METODI E MODELLI PER LE DECISIONI

Prof. Roberto Cordone
6 CFU

Luca Cappelletti

Lecture Notes
Year 2017/2018

Magistrale Informatica
Università di Milano
Italy
2 novembre 2017

Indice

Capitolo 1

Introduction

1.1 Dispense

Sono disponibili dispense sul sito del corso.

Capitolo 2

Problemi di Decisione

2.0.1 Problemi complessi

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figura 2.1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1. X rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **soluzioni** o anche delle **soluzioni ammissibili**.
2. Ω rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3. F rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4. f rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5. D rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6. Π insieme delle **preferenze**.

X viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{se } false \in X \Rightarrow false = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine x_i viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

Ω viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{se } \omega \in \Omega \Rightarrow \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine ω_i viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

F viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{se } false \in F \Rightarrow false = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le $f_l \in \mathbb{R}$ vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obbiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La f viene definita come:

$$f(false, \omega) : X \times \Omega \to F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La Π viene definita come

$$\Pi : D \to 2^{F \times F}$$

, dove $\pi_d \subseteq F \times F$. $F \times F$ rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre $2^{F \times F}$ rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo $F = \{f, f', f''\}$, otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f, f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \preccurlyeq_d f' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il $\preccurlyeq_d$, minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi $\succcurlyeq_d$.

Definizione 2.0.1 (indifferenza) *Due preferenze f' e f'' sono dette **indifferenti** quando:*

$$f' \; f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.0.2 (Preferenza Stretta) *Una preferenza f' è detta **preferenza stretta** quando:*

$$f' <_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 2.0.3 (Incomparabilità) *Due preferenze f' e f'' sono dette **incomparabili** quando:*

$$f' \Join_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \not\preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

2.0.2 Proprietà delle preferenze

Proprietà riflessiva

$$f \preccurlyeq f \qquad \forall f \in F$$

Proprietà di completezza

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \not\preccurlyeq f' \Rightarrow f' \preccurlyeq f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà di anti-simmetria

$$f \preccurlyeq f' \land f' \preccurlyeq f \Rightarrow f' = f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà Transitiva

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale. Viene generalmente considerata verificata.

$$f \preccurlyeq f' \land f' \preccurlyeq f'' \Rightarrow f \preccurlyeq f'' \qquad \forall f, f', f'' \in F$$

2.0.3 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore v, ha in mente una relazione di preferenza Π **riflessiva**, **completa**, **non necessariamente anti simmetrica** e **transitiva**. Quando una relazione possiede queste proprietà viene chiamata **ordine debole**, debole perché possono esiste dei *pari merito*. Un campo di applicazione sono i campionati sportivi.

$$\exists v : F \to \mathbb{R} : f \preccurlyeq f' \Leftrightarrow v_{(f)} \succcurlyeq v_{(f')}$$

Condizioni di preordine

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** si ottiene la condizione di **preordine**.

Ordini deboli

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **completezza** si ha la condizione di ordine debole, che è molto utilizzata.

Ordine parziale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine parziale**.

Ordine totale

Avendo le condizioni di **riflessività**, **transitività**, **completezza** e **antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine totale**.

2.0.4 Tabella riassuntiva

Proprietà	**Preordine**	**Ordine debole**	**Ordine parziale**	**Ordine totale**
Riflessività	✓	✓	✓	✓
Transitività	✓	✓	✓	✓
Completezza		✓		✓
Antisimmetria			✓	✓

2.1 Conto di Borda

La formula in figura 2.2 utilizzato per costruire una **funzione valore**:

$$v(f) = |\{f' \in F : f \preccurlyeq f'\}|$$

Figura 2.2: Conto di Borda

Il valore di un impatto è pari al numero di impatti cui esso è preferibile, compreso l'impatto stesso.

Quando la cardinalità dell'insieme è $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ è possibile ottenere una **funzione valore**, ma quando ci si trova in condizioni come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che non risultano più mappabili sull'insieme $\mathbb{R}$ non risulta più possibile realizzare una **funzione valore**.

2.2 Problemi semplici

Un problema viene detto *semplice* quando essi possiedono queste caratteristiche:

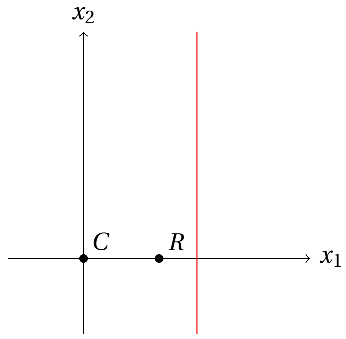
1. $\exists v(f)$ conforme
2. $|\Omega| = 1 \Rightarrow f : X \to \mathbb{R}$, cioè esiste un $f(x)$
3. $|D| = 1$
4. $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0 \forall j = 1, \ldots, n\}$ con $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$

Capitolo 3

Programmazione matematica

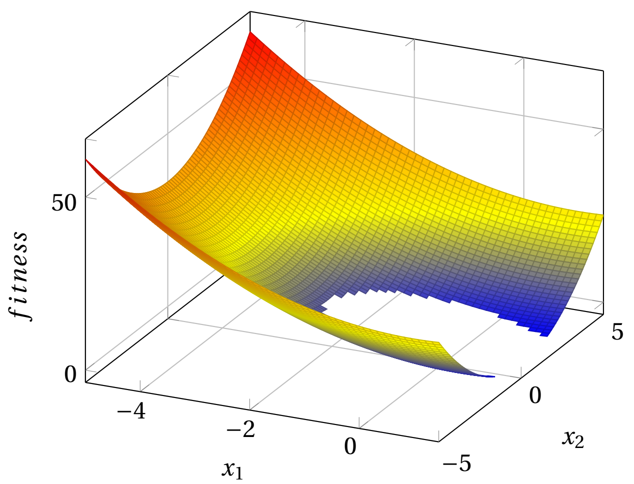
Minimizzo $f(x)$, con la condizione di $g_j(x) \leq 0 \forall j = 1 \ldots n$.

Supponiamo di voler identificare la posizione migliore di una discarica, e che il punto in cui i rifiuti vengono prodotti sia $R = (1,0)$, che in punto $C = (0,0)$ vi sia in una città e che si debba avere una distanza di almeno 2 dalla città. Inoltre, la nostra discarica deve trovarsi a sinistra di $\frac{3}{2}$, cioè $x_0 < \frac{3}{2}$, perché li vi è un confine.



La funzione di minimo che vado a definire risulta:

$$\min f(x) = \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1 < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$



3.1 Programmazione matematica

Definizione 3.1.1 *Ottimo locale* $\tilde{x}$ *ottimo locale* $\Leftrightarrow f(x) \geq f(\tilde{(x)}) \forall x \in \mathbb{U}_{\tilde{x},\epsilon}$

Dato $\tilde{x}$ come un **ottimo locale**, e $\xi(\alpha)$ un **arco ammissibile** con la caratteristica di:

$$\xi(0) = \tilde{x} \qquad \xi(alpha) \in X \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha})$$

Allora vale che ξ risulta **non migliorante**:

$$f(\xi(\alpha)) \geq f(\tilde{x}) = f(\xi(0)) \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha})$$

La formula sovra riportata può essere espressa più semplicemente tramite:

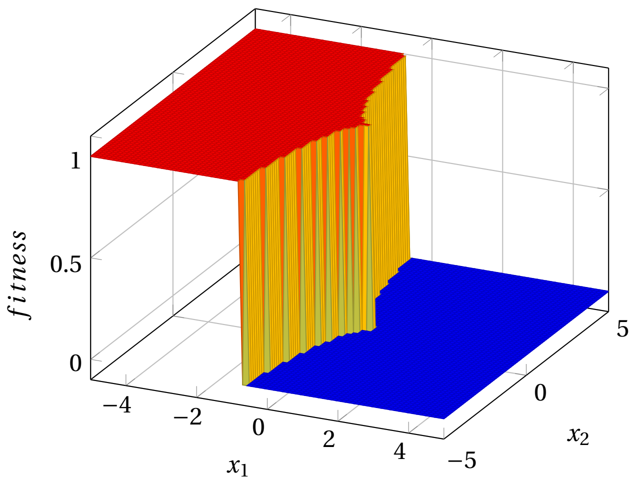
$$[\nabla f(\tilde{x})]^T P_\xi \geq \emptyset$$

Definizione 3.1.2 (Punti non regolari)

$$\tilde{x} \textit{ regolare } \Leftrightarrow \nabla g_j(\tilde{x}) \textit{per } g_j \textit{ attivo, con le varie funzioni } g_j \textit{ linearmente indipendenti}$$

Definizione 3.1.3 (Punti non regolari) *Sono dei punti per cui non vale*

$$[\nabla g_j \tilde{()}]^T P_\xi(\tilde{x}) \geq 0 \textit{ per } g_j \textit{ attivo} \Leftarrow \begin{cases} \xi \textit{ arco ammissibile} \\ \tilde{x} \textit{ ottimo locale} \end{cases} \Rightarrow [\nabla f(\tilde{x})]^T P_\xi \geq \emptyset$$



3.2 Lemma di Farkas

Non ho capito a che serve

$$C_j = \{p \in \mathbb{R}^2 : g_j^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.1: Cono direzioni "opposte" ai vettori g_j

$$C_f = \{p \in \mathbb{R}^2 : f^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.2: Cono direzioni "opposte" a f

Se $\exists \mu_j \geq 0 : f = \sum_j \mu_j g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - f^T p \leq 0 \forall p : g_j^T p \leq 0 \forall j$

Posso riscrivere questa formula usando i gradienti:

Se $\exists \mu_j \geq 0 : \nabla f = \sum_j \mu_j \nabla g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - \nabla f^T p \leq 0 \forall p : \nabla g_j^T p \leq 0 \forall j$

che cosa è la combinazione lineare? e convessa? e conica?

3.3 Altra roba che non capisco

Se $\widetilde(x)$ è un **ottimo locale** e **regolare**, allora $\exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\widetilde{x}) + \sum_{j:g_j \text{ attivo}} \mu_j \nabla g_j = \emptyset$

Questo viene posto a sistema con $\mu_j g_j(\widetilde{x}) = \emptyset \forall j = 1...n$:

$$\begin{cases} \exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\widetilde{x}) + \sum_{j:g_j \text{ attivo}} \mu_j \nabla g_j = \emptyset \\ \mu_j g_j(\widetilde{x}) = \emptyset \forall j = 1...n \\ g_j(\widetilde{x}) < 0 \Rightarrow \mu_j = 0 \\ g_j(x) \leq 0 \forall j = 1...m \end{cases}$$