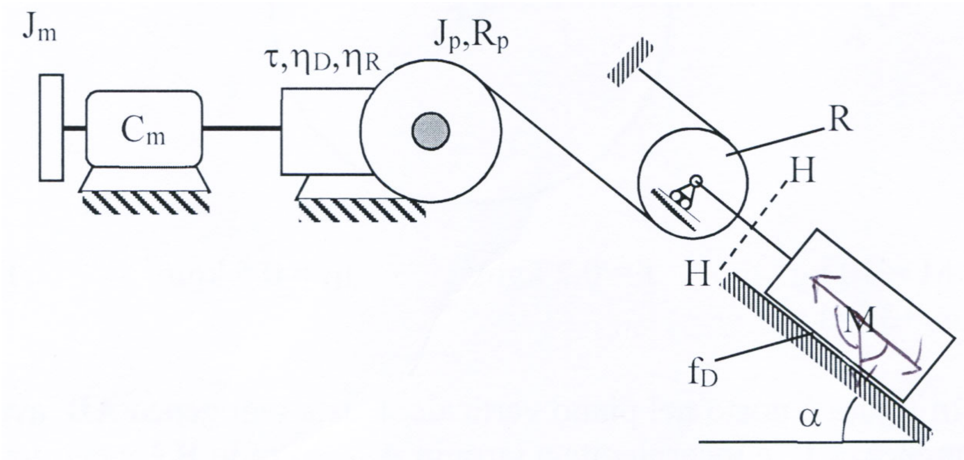
0.0.1 Terzo esercizio



$$M = 200\,Kg J_m = 0.04\,kgm^2 J_p = 3\,kgm^2 R_p = 0.25\,m R = 0.2\,m$$

$$\tau = \frac{1}{25}\mu_D = 0.9\mu_R = 0.8 f_D = 0.2 alpha = 30\,\text{deg}$$

L'impianto di sollevamento in figura è posto nel piano verticale ed è azionato attraverso un gruppo motore-riduttore di caratteristiche note: rapporto di riduzione τ e rendimento μ_D (per condizione di moto diretto) e μ_R (per condizioni di moto retrogrado). All'albero di uscita della trasmissione è collegata la puleggia di raggio R_p e momento di inerzia J_p su cui si avvolge la fune inestensibile. All'astra estremità, la fune si avvolge su un disco di raggio R (di massa e momento di inerzia trascurabili), il cui centro è vincolato a muoversi in direzione parallela al piano inclinato in figura, ed è infine vincolata a terra. Al centro del disco è collegata attraverso una seconda fune una massa M che si muove lungo il piano inclinato, con un coefficiente di attrito radente f_D.

Si chiede di calcolare:

1. L'accelerazione con la massa M in salita, assegnata la coppia motrice erogata dal motore, pari a $C_m = 20\,Nm$.

2. La coppia motrice a regime, con la massa M in salita.

3. Il tiro della fune nella sezione H-H nelle condizioni del punto 1.

0.0.2 Soluzione terzo esercizio (non verificata)

Primo punto

Legami cinematici Per prima cosa identifico i legami cinematici che legano accelerazione e velocità della massa M a velocità ed accelerazione angolari del motore.

La massa M è connessa al centro del disco di raggio R, e quest'ultimo individua il proprio CIR nel punto di tangenza con la corda inestensibile, che si muove alla velocità con cui la puleggia ruota.

$$v_p = \tau\omega_m R_p$$

$$v_m = v_D = \frac{\tau\omega_m R_p}{2}$$

È possibile fare un discorso analogo per le accelerazioni:

$$a_p = \tau\dot{\omega_m} R_p$$

$$a_m = a_D = \frac{\tau\dot{\omega_m} R_p}{2}$$

Potenza motrice

$$W_m = C_m\omega_m$$

Energia cinetica

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}Mv_m^2 + \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_p(\omega_m\tau)^2 \\
&= \frac{1}{2}M(\frac{\tau\omega_m R_p}{2})^2 + \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_p(\omega_m\tau)^2 \\
&= \omega_m^2(\frac{1}{2}M(\frac{\tau R_p}{2})^2 + \frac{1}{2}J_m + \frac{1}{2}J_p(\tau)^2) \\
&= \frac{1}{2}\omega_m^2(M(\frac{\tau R_p}{2})^2 + J_m + J_p(\tau)^2) \\
&= \frac{1}{2}\omega_m^2(\tau^2(\frac{1}{4}MR_p^2 + J_p) + J_m)
\end{aligned}$$

Derivo l'espressione così ottenuta ed ottengo:

$$\frac{dE_c}{dt} = \omega_m\dot{\omega}_m(\tau^2(\frac{1}{4}MR_p^2 + J_p) + J_m)$$

Tipo di moto

$$
\begin{aligned}
W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} &> 0 \\
C_m\omega_m - J_m\omega_m\dot{\omega}_m &> 0 \\
C_m - J_m\dot{\omega}_m &> 0 \\
20 - 0.04\dot{\omega}_m &> 0 \\
\dot{\omega}_m &< 500
\end{aligned}
$$

Procedo assumendo il tipo di moto **diretto**, andando a verificare poi se esso rispetta la disequazione.

Potenza resistente

$$
\begin{aligned}
W_r &= \vec{F}_g \bullet \vec{v}_m + \vec{F}_d \bullet \vec{v}_m \\
&= F_g v_m \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + F_d v_m \cos\pi \\
&= -\frac{1}{2}F_g v_m - F_d v_m
\end{aligned}
$$

La forza d'attrito dinamico è definita come:

$$
F_d = F_g f_s \cos\alpha = F_g f_s \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}F_g f_s
$$

$$
\begin{aligned}
W_r &= -\frac{1}{2}F_g v_m(1 - f_s\sqrt{3}) \\
&= -\frac{1}{2}Mg v_m(1 - f_s\sqrt{3}) \\
&= -\frac{1}{2}Mg\frac{\omega_m\tau R_p}{2}(1 - f_s\sqrt{3}) \\
&= -\frac{1}{4}Mg\omega_m\tau R_p(1 - f_s\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

Potenza perduta Essendo in condizioni di transitorio e ipotesi di moto diretto uso la formula seguente:

$$
W_p = -(1 - \mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt})
$$

Bilancio di potenze

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt}$$
$$W_m + W_r - (1-\mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt}$$
$$W_r + \mu_D(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{c_r}}{dt}$$
$$W_r + \mu_D W_m = \frac{dE_{c_r}}{dt} + \mu_D \frac{dE_{c_m}}{dt}$$
$$\mu_D C_m \omega_m - \frac{1}{4} Mg\omega_m \tau R_p (1 - f_s\sqrt{3}) = \omega_m \dot{\omega}_m (\tau^2(\frac{1}{4}MR_p^2 + J_p) + \mu_D J_m)$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{\mu_D C_m - \frac{1}{4}Mg\tau R_p(1-f_s\sqrt{3})}{\tau^2(\frac{1}{4}MR_p^2 + J_p) + \mu_D J_m)} = 323\, rad/s^2$$

$$a = \frac{\tau R_p \dot{\omega}_m}{2} = 1.615\, m/s^2$$

Verifico ipotesi di moto diretto

$$\dot{\omega}_m = 323 < 500$$

L'ipotesi è valida.

Secondo punto

Essendo in condizioni di regime, non è più necessario considerare la variazione di energia cinetica. Il segno del coefficiente della potenza resistente, essendo in salita, è strettamente negativo, per cui il moto si mantiene diretto.

$$W_m + W_r + W_p = 0$$

$$W_m + W_r - (1-\mu_D)W_m = 0$$

$$W_r + \mu_D W_m = 0$$

$$\mu_D C_m \omega_m = \frac{1}{4}Mg\omega_m \tau R_p(1-f_s\sqrt{3})$$

$$\mu_D C_m = \frac{1}{4}Mg\tau R_p(1-f_s\sqrt{3})$$

$$C_m = \frac{Mg\tau R_p(1-f_s\sqrt{3})}{4\mu_D} = 3.56\, Nm$$

Terzo punto

Procedo con il bilancio di forze.

> ⚠ **N.B.** La forza di inerzia Ma ha un verso **opposto** all'accelerazione.

$$-Ma = F_g \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} F_g f_s - F_t$$

$$-Ma = \frac{\sqrt{3}}{2} F_g + \frac{\sqrt{3}}{2} F_g f_s - F_t$$

$$F_t = M(\frac{\sqrt{3}}{2} g(1 + f_s) + a) = 2361\,N$$