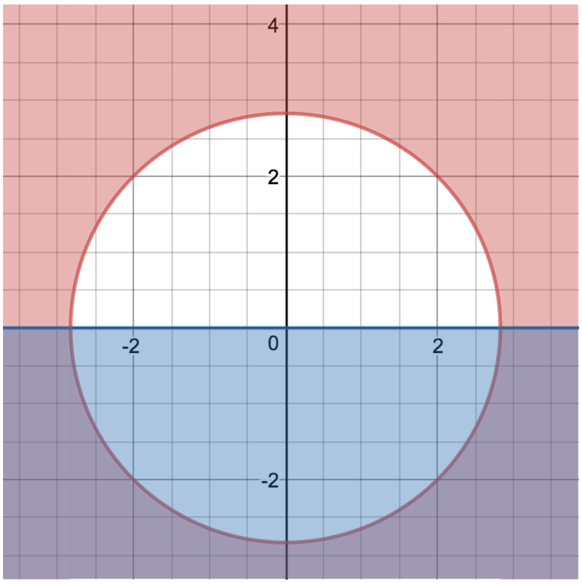
(b) The objective function f_2

The minima of the first objective function is identified geometrically, as the center of $\underline{\boldsymbol{x}} = (1,2)$, with a value of $f_1 = -17$.

The minima of the second objective function is identified via the maximum growth coefficient $\frac{1}{5}$:

$$
\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 8 \\ x_2 = \frac{x_1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + \frac{x_1^2}{25} = 8 \\ x_2 = \frac{x_1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{26x_1^2}{25} = 8 \\ x_2 = \frac{x_1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \frac{100}{\sqrt{13}} \\ x_2 = \frac{x_1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{\sqrt{13}} \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}
$$

The minima is $f_2^* = -\frac{52}{\sqrt{13}}$


4
2
-2
0
2
-2

A.2.25 Exercise 13

The following decision problem is given, with 3 alternatives and 4 attributes (utilities), having weights ω_i:

Attributes	A	B	C		Weights
u_1	0	100	80	ω_1	0.25
u_2	100	83	0	ω_2	0.30
u_3	70	20	100	ω_3	0.40
u_4	40	100	20	ω_4	0.05

Determine the best alternative with the method of the weighted sum.

Carry out a sensitivity analysis on the weight $\omega_2 = 0.30$.

A.2.26 Exercise 13 resolution

Weighted sum

Attributes	A	B	C
u^*	60	62.9	61

The method of the weighted sum suggests the alternative B.

Sensitivity analysis

The exercise require us to determine for which interval $\omega_2 \in [\omega_2 - \epsilon', \omega_2 + \epsilon'']$ the suggested alternative B does not change as optimal solution.

The weights are normalized, meaning that their sum is unitary:

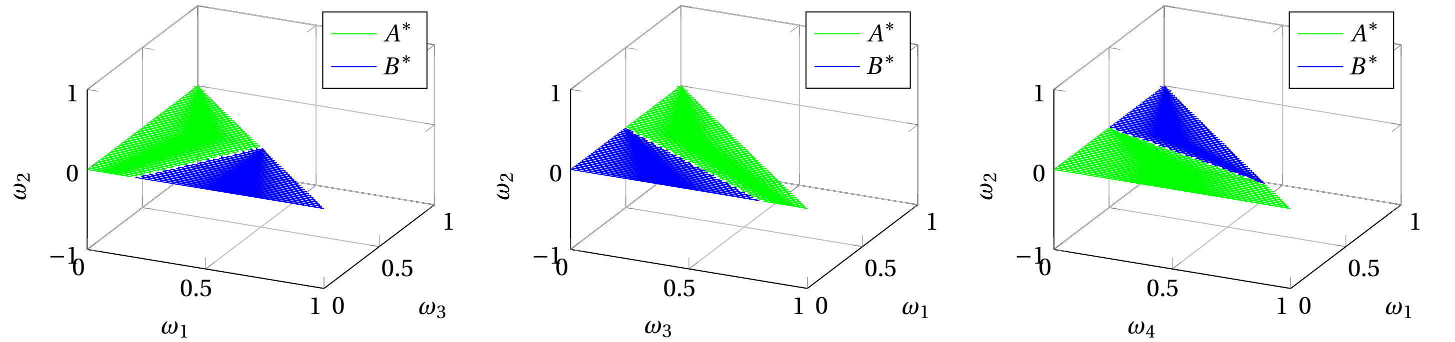
$$\sum \omega_i = 1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$$

The variation of a weight means the variation of at least another one.

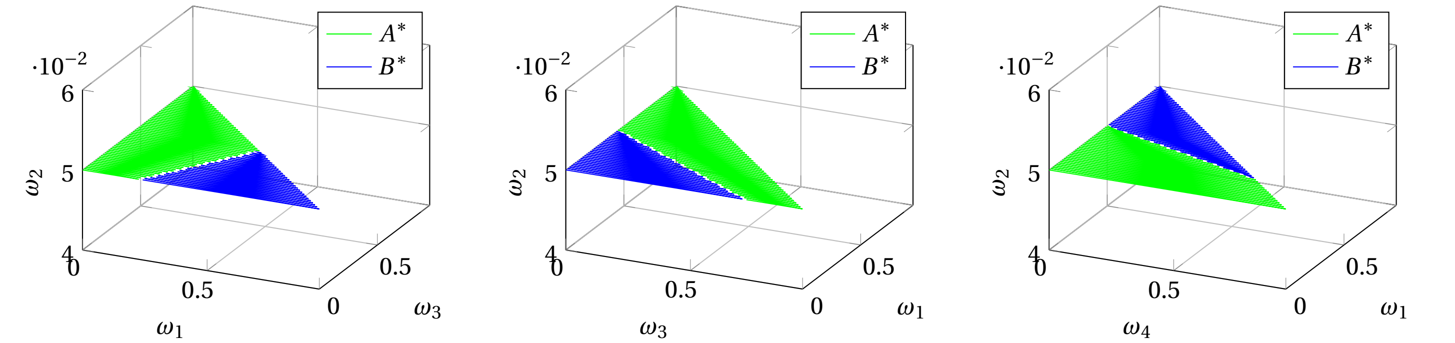
The value of ω_2 is our knob to analyze the variation of the other weighs.

The inequality to solve is the following, considering the weights known.

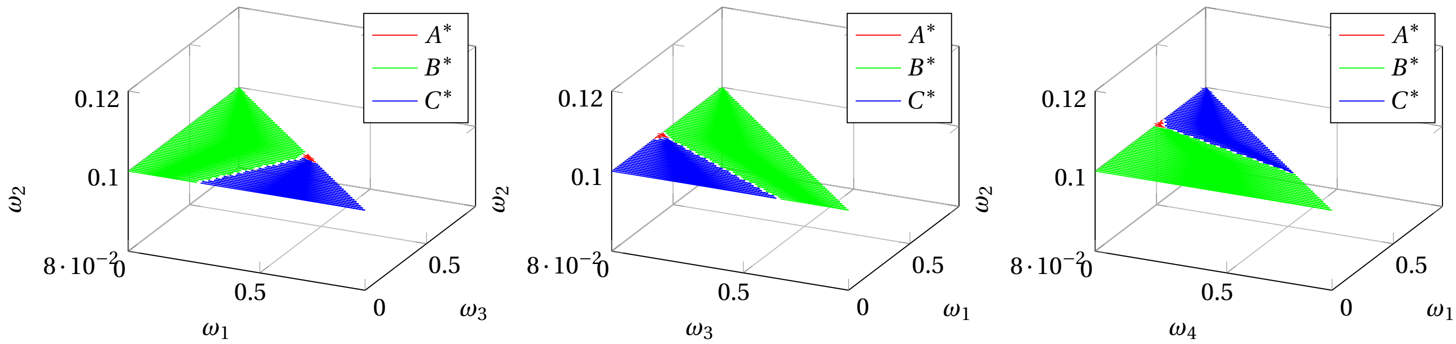
$$100\omega_1 + 83\omega_2 + 20\omega_3 + 100\omega_4 \geqslant \max\{100\omega_2 + 70\omega_3 + 40\omega_4, 80\omega_1 + 100\omega_3 + 20\omega_4\}$$



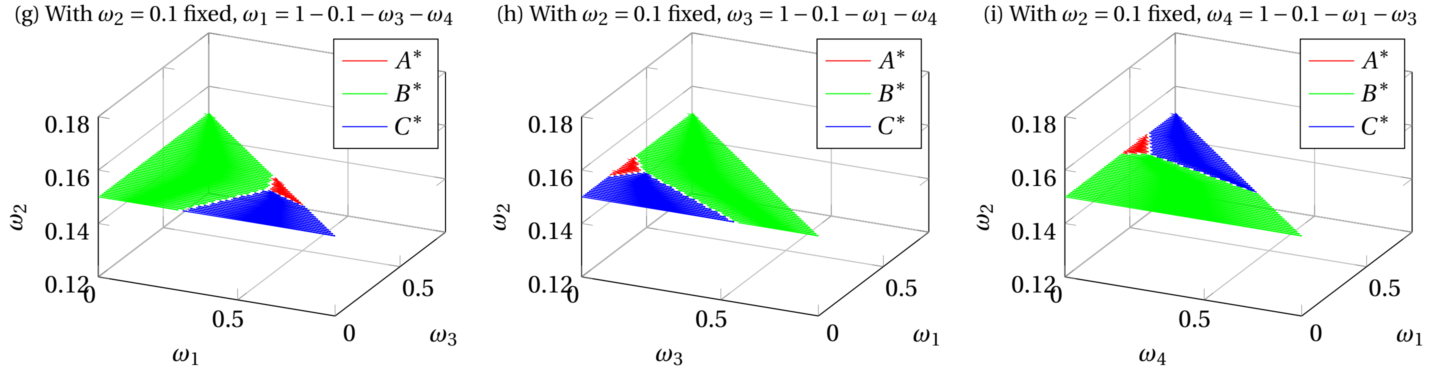
(a) With $\omega_2 = 0$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0 - \omega_3 - \omega_4$ (b) With $\omega_2 = 0$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0 - \omega_1 - \omega_4$ (c) With $\omega_2 = 0$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0 - \omega_1 - \omega_3$



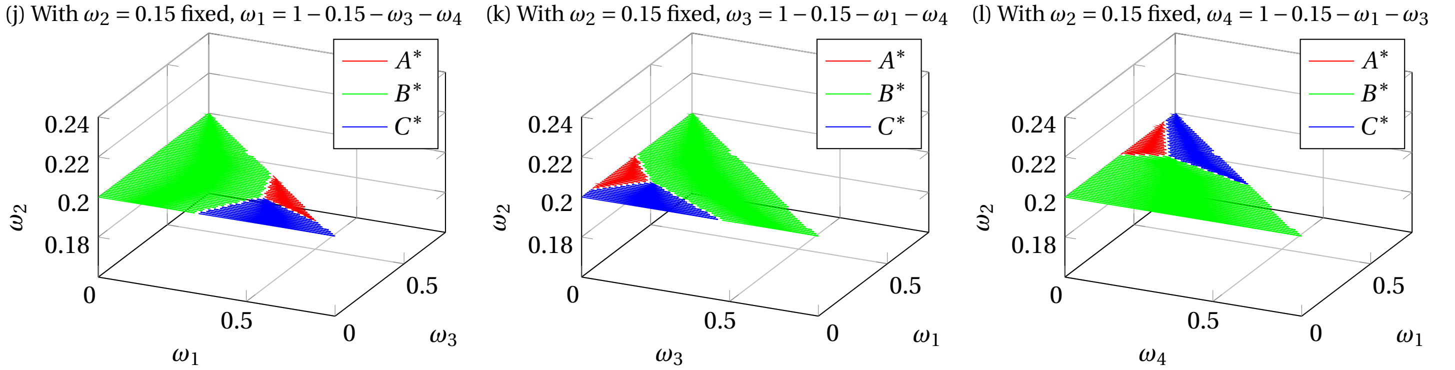
(d) With $\omega_2 = 0.05$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.05 - \omega_3 - \omega_4$ (e) With $\omega_2 = 0.05$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.05 - \omega_1 - \omega_4$ (f) With $\omega_2 = 0.05$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.05 - \omega_1 - \omega_3$



(g) With $\omega_2 = 0.1$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.1 - \omega_3 - \omega_4$ (h) With $\omega_2 = 0.1$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.1 - \omega_1 - \omega_4$ (i) With $\omega_2 = 0.1$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.1 - \omega_1 - \omega_3$

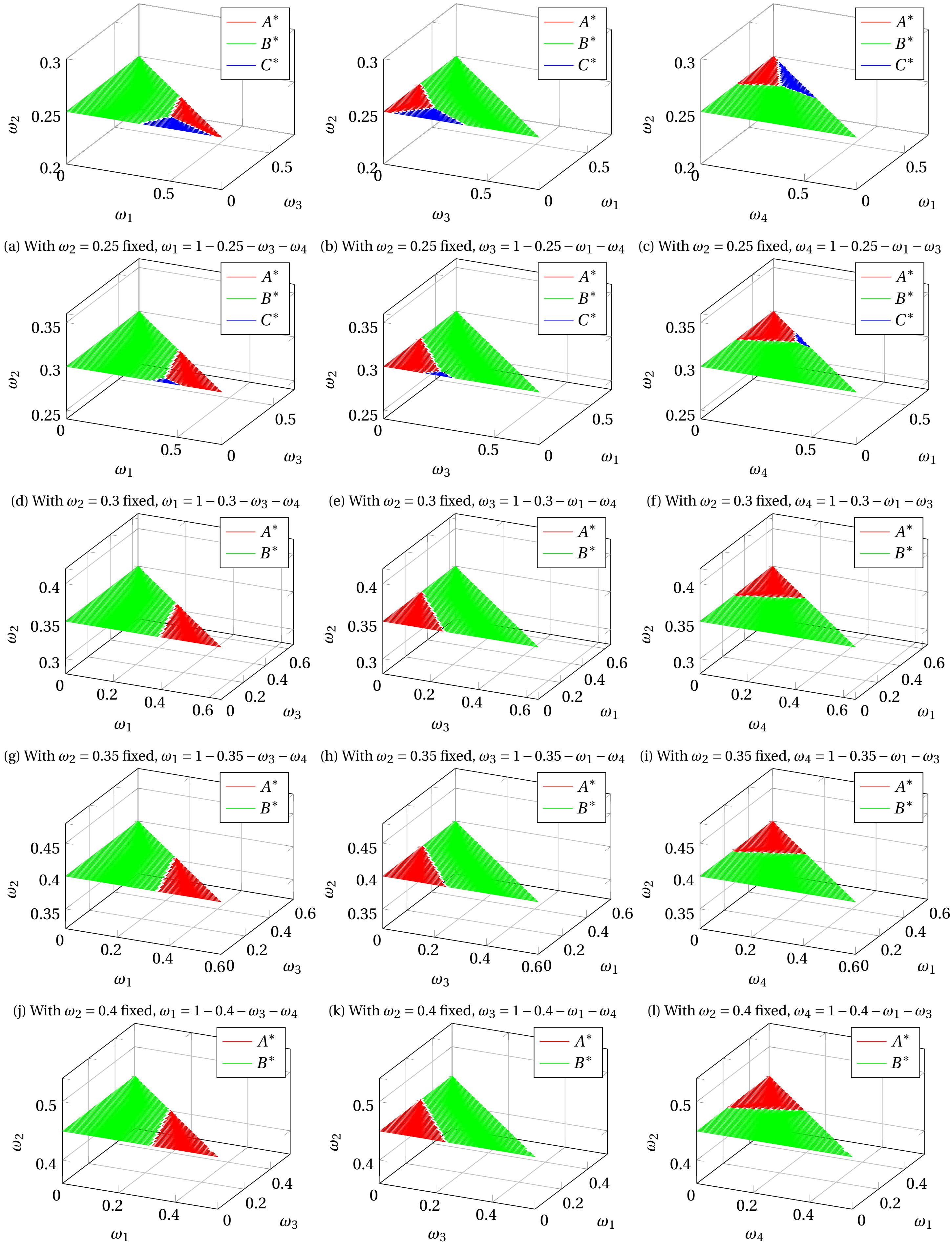


(j) With $\omega_2 = 0.15$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.15 - \omega_3 - \omega_4$ (k) With $\omega_2 = 0.15$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.15 - \omega_1 - \omega_4$ (l) With $\omega_2 = 0.15$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.15 - \omega_1 - \omega_3$



(m) With $\omega_2 = 0.2$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.2 - \omega_3 - \omega_4$ (n) With $\omega_2 = 0.2$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.2 - \omega_1 - \omega_4$ (o) With $\omega_2 = 0.2$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.2 - \omega_1 - \omega_3$

Figura A.15: The supports of solutions with $\omega_2 \in [0, 0.2]$



(a) With $\omega_2 = 0.25$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.25 - \omega_3 - \omega_4$ (b) With $\omega_2 = 0.25$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.25 - \omega_1 - \omega_4$ (c) With $\omega_2 = 0.25$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.25 - \omega_1 - \omega_3$

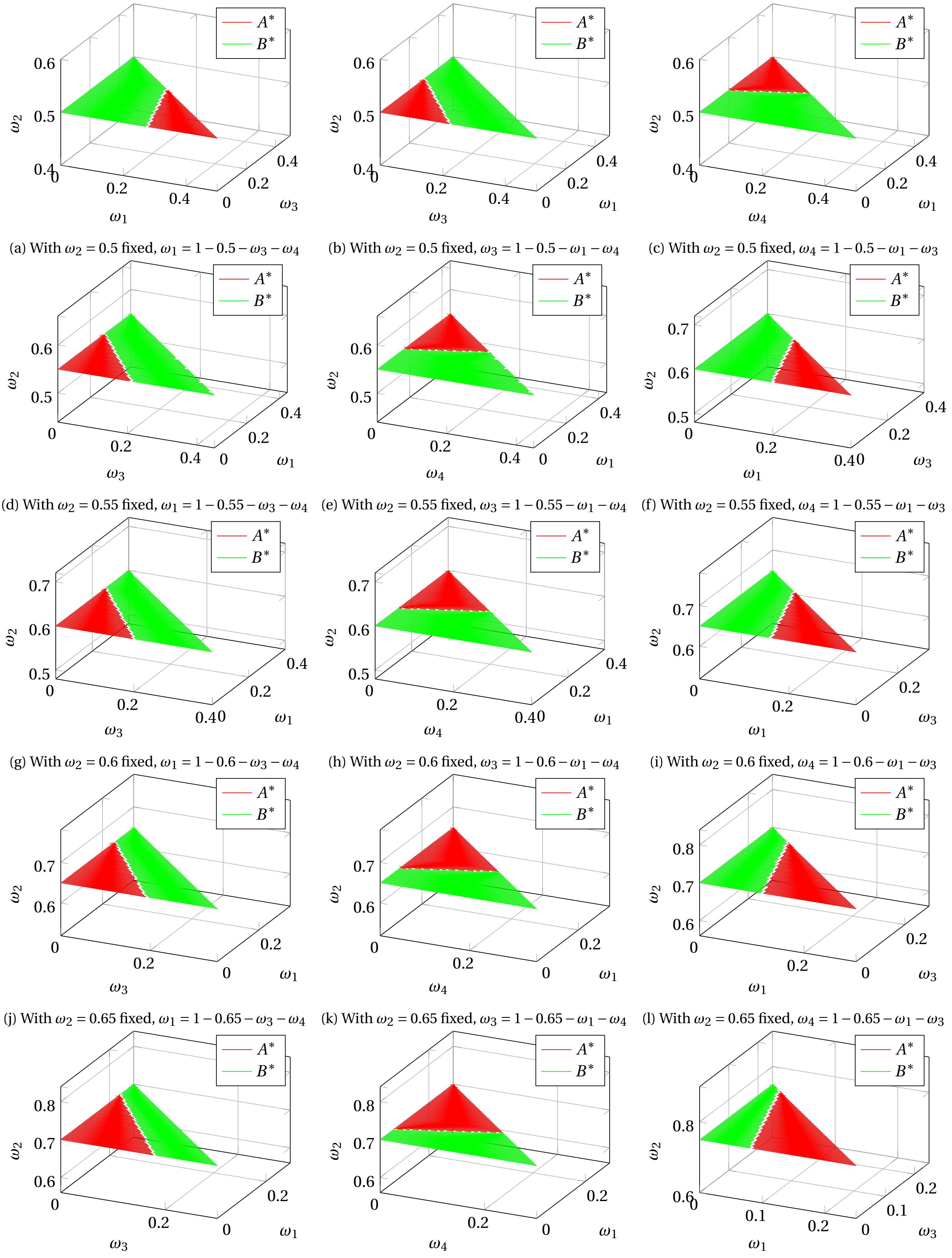
(d) With $\omega_2 = 0.3$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.3 - \omega_3 - \omega_4$ (e) With $\omega_2 = 0.3$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.3 - \omega_1 - \omega_4$ (f) With $\omega_2 = 0.3$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.3 - \omega_1 - \omega_3$

(g) With $\omega_2 = 0.35$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.35 - \omega_3 - \omega_4$ (h) With $\omega_2 = 0.35$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.35 - \omega_1 - \omega_4$ (i) With $\omega_2 = 0.35$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.35 - \omega_1 - \omega_3$

(j) With $\omega_2 = 0.4$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.4 - \omega_3 - \omega_4$ (k) With $\omega_2 = 0.4$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.4 - \omega_1 - \omega_4$ (l) With $\omega_2 = 0.4$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.4 - \omega_1 - \omega_3$

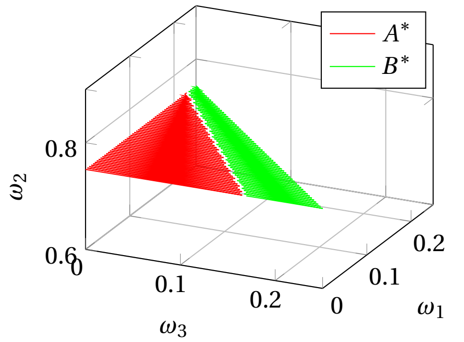
(m) With $\omega_2 = 0.45$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.45 - \omega_3 - \omega_4$ (n) With $\omega_2 = 0.45$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.45 - \omega_1 - \omega_4$ (o) With $\omega_2 = 0.45$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.45 - \omega_1 - \omega_3$

Figura A.16: The supports of solutions with $\omega_2 \in [0.25, 0.45]$

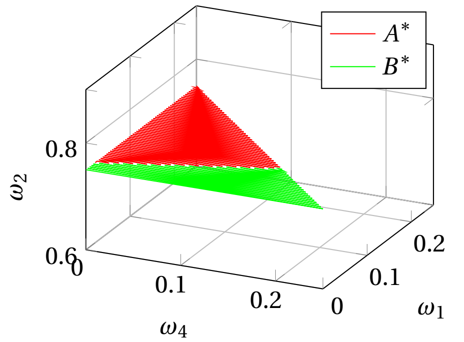


(a) With $\omega_2 = 0.5$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.5 - \omega_3 - \omega_4$
(b) With $\omega_2 = 0.5$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.5 - \omega_1 - \omega_4$
(c) With $\omega_2 = 0.5$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.5 - \omega_1 - \omega_3$
(d) With $\omega_2 = 0.55$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.55 - \omega_3 - \omega_4$
(e) With $\omega_2 = 0.55$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.55 - \omega_1 - \omega_4$
(f) With $\omega_2 = 0.55$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.55 - \omega_1 - \omega_3$
(g) With $\omega_2 = 0.6$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.6 - \omega_3 - \omega_4$
(h) With $\omega_2 = 0.6$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.6 - \omega_1 - \omega_4$
(i) With $\omega_2 = 0.6$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.6 - \omega_1 - \omega_3$
(j) With $\omega_2 = 0.65$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.65 - \omega_3 - \omega_4$
(k) With $\omega_2 = 0.65$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.65 - \omega_1 - \omega_4$
(l) With $\omega_2 = 0.65$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.65 - \omega_1 - \omega_3$
(m) With $\omega_2 = 0.7$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.7 - \omega_3 - \omega_4$
(n) With $\omega_2 = 0.7$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.7 - \omega_1 - \omega_4$
(o) With $\omega_2 = 0.7$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.7 - \omega_1 - \omega_3$

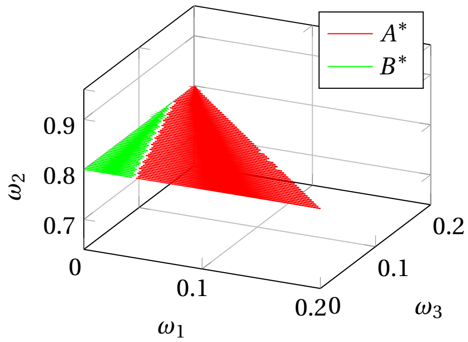
Figura A.17: The supports of solutions with $\omega_2 \in [0.5, 0.7]$



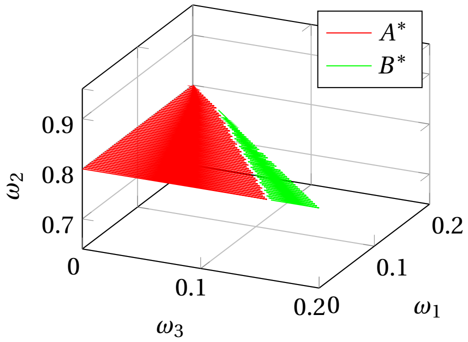
(a) With $\omega_2 = 0.75$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.75 - \omega_3 - \omega_4$



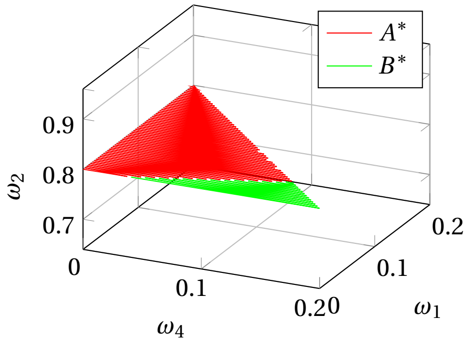
(b) With $\omega_2 = 0.75$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.75 - \omega_1 - \omega_4$



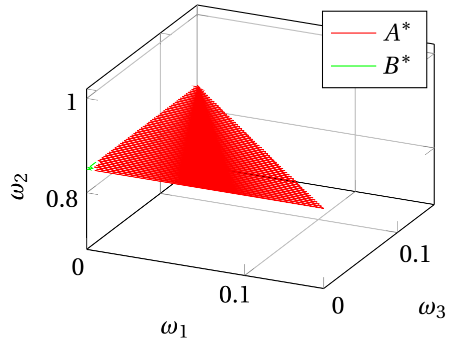
(c) With $\omega_2 = 0.75$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.75 - \omega_1 - \omega_3$



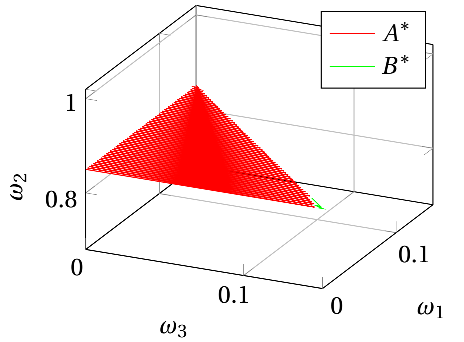
(d) With $\omega_2 = 0.8$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.8 - \omega_3 - \omega_4$



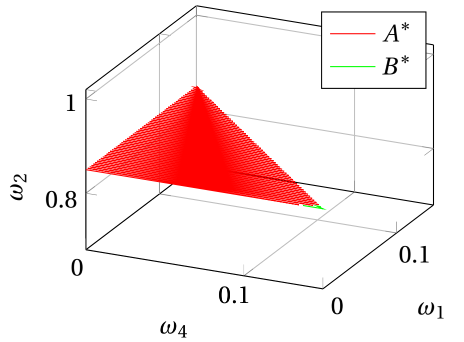
(e) With $\omega_2 = 0.8$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.8 - \omega_1 - \omega_4$



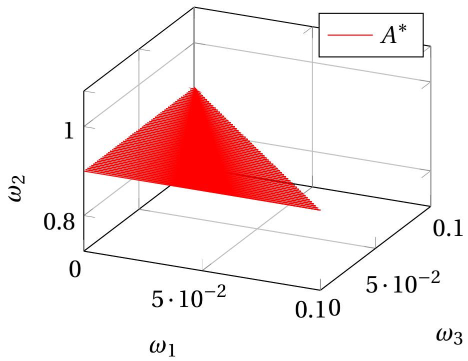
(f) With $\omega_2 = 0.8$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.8 - \omega_1 - \omega_3$



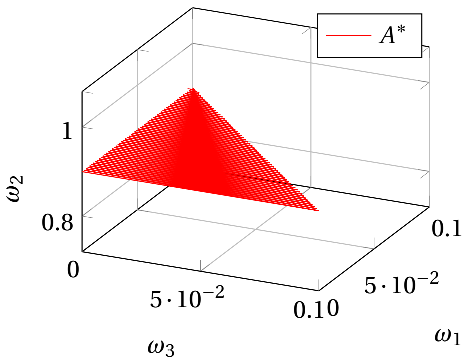
(g) With $\omega_2 = 0.85$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.85 - \omega_3 - \omega_4$



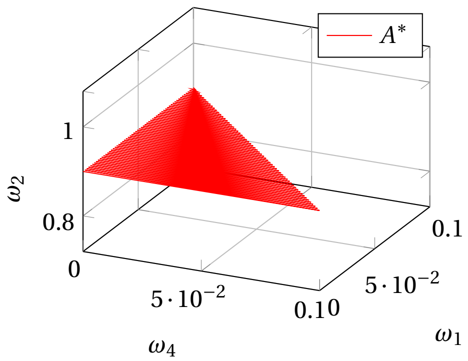
(h) With $\omega_2 = 0.85$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.85 - \omega_1 - \omega_4$



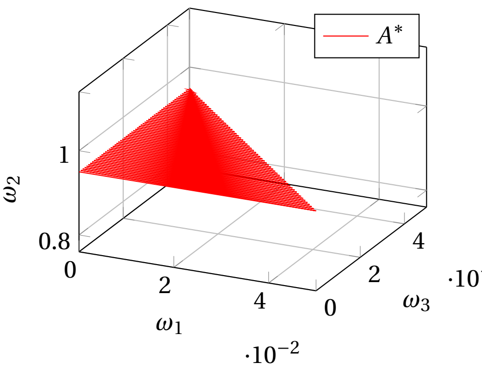
(i) With $\omega_2 = 0.85$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.85 - \omega_1 - \omega_3$



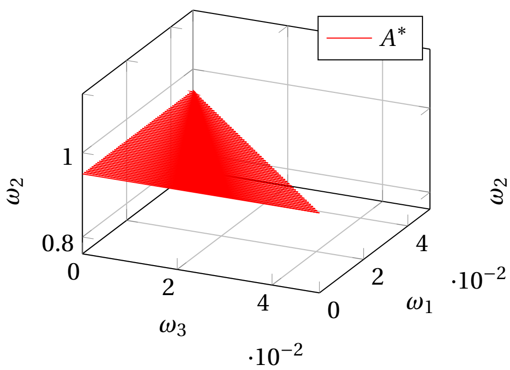
(j) With $\omega_2 = 0.9$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.9 - \omega_3 - \omega_4$



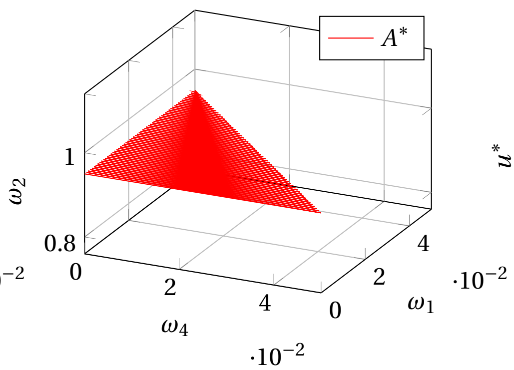
(k) With $\omega_2 = 0.9$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.9 - \omega_1 - \omega_4$



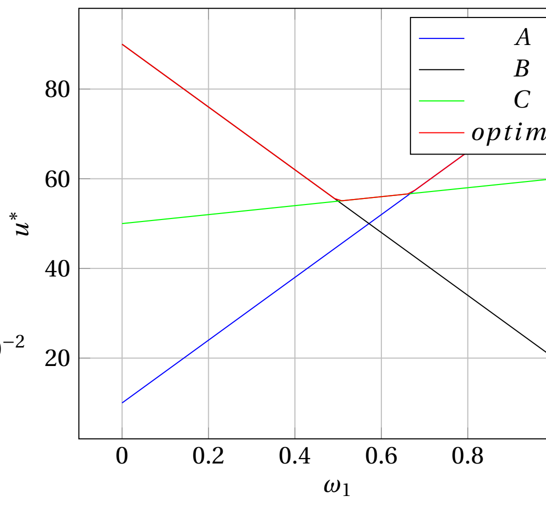
(l) With $\omega_2 = 0.9$ fixed, $\omega_4 = 1 - 0.9 - \omega_1 - \omega_3$



(m) With $\omega_2 = 0.95$ fixed, $\omega_1 = 1 - 0.95 - \omega_3 - \omega_4$



(n) With $\omega_2 = 0.95$ fixed, $\omega_3 = 1 - 0.95 - \omega_1 - \omega_4$



The range for which the alternative B is optimal ω_2 is obtainable using the intersection of the regions. When a green area exists in the intersection, B is still optimal for some values of the weights.

A.2.27 Exercise 14

The following problem is given:

$$\begin{aligned} \min f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \\ \min f_2(x) = -x_2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 \leqslant 8 \\ x_1 - 2x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

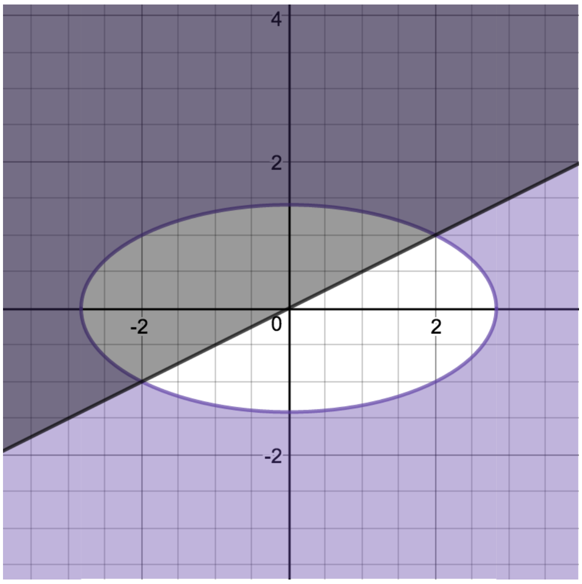
Identify the utopy point and determine the preferable solution between $A' = (-1, 0)$, $B' = (-3/4, -1/2)$ and $C' = (1, -1)$ using the Manhattan distance.

A.2.28 Resolution exercise 14

The minima for the first function is the center, $\underline{\boldsymbol{x}} = (1, 0)$, $f_1 = -1$.

The minima for the second objective function is $\underline{\boldsymbol{x}} = (2, 1)$, $f_2 = -1$.

The minimum distance via the Manhattan distance is B.



A.2.29 Exercise 15

The following decision problem is given, with 3 alternatives and 2 attributes (utilities), having weights ω:

Attributes	A	B	C		Weights
u_1	80	20	60	ω_1	0.7
u_2	10	90	50	ω_2	0.3

Determine the best alternative with the method of the weighted sum.

Carry out a sensitivity analysis on the weight ω_1.

A.2.30 Exercise 15 resolution

Weighted sum

Attributes	A	B	C
u^*	59	41	57

The method of the weighted sum suggests A as the optimal solution.

Sensitivity analysis

Using ω_1 as our knob, we define ω_2 as $\omega_2 = 1 - \omega_1$.

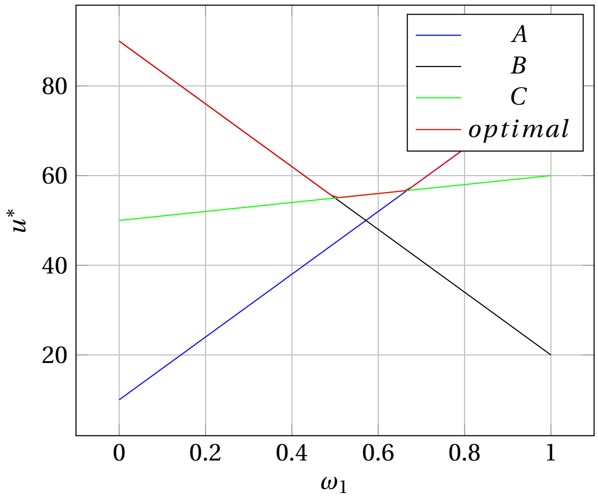


Figura A.19: The solution A remains optimal for $\omega_1 \geqslant \frac{2}{3} = 0.6\overline{6}$

B

Temi d'esame risolti

In linea di principio, gli 8 esercizi dell'esame valgono 4 punti l'uno e sono abbastanza chiaramente scanditi in sottoesercizi da 0.5, 1, 1.5, a volte 2 punti.

B.1 Tema d'esame - 10 Febbraio 2016

B.1.1 Esercizio 1

Dato un problema decisionale con insieme di impatti $F = \{a, b, c, d, e, f\}$ e relazione di preferenza Π:

$$\Pi = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, d), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e), (f, b), (f, c), (f, d), (f, f)\}$$

1. Si spieghi il significato della relazione per il problema decisionale.
2. Si elenchino le proprietà principali di cui Π gode.
3. Si derivi la relazione di indifferenza associata Ind_{Π}.
4. Si dica se la relazione è un ordine di qualche genere e quali conseguenze questo ha sul problema decisionale.

B.1.2 Soluzione esercizio 1

1. La relazione Π è binaria, cioè specifica coppie di impatti $(f_1, f_2) : f_1 \preceq f_2$.

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	0	0
b	0	1	1	1	0	0
c	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	1	1	1	1	0
f	0	0	1	1	0	1

Tabella B.1: Rappresentazione a tabella di Π

2. La relazione Π gode della proprietà **riflessiva** (la diagonale principale della matrice è composta da soli 1, evidenziati in verde).

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	0	0
b	0	1	1	1	0	0
c	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	1	1	1	1	0
f	0	0	1	1	0	1

Tabella B.2: Rappresentazione a tabella di Π, con Ind_Π evidenziata.

3. La **relazione di indifferenza** Ind_Π è composta dalle coppie indifferenti, cioè che il decisore accetta di scambiare in entrambe le direzioni (nella tabella evidenziate in rosso).

$$\Pi = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c),(c,b),(d,d),(e,e),(f,f)\}$$

4. Tutte le tipologie di ordine richiedono la proprietà **transitiva**, che nella relazione Π non è rispettata:

$$a \preceq b, b \preceq e \not\Rightarrow a \preceq e$$

Di conseguenza non è possibile definire una funzione valore, perchè questa richiede almeno un ordine debole come condizione necessaria.

B.1.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_2^2 + x_1 - 4x_2 \\ g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 \leqslant 0 \\ g_2(x) &= x_2 - 2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

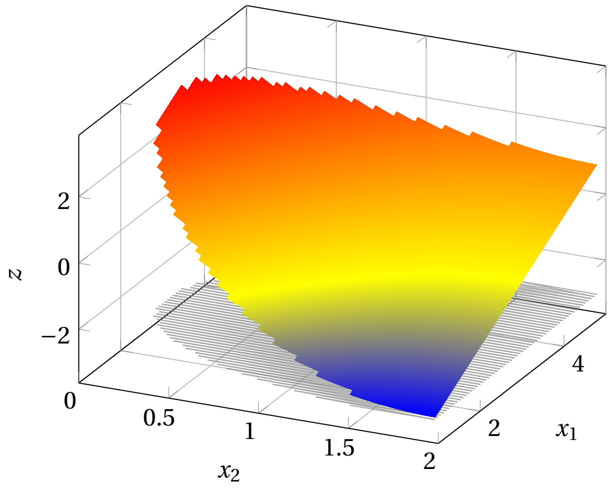
a) Si rappresenti il problema graficamente.

b) Si scrivano le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker.

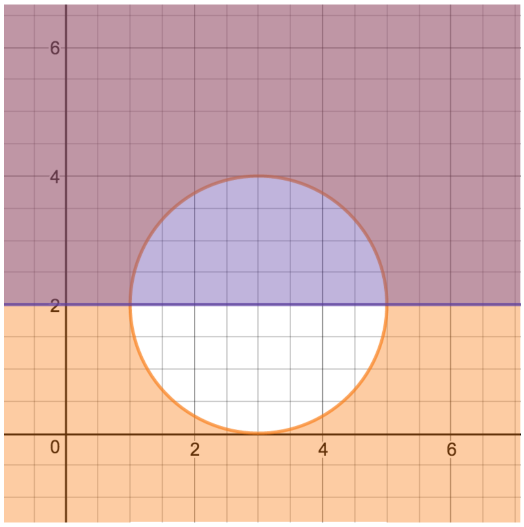
c) Si determinino i punti candidati, e in particolare quello/i di minimo.

B.1.4 Soluzione esercizio 2

a) La funzione nel suo dominio di definizione è la seguente:



(a) La funzione $f(x)$



(b) Dominio della funzione $f(x)$

Figura B.1: La funzione nel suo dominio di definizione

b) Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono le seguenti:

Teorema B.1.1 (Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker). Sia f una funzione, h_i con $i \in \{1, \ldots, s\}$ dei vincoli bilateri e g_j con $j \in \{1, \ldots, m\}$ dei vincoli monolateri e sia l'insieme X definito come:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leqslant 0, h_i(x) = 0 \quad \forall i, j\} \quad \text{e} \quad f, g_j, h_i \in C^1(X) \quad \forall i, j$$

Se x^* è un punto regolare in X e un punto di minimo locale per $f \in X$, allora esistono s moltiplicatori $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e m $\mu_j \geqslant 0$ tali che:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

c) Calcolo dei punti candidati.

Calcolo dei punti non regolari I punti regolari sono quei punti nei quali i gradienti dei vincoli attivi sono fra loro linearmente indipendenti. Punti interni alle regioni di ammissibilità sono tutti regolari. Vanno investigati i punti che annullano il gradiente.

Calcolo quindi i gradienti dei due vincoli, $\nabla g_1(x)$ e $\nabla g_2(x)$:

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 6 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il primo gradiente si annulla per $P = (x_1 = 3, x_2 = 2)$, che è posto dove si attiva il vincolo g_2 ma non g_1 ed il secondo gradiente non si annulla mai (menchemeno in P) per cui P è considerato regolare.

Identifichiamo ora i punti di intersezione dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

I punti identificati quindi sono $A = (1,2)$ e $B = (5,2)$.

Verifichiamo che i gradienti siano linearmente indipendenti tramite il metodo della matrice: se per uno di essi fossero dipendenti (cioè la matrice ha determinante 0) allora A non sarebbe regolare e le condizioni KKT perderebbero di validità.

$$\det M_g(A) = \det \begin{bmatrix} \nabla g_1(A) & \nabla g_2(A) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\det M_g(B) = \det \begin{bmatrix} \nabla g_1(B) & \nabla g_2(B) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

I gradienti sono linearmente indipendenti sia in A che in B, che essendo regolari non sono punti candidati.

Calcolo della lagrangiana generalizzata La formula della lagrangiana generalizzata (figura B.2) assomiglia molto alle condizioni KKT ma si applica sulle primitive (non i gradienti).

$$l(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x)$$

Figura B.2: Formula della lagrangiana generalizzata

$$\begin{aligned} l(x) &= f(x) + \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) \\ &= x_2^2 + x_1 - 4x_2 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9) + \mu_2(x_2 - 2) \end{aligned}$$

Costruisco il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1(2x_1 - 6) \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9) = 0 \\ \mu_2(x_2 - 2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 \leqslant 0 \\ x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_2(x_2 - 2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leqslant 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Notiamo che μ_1 deve essere strettamente maggiore di 0, altrimenti la prima equazione $\mu_1(2x_1 - 6) = -1$ non sarebbe rispettata. Se $\mu_1 > 0$, allora $g_1 = 0$.

Impostiamo un albero di ricerca dicotomico per risolvere il sistema, dividendo tra:

$$\mu_j = 0 \land g_j \leqslant 0 \quad \lor \quad \mu_j > 0 \land g_j = 0 \qquad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Iniziamo scegliendo il vincolo più semplice, nel nostro caso g_2:

Caso in cui $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leqslant 0$:

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2-4) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leqslant 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ \mu_1 = -1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leqslant 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases}$$

Ponendo $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leqslant 0$ si ottiene che $\mu_1 = -1 \wedge \mu_1 > 0$, per cui il sistema è impossibile. Se restringiamo il caso in analisi a $\mu_2 = 0 \wedge g_2 = 0$ è possibile rispettare il vincolo $\mu_1 > 0$ proseguendo così:

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ 0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ x_1^2 - 6x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -\frac{1}{2x_1-6} \\ x_1 = 3 \pm \sqrt{9+5} = 3 \pm \sqrt{4} \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases}$$

Solamente $x_1 = 1$ è accettabile poiché $\mu_1 > 0$:

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{1}{2-6} = \frac{1}{4} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ne otteniamo quindi il punto candidato coincidente con $A = (1,2)$, con $\underline{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Caso in cui $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$:

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2-4) + \mu_2 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ 4 - 4 + \mu_1(4-4) + 2\mu_2 = 0 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1-6) = -1 \\ \mu_2 = 0 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases}$$

Ponendo $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$ si ottiene che $\mu_2 = 0 \wedge \mu_2 > 0$, per cui il sistema è impossibile. Ne segue che il caso in analisi è impossibile.

Calcolo del valore dei punti candidati Sostituisco i punti candidati nella funzione da minimizzare ed ottengo:

$$\begin{cases} f(A) = f(1,2) = 4 + 1 - 8 = -3 \end{cases}$$

Il punto di ottimo locale (minimo) risulta essere $A = (1,2)$.

B.1.5 Esercizio 3

Riferendosi ai problemi di programmazione a molti obiettivi:

a) Si definisca il concetto di soluzione paretiana.

b) Si elenchino i principali metodi per determinare le soluzioni paretiane.

c) Si descriva brevemente il metodo dei pesi, specificandone vantaggi e svantaggi.

B.1.6 Soluzione esercizio 3

Definizione di soluzione paretiana

Definizione B.1.2 (Soluzione paretiana). Si dice soluzione paretiana qualsiasi soluzione ammissibile $x^o \in X$ tale che nessun'altra soluzione x' la domina.

$$\forall x \in X, l \in \{1, \dots, p\} : f_l(x') > f_l(x^o) \vee f(x') = f(x^o)$$

Le soluzioni paretiane non coincidono con gli ottimo globali poiché non sono necessariamente indifferenti tra loro e non sono preferibili a tutte le altre, proprietà che invece valgono per i punti di ottimo globale.

Metodi per determinare soluzioni paretiane

I metodi sono 5:

Applicazione della definizione Vale **caso finito** è possibile risolvere costruendo il grafo di dominanza fra soluzioni.

Condizioni KKT Vale nel **caso continuo**. Le condizioni KKT (aggiungendo le opportune condizioni di normalizzazione per i pesi) producono una sovrastima di X^o.

Metodo della trasformazione inversa Utilizzabile se ci sono solo due indicatori ($f \in \mathbb{R}^2$), dato che si procede graficamente identificando gli impatti ottimi F^o e quindi tramite l'inversa della funzione f, $\phi : F \to X$ si calcola la regione paretiana X^o.

Metodo dei pesi Vale sempre e consiste nel costruire una combinazione convessa degli indicatori di un impatto e di andare a minimizzare le combinazioni. Produce una sottostima di X^o.

Metodo dei vincoli Preso uno o più indicatori f_l, li si rende disequazioni vincolate da un coefficiente ϵ_l (detto standard), che quindi si identifica via KKT o metodo grafo. Produce una sovrastima di X^o

Il metodo dei pesi

Come si procede Si sceglie uno o più impatti e si costruisce la combinazione convessa dei suoi indicatori, quindi minimizzare la sommatoria ottenuta.

Vantaggi

1. Il metodo dei pesi è sempre applicabile.
2. Non altera la regione ammissibile ma si limita ad aggiungere un obbiettivo ausiliario.

Svantaggi

1. Con problemi di grandi dimensioni il numero di pesi può diventare intrattabile.
2. Per ogni peso ω è necessario trovare tutte le soluzioni ottime.
3. Produce una sottostima di X^o.

B.1.7 Esercizio 4

Si descrivano brevemente i seguenti aspetti dei metodi Electre:

a) Le critiche di fondo alla teoria classica che motivano la loro proposta.

b) Come si definisce una relazione di surclassamento e in che cosa differisce da una relazione di preferenza.

c) Come si determina il nucleo del problema (facendo un piccolo esempio).

B.1.8 Soluzione esercizio 4

Le critiche alla teoria clasica

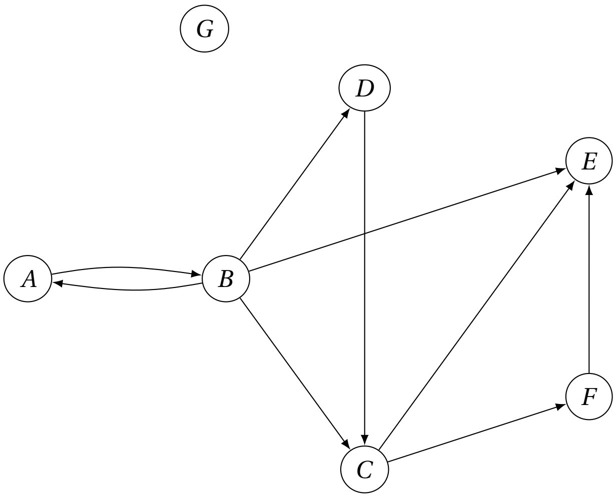
La critica nasce dall'ipotesi che il decisore non sia in grado di confrontare tutte le coppie di impatti e che esistano soluzioni (quali quelle trattate nel paradosso del caffè) in cui gli impatto sono, a coppie, indistinguibili se non per un ϵ infinitesimo che il decisore non è in grado di cogliere.

La relazione di surclassamento

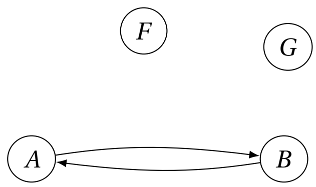
Un impatto $f^{(1)}$ surclassa un secondo impatto $f^{(2)}$ non unicamente quando è migliore su tutti gli attributi come nel caso della **relazione di preferenza** ma anche quando esso è peggiore per alcuni attributi purchè meno di una certa soglia ϵ.

Determinazione del nucleo del problema

1. Il nucleo è inizialmente vuoto.
2. Si aggiunge al nucleo il sottoinsieme delle soluzioni non surclassate nel grafo corrente.
3. Si elimina dal grafo ogni soluzione surclassafata da una soluzione nel nucleo.
4. Se il grafo coincide con il nucleo si termina, altrimenti si ritorna al punto 2.



(a) Gli impatti G, A e B vanno a fare parte del nucleo.



(b) Viene eliminato D, C ed E. Rimane F, che viene aggiunto al nucleo.

B.1.9 Esercizio 5

Dato un problema di decisione con alternative $X = \{a_1, \ldots, a_5\}$, scenari $\Omega = \omega_1, \omega_2$ e le utilità $u(f(x,\omega))$ riportate nella tabella seguente:

$u(f(x,\omega))$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
ω_1	70	90	40	50	20
ω_2	20	10	30	40	80

a) Si elenchino le eventuali alternative dominate, specificando da quali altre alternative sono dominate.

b) Si indichi l'alternativa scelta con il criterio del caso pessimo, spiegando il procedimento.

c) Si indichi l'alternativa scelta con il criterio del rammarico, spiegando il procedimento.

d) Si mostri come cambia l'alternativa scelta con il criterio di Hurwicz al variare del coefficiente di pessimismo α.

B.1.10 Soluzione esercizio 5

Alternative dominate

L'alternativa $a_4 \prec a_3$ poiché in entrambi gli scenari le utilità previste sono maggiori. Nei casi alternativi le utilità previste per i due scenari si superano mutualmente, per cui non è possibile identificare nessuna ulteriore coppia di scelte dominata.

Criterio del caso pessimo

Per ogni scelta identifico lo scenario peggiore, quindi tra questi scelgo il migliore. La scelta identificata in questo caso è a_4.

$u(f(x,\omega))$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
ω_1	70	90	40	50	20
ω_2	20	10	30	40	80

Tabella B.3: In rosso i casi pessimi

Criterio del rammarico

Vado a calcolare per ogni scelta, per ogni scenario, la distanza dal caso ottimo (detta rammarico). Identifico quindi la distanza massima per ogni scelta e scelgo l'opzione che la minimizza.

$u(f(x,\omega))$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
ω_1	70	90	40	50	20
ω_2	20	10	30	40	80

(a) In verde i casi ottimi

$u(f(x,\omega))$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
ω_1	20	0	50	40	70
ω_2	60	70	50	40	0
u_S	60	70	50	40	70

(b) Utilità del criterio del rammarico

La scelta che minimizza il rammarico è la a_4.

Criterio di Hurwicz

Il criterio di Hurwicz procede scegliendo per ogni scelta lo scenario con utilità pessima e quello con utilità ottima, quindi per ogni coppia costruire una combinazione convessa al variare del parametro α che viene chiamato **coefficiente di pessimismo**:

$$u_H(a_i) = u_i^*(1-\alpha) + u_i^\dagger \alpha$$

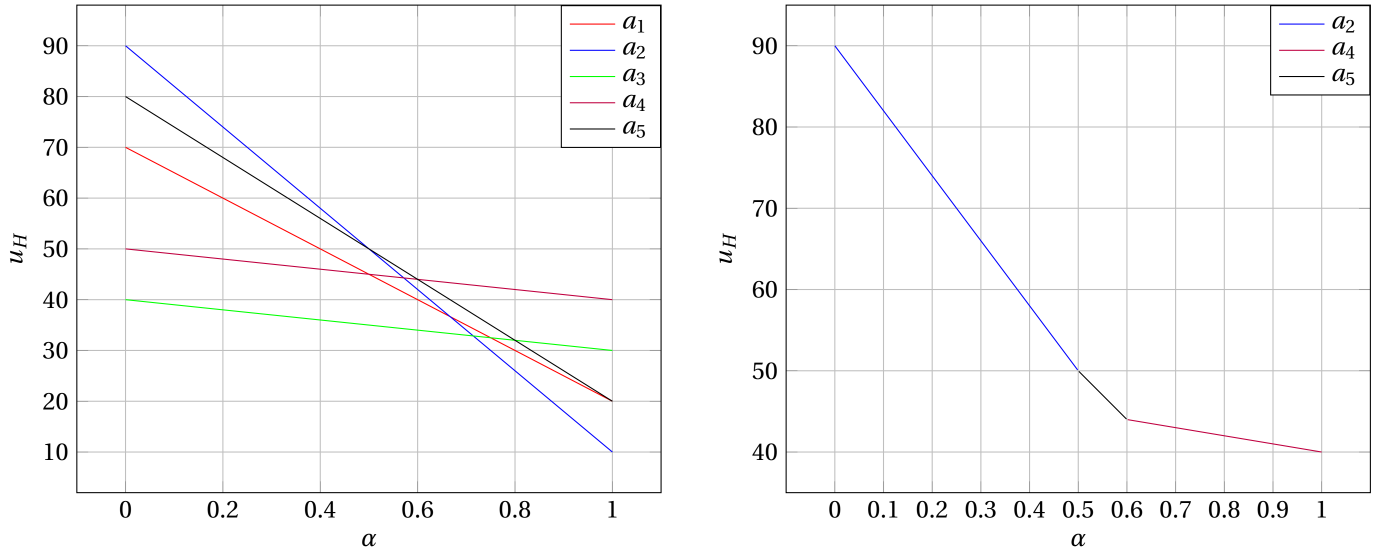
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u_H	$70(1-\alpha)+20\alpha$	$90(1-\alpha)+10\alpha$	$40(1-\alpha)+30\alpha$	$50(1-\alpha)+40\alpha$	$80(1-\alpha)+20\alpha$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u_H	70	90	40	50	80

(a) Caso $\alpha = 0$: viene scelta a_2 e il metodo coincide con il criterio del caso ottimo

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u_H	20	10	30	40	20

(b) Caso $\alpha = 1$: scelta a_4 e il metodo coincide con il criterio del caso pessimo



L'utilità u_H al variare del coefficiente di pessimismo α

Per $\alpha < 0.5$ prevale sempre a_2, per $0.5 < \alpha < 0.6$ prevale a_5 e per $\alpha > 0.6$ prevale a_5.

B.1.11 Esercizio 6

Riferendosi ai problemi di programmazione in condizioni di rischio:

a) Si descriva il procedimento di scelta con il criterio del valore atteso.

b) Si definisca il concetto di lotteria secondo la teoria di Von Neumann e Morgenstern.

c) Si definisca il concetto di profilo di rischio di un decisore e si spieghi perché esso rivela l'atteggiamento del decisore nei confronti del rischio insito in una decisione.

B.1.12 Soluzione esercizio 6

Criterio del valore atteso

Per ogni scelta, si sommano le utilità di ogni scenario per quella scelta moltiplicate con la probabilità dello scenario, quindi si sceglie la scelta che garantisce utilità ottima.

Lotteria

Una lotteria (finita) è una coppia di funzioni $l_{f,\pi} = (f(\omega), \pi(\omega))$ che associa ad ogni payoff $f(\omega)$ (una variabile aleatoria) una determinata probabilità $\pi(\omega)$.

Profilo di rischio

Si tratta dell'andamento dell'utilità legata alle lotterie degeneri $u(f, 1)$:

Utilità concava Il decisore preferisce l'impatto certo: è avverso al rischio.

Utilità lineare Il decisore è indifferente: è neutrale al rischio.

Utilità convessa Il decisore preferisce la lotteria: è propenso al rischio.

B.1.13 Esercizio 7

Dato il seguente gioco a due persone:

	A	B
A	$(0,5)$	$(-1,3)$
B	$(0,0)$	$(-1,3)$

1. Determinare se vi siano strategie dominate.
2. Determinare gli eventuali punti di equilibrio (o dimostrare che non ve ne sono).
3. Applicare il criterio del caso pessimo al gioco in forma estesa, assumendo che i due giocatori non muovano simultaneamente, ma muova prima G_r e poi G_c.
4. Applicare il criterio del caso pessimo al gioco in forma estesa, assumendo che i due giocatori non muovano simultaneamente, ma muova prima G_c e poi G_r.

B.1.14 Soluzione esercizio 7

Strategie dominate

Non esistono strategie dominate.

Punti di equilibrio

L'unico punto di equilibrio è per la strategia (A, A).

	A	B
A	$(\tilde{0},\tilde{5})$	$(-1,\tilde{3})$
B	$(\tilde{0},0)$	$(-1,\tilde{3})$

Criterio del caso pessimo

Nel criterio del caso pessimo un giocatore assume che l'altro cercherà di danneggiarlo il più possibile.

Prima G_r, poi G_c Per G_r scegliere A o B non porta ad payoff differenti: il controllo sull'esito infatti lo ha G_c.

	A	B
A	$(0,5)$	$(-1,3)$
B	$(0,0)$	$(-1,3)$

(a) Turno 1: G_r sceglie A

	A	B
A	$(0,5)$	$(-1,3)$
B	$(0,0)$	$(-1,3)$

(b) Turno 2: G_c sceglie B per garantire massima perdita

	A	B
A	$(0,5)$	$(-1,3)$
B	$(0,0)$	$(-1,3)$

(c) Turno 1: G_r sceglie B

	A	B
A	$(0,5)$	$(-1,3)$
B	$(0,0)$	$(-1,3)$

(d) Turno 2: G_c sceglie B per garantire massima perdita

Prima G_c, poi G_r G_c sceglierà B, poichè, nel caso pessimo, G_r può scegliere B e imporgli un payoff pari a 0, mentre scegliendo B il payoff sarà sempre 3.

	A	B
A	$(0,5)$	$(-1,3)$
B	$(0,0)$	$(-1,3)$

(a) Turno 1: G_c sceglie B

	A	B
A	$(0,5)$	$(-1,3)$
B	$(0,0)$	$(-1,3)$

(b) Turno 2: G_r può scegliere sia A che B (nella figura sceglie B), senza alterare la massima perdita che può imporre a G_c

B.1.15 Esercizio 8

Considerando il metodo di Condorcet per le decisioni di gruppo:

a) Si descriva il metodo stesso.

b) Se ne indichi il difetto principale, fornendo un esempio.

c) Si fornisca un esempio (non banale) nel quale il metodo produce una preferenza di gruppo che sia un ordine debole.

B.1.16 Soluzione esercizio 8

Il metodo di Condorcet

Nel metodo di Condorcet, una scelta x_1 domina una seconda x_2 quando il numero di decisori per cui $x_1 \preceq x_2$ è maggiore del numero di decisori per cui $x_2 \preceq x_1$. Questo, generalmente, consente di creare un ordine debole dal quale trarre la decisione di gruppo.

Il difetto del metodo di Condorcet

Nel caso di preferenze circolari il metodo di Condorcet non è in grado di realizzare un ordine debole.

$Ordine$	d_1	d_2	d_3	d_4
1	a	b	c	d
2	b	c	d	c
3	c	d	a	a
4	d	a	b	b

Tabella B.4: Preferenze circolari: caso in cui Condorcet fallisce

Esempio del metodo di Condorcet

$Ordine$	d_1	d_2	d_3
1	a	b	c
2	b	c	b
3	c	d	a
4	d	a	d

(a) Tabella delle preferenze per decisore

	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	1	1	1
c	1	0	1	1
d	0	0	0	1

(b) Tabella delle preferenze di gruppo

$Ordine$	$Scelta$
1	b
2	c
3	a
4	d

(c) Ordine debole secondo Condorcet

Figura B.9: Esempio del metodo di Condorcet

B.2 Tema d'esame - 22 Marzo 2016

B.2.1 Esercizio 1

Si introduca formalmente un problema di decisione complesso $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$, descrivendo brevemente il significato dei suoi elementi.

Si descriva brevemente la distinzione tra modelli prescrittivi e modelli descrittivi e si indichino i ruoli che essi possono svolgere in un processo decisionale complesso.

B.2.2 Soluzione esercizio 1

Un problema di decisione complesso viene descritto dalla sestupla $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$:

X L'insieme delle **soluzioni possibili**.

Ω L'insieme degli **scenari o esiti possibili**.

F L'insieme degli **impatti possibili**.

$f(x, \omega) : X \times \Omega \to F$ La **funzione impatto**.

D L'insieme dei **decisori**.

$\Pi(d) : D \to 2^{F \times F}$ La **relazione di preferenza**.

In un **modello prescrittivo** vengono usati come dati gli impatti e le preferenze e danno come risultato un'alternativa ottima mentre in un **modello descrittivo** vengono usati come dati la descrizione del sistema, gli scenari e le alternative e danno come risultati gli impatti. In generale, i modelli vengono utilizzati per prendere decisioni e prevederne i risultati.

B.2.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

$$\min f(x) = (x_1+1)^2 + (x_2+\frac{1}{2})^2$$
$$g_1(x) = x_1 - x_2 \leqslant 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 \geqslant 0$$
$$g_3(x) = x_2 \geqslant 0$$

a) Si rappresenti il problema graficamente.

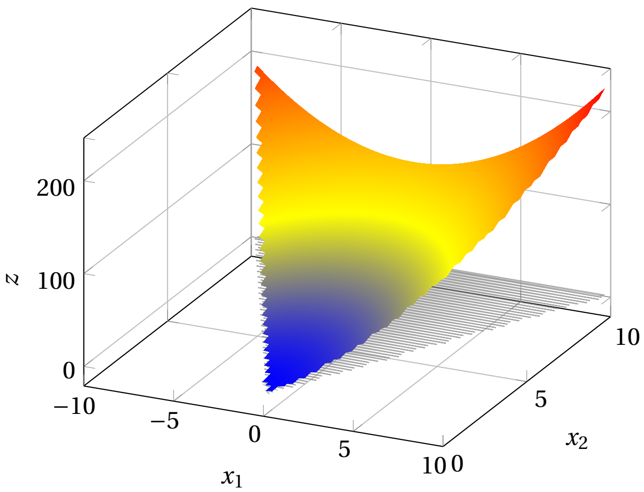
b) Si determinino gli eventuali punti non regolari.

c) Si determinino i punti candidati secondo le condizioni di KKT, e in particolare quello/i di minimo.

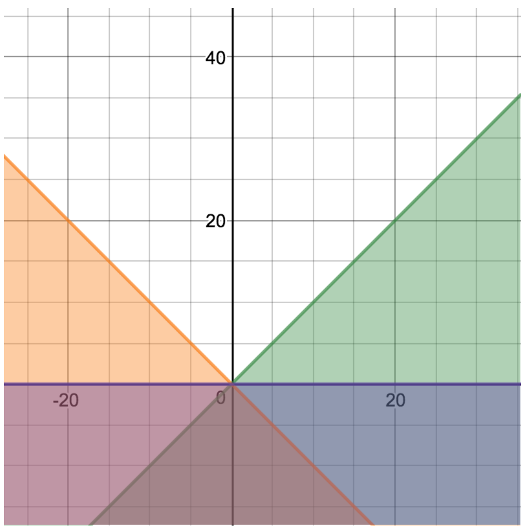
B.2.4 Soluzione esercizio 2

Riscrivo i vincoli

$$\min f(x) = (x_1+1)^2 + (x_2+\frac{1}{2})^2$$
$$g_1(x) = x_1 - x_2 \leqslant 0$$
$$g_2(x) = -x_1 - x_2 \leqslant 0$$
$$g_3(x) = -x_2 \leqslant 0$$



(a) La funzione $f(x)$



(b) Dominio della funzione $f(x)$

Rappresentazione grafica del problema

Calcolo dei punti non regolari

Calcolo i gradienti dei vincoli

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nessuno dei gradienti si può annullare.

Calcolo dei punti di intersezione dei vincoli L'unico punto di intersezione esistente è l'origine $O = (0,0)$. Questo punto è **non regolare** poichè si pone sull'intersezione dei tre vincoli, quindi O è candidato.

Condizioni di KKT

Costruisco la lagrangiana generalizzata

$$l(x) = (x_1+1)^2 + (x_2+\frac{1}{2})^2 + \mu_1(x_1-x_2) - \mu_2(x_1+x_2) - \mu_3 x_2$$

Costruisco il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1+1)+\mu_1-\mu_2 \\ 2(x_2+\frac{1}{2})-\mu_1-\mu_2-\mu_3 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ \mu_1(x_1-x_2)=0 \\ \mu_2(x_1+x_2)=0 \\ \mu_3 x_2 = 0 \\ x_1-x_2 \leqslant 0 \\ x_1+x_2 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Porre a 0 uno qualsiasi dei vincoli significa imporre pari a 0 tutti i vincoli, dato che l'origine è un punto di intersezione dei tre vincoli.

Caso $\mu_3 = 0 \wedge g_3 < 0$:

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1+1)+\mu_1-\mu_2 \\ 2(x_2+\frac{1}{2})-\mu_1-\mu_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ \mu_1(x_1-x_2)=0 \\ \mu_2(x_1+x_2)=0 \\ x_1-x_2 \leqslant 0 \\ x_1+x_2 \geqslant 0 \\ x_2 > 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases}$$

Spezzo il problema in due ulteriori sotto casi: $P_1 : g_2 < 0 \wedge \mu_2 = 0$

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1+1)+\mu_1 \\ 2(x_2+\frac{1}{2})-\mu_1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ \mu_1(x_1-x_2)=0 \\ x_1-x_2 \leqslant 0 \\ x_1 > -x_2 \\ x_2 > 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+1+x_2+\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} - x_2 \\ \mu_1(x_1-x_2)=0 \\ x_1-x_2 \leqslant 0 \\ x_1 > -x_2 \\ x_2 > 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema risulta impossibile.

L'unico punto che risolve il sistema delle condizioni KKT rimane quindi l'origine.

Calcolo del valore del punto ottimo L'unico punto candidato che rimane è $O = (0,0)$

$$f(O) = f(0,0) = 1.25$$

B.2.5 Esercizio 3

Si descriva brevemente il metodo dei vincoli per enumerare le soluzioni paretiane, specificandone vantaggi e svantaggi.

Si applichi tale metodo al problema seguente risolvendo graficamente i sottoproblemi richiesti.

$$\begin{aligned} &\min f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \\ &\min f_2(x) = -x_1 \\ &\quad X = \{x : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant 2\} \end{aligned}$$

B.2.6 Soluzione esercizio 3

Il metodo dei vincoli

Il teorema su cui si basa questo metodo afferma che un punto di ottimo globale x^o per gli indicatori f_l è punto di ottimo globale anche per il problema costruito come:

$$\begin{aligned} &\min f_{l^*}(x) \\ &\quad f_l(x) \leqslant \epsilon_l = f_l(x^o) \qquad l \in \{1, \dots, p\} \setminus \{l^*\} \end{aligned}$$

Si procede vincolando al valore ottimo assunto dall'indicatore $\epsilon_l = f_l(x^o)$ l'indicatore $l - esimo$ e quindi si può identificare il valore dello standard ϵ_l e quindi x^o risolvere tramite KKT o graficamente.

Vantaggi

1. È sempre applicabile.

Svantaggi

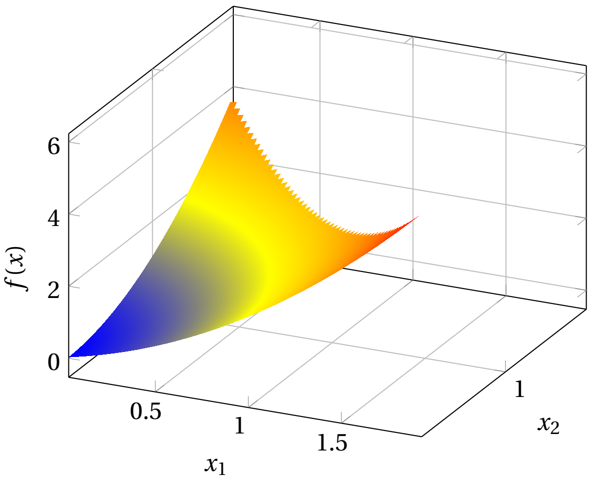
1. Produce una sovrastima di X^o.
2. In problemi con molti indicatori l'identificazione dei vari standard può risultare ardua.

Risoluzione con metodo dei vincoli

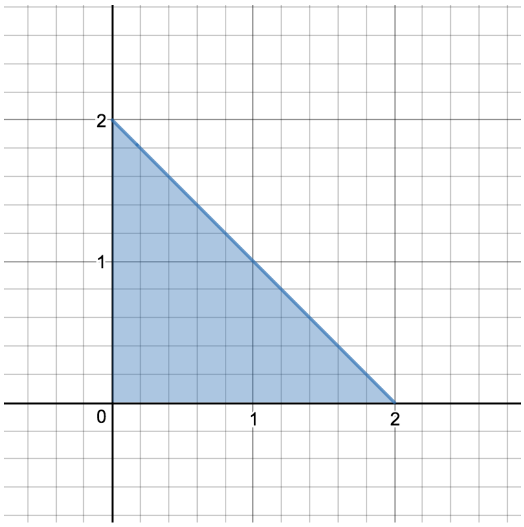
Riformulo il problema:

$$\begin{aligned} \min f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 \leqslant \epsilon_2 \end{aligned}$$

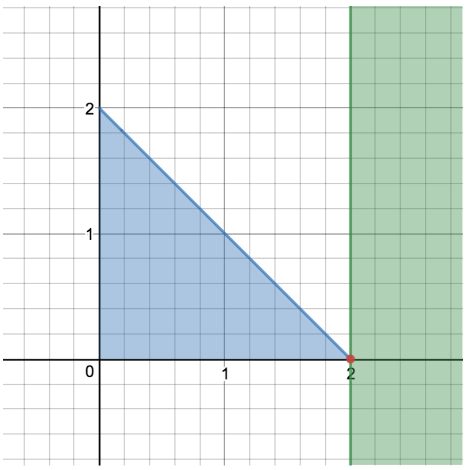
È chiaro che la funzione f_1 sia un cerchio con centro in $C = (-\frac{1}{2}, 0)$, che quindi coincide con il punto di minimo globale non vincolato. In base ai vincoli che costringono la x_1, lo standard $\epsilon_2 \in [-2, \infty)$, ma oltre $\epsilon_2 \in [-2, 0]$ i valori perdono di interesse per il problema.



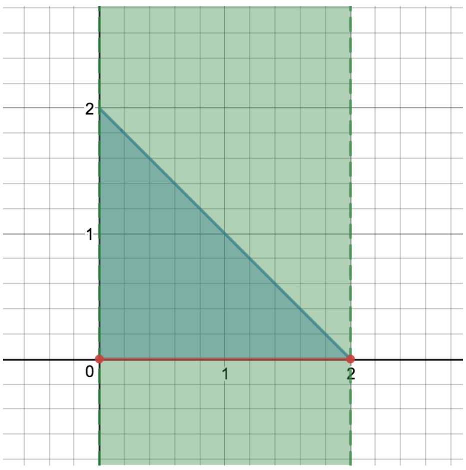
(a) La funzione $f_1(x)$ nel suo dominio



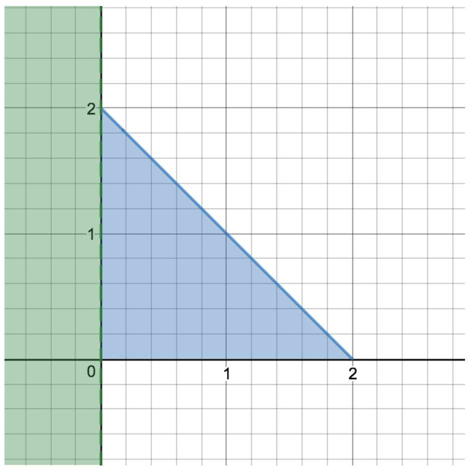
(b) Dominio delle soluzioni



(a) Caso $\epsilon_2 \geqslant -2$ l'unico ottimo globale è $A = (2,0)$.



(b) Caso $-2 < \epsilon_2 \leqslant 0$, l'ottimo si sposta gradualmente da A a $B = (0,0)$.



(c) Nel caso $\epsilon_2 > 0$ non vi sono più soluzioni nel dominio di definizione.

La regione paretiana quindi è il segmento tra il punto A e B.

B.2.7 Esercizio 4

Si descrivano brevemente i seguenti aspetti dellAnalisi Gerarchica (AHP), spiegandone le motivazioni:

a) Luso di scale qualitative.

b) Luso di confronti a coppie.

c) Luso di una gerarchia di attributi.

Se è possibile farlo con semplici calcoli, si ricavi dalla seguente matrice di confronti a coppie un vettore di pesi; si spieghi perché possibile farlo o perché non è possibile.

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/12 & 1/4 & 1/20 \\ 12 & 1 & 3 & 3/5 \\ 4 & 1/3 & 1 & 1/5 \\ 20 & 5/3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

B.2.8 Risoluzione esercizio 4

Scale qualitative

Si usano scale qualitative per semplificare la valutazione della preferenza tra due impatti e si assegna un valore numerico arbitrariamente grande in base alla preferenza, per esempio 1 per l'indifferenza o 7 se un impatto fossero molto preferibile ad un'altro. L'idea è di tradurre un giudizio qualitativo in un valore numero. Questo, intrensicamente, impedisce a chi fa uso del modello di affidarsene completamente come modello perfetto della realtà.

Confronti a coppie

I pesi degli attributi vengono costruiti tramite l'elaborazione dei giudizi sul peso relativo degli indicatori forniti dal decisore, partendo da matrici di confronti a coppie costruite con i valori qualitative tratti dalla scala di Saaty.

Gerarchia di attributi

Gli attributi vengono divisi in categorie di ordine e omogeneità simile per facilitare il confronto, considerando che nel caso di molti attributi procedere unicamente per confronti a coppie sarebbe impraticabile, mentre così il numero di confronti totale si riduce sensibilmente.

Calcolo dei pesi

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/12 & 1/4 & 1/20 \\ 12 & 1 & 3 & 3/5 \\ 4 & 1/3 & 1 & 1/5 \\ 20 & 5/3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_M = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} / (1+12+4+20) = \begin{bmatrix} 1/37 \\ 12/37 \\ 4/37 \\ 20/37 \end{bmatrix}$$

B.2.9 Esercizio 5

Si descriva brevemente il criterio del rammarico per la risoluzione di problemi di decisione in condizioni di ignoranza, spiegandone la logica intrinseca.

Si indichi se tale criterio fornisce un ordinamento debole delle alternative del problema, spiegando che cosa si intende con tale proprietà e motivando la risposta.

Si dica se tale criterio garantisce l'indipendenza dalle alternative irrilevanti, spiegando che cosa si intende con tale proprietà e motivando la risposta.

B.2.10 Soluzione esercizio 5

Criterio del rammarico

Il criterio del rammarico identifica il caso ottimo per ogni scenario, quindi calcola per ogni combinazione di scelta e scenario la distanza dal valore ottimo dello scenario, detta rammarico. Si va a determinare quindi, per ogni scelta, il rammarico massimo e si sceglie la scelta con rammarico minimo.

Ordinamento

Fornisce sempre un ordine debole poiché rende lineare il confronto tra i vari scenari. Il rammarico al più risulterà uguale tra più scelte, ma sono certamente ordinate debolmente.

Indipendenza tra alternative irrilevanti

Nessuno dei criteri di scelta rispetta la proprietà di indipendenza, che garantirebbe l'assenza del **rank reversal**.

B.2.11 Esercizio 6

Si deve decidere se introdurre misure restrittive alle importazioni per difendere l'industria nazionale.

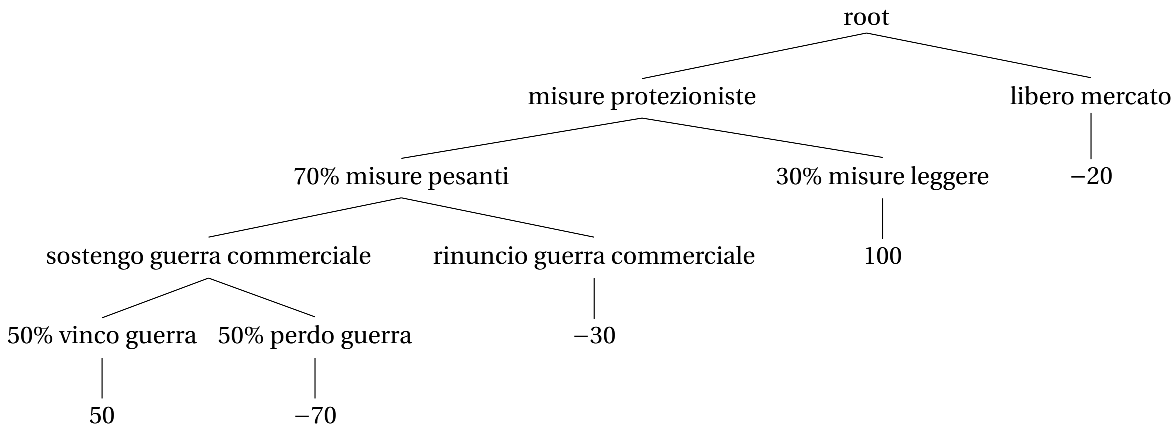
Se non si fa niente, le perdite stimate in un'opportuna unità di misura saranno pari a 20. Se invece si procede a introdurle, le nazioni concorrenti potrebbero rispondere con misure leggere (con una probabilità stimata del 30%) oppure pesanti (con una probabilità del 70%).

Nel primo caso, si otterrebbe un guadagno complessivo di 100, nel secondo si dovrà decidere se sostenere una guerra commerciale oppure no. Se si rinuncia, le perdite saranno di 30. Se ci si imbarca in una guerra commerciale c'è una probabilità del 50% di vincerla (con un guadagno di 50) oppure di perderla (con una perdita di 70).

Si disegni l'albero decisionale per la decisione basata sull'ottimizzazione del guadagno atteso e si determinino la strategia ottima.

B.2.12 Soluzione esercizio 6

Albero di decisione



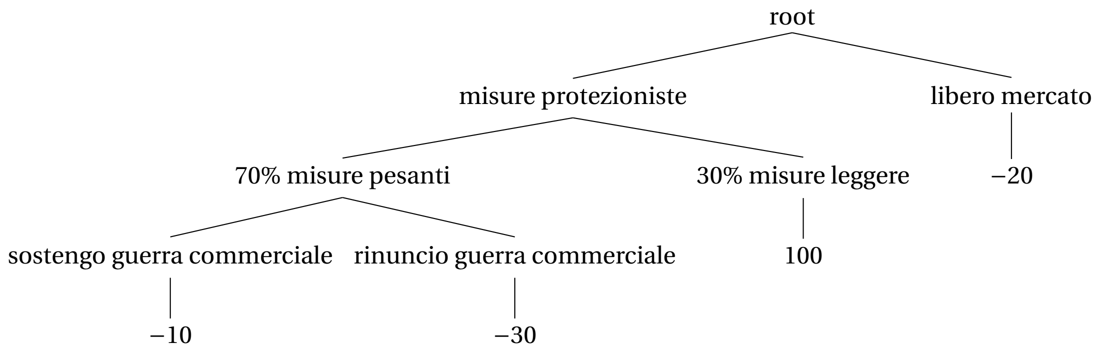


Figura B.13: Step 1: caso medio sostenendo guerra commerciale

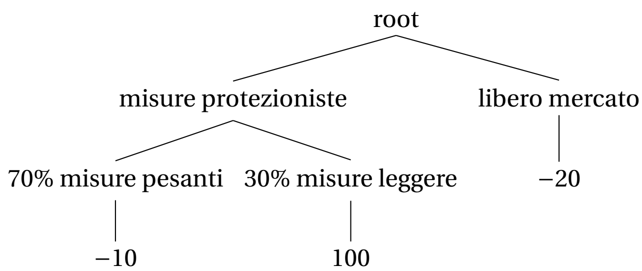


Figura B.14: Step 2: scelgo di sostenere a guerra commerciale

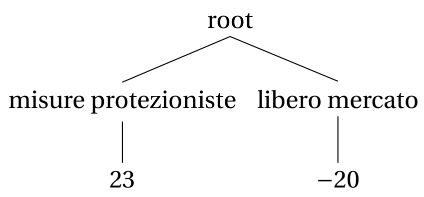


Figura B.15: Step 3: caso medio per le misure di risposta

Le misure protezioniste danno il guadagno atteso migliore.

B.2.13 Esercizio 7

Si distinguano i concetti di strategia pura e strategia mista nel contesto della teoria dei giochi.

Si definisca il concetto di strategia dominata nel caso dei giochi a due persone.

Si indichi se il gioco rappresentato dalla seguente matrice di payoff ammette strategie dominate oppure no, motivando la risposta.

	1	2	3
1	$(1,4)$	$(2,3)$	$(5,0)$
2	$(0,0)$	$(1,1)$	$(3,3)$
3	$(3,1)$	$(6,2)$	$(2,7)$

Nel caso dei giochi a due persone a somma zero, è possibile che vi siano strategie dominate? In caso positivo, si fornisca un esempio; in caso negativo, si spieghi perché no.

B.2.14 Soluzione esercizio 7

Strategia pura e mista

Una strategia pura è composta da un solo impatto certo cioè con probabilità unitaria. Una strategia mista è composta da più strategie pure, ognuna con una determinata probabilità di essere scelta.

Strategia dominata

Una strategia s_1 è dominata da una strategia s_2 quando ogni possibile payoff di s_1 è peggiore o uguale dei rispettivi payoff di s_2.

Strategie dominate nel gioco

Per il giocatore di riga, la seconda riga è dominata sia dalla prima che dalla terza, pertanto viene eliminata (tabella B.5). Per il giocatore di colonna nessuna strategia risulta dominata.

	1	2	3
1	$(1,4)$	$(2,3)$	$(5,0)$
3	$(3,1)$	$(6,2)$	$(2,7)$

Tabella B.5: Elimino seconda riga

Strategie dominate nei giochi a somma zero

Si, nei giochi a somma zero esistono strategie dominate. Per esempio, nel gioco a somma zero in tabella B.16a il giocatore di riga sceglierà sempre la riga B (tabella B.16b) ed il giocatore di colonna sceglierà sempre la colonna B (tabella B.16c).

	A	B
A	0	-1
B	3	2

(a) Gioco a somma zero con strategie dominate

	A	B
B	3	2

(b) Elimino la riga A

	B
B	2

(c) Elimino la colonna A

B.2.15 Esercizio 8

La tabella seguente riporta le preferenze di 27 elettori fra 3 alternative possibili, indicate con le lettere A, B e C. Ogni riga riporta un possibile ordine di preferenza e il numero di elettori che vi si riconosce.

Ordine	Numero di elettori
A B C	11
A C B	2
B C A	8
C A B	2
C B A	4

Si applichino i metodi di Condorcet e di Borda per determinare la relazione di preferenza del gruppo.

B.2.16 Soluzione esercizio 8

Metodo di Condorcet

Nel metodo di Condorcet, una scelta x_1 domina una seconda x_2 quando il numero di decisori per cui $x_1 \preceq x_2$ è maggiore del numero di decisori per cui $x_2 \preceq x_1$. Questo, generalmente, consente di creare un ordine debole dal quale trarre la decisione di gruppo.

$$\#\{A \preceq_d B\} = 15 > \#\{B \preceq_d A\} = 12 \Rightarrow A \preceq_D B$$
$$\#\{B \preceq_d C\} = 19 > \#\{C \preceq_d B\} = 8 \Rightarrow B \preceq_D C$$
$$\#\{A \preceq_d C\} = 13 < \#\{C \preceq_d A\} = 14 \Rightarrow C \preceq_D A$$

Siamo in un caso di preferenze circolari, per cui il metodo di Condorcet non è in grado di realizzare un ordine debole.

Metodo di Borda

Assegna un punteggio ad una soluzione in base alla posizione che essa assume sulla lista di preferenze di ogni decisore, somma questi punteggi e va a scegliere quella soluzione che ha il punteggio più alto.

Talvolta è soggetto al **rank reversal**, cioè eliminando una soluzione (anche mediocre) soluzioni precedentemente non ottime lo diventano.

Scelta	Somma	punteggio
A	$3*(11+2)+2*(2)+1*(8+4)$	52
B	$3*(8)+2*(4)+1*(2+2)$	36
C	$3*(2+4)+2*(2+8)+1*(11)$	39

Per il conto di Borsa la soluzione migliore risulta essere la A. Se procedessimo ad eliminare la soluzione peggiore, la B, il punteggio cambia nel modo seguente:

Scelta	Somma	punteggio
A	$2*(11+2)+1*(2+4+8)$	40
C	$2*(2+4+8)+1*(11+2)$	41

La soluzione C diviene quella migliore: avviene quindi un rank reversal.

B.3 Tema d'esame - 14 Giugno 2016

B.3.1 Esercizio 1

Si definisca brevemente il concetto di impatto in un problema decisionale complesso, specificando che ruolo svolga nel processo decisionale.

Si descrivano alcune possibili rappresentazioni degli impatti di un problema finito (cioè con un numero finito, e piuttosto piccolo, di alternative).

Che cosa si intende dicendo che due impatti sono indifferenti? E incomparabili?

B.3.2 Soluzione esercizio 1

Gli impatti descrivono tutto ciò che è rilevante ai fine della decisione. Essi vengono modellati matematicamente tramite la **funzione impatto** $f : X \times \Omega \rightarrow F$, dove F è l'insieme degli impatti possibili, Ω quello degli esiti possibili ed X quello delle decisioni possibili.

Le componenti f_l di una funzione impatto f vengono chiamate **indicatori** e definiscono un aspetto dell'impatto.

Nel caso **finito** gli impatti possono essere rappresentati tramite la **matrice di valutazione**, le cui righe sono le *configurazioni* (x, ω) mentre le colonne sono gli *indicatori* f_l ed in ogni cella vi è il valore dell'indicatore per quella configurazione.

In alternativa è possibile utilizzare la **rosa dei venti** (B.17), un grafico bidimensionale:

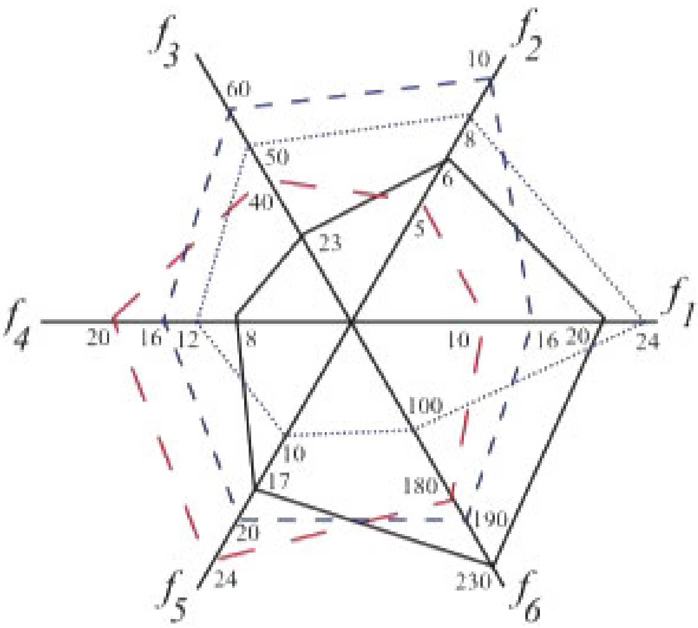


Figura B.17: Rosa dei venti

Due impatti sono **indifferenti** quando il decisore accetta di scambiarli in entrambi i versi: $f_1 \preceq f_2 \wedge f_2 \preceq f_1 \Rightarrow f_1 \approx f_2$.

Due impatti sono **incomparabili** quando il decisore non accetta di scambiarli in alcun verso: $f_1 \npreceq f_2 \wedge f_2 \npreceq f_1 \Rightarrow f_1 \bowtie f_2$.

B.3.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

$$\begin{aligned}&\min f(x) = x_2\\ &g_1(x) = x_1^2 + (x_2-1)^2 \leqslant 1\\ &g_2(x) = x_1 - x_2 \leqslant -2\end{aligned}$$

a) Si rappresenti il problema graficamente.

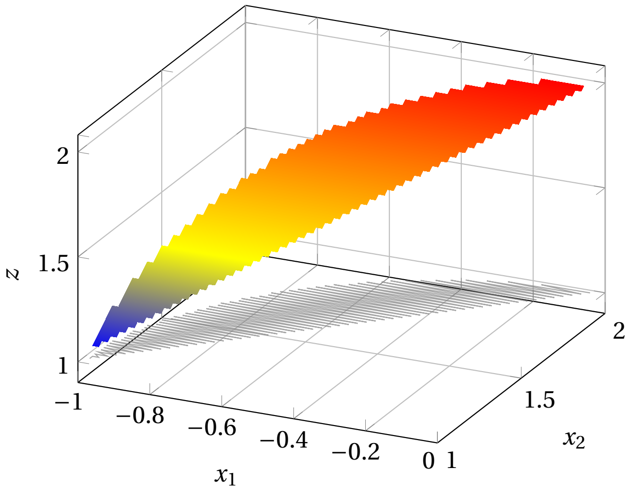
b) Si determinino gli eventuali punti non regolari.

c) Si determinino i punti candidati secondo le condizioni di KKT, e in particolare quello/i di minimo.

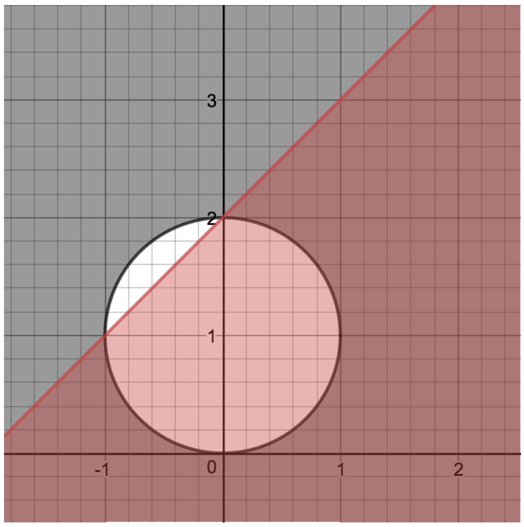
B.3.4 Soluzione esercizio 2

Riscrivo il problema

$$\begin{aligned}&\min f(x) = x_2\\ &g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leqslant 0\\ &g_2(x) = 2 + x_1 - x_2 \leqslant 0\end{aligned}$$



(a) La funzione $f(x)$



(b) Dominio della funzione $f(x)$

Rappresentazione grafica del problema

Determino i punti non regolari

Calcolo i gradienti dei vincoli

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - 2 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il gradiente ∇g_1 si annulla in $P = (0,1)$ in cui il vincolo g_1 non è attivo ed è pertanto regolare. Il gradiente ∇g_2 non si annulla mai.

Calcolo i punti di intersezione dei vincoli

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \\ 2 + x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_2-2)^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \\ x_1 = x_2 - 2 \end{cases}$$

Dall'intersezione deriviamo i punti $A = (-1,1)$ e $B = (0,2)$. Sostituendo i punti nella matrice dei gradienti verifico che nè A nè B la rende singolare e sono pertanto regolari.

Condizioni di KKT

Costruisco la lagrangiana generalizzata

$$l(x) = x_2 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) + \mu_2(2 + x_1 - x_2)$$

Costruisco il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2\mu_1 x_1 + \mu_2 \\ 1 + \mu_1(2x_2 - 2) - \mu_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) = 0 \\ \mu_2(2 + x_1 - x_2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leqslant 0 \\ 2 + x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema procedo con un albero di bisezione sui vincoli, partendo dal più semplice, $\mu_2 g_2$:

Caso $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leqslant 0$**:**

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2\mu_1 x_1 \\ 1 + \mu_1(2x_2 - 2) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow x_1 = 0 \\ \mu_1(x_2^2 - 2x_2) = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 \leqslant 0 \\ 2 - x_2 \leqslant 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Poichè $x_1 = 0$ è uno dei punti di intersezione dei vincoli, quindi $x_2 = 2$, altrimenti cadrebbe al di fuori del dominio.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \color{red}{\mu_1 = -\frac{1}{2}} \\ \color{red}{\mu_1 \geqslant 0} \end{cases}$$

Il sistema risulta impossibile.

Caso $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$**:**

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2\mu_1(x_2 - 2) + \mu_2 \\ 1 + \mu_1(2x_2 - 2) - \mu_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \mu_1 \neq 0 \\ x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0 \\ x_1 = x_2 - 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} -2\mu_1 + \mu_2 \\ 1 - \mu_1 - \mu_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ \mu_2 > 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \color{red}{\mu_2 = 0} \\ \color{red}{\mu_2 > 0} \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \frac{\mu_2}{2} \\ \frac{\mu_2}{2} + \mu_2 = 1 \\ \mu_2 > 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{3} \\ \mu_2 = \frac{2}{3} \\ \mu_2 > 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

Le condizioni KKT eliminano il punto B e inseriscono A nella lista dei candidati.

Sostituisco il valore numerico dei punti Il punto A è l'ultimo candidato rimasto ed è quindi certamente l'ottimo locale. Questo è verificabile anche guardando il grafico della funzione in figura B.18a.

$$f(A) = f(-1, 1) = 1$$

B.3.5 Esercizio 3

Si descriva brevemente il metodo della trasformazione inversa per enumerare le soluzioni paretiane, specificandone le condizioni di applicazione.

Si applichi tale metodo al seguente problema:

$$\begin{aligned} \max f_1 &= x_1 + x_2 \\ \max f_2 &= x_1 - x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 &\leqslant 1 \\ x_1 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

B.3.6 Soluzione esercizio 3

Metodo della trasformazione inversa

Si determina l'inversa della funzione f, $\phi : F \to X$, si sostituisce $x = \phi(x)$ nei vincoli e quindi si ottiene il sottoinsieme F^o degli impatti preferibili e da quest'ultimo si ottiene quindi la regione paretiana X^o. È applicabile solo quando $f \in \mathbb{R}^2$.

Determino l'inversa ϕ

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \\ f_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 2x_1 - f_2 \\ x_2 = x_1 - f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{f_1+f_2}{2} \\ x_2 = \frac{f_1-2f_2}{2} \end{cases}$$

Sostituisco l'inversa nei vincoli

$$\begin{cases} \left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{f_1-2f_2}{2}\right)^2 \leqslant 1 \\ \frac{f_1+f_2}{2} \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f_1+f_2)^2 + (f_1-2f_2)^2 \leqslant 4 \\ f_1 + f_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

L'immagine della regione paretiana F^o è l'insieme di punti che non ammettono altri punti nel quadrante in basso a sinistra, che in questo caso costituiscono il segmento evidenziato in rosso nella figura B.19.

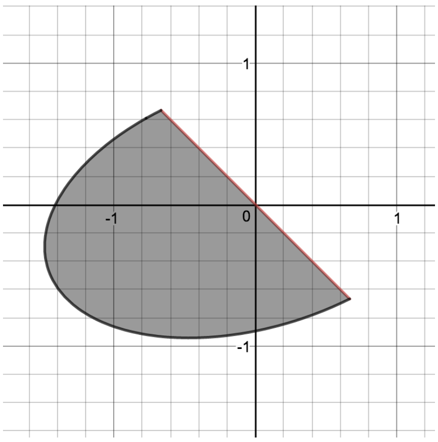


Figura B.19: In rosso l'immagine della regione paretiana.

La trasformazione inversa in questo caso è **lineare**, quindi anche la regione X^o risulterà un segmento di retta.

Determino i punti di intersezione:

$$\begin{cases} (f_1+f_2)^2 + (f_1-2f_2)^2 = 4 \\ f_1 + f_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-f_2+f_2)^2 + (-f_2-2f_2)^2 = 4 \\ f_1 = -f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3f_2)^2 = 4 \\ f_1 = -f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9f_2^2 = 4 \Rightarrow \pm\frac{2}{3} \\ f_1 = -f_2 \end{cases}$$

I due punti risultano essere quindi: $A = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ e $B = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Calcolo quindi i punti che determina il segmento della regione paretiana.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{-3f_2}{2} = \pm 1 \end{cases}$$

Da cui i due punti che determinano il segmento della regione paretiana X^o sono $C = (0, -1)$ e $D = (0, 1)$.

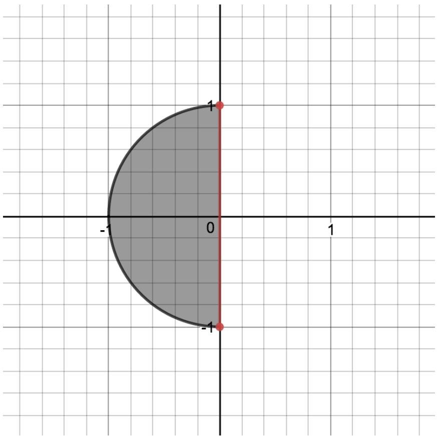
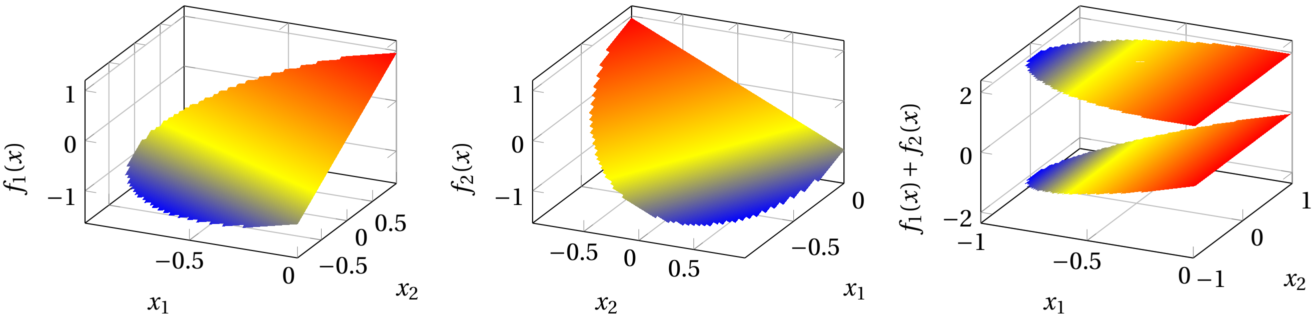


Figura B.20: In rosso la regione paretiana.

Verifico i risultati ottenuti



(a) L'indicatore $f_1(x)$ (b) L'indicatore $f_2(x)$ (c) La somma degli indicatori

I due indicatori assumono valori nella stessa magnitudo nel dominio di definizione per cui, in questo caso, è possibile stimare il massimo dei due indicatori come il massimo della funzione ottenuta sommandoli. Il risultato ottenuto è coerente con la regione paretiana evidenziata.

B.3.7 Esercizio 4

Si elenchino le condizioni che rendono coerente una matrice di confronti a coppie.

Si descriva il procedimento per determinare un vettore di pesi corretto a partire da una matrice di confronti a coppie coerente.

Si descriva brevemente un modo per derivare una matrice coerente a partire da una non coerente e un criterio per valutare la qualità di tale derivazione.

B.3.8 Soluzione esercizio 4

Condizioni di coerenza

Una matrice di confronti a coppie è coerente quando ha le seguenti proprietà:

Positività I tassi di sostituzione fra utilità normalizzati sono sempre positivi.

$$\lambda_{lm} > 0$$

Reciprocità Il tasso di sostituzione di una utilità normalizzata rispetto ad un'altra è il reciproco del tasso della seconda rispetto alla prima.

$$\lambda_{ln} = \frac{1}{\lambda_{ml}}$$

Coerenza Due tassi di sostituzione con indici "in sequenza" determinano il terzo:

$$\lambda_{ln} = \lambda_{lm}\lambda_{mn}$$

Calcolo del vettore di pesi

Il vettore dei pesi di una matrice coerente risulta pari ad una colonna qualsiasi della matrice normalizzata per la somma di sé stessa:

$$\omega_i = \frac{\boldsymbol{M}_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}}$$

Ricostruzione di matrici coerenti

Si procede risolvendo il problema di minimizzazione seguente, dove Λ è la matrice costituita dai rapporti stimati dal decisore, W la matrice costituita dai rapporti $\frac{\omega_l}{\omega_m}$.

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \|W - \Lambda\| & \\ \sum_{l \in P} \omega_l = 1 & \\ \omega_l \geqslant 0 \quad l \in P & \end{aligned}$$

Il valore ottimo della funzione obbiettivo si può assumere come misura dell'incoerenza iniziale.

Per tenere conto dell'incoerenza del decisore è stato anche proposto di sostituire i valori stimati λ_{lm} con intervalli e di definire la norma componendo le distanze fra ciascun rapporto $\frac{\omega_l}{\omega_m}$ e l'intervallo corrispondente, anziché il valore stimato.

B.3.9 Esercizio 5

Dato un problema di decisione con alternative $X = \{a_1, \ldots, a_5\}$ e scenari $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, e con le utilità $u(f(x, \omega))$ e le probabilità $\pi(\omega)$ riportate nella tabella seguente:

$u(f(x,\omega))$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\pi(\omega)$
u_1	80	100	50	0	90	0.5
u_2	20	10	50	30	30	0.4
u_3	40	10	50	100	20	0.1

a) Si elenchino le eventuali alternative dominate, specificando da quali altre alternative sono dominate.

b) Si indichi l'alternativa scelta con il criterio del caso medio, spiegando il procedimento.

c) Si mostri come cambia l'alternativa scelta al variare della probabilità $\pi(\omega_1)$ del primo scenario, ipotizzando che le altre mantengano le reciproche proporzioni.

B.3.10 Risoluzione esercizio 5

Alternative dominate

Senza considerare criteri particolari, nessuna alternativa risulta dominata.

Criterio del caso medio

Procedendo con il criterio del caso medio, sommando le utilità pesandole con la probabilità dello scenario, si ottiene:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u_m	52	55	50	22	59

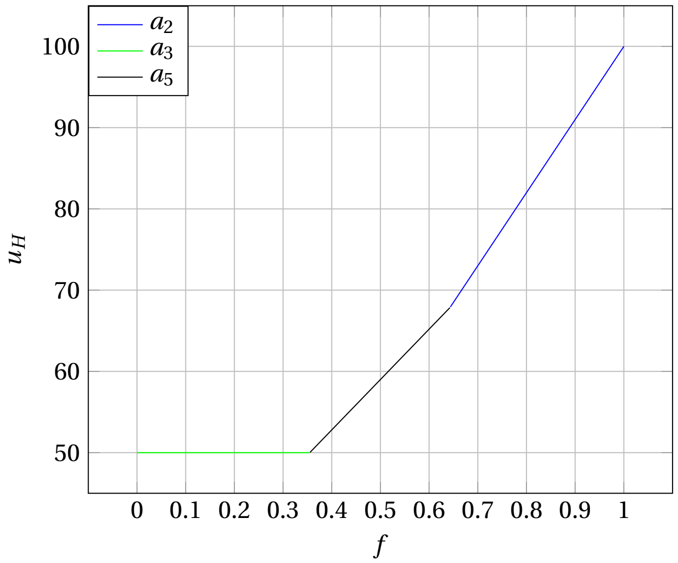
Da cui la scelta preferibile risulta essere a_5.

Analisi di sensitività

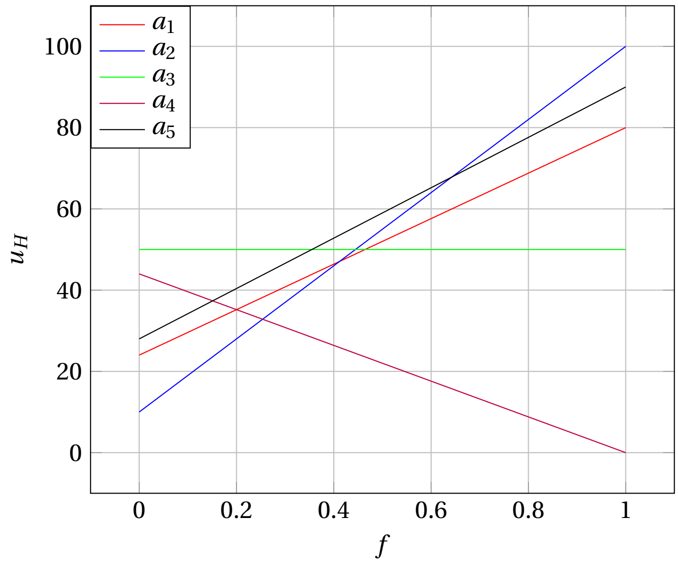
Al variare della probabilità $\pi(\omega_1)$, se le altre probabilità mantengono le stesse proporzioni, vale il sistema:

$$\begin{cases} \pi(\omega_1) = \alpha \\ \pi(\omega_2) = (1-\alpha) * 0.8 \\ \pi(\omega_3) = (1-\alpha) * 0.2 \end{cases}$$

Per $\alpha \lesssim 0.36$ viene scelta a_3, per $\alpha \gtrsim 0.36 \wedge \alpha \lesssim 0.64$ viene scelta a_5 e per $\alpha \gtrsim 0.64$ viene scelta a_2.



(a) La massima utilità al variare della probabilità



(b) L'utilità u_m al variare della probabilità $\pi(\omega_1)$

Figura B.22: Analisi di sensitività

B.3.11 Esercizio 6

Un macchinario comincia a mostrare segni di usura. Si stima che, senza interventi di manutenzione, possa funzionare ancora per 3 mesi. L'intervento di manutenzione consentirebbe di usarlo ancora per un anno, ma presenta dei rischi: c''e una probabilità del 30% che danneggi definitivamente il macchinario. Si descriva il problema con un albero di decisione, assumendo come funzione di utilità la durata residua del macchinario.

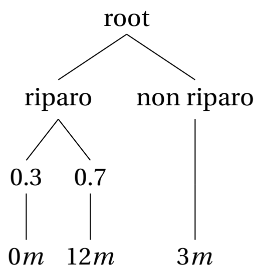
Si risolva il problema con l'albero di decisione applicando il criterio del caso pessimo.

Si ripeta la risoluzione con il criterio del valore atteso, commentando brevemente le differenze rispetto all'altro procedimento (se ve ne sono).

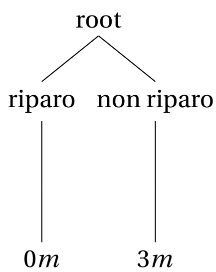
Si supponga che un test consenta di ottenere informazioni sullo stato del macchinario, e quindi di prevedere (con qualche incertezza) l'esito dell'intervento: se il macchinario è destinato a sopravvivere alla riparazione, questo ha esito positivo nel 90% dei casi; se il macchinario è destinato a soccombere, il test ha esito negativo nell'80% dei casi. Si risolva il problema di decidere se eseguire o no il test e se eseguire o no l'intervento di manutenzione. Si può esprimere quantitativamente il valore dell'informazione fornita dal test? Se sì, in che modo?

B.3.12 Soluzione esercizio 6

Albero di decisione

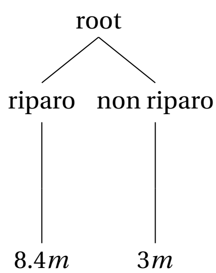


Caso pessimo



Secondo il criterio del caso pessimo, in cui scelgo il peggiore risultato possibile, scelgo di non riparare il macchinario.

Caso valore atteso



Secondo il criterio del caso medio, con cui peso ogni utilità per la sua probabilità, scelgo di riparare il macchinario.

Caso con test

Effettuare il test mi garantisce un'utilità, ottenuta tramite il criterio del caso medio, di 8.49 maggiore di quella massima ottenuta senza effettuare il test di $8.4m$.

esito	percentuale	utilità seguendo test	riparo ignorando test	non riparo ignorando test
positivo	63%	$12m$: riparo	$12m$	$3m$
falso negativo	7%	$3m$: non riparo	$12m$	$3m$
negativo	24%	$3m$: non riparo	$0m$	$3m$
falso positivo	6%	$0m$: rompo	$0m$	$3m$
Totale		$8.49m$	$8.4m$	$3m$

Utilità del test

L'utilità del test è quantificabile come la differenza tra l'utilità derivata dal caso in cui viene eseguito e nel caso in cui esso non venga eseguito, quindi qui $0.09m$.

B.3.13 Esercizio 7

In un piccolo comune ci sono due pizzerie (A e B). I proprietari stanno valutando di introdurre un servizio di consegna a domicilio. Se una sola pizzeria introduce il servizio, guadagna molti clienti e ottiene un profitto aggiuntivo pari a 10, mentre l'altra perde qualche cliente e subisce una perdita pari a 1 rispetto alla situazione iniziale che fa da riferimento. Se entrambe introducono il servizio, perdono entrambe 5, perché i clienti in più non bastano a compensare l'investimento. Se nessuna introduce il servizio, si rimane nella situazione iniziale.

Si descriva il problema di decisione come gioco a due giocatori, supponendo che debbano decidere simultaneamente, specificando le strategie disponibili e la matrice dei payoff.

Si determinino gli equilibri di Nash di questo gioco, spiegandone il significato.

Supponendo che il comune sovvenzioni il servizio di consegna a domicilio, a quanto dovrebbe ammontare la sovvenzione e come dovrebbe essere distribuita per modificare gli equilibri?

B.3.14 Soluzione esercizio 7

Problema delle pizzerie

Definisco 1 come il caso in cui una pizzeria decide di realizzare il servizio, 0 quando decide di no.

	0	1
0	$(0,0)$	$(\tilde{-1},\tilde{10})$
1	$(\tilde{10},\tilde{-1})$	$(-5,-5)$

Tabella B.6: L'equilibri di Nash si trovano quando uno dei giocatori determina di fare il servizio e l'altro si.

Sovvenzione

Data una sovvenzione $\alpha = (\alpha_r, \alpha_c)$ la tabella diviene:

	0	1
0	$(0,0)$	$(-1, 10 \tilde{+} \alpha_c)$
1	$(\alpha_r \tilde{+} 10, -1)$	$(\alpha_r \tilde{-} 5, \alpha_c \tilde{-} 5)$

Tabella B.7: L'equilibrio di Nash si sposta in $(1,1)$ per $\alpha_r > 4 \wedge \alpha_c > 4$

B.4 Tema d'esame - 11 Aprile 2017

B.4.1 Esercizio 1

Si definisca in modo formale un problema di decisione complesso $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$ descrivendo brevemente il significato dei suoi elementi.

Si indichino le proprietà di cui deve godere la relazione di preferenza Π per essere un ordine debole e si spieghi se, in tal caso, essa ammette una funzione valore conforme.

B.4.2 Soluzione esercizio 1

Un problema di decisione complesso viene descritto dalla sestupla $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$:

X L'insieme delle **soluzioni possibili**.

Ω L'insieme degli **scenari o esiti possibili**.

F L'insieme degli **impatti possibili**.

$f(x,\omega) : X \times \Omega \to F$ La **funzione impatto**.

D L'insieme dei **decisori**.

$\Pi(d) : D \to 2^{F\times F}$ La **relazione di preferenza**.

La **relazione di preferenza** Π per essere un *ordine debole* deve godere delle proprietà **riflessiva**, **transitiva** e **di completezza**.

Proprietà riflessiva Ogni impatto è **indifferente** a se stesso: $f \preceq f$.

Proprietà transitiva Se un impatto f_1 è preferibile ad un altro f_2 e questo ad un terzo f_3, allora il primo è preferibile al terzo: $f_1 \preceq f_2 \land f_2 \preceq f_3 \Rightarrow f_1 \preceq f_3$.

Proprietà di completezza Dati due impatti, un dei due è certamente **preferibile** all'altro, o al limite sono **indifferenti**.

Una **funzione valore** $v : F \to \mathbb{R}$ associa ad ogni impatto un valore reale, ed è conforme ad una relazione di preferenza Π quando il valore di un impatto f_1 preferibile ad un impatto f_2 è maggiore del valore dell'impatto f_2:

$$f_1 \preceq f_2 \Leftrightarrow v(f_1) \geqslant v(f_2) \forall f_1, v_2 \in F$$

Se una relazione di preferenza Π ammette una funzione valore, allora Π è un ordine debole.

Non vale però il contrario, per esempio un *ordine lessicografico* è un ordine totale che non ammette una funzione valore conforme.

Una relazione Π di ordine debole su F ammette una funzione valore conforme **se e solo se** $\exists \tilde{F} \subseteq F$ numerabile e denso in F.

B.4.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

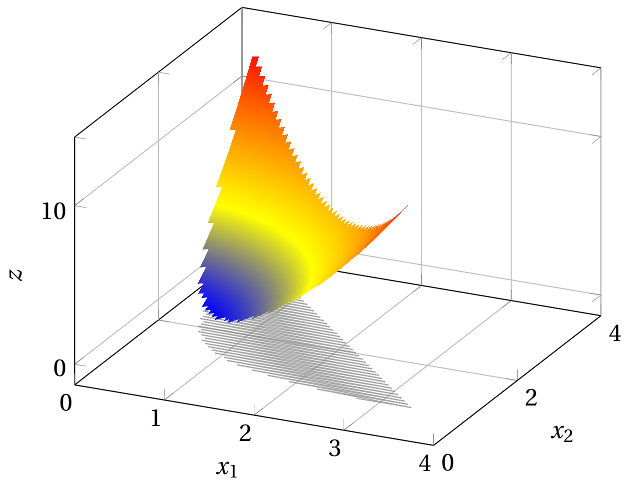
$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1^2 + x_2^2 \\ g_1(x) &= 1 - x_1 x_2 \leqslant 0 \\ g_2(x) &= x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ g_3(x) &= -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

a) Si rappresenti il problema graficamente.

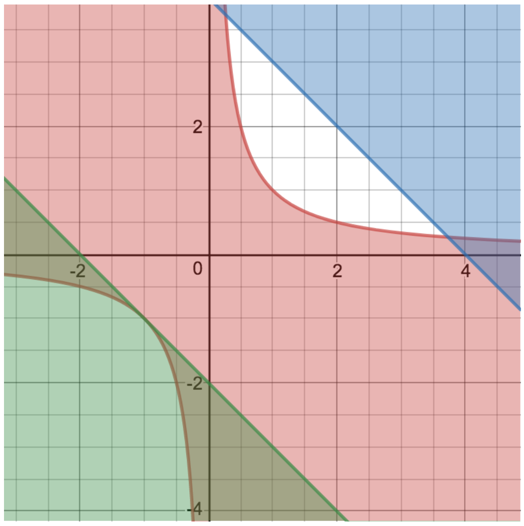
b) Si determinino gli eventuali punti non regolari o si mostri che non ne esistono.

c) Si determinino i punti candidati secondo le condizioni di KKT, e in particolare quello/i di minimo.

B.4.4 Soluzione esercizio 2



(a) La funzione $f(x)$



(b) Dominio della funzione $f(x)$

Figura B.23: La funzione nella regione ammissibile

a) La funzione nel suo dominio di definizione è la seguente:

Calcolo dei punti non regolari: Calcolo i gradienti dei vincoli:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il gradiente ∇g_1 si annulla nell'origine, che è all'esterno del dominio di interesse (nessun vincolo è attivo in quel punto). Gli altri gradienti ∇g_2 e ∇g_3 non si annullano.

Calcolo i punti dati dall'intersezione dei vincoli a coppie:

Vincoli g_1 e g_2:

$$\begin{cases} 1 - x_1 x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x_2(4 - x_2) = 0 \\ x_1 = 4 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \pm \sqrt{3} \\ x_1 = 4 - x_2 \end{cases}$$

Da cui deriviamo i punti $A = (2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ e $B = (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$. In nessuno di questi punti la matrice realizzata accostando i gradienti risulta singolare, quindi i punti A e B sono regolari.

Vincoli g_1 e g_3:

$$\begin{cases} 1 - x_1 x_2 = 0 \\ x_1 = -x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + (x_2+2)x_2 = 0 \\ x_1 = -x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

Ne deriviamo il punto $C = (-1,-1)$ che viene identificato come punto non regolare ed è quindi aggiunto alla lista dei punti candidati.

Vincoli g_2 e g_3: I due vincoli non hanno intersezioni.

Vincoli g_1, g_2 e g_3: I tre vincoli non hanno intersezioni comuni.

Condizioni KKT

Realizzo il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \mu_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \mu_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ \mu_1(1 - x_1 x_2) = 0 \\ \mu_2(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \mu_3(-x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ 1 - x_1 x_2 \leqslant 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1(1 - x_1 x_2) = 0 \\ \mu_2(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \mu_3(-x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ 1 - x_1 x_2 \leqslant 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Iniziamo l'albero di ricerca da μ_1:

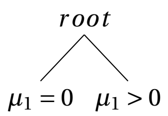


Figura B.24: Albero di ricerca, primo step

Inizio dal caso $\mu_1 = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ 2x_2 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_2(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \mu_3(-x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ 1 - x_1 x_2 \leqslant 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \mu_2(2x_1 - 4) = 0 \\ \mu_3(-2x_1 - 2) = 0 \\ x_1 \geqslant 1 \vee x_1 \leqslant -1 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant -1 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \mu_2(2x_1 - 4) = 0 \\ \mu_3(2x_1 + 2) = 0 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Noto che, se x_1 e x_2 sono vincolati tra 1 e 2, allora la relazione $\mu_3(2x_1 + 2) = 0$ implica che $\mu_3 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ \mu_2(2x_1 - 4) = 0 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \mu_2 = -2x_1 \\ -2x_1(2x_1 - 4) = 0 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \color{red}{\mu_2 = -4 < 0}$$

Ora, $x_1 \neq 0$, per cui $x_1 = 2$. Ma questo implica che $\mu_2 = -4 < 0$, per cui questa opzione risulta impossibile.

Esploriamo, nel ramo $\mu_1 > 0$ l'opzione μ_2.

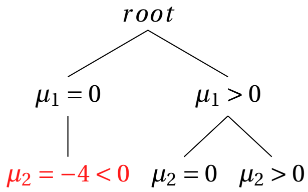


Figura B.25: Albero di ricerca, secondo step

Inizio dall'opzione $\mu_2 = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 - \mu_3 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 - \mu_3 = 0 \\ x_1 x_2 = 1 \\ \mu_3(-x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Esploro ulteriormente le opzioni μ_3 come sottorami:

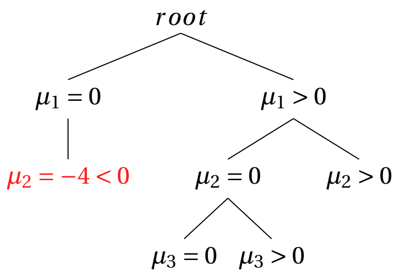


Figura B.26: Albero di ricerca, terzo step

Inizio dall'opzione $\mu_2 = 0 \wedge \mu_3 = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 = 0 \\ x_1 x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = \pm 1 \\ 2x_1 - 4 \leqslant 0 \\ -2x_1 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = x_2 = -1 \\ \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases}$$

Identifico due punti, $D = (1, 1)$ e $C = (-1, -1)$. Il punto C era stato identificato anche precedentemente tramite l'analisi dei vincoli.

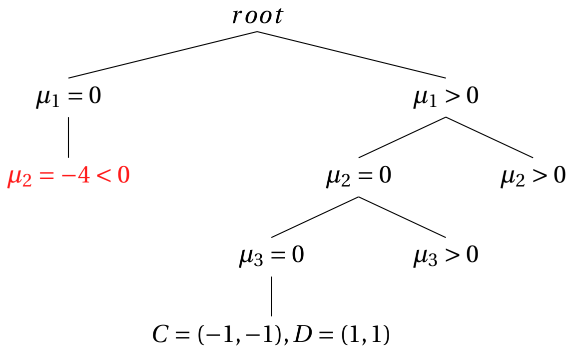


Figura B.27: Albero di ricerca, quarto step

Investigo ora l'opzione $\mu_1 > 0 \land \mu_2 = 0 \land \mu_3 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 - \mu_3 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 - \mu_3 = 0 \\ x_2(-x_2 - 2) = 1 \\ x_1 = -x_2 - 2 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 - \mu_3 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 - \mu_3 = 0 \\ x_2^2 + 2x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \mu_3 + 2 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 > 0 \end{cases}$$

Identifico nuovamente il punto C.

Espando il ramo $\mu_2 > 0$:

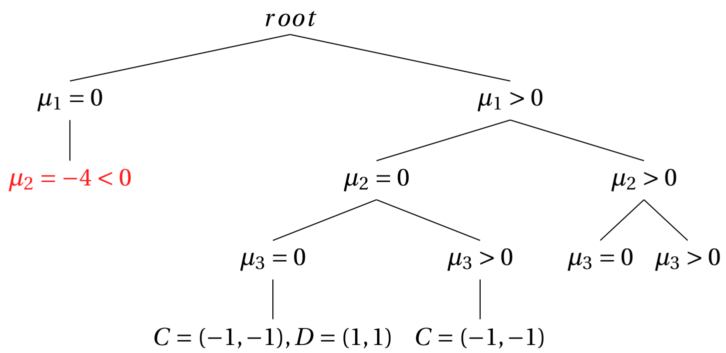


Figura B.28: Albero di ricerca, quinto step

Inizio dal ramo $\mu_1 > 0 \land \mu_2 > 0 \land \mu_3 = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_2 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 + \mu_2 = 0 \\ x_2(4 - x_2) - 1 = 0 \\ x_1 = 4 - x_2 \\ 1 - x_1 x_2 \leqslant 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_2 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 + \mu_2 = 0 \\ 4x_2 - x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 - \sqrt{3} \lor x_2 = 2 + \sqrt{3} \\ x_1 = 4 - x_2 \\ 1 - x_1 x_2 \leqslant 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{3} \\ x_1 = 2 + \sqrt{3} \\ \mu_2 = (2 - \sqrt{3})\mu_1 - 2(2 + \sqrt{3}) \\ \mu_2 = (2 + \sqrt{3})\mu_1 - 2(2 - \sqrt{3}) \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{3} \\ x_1 = 2 + \sqrt{3} \\ \mu_2 = -8 \\ \mu_1 = -2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_1 = -2 \land$$

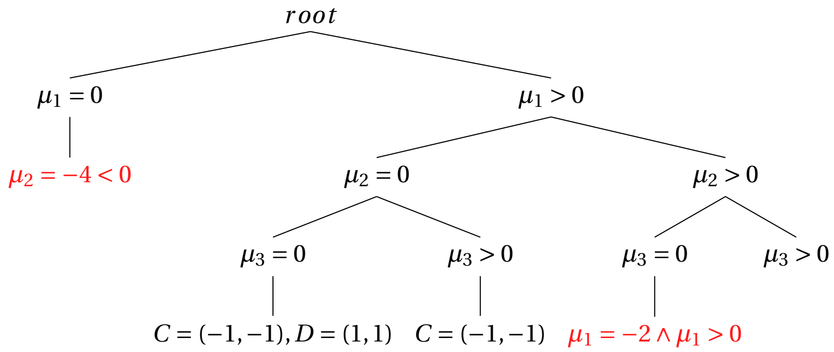


Figura B.29: Albero di ricerca, sesto step

Investigo l'opzione $\underline{\boldsymbol{\mu}} > \underline{\mathbf{0}}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ 2x_2 - \mu_1 x_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ 1 - x_1 x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 = 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 > 0 \end{cases}$$

Non esiste un'intersezione tra i tre vincoli attivi.

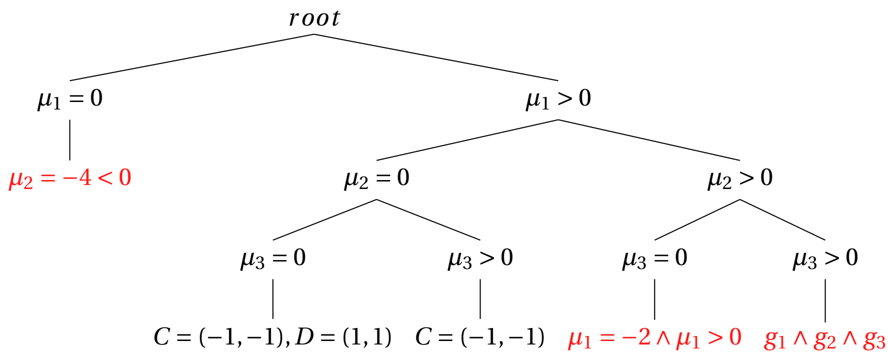


Figura B.30: Albero di ricerca, terminato

Sono stati identificati due punti di ottimo locali: $C = (-1,-1), f(x) = 2$ e $D = (1,1), f(x) = 2$.

B.4.5 Esercizio 3

Dato il problema di programmazione a due obbiettivi:

$$
\begin{aligned}
&\max f_1(x) = x_1 - 2x_2 \\
&\max f_2(x) = x_2 \\
&\text{con } x \in X = \{x : 2x_1 + x_2 \leqslant 5; 0 \leqslant x_1 \leqslant 2; x_2 \geqslant 0\}
\end{aligned}
$$

a) Si ricavi la regione paretiana con il metodo dei vincoli (sostituendo la seconda funzione obiettivo con un vincolo) e la si disegni nello spazio delle variabili $x_1 - x_2$ e in quello degli obiettivi $f_1 - f_2$.

b) Si determini graficamente la soluzione ottima con il metodo dei pesi, ponendo i pesi dei due obiettivi pari rispettivamente ad $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

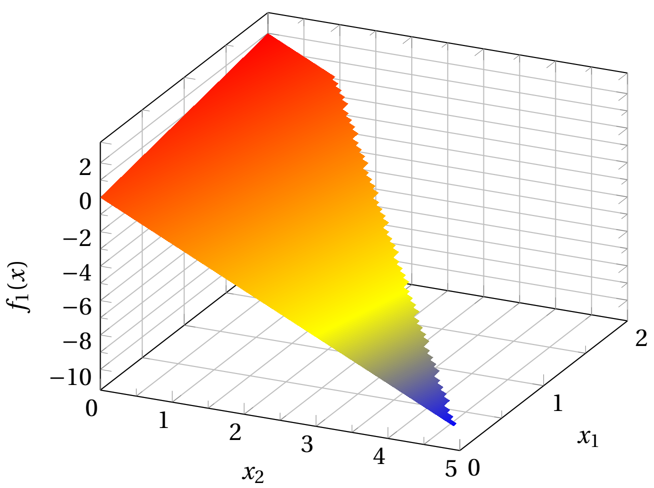
B.4.6 Soluzione esercizio 3

Riscrivo il problema

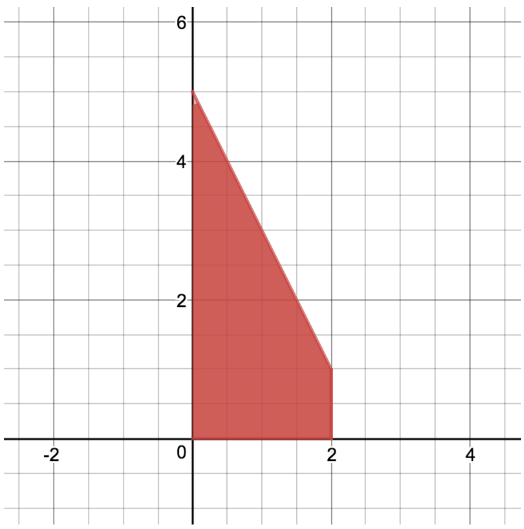
La funzione obbiettivo f_2 è da massimizzare, per cui il vincolo che costruisco è $f_2 \geqslant \epsilon_2$.

$$
\begin{aligned}
\max f_1(x) = x_1 - 2x_2& \\
x_2 \geqslant \epsilon_2& \\
2x_1 + x_2 \leqslant 5& \\
0 \leqslant x_1 \leqslant 2& \\
x_2 \geqslant 0&
\end{aligned}
$$

Dominio del problema



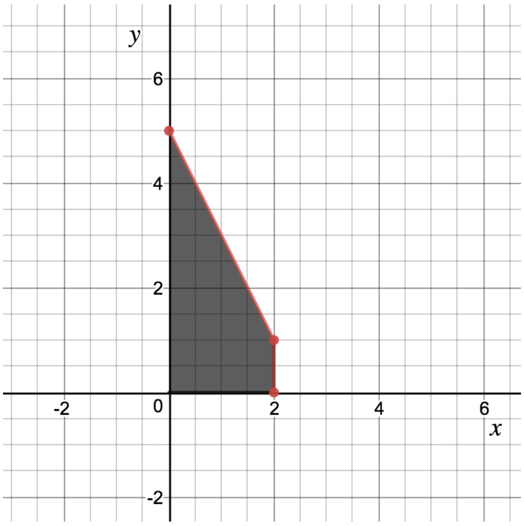
(a) La funzione $f(x)$



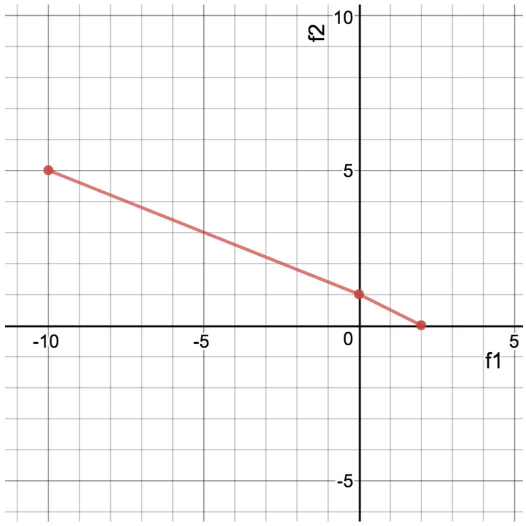
(b) Dominio della funzione $f_1(x)$

Identifico lo standard ϵ_2

Al variare del parametro ϵ_2 nel dominio di interesse $[0,5]$ la funzione obbiettivo f_1 assume il massimo inizialmente in $(0,5)$, quindi si sposta sul segmento di destra sino al punto $(2,1)$ ed infine si sposta gradualmente sino a $(2,0)$.



(a) Regione paretiana nello spazio x_1, x_2



(b) Regione paretiana nello spazio f_1, f_2

Risoluzione con metodo dei pesi

$$\frac{1}{2}(x_1 - 2x_2) + \frac{1}{2}(x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

Il punto di massimo assunto dalla funzione del dominio di definizione è pari a $(\max(x_1), \min(x_2))$, cioè $(2, 0)$ che fa parte della regione paretiana identificata al punto precedente.

B.4.7 Esercizio 4

Si spieghi sotto quali condizioni è possibile ricavare da una matrice di confronti a coppie un vettore di pesi.

Se possibile, lo si faccia sulla seguente matrice.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 6 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 12 \\ 1/6 & 1/2 & 1/12 & 1 \end{bmatrix}$$

Si spieghi un metodo qualsiasi per ricavare un vettore di pesi da una matrice che non lo consente direttamente.

B.4.8 Soluzione esercizio 4

Condizioni per ottenere un vettore di pesi

Una matrice di confronti a coppie per consentire di ottenere un vettore di pesi deve essere **coerente**, cioè possedere le seguenti proprietà:

Positività Tutti i pesi della matrice devono essere positivi:

$$\lambda_{lm} > 0$$

Reciprocità Tutti i pesi devono essere l'inverso del proprio simmetrico:

$$\lambda_{lm} = \frac{1}{\lambda_{ml}}$$

Coerenza Dati due pesi con indici successivi, da essi si deve poter determinare il terzo:

$$\lambda_{ln} = \lambda_{lm}\lambda_{mn}$$

Calcolo del vettore di pesi

La matrice M rispetta le proprietà di positività, di reciprocità e di coerenza, per cui si può procedere a calcolare il vettore dei pesi:

$$\omega_i = \frac{\boldsymbol{M}_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 2/21 \\ 4/7 \\ 1/21 \end{bmatrix}$$

Ricostruzione di matrici coerenti

Si procede risolvendo il problema di minimizzazione seguente, dove Λ è la matrice costituita dai rapporti stimati dal decisore, W la matrice costituita dai rapporti $\frac{\omega_l}{\omega_m}$.

$$\min_{\omega} \|W - \Lambda\|$$
$$\sum_{l \in P} \omega_l = 1$$
$$\omega_l \geqslant 0 \quad l \in P$$

Il valore ottimo della funzione obbiettivo si può assumere come misura dell'incoerenza iniziale.

Per tenere conto dell'incoerenza del decisore è stato anche proposto di sostituire i valori stimati λ_{lm} con intervalli e di definire la norma componendo le distanze fra ciascun rapporto $\frac{\omega_l}{\omega_m}$ e l'intervallo corrispondente, anziché il valore stimato.

B.4.9 Esercizio 5

Viene dato il seguente problema di programmazione in condizioni di incertezza, i cui valori indicano utilità:

$u_{\omega a}$	a_1	a_2	a_3	a_4
ω_1	50	40	60	90
ω_2	10	30	20	0

a) Si indichi se vi sono alternative dominate e quali alternative le dominano.

b) Si indichi lalternativa scelta con il criterio del caso pessimo.

c) Si mostri come cambia lalternativa scelta con il criterio del caso medio al variare della probabilità $\pi(\omega_1)$ del primo scenario.

B.4.10 Soluzione esercizio 5

Alternative dominate

Un'alternativa domina un'altra quando, senza applicare particolari criteri, questa è migliore per almeno uno degli scenari ed uguale in tutti gli altri. Cerchiamo la soluzione che dia scenari a valore massimo poichè i valori rappresentano utilità.

In questo caso, l'alternativa solamente $a_3 \prec a_1$, mentre non è possibile affermare nulla delle altre che sono preferibili l'una alle altre per almeno uno scenario.

Criterio del caso pessimo

Nel criterio del caso pessimo, si assume che qualsiasi scelta venga effettuata accadrà il suo corrispondente caso pessimo. La scelta con scenario pessimo migliore è a_2.

$u_{\omega a}$	a_1	a_2	a_3	a_4
ω_1	50	40	60	90
ω_2	10	30	20	0

Tabella B.8: Casi pessimi in rosso

Caso medio

Il caso medio (suppongo sia, dato che non appare nelle dispense) il caso di Hurwicz con coefficiente della combinazione convessa pari $\pi(\omega_1)$ per il primo scenario (che coincide sempre con il caso ottimo) e $1-\pi(\omega_1)$ per il secondo (che coincide sempre con il caso pessimo).

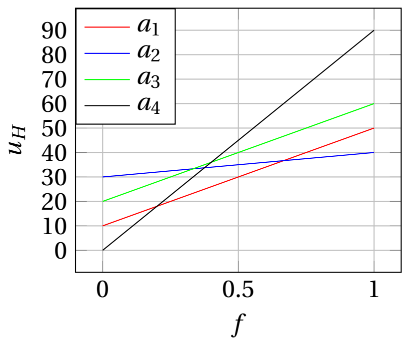
	a_1	a_2	a_3	a_4
u_H	$50\pi(\omega_1)+10(1-\pi(\omega_1))$	$40\pi(\omega_1)+30(1-\pi(\omega_1))$	$60\pi(\omega_1)+20(1-\pi(\omega_1))$	$90\pi(\omega_1)$

	a_1	a_2	a_3	a_4
u_H	50	40	60	90

(a) Caso $\pi(\omega_1)=1$: viene scelta a_4

	a_1	a_2	a_3	a_4
u_H	10	30	20	0

(b) Caso $\pi(\omega_1)=0$: scelta a_2



(c) L'utilità u_H al variare della probabilità

B.4.11 Esercizio 6

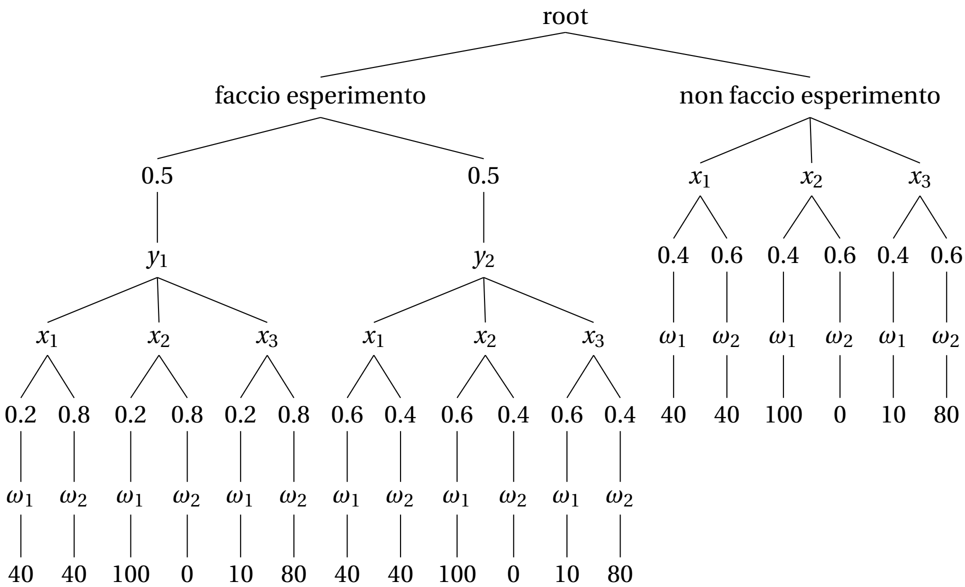
Si consideri un problema di teoria delle decisioni con 3 soluzioni alternative, indicate da x_1, x_2 e x_3 e 2 stati di natura, indicati da ω_1 e ω_2.

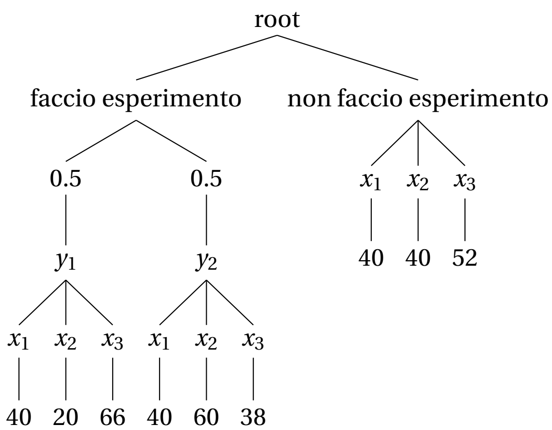
Le seguenti tabelle riportano la funzione $f(x,\omega)$ che rappresenta dei benefici e le probabilità congiunte $p(\omega, y)$ degli stati di natura e dei risultati di un esperimento che può avere 2 esiti, indicati da y_1 e y_2. Qual è la strategia ottima?

$f(x,\omega)$	ω_1	ω_2
x_1	40	40
x_2	100	0
x_3	10	80

$p(\omega, y)$	ω_1	ω_2
y_1	0.1	0.4
y_2	0.3	0.2

B.4.12 Soluzione esercizio 6





Eseguendo l'esperimento la scelta migliore risulta essere x_3, scelta che mantiene l'ottimalità anche quando si sceglie di non eseguire l'esperimento.

B.4.13 Esercizio 7

Nel seguente gioco a due persone, i numeri corrispondono a payoff, cioè benefici:

	a	b	c
a	$(7,17)$	$(21,21)$	$(14,11)$
b	$(10,5)$	$(14,4)$	$(4,3)$
c	$(4,4)$	$(7,3)$	$(10,25)$

1. Si determinino le strategie dominate, se ve ne sono.
2. Si determinino i punti di equilibrio, se ve ne sono.
3. Si spieghi che cosa si intende con gioco della caccia al cervo.
4. Si spieghi che cosa si intende con gioco del matrimonio perfetto.

B.4.14 Soluzione esercizio 7

Strategie dominate

Per il giocatore di riga la terza riga è dominata dalla prima (tabella B.35a). Per il giocatore di colonna, la seconda colonna domina sia la prima che la terza (tabella B.35b). Eliminate quest'ultime per il giocatore di riga la strategia a risulta essere dominante (B.35c).

	a	b	c
a	$(7,17)$	$(21,21)$	$(14,11)$
b	$(10,5)$	$(14,4)$	$(4,3)$

(a) Elimino riga c

	b
a	$(21,21)$
b	$(14,4)$

(b) Elimino colonna a e b

	b
a	$(21,21)$

(c) Elimino riga b

Figura B.35: La strategia dominante risulta essere (a,b)

Punti di equilibrio

	a	b	c
a	$(7,17)$	$(\tilde{21},\tilde{21})$	$(\tilde{14},11)$
b	$(\tilde{10},5)$	$(\tilde{14},4)$	$(4,3)$
c	$(4,4)$	$(7,3)$	$(10,\tilde{25})$

Tabella B.9: Esiste un equilibrio di Nash in (a,b)

Gioco della caccia al cervo

Nel gioco della caccia al cervo sono considerati due cacciatori che devono decidere se cercare di collaborare ed abbattere una preda grossa oppure cacciare indipendentemente e catturare qualcosa di piccolo.

	C	NC
C	$(\tilde{3},\tilde{3})$	$(0,2)$
NC	$(2,0)$	$(\tilde{1},\tilde{1})$

Tabella B.10: Gioco della caccia al cervo

Se entrambi i cacciatori collaborano hanno il payoff massimo, abbattendo la preda grande. Quando uno cerca di collaborare e l'altro va indipendentemente solo il secondo ha un piccolo payoff ed il primo niente, mentre quando entrambi vanno indipendenti possono ottenere un piccolo payoff.

Gioco del matrimonio perfetto

Nel gioco del matrimonio perfetto si considerano due coniugi che devono decidere se collaborare o meno per questioni di casa.

	C	NC
C	$(\tilde{3}, \tilde{3})$	$(\tilde{1}, 2)$
NC	$(2, \tilde{1})$	$(0, 0)$

Tabella B.11: Gioco del matrimonio perfetto

La soluzione migliore si ha quando entrambi collaborano, ma nel caso in cui uno non collabori e l'altro voglia collaborare, per chi collabora è comunque meglio continuare a collaborare rispetto a smettere di collaborare anche lui.

B.5 Exam paper- 24 January 2018

B.5.1 Exercise 1

Describe what is intended with the term *preference relationship* in a complex decision problem.

Represent with a digraph the following preference relationship Π:

Π	f	f'	f''	f'''	f''''
f	1	0	1	1	1
f'	1	1	0	1	1
f''	0	0	1	1	1
f'''	0	0	0	1	0
f''''	0	0	1	0	1

and build the *incomparability relationship* associated to it.

Determine if the relationship Π holds the reflexive, transitivity, antisymmetric and completeness property, specifying if it is an order relationship and if so, of which kind.

B.5.2 Exercise 1 resolution

A preference relationship $\Pi : D \to 2^{F \times F}$ is a binary relationship that associates to every decision maker a subset of tuples of impacts.

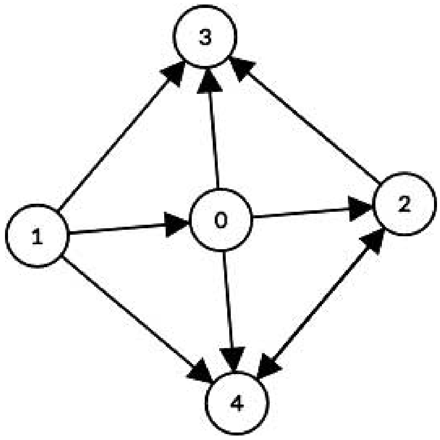


Figura B.36: Preference relationship oriented graph

Reflexive property The relationship *holds* the reflexivity property as every impact is preferable to itself.

Transitive property The relationship *doesn't hold* the transitive property since the impact f'''' is preferable to the impact f'' and f'' is preferable to f''', but $f'''' \not\preceq f'''$.

Antisymmetric property The relationship *doesn't hold* the antisymmetric property since the impact f'' and f'''' are interchangeable without being the same impact.

Completeness property The relationship *doesn't hold* the completeness property since the impact f'''' and f''' have no preference relationship.

Every order relationship requires the transitive property, and this relationship doesn't hold it so it is not an order relationship.

B.5.3 Exercise 2

Define briefly what is a **problem of mathematical programming**.

Given the following problem of mathematical programming:

$$\begin{aligned} \min f(x) = 2x_1 + x_2 \\ g_1(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0 \\ g_3(x) = -x_1 \leqslant 0 \end{aligned}$$

a) Represent the problem graphically.

b) Determine candidates points according to the KKT conditions, in particular those of global minimum.

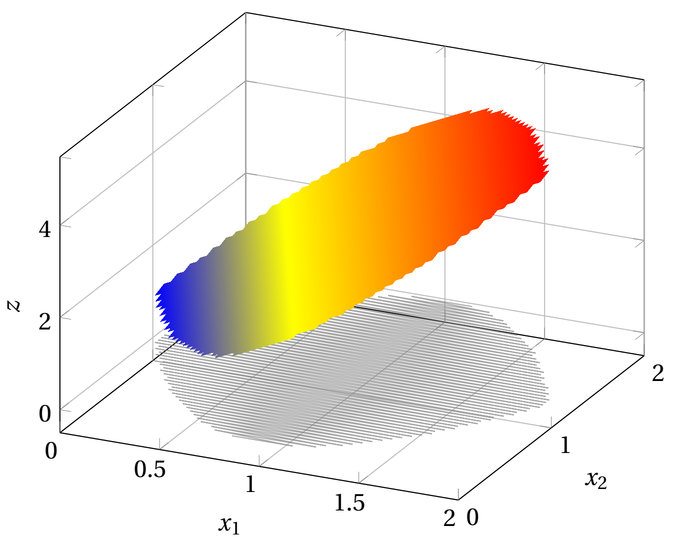
B.5.4 Exercise 2 resolution

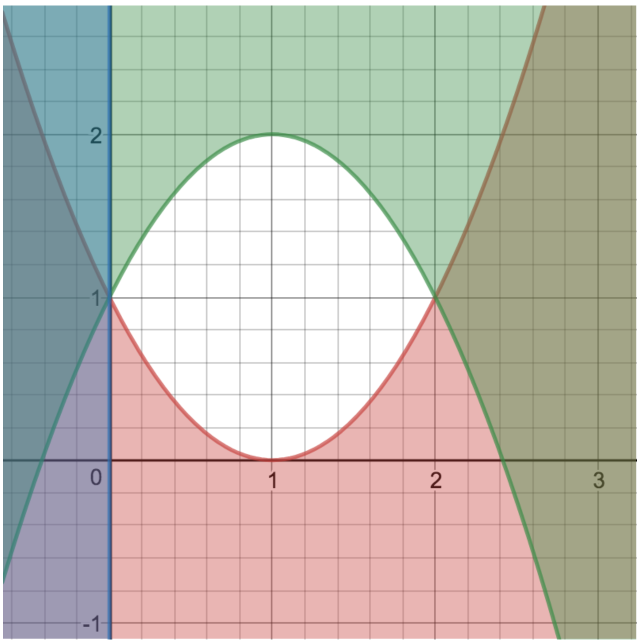
Problem of mathematical programming

A problem of mathematical programming is the simplest kind of decision problem:

1. The preference relationship Π holds a known value function.
2. The system is deterministic, meaning there's only one scenery.
3. There's only one decision maker.

Graphical representation





Irregular points

Gradients

$$\nabla f_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The gradients are never equal to zero.

Constraints intersections

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ g_3(x) = -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

The point $A = (()0, 1)$ is irregular for 2 reasons:

1. The gradients matrix is singular in A.
2. There are more constraints active in A than there are variables.

Therefore, A is a candidate point.

KKT conditions

Lagrangian relaxation

$$L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

System of the KKT conditions

$$\begin{cases} L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \mu_1(x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1) = 0 \\ \mu_2(x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ \mu_3(-x_1) = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ \mu_1 \geqslant 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Search tree We begin the search tree with μ_1:

root

$\mu_1 = 0$ $\mu_1 > 0$

Figura B.38: Search tree, step 1

Case $\mu_1 = 0$

$$\begin{cases} L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \mu_2(x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ \mu_3(-x_1) = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \geqslant 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_2 = -1$$

If we add the constrain $\mu_1 = 0$ the system becomes impossible.

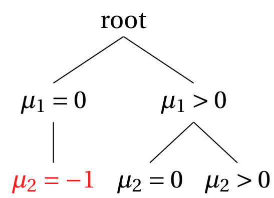


Figura B.39: Search tree, step 2

Case $\mu_1 > 0$

Case $\mu_2 = 0$

$$\begin{cases} L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \mu_1(x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1) = 0 \\ \mu_3(-x_1) = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \\ \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases}$$

We identify again the same candidate point, $A = (0, 1)$.

Case $\mu_2 > 0$

$$\begin{cases} L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_2 = -1$$

We expand over μ_3.

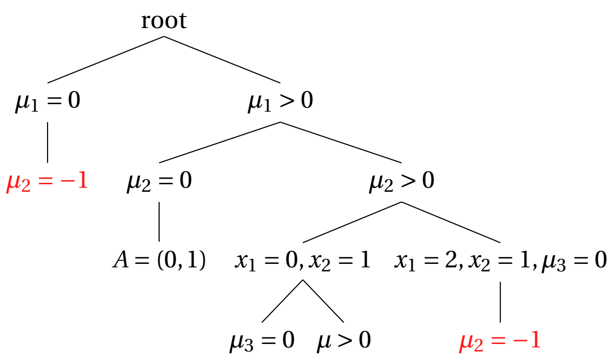


Figura B.40: Search tree, step 3

Case $\mu_3 = 0$

$$\begin{cases} L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_2 = 0 \wedge \mu_2 > 0$$

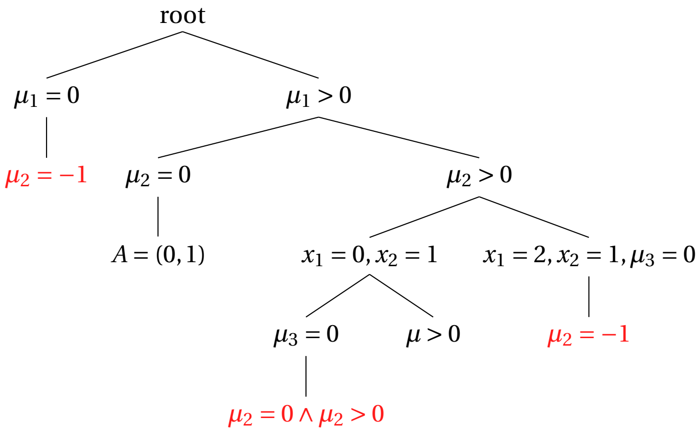


Figura B.41: Search tree, step 3

Case $\mu_3 > 0$

$$\begin{cases} L(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow -4\mu_1 - \mu_3 = 0 \wedge \mu_1 > 0 \wedge \mu_3 > 0$$

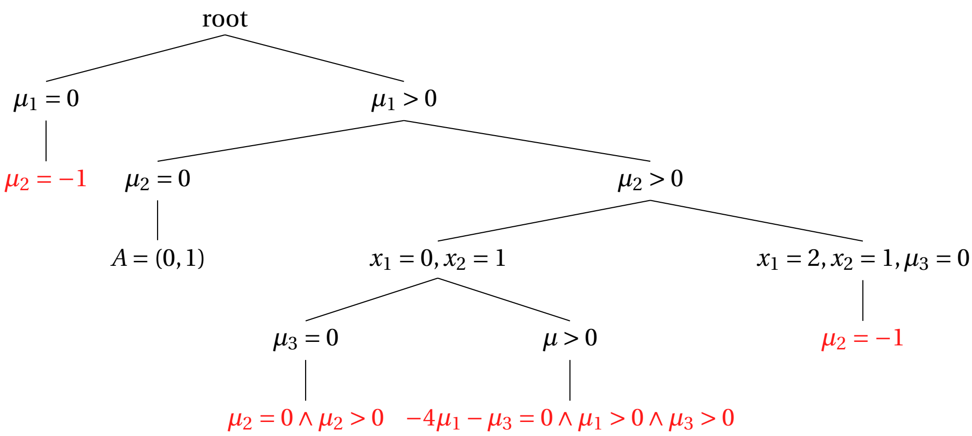


Figura B.42: Search tree, ended

The only candidate point is $A = (0, 1)$, with value $z = 1$.

B.5.5 Exercise 3

The following table holds values of 5 solutions with 2 cost criteria:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
f_1	20	60	30	50	100
f_2	70	20	30	40	0

a) Determine if there are dominated alternatives.

b) Determine the paretian frontier with the constraints method.

c) Determine the supported solutions and the support for each one.

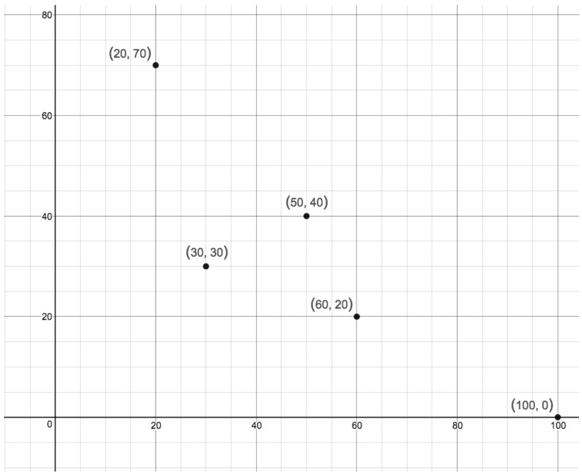
B.5.6 Exercise 3 resolution

a) Dominated alternatives

The solution a_3 dominates a_4.

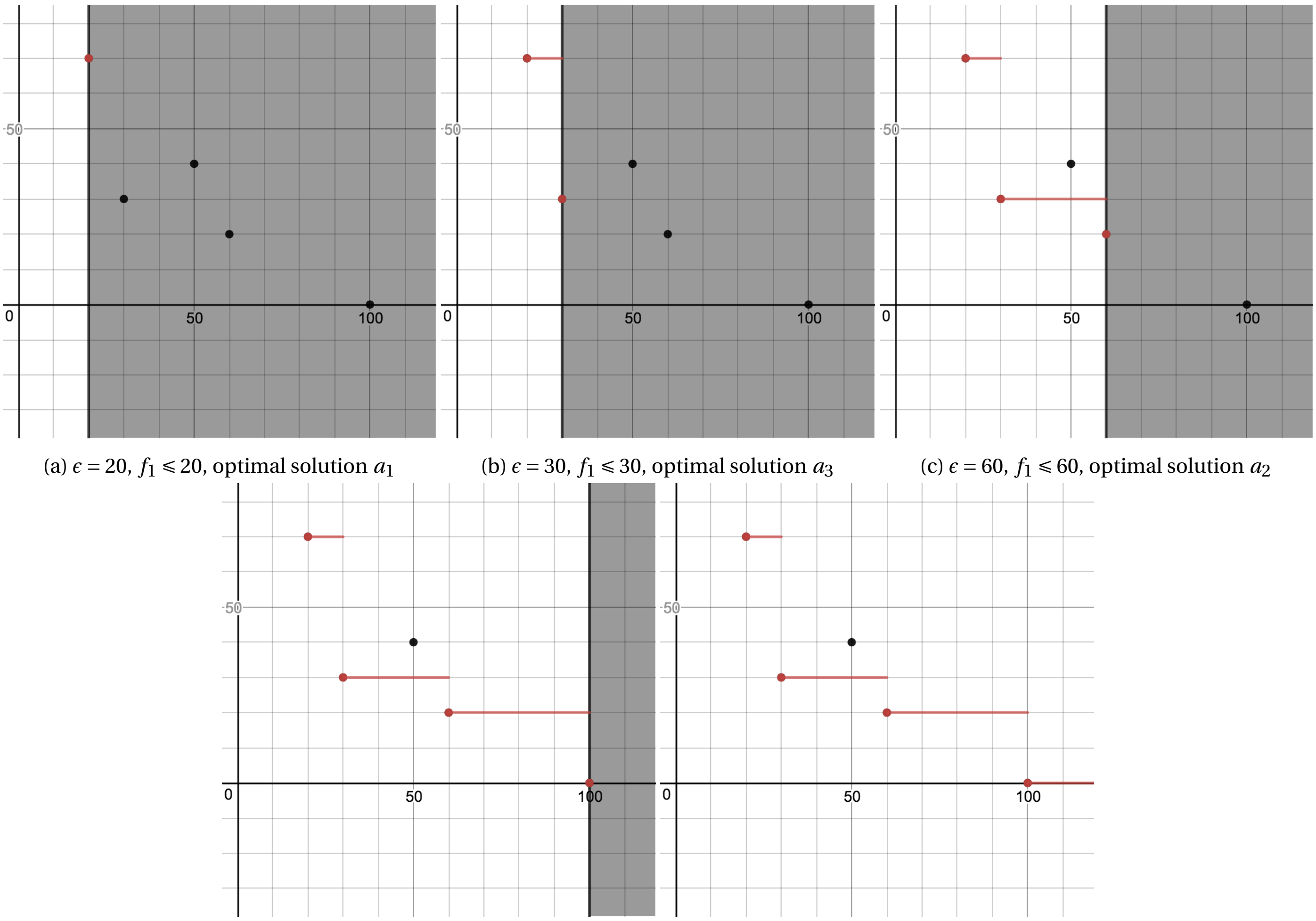
Constraints method

First of all we plot the points on the $f_1 - f_2$ plane:



Since it's a minimization problem (the indicator values are costs), the standard function will be of the kind: $f_1 \leqslant \epsilon$.

There are no solution for the standard $\epsilon < 20$, so it holds no interest.



(a) $\epsilon = 20$, $f_1 \leqslant 20$, optimal solution a_1

(b) $\epsilon = 30$, $f_1 \leqslant 30$, optimal solution a_3

(c) $\epsilon = 60$, $f_1 \leqslant 60$, optimal solution a_2

(d) $\epsilon = 100$, $f_1 \leqslant 100$, optimal solution a_5

(e) $\epsilon = \infty$, $f_1 \leqslant \infty$, optimal solution a_5

Figura B.43: Paretian frontier

Solutions support

Let's define ω_1 as the weight for the indicator f_1 and $\omega_2 = 1 - \omega_1$ for the indicator ω_2.

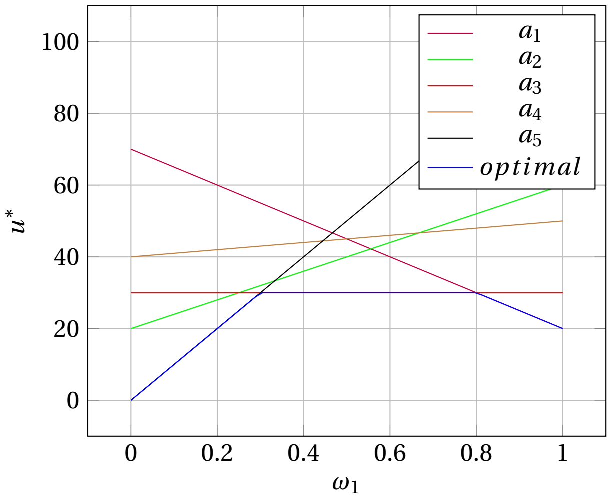


Figura B.44: Supports

For $\omega_1 \leqslant \frac{3}{10}$ the optimal solution is a_5.

For $\frac{3}{10} \leqslant \omega_1 \leqslant \frac{4}{5}$ the optimal solution is a_3.

For $\omega_1 \geqslant \frac{4}{5}$ the optimal solution is a_1.

B.5.7 Exercise 4

1. Describes the limits that the *hierarchical analysis* attributes to the classical multiple attributes utility theory.
2. Which solutions does it propose to resolve them?
3. What are the limits of hierarchical analysis?

B.5.8 Exercise 4 resolution

Limits of classical multiple attributes utility theory

1. The construction of the utilities functions is subject to large approximation errors.
2. The weight estimation is subject to large approximation errors when the number of the attributes is high.
3. The approximation errors sum in cascade.

Hierarchical analysis proposal

1. It uses **pairwise comparisons** to value utilities instead of direct measurement.
2. It uses **qualitative scales** instead of quantitative scales.
3. It uses **pairwise comparisons** to value the weights of attributes.
4. Structures attributes in a hierarchy.
5. Weights are recombined to each layer of the hierarchy.

Limits of hierarchical analysis

1. The hierarchical analysis can be applied only to finite problems with a small number of solutions.
2. It is affected from the **rank reversal**, even though this can be resolved via **absolute scales** confronting classes of alternatives instead of the solutions.

B.5.9 Exercise 5

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
f_1	40	50	20	30	60
f_2	60	40	90	30	20

a) Describe the Wald maximin worst case criterion.

b) Describe the Savage minimax regret criterion.

c) Apply both criterion to the giving table, containing utilities.

B.5.10 Exercise 5 resolution

Wald maximin worst case criterion

This criterion suggests to suppose the worst case for each option as certain, and therefore to pick the lesser evil: the choice whose worst case has the best utility.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u_{Wald}	40	40	20	30	20

Tabella B.12: Worst cases

The worst case criterion suggests either the a_3 or the a_5 solution.

Savage maximin regret criterion

This criterion suggests to minimize the distance from the optimal scenario and then select following the worst case criterion, meaning the choice with the maximum minimum distance from the optimal scenario.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
u_{Savage}	20	10	0	30	0

Tabella B.13: Distance from optimal case

The worst case criterion suggests the a_4 solution.

B.5.11 Exercise 6

Model and resolve the following decision problem in uncertainty conditions.

We want to order a pizza from a distant restaurant that sells it at \$10. It is possible to get it personally or to request the home delivery, which costs \$2, with a probability of the 2% that the delivery delays and the pizza gets cold. In this scenario the pizza is free, and we can either choose to eat it as such with a discomfort measurable as a expenditure of \$5 or to heat it up again in the home oven, with a probability of the 10% to burn it and having to go to the restaurant downstairs, where a pizza costs \$15.

If one choses to retrieve the pizza by himself, there's a probability of the 10% that the pizza gets cold. In this scenario, one can either eat it cold with a discomfort of \$5 or ask to the restaurant for having it re-heated, with a cost of \$1 and a discomfort measurable as an expenditure of \$1.

B.5.12 Exercise 6 resolution

- root
  - Home delivery
    - 2%: The pizza gets cold
      - Eat it cold
        - \$5
      - Try to re-heat it
        - 10%: The pizza gets burned
          - You have to buy it downstairs
            - \$15
        - 90%: The pizza is heated
          - \$0
    - 98%: The pizza is fine
      - \$10
  - Personal retrieval
    - 10% You are late
      - Eat it cold
        - \$15
      - Re-heat it
        - \$12
    - 90% You are on time
      - \$10

Resolving the tree with optimizing for minimum cost.

- root
  - Home delivery
    - 2%: The pizza gets cold
      - Eat it cold
        - \$5
      - Try to re-heat it
        - \$1.5
    - 98%: The pizza is fine
      - \$10
  - Personal retrieval
    - \$10.2

- root
  - Home delivery
    - 2%: The pizza gets cold
      - Try to re-heat it
        - \$1.5
    - 98%: The pizza is fine
      - \$10
  - Personal retrieval
    - \$10.2

- root
  - Home delivery
    - \$9.83
  - Personal retrieval
    - \$10.2

root

Home delivery

$9.83

B.5.13 Exercise 7

a) Given the zero sum game above, which strategies does the worst case criterion suggest to the players?

b) Determine if the game admits pure strategies of equilibrium.

c) Determine if the game admits mixed strategies of equilibrium.

B.5.14 Exercise 7 resolution

Worst case criterion

The worst case criterion suggest to a player that the other player will try to inflict as much damage as possible to the first one.

In particular, this being a zero sum game, maximizing the damage to the opponent means also maximizing the gains one receives from a given strategy.

In this particular game, the row player will assume the column player will choose a, so to maximize the damage with the value 0. Therefore the row player will choose the pure strategy of playing a.

Vice versa, the column player will assume the row player wants to play with the choice b, as it contains the value 4 (that for the column players means a cost of 4). Therefore the column player will choose a, so to avoid the worst case.

Pure strategies of equilibrium

Pure strategies of equilibrium are Nash equilibriums.

We proceed by highlighting for the row player (green) in each column the best possible payoff, then for the column player (red), for each row we choose the best possible payoff. When these overlap, we've found an equilibrium.

	a	b
a	3	1
b	0	4

Tabella B.14: No Nash equilibriums exist

No colors overlap, so no equilibriums exist.

Mixed strategies of equilibrium

We move from the deterministic realm of pure strategies to the probabilistic one of mixed strategies.

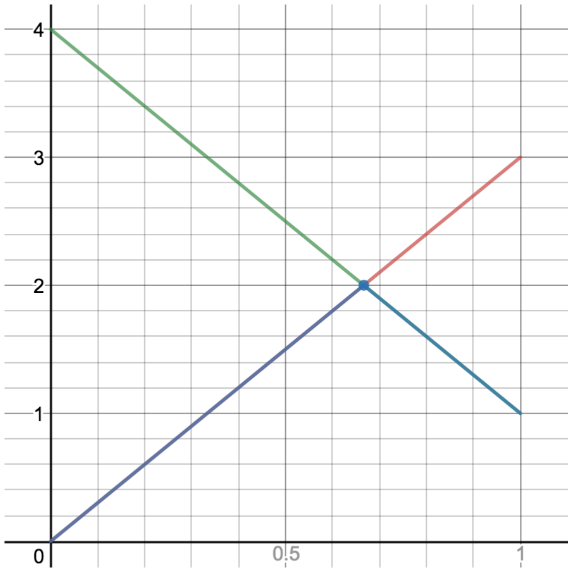
For each player, we plot the segment representing the expected value of the game of a player using a mixed strategy given that the other player will choose one of the pure strategies.

We'll use a weight α for the probability of choosing a and a weight $(1-\alpha)$ for the probability of playing b.

Finally, we choose the option that, in the worst case, is optimal and maximize this option, keeping in mind that for the column player the numbers are costs.

$$E\left[\xi^{(r)}, a\right] = 3\alpha + 0(1-\alpha) = 3\alpha$$
$$E\left[\xi^{(r)}, b\right] = 1\alpha + 4(1-\alpha) = 4 - 3\alpha$$

(a) Expected game values for the row player

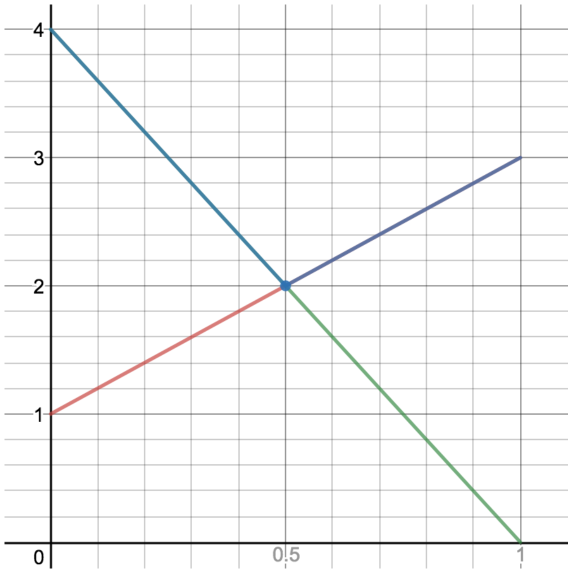


(b) The equilibrium is $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

Figura B.45: Mixed strategy equilibrium for the row player

$$E\left[\xi^{(c)}, a\right] = 3\alpha + 1(1-\alpha) = 1 + 2\alpha$$
$$E\left[\xi^{(c)}, b\right] = 0\alpha + 4(1-\alpha) = 4 - 4\alpha$$

(a) Expected game values for the row player



(b) The equilibrium is $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

Figura B.46: Mixed strategy equilibrium for the column player

The mixed point of equilibrium therefore is $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.

B.5.15 Exercise 8

a) Describe the concept of constitution as a method to aggregate preferences.

b) Describe the plurality system method to aggregate preferences.

c) Describe the concept of decisive set for a tuple of impacts (f, f').

d) Describe the concept of dependency from irrelevant alternatives, explaining why one would try to avoid it in group decision.

B.5.16 Exercise 8 resolution

Constitution

A constitution is a function that associates to every set of weak orders relationships on a given set of solutions or alternatives a weak order relationship of the group on the same set of solutions.

Plurality system

The alternative that is more commonly accepted as the optimal by the decision makers. In case of a draw, the solution less commonly accepted is eliminated and the process is repeated.

This method has the defect that it allows solutions strongly desired by a minority and just slightly wanted by a majority to win.

Decisive set

The group of decision makers that makes a given impact preferable to a second one in the group weak order.

Dependency from weak alternatives

The concept of dependency from weak alternatives describe the situation when a value function bonds the value of a better alternative to the existence of a worst one, for example the method of Borda. This can lead to the **rank reversal**, a phenomenon for which the optimal solution can vary when one deletes the worst one.

It is one of the most common issues in politics, when the order a set of laws is approved or not changes which laws are approved.