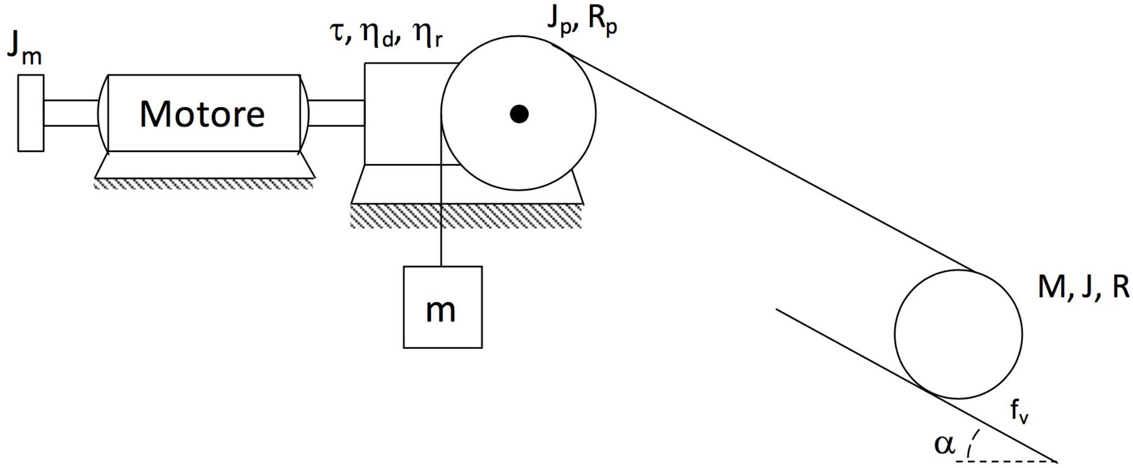
0.0.1 Terzo esercizio



$$M = 100kg \quad J_m = 0.05kgm^2 \quad \mu_d = 0.9 \quad \mu_r = 0.7 \quad J = 2kgm^2 \quad m = 20kg$$

$$R = 0.5m \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \quad R_P = 0.6m \quad f_v = 0.05 \quad J_P = 5kgm^2 \quad \tau = 1/10$$

L'impianto di sollevamento in figura é posizionato nel piano verticale. Un sistema motore- trasmissione solleva, attraverso una puleggia di caratteristiche note (momento d'inerzia baricentrico J_p e raggio R_p), un disco (di massa M, momento d'inerzia baricentrico J e raggio R) che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α.

Alla medesima fune, dalla parte opposta al disco, é collegato un contrappeso di massa m. Si supponga assenza di strisciamento tra la fune e la puleggia e tra la fune ed il disco.

Sono noti il momento d'inerzia del motore J_m e le caratteristiche della trasmissione (rapporto di trasmissione τ, rendimento in moto diretto μ_d e rendimento in moto retrogrado μ_r).

Si chiede di calcolare:

1. La coppia necessaria per sollevare il disco a regime.
2. L'accelerazione del disco in salita, applicando una coppia motrice doppia rispetto a quella calcolata al punto 1.

0.0.2 Soluzione terzo esercizio

Osservazioni importanti

1. In questo tipo di esercizi è **vitale** capire in che modo il sistema va a muoversi.
2. Il sistema è posto sul piano verticale, quindi andranno considerate tutte le forze peso dei vari componenti.
3. Sul disco agisce una forza di *attrito volvente*.

Primo punto

In condizione di regime *la variazione di energia cinetica è nulla*. Per cui vale che:

$$W_{motrice} + W_{resistente} + W_{perduta} = \frac{dE_c}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} W_R = &\ (\text{Forze attrito statico e dinamico}) \bullet (\text{Velocità del punto di applicazione}) \\ &+ (\text{Forze attrito volvente}) \bullet (\text{Velocità del centro del cerchio}) \\ &+ (\text{Forze peso}) \bullet (\text{Velocità baricentriche}) \end{aligned}$$

Figure 1: Potenza resistente

Calcolo della potenza resistente Iniziamo calcolando la potenza resistente in modo tale da poter valutare se ci troviamo in condizione di *moto diretto* o *moto retrogrado*.

Per calcolare la potenza resistente (figura 1) andiamo ad identificare tutte le forze peso e forze d'attrito agenti sull'impianto.

1. Forza peso agente sul contrappeso di massa m.
2. Forza peso agente sul disco di massa M.
3. Forza di attrito volvente agente sul disco con coefficiente f_v.

Ora andiamo a identificare tutte le velocità che agiscono sui corpi sovra elencati:
La velocità baricentrica del contrappeso, v_m, corrisponde con la velocità con cui la pulleggia e il disco ruotano.

$$\omega_{puleggia} = \tau \omega_{motrice}$$

$$v_m = R_p \omega_{puleggia} = R_p \tau \omega_{motrice}$$

Definition 0.0.1 (Centro di istantanea rotazione (o CIR)) *In un moto rigido piano in cui l'atto di moto è rotatorio, il centro di istantanea rotazione è quel punto della sezione del corpo che, nell'istante considerato, ha velocità nulla. Questo punto non è necessariamente parte del corpo e può essere posto sia all'interno che all'esterno di esso.*

Calcolo della velocità del disco Identificato il CIR (*centro di istantanea rotazione*) del disco con il punto di tangenza del disco sulla parete inclinata, possiamo calcolare la velocità del centro del disco con il seguente ragionamento:

Se costruiamo una circonferenza con centro nel CIR del disco, di raggio pari al diametro del disco, cioè 2R, che ruota su sè stessa ad una velocità pari a quella del disco, v_m, possiamo calcolare la *velocità angolare* ω_{disco} semplicemente come $\omega_{disco} = \frac{v_m}{2R}$.
Ora, volendo calcolare la velocità del centro del disco (non della circonferenza con centro CIR) basta calcolare la velocità di un punto posto a una distanza R dal CIR: $v_{disco} = R\omega_{disco} = \frac{v_m}{2}$.

Alternativamente, più intuitivamente, possiamo calcolare la velocità v_{disco} ragionando sul fatto che nel punto di tangenza, dove è adiacente la corda, la velocità è v_m, mentre nel CIR è 0 e che questa si riduca linearmente. A metà di questa riduzione lineare, di conseguenza, la velocità deve risultare essere la metà.

La velocità del disco, quindi, in funzione di $\omega_{motrice}$ risulta essere:

$$v_{disco} = \frac{v_m}{2} = \frac{R_p \tau \omega_{motrice}}{2}$$

Assembliamo la potenza resistente Ora che abbiamo calcolato le varie componenti, andiamo ad assemblare la potenza resistente:

$$
\begin{aligned}
W_R &= m\vec{g} \bullet (R_p\tau\vec{\omega}_{motrice}) + M\vec{g} \bullet (\frac{R_p\tau\vec{\omega}_{motrice}}{2}) + Mf_v\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\vec{g} \bullet (\frac{R_p\tau\vec{\omega}_{motrice}}{2}) \\
&= m\vec{g} \bullet (R_p\tau\vec{\omega}_{motrice}) + M\vec{g} \bullet (\frac{R_p\tau\vec{\omega}_{motrice}}{2}) + Mf_v cos(\alpha)\vec{g} \bullet (\frac{R_p\tau\vec{\omega}_{motrice}}{2})
\end{aligned}
$$

Risolvo il prodotto scalare, tenendo a mente come le velocità siano orientate per garantire il moto descritto (disco sollevato a regime).

La velocità del contrappeso v_m è concorde con la forza peso, essendo orientata anch'essa verso il basso, l'angolo compreso tra i due vettori è quindi 0.

La velocità del disco, invece, è discorde rispetto alla forza peso ed è inclinata di $\pi - \alpha$. L'angolo tra i due vettori risulta quindi $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

La velocità del disco è discorde rispetto alla forza di attrito volvente, ma è inclinata allo stesso modo. Anche in questo caso quindi, l'angolo compreso è 0.

$$
\begin{aligned}
W_R &= mgR_p\tau\omega_{motrice} + Mg\frac{R_p\tau\omega_{motrice}}{2}cos(\pi+\alpha) - f_vMg\frac{R_p\tau\omega_{motrice}}{2}cos(\alpha) \\
&= \omega_{motrice}gR_p\tau(m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_vcos(\alpha)))
\end{aligned}
$$

Controlliamo il **segno** del coefficiente della velocità angolare del motore:

$$
gR_p\tau(m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_vcos(\alpha))) \approx -4.2
$$

Il coefficiente ha segno negativo, per cui procediamo sotto ipotesi di *modo diretto*.

Calcolo della potenza motrice

$$
W_{motrice} = C_{motrice}\omega_{motrice}
$$

Calcolo della potenza perduta in cond. di regime e moto diretto

$$
\begin{aligned}
W_{perduta} &= -(1-\mu_{diretto})(W_{motrice} - \frac{dEc_{motrice}}{dt}) \\
&= -(1-\mu_{diretto})(W_{motrice} - 0) \\
&= -(1-\mu_{diretto})W_{motrice}
\end{aligned}
$$

Calcolo della coppia motrice Usando la formula del *bilancio delle potenze* in condizioni di *regime* otteniamo:

$$\begin{aligned} W_{motrice} + W_{resistente} + W_{perduta} &= 0 \\ W_{motrice} + W_{resistente} - (1 - \mu_{diretto}) W_{motrice} &= 0 \\ W_{resistente} + \mu_{diretto} W_{motrice} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{motrice} g R_p \tau (m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha))) + \mu_{diretto} C_{motrice} \omega_{motrice} &= 0 \\ g R_p \tau (m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha))) + \mu_{diretto} C_{motrice} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{motrice} &= \frac{g R_p \tau (\frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha)) - m)}{\mu_{diretto}} \\ &= 4.6859515352 Nm \\ &\approx 4.68 Nm \end{aligned}$$

Secondo punto

Calcoliamo la nuova coppia motrice

$$C_{motrice_2} = 2 C_{motrice} = 9.36 Nm$$

Calcoliamo la nuova potenza motrice

$$W_{motrice_2} = C_{motrice_2} \omega_{motrice}$$

Calcoliamo l'energia cinetica

$$\begin{aligned} E_c = &\text{(T. dell'en. cinetica per le masse)} \\ &+ \text{(T. dell'en. cinetica per i momenti di inerzia)} \end{aligned}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_{disco}^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_{motrice}^2 + \frac{1}{2} J_p \omega_p^2 + \frac{1}{2} J \omega_{disco}^2$$

Sostituisco i legami cinematici ed ottengo (indicando com ω_m la $\omega_{motrice}$):

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2}m(R_p\tau\omega_m)^2 + \frac{1}{2}M(\frac{R_p\tau\omega_m}{2})^2 + \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_p(\tau\omega_m)^2 + \frac{1}{2}J(\frac{R_p\tau\omega_m}{2R})^2 \\ &= \frac{1}{2}m(R_p\tau)^2\omega_m^2 + \frac{1}{8}M(R_p\tau)^2\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_p\tau^2\omega_m^2 + \frac{1}{8}J\frac{(R_p\tau)^2}{R^2}\omega_m^2\end{aligned}$$

Derivo, in funzione del tempo, ed ottengo:

$$\frac{E_c}{dt} = m(R_p\tau)^2\omega_m\dot{\omega}_m + \frac{1}{4}M(R_p\tau)^2\omega_m\dot{\omega}_m + J_m\omega_m\dot{\omega}_m + J_p\tau^2\omega_m\dot{\omega}_m + \frac{1}{4}J\frac{(R_p\tau)^2}{R^2}\omega_m\dot{\omega}_m$$

Calcoliamo la nuova potenza perduta

$$\begin{aligned}W_{perduta} &= -(1-\mu_{diretto})(W_{motrice} - \frac{dEc_{motrice}}{dt}) \\ &= -(1-\mu_{diretto})(W_{motrice} - J_m\omega_m\dot{\omega}_m)\end{aligned}$$

Uso il bilancio delle potenze per calcolare l'accelerazione

$$\begin{aligned}W_{motrice} + W_{resistente} + W_{perduta} &= \frac{E_c}{dt} \\ W_{motrice} + W_{resistente} - (1-\mu_{diretto})(W_{motrice} - J_m\omega_m\dot{\omega}_m) &= \frac{E_c}{dt} \\ W_{resistente} + J_m\omega_m\dot{\omega}_m + \mu_{diretto}(W_{motrice} - J_m\omega_m\dot{\omega}_m) &= \frac{E_c}{dt}\end{aligned}$$

$$W_{resistente} + J_m\omega_m\dot{\omega}_m + \mu_{diretto}(W_{motrice} - J_m\omega_m\dot{\omega}_m) = \frac{E_c}{dt}$$

$$\begin{aligned}W_{resistente} + J_m\omega_m\dot{\omega}_m + \mu_{diretto}(W_{motrice} - J_m\omega_m\dot{\omega}_m) = \\ m(R_p\tau)^2\omega_m\dot{\omega}_m + \frac{1}{4}M(R_p\tau)^2\omega_m\dot{\omega}_m + J_m\omega_m\dot{\omega}_m + J_p\tau^2\omega_m\dot{\omega}_m + \frac{1}{4}J\frac{(R_p\tau)^2}{R^2}\omega_m\dot{\omega}_m\end{aligned} \tag{1}$$

$$\omega_m g R_p \tau (m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha))) + \mu_d (C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) =$$
$$m(R_p\tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M (R_p\tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p\tau)^2}{R^2} \omega_m \dot{\omega}_m \tag{2}$$

$$g R_p \tau (m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha))) + \mu_d (C_m - J_m \dot{\omega}_m) =$$
$$m(R_p\tau)^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M (R_p\tau)^2 \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p\tau)^2}{R^2} \dot{\omega}_m \tag{3}$$

$$g R_p \tau (m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha))) + \mu_d C_m =$$
$$\mu_d J_m \dot{\omega}_m + m(R_p\tau)^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M (R_p\tau)^2 \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p\tau)^2}{R^2} \dot{\omega}_m \tag{4}$$

$$g R_p \tau (m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha))) + \mu_d C_m =$$
$$\dot{\omega_m} (\mu_d J_m + m(R_p\tau)^2 + \frac{1}{4} M (R_p\tau)^2 + J_p \tau^2 + \frac{1}{4} J \frac{(R_p\tau)^2}{R^2}) \tag{5}$$

$$\dot{\omega_m} = \frac{g R_p \tau (m - \frac{M}{2}(sin(\alpha) + f_v cos(\alpha))) + \mu_d C_m}{\mu_d J_m + m(R_p\tau)^2 + \frac{1}{4} M (R_p\tau)^2 + J_p \tau^2 + \frac{1}{4} J \frac{(R_p\tau)^2}{R^2}} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_m &= 15.8970476911 rad/s^2 \\ &\approx 15.9 rad/s^2 \end{aligned}$$