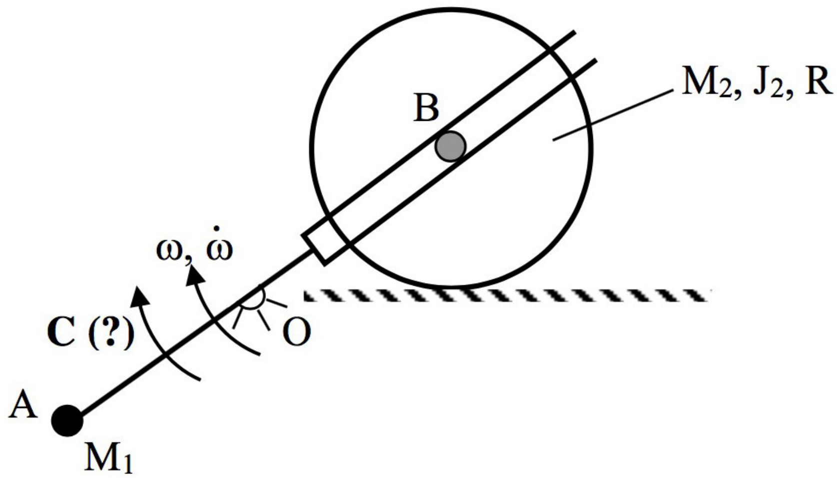
0.0.1 Primo esercizio



$$M_1 = 30\,kg \quad M_2 = 20\,kg \quad J_2 = 1\,kg m^2 \quad R = 0.2\,m$$

$$OB = 0.4\,m \quad AO = 0.3\,m \quad \omega = 1\,rad/s \quad \dot{\omega} = 0.4\,rad/s^2$$

Il sistema rappresentato in figura è posto nel piano verticale.

Un piolo, rigidamente vincolato al centro B del disco, scorre all'interno del glifo incernierato in O, da considerarsi di massa e momento di inerzia trascurabili. All'estremo A del glifo è vincolata una massa puntiforme M_1. Il disco, di massa M_2, momento d'inerzia baricentrico J_2 e raggio R, rotola senza strisciare lungo una guida orizzontale.

Note la velocità angolare ω e l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ del glifo si chiede di calcolare:

1. La velocità angolare e l'accelerazione angolare del disco.

2. La coppia C necessaria per garantire la condizione di moto assegnata.

0.0.2 Soluzione primo esercizio

Osservazioni importanti

1. Il segmento OB, essendo un *glifo*, ha lunghezza variabile.
2. Il CIR (*centro di istantanea rotazione*) del disco coincide con il punto di contatta sulla superficie.
3. La *velocità angolare* ω, l'*accelerazione angolare* $\dot{\omega}$ e la *coppia* C ruotano in **senso orario**.
4. Il punto B si trova ad una $y_B = R = 0.2\, m$
5. Il disco non si muove verso l'alto, quindi la sua componente verticale di velocità sarà nulla. Ragionamento analogo può essere fatto per l'accelerazione.

Primo punto Procedo con il metodo dei numeri complessi, definendo $b = OB$ e α come l'angolo sotteso all'asta:

Spostamento

$$B = be^{i\alpha}$$

$$B = \begin{cases} Y_B = R = b sin\alpha \\ X_B = b\cos\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \arcsin(\frac{R}{b}) = \frac{\pi}{6}\, rad \\ X_B = b\cos\alpha = 0.2\sqrt{3}\, m \end{cases}$$

Velocità Derivo ed ottengo le velocità:

$$v_B = b\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + \dot{b}e^{i\alpha}$$

$$v_B = \begin{cases} v_{y_B} = 0 = b\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{b}\sin\alpha \\ v_{x_B} = -b\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{b}\cos\alpha \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{b} = -\frac{b\dot{\alpha}\cos\alpha}{\sin\alpha} = -b\dot{\alpha}\cot\alpha \\ v_{x_B} = -b\dot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\alpha}\cot\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{b} = -\frac{b\dot{\alpha}\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ v_{x_B} = -b\dot{\alpha}(\sin\alpha + \cot\alpha\cos\alpha) \end{cases} = \begin{cases} \dot{b} = -\frac{b\dot{\alpha}\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ v_{x_B} = -2b\dot{\alpha} \end{cases}$$

Sostituisco $\dot{\alpha} = -\omega = -1\, rad/s$

$$\begin{cases} \dot{b} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, m/s \\ v_{x_B} = 0.8\, m/s \end{cases}$$

Usando gli usuali vincoli cinematici del CIR, procedo a calcolare la velocità angolare del disco:

Ricordando che la velocità risulta essere il **prodotto vettoriale** di velocità angolare e raggio:

$$\vec{v_{x_B}} = \vec{\omega}_{disco} \times \vec{R}$$

Chiamando θ l'angolo compreso tra i due vettori, risolvo il **prodotto vettoriale** come:

$$v_{x_B} = \omega_{disco} R \sin\theta$$

Essendo ω_{disco} negativo, per la direzione oraria di rotazione del disco, l'angolo che si va a formare tra i due vettore è $\theta = -\frac{pi}{2}$.

$$v_{x_B} = \omega_{disco} R \sin(-\frac{pi}{2}) = -\omega_{disco} R$$

Risolvendo per ω_{disco} ottengo:

$$\omega_{disco} = -\frac{v_{x_B}}{R} = -4\, rad/s$$

Accelerazione Derivo una seconda volta ed ottengo l'accelerazione:

$$a_B = \dot{b}\dot{\alpha} e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + b\ddot{\alpha} e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} - b\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} + \ddot{b} e^{i\alpha} + \dot{b}\dot{\alpha} e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$$

Semplifico l'espressione:

$$a_B = 2\dot{b}\dot{\alpha} e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + b\ddot{\alpha} e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} - b\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} + \ddot{b} e^{i\alpha}$$

Raccolgo componente normale e tangente:

$$a_B = (2\dot{b}\dot{\alpha} + b\ddot{\alpha}) e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + (\ddot{b} - b\dot{\alpha}^2) e^{i\alpha}$$

Sostituisco $\dot{\alpha} = -\omega = -1\, rad/s$ per semplificare i calcoli:

$$a_B = (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha}) e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + (\ddot{b} - b) e^{i\alpha}$$

Separo in componenti cartesiane:

$$a_B = \begin{cases} -(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha + (\ddot{b} - b)\cos\alpha = a_{x_B} \\ (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cos\alpha + (\ddot{b} - b)\sin\alpha = a_{y_B} \end{cases}$$

La componente verticale dell'accelerazione del disco è pari a 0:

$$a_B = \begin{cases} -(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha + (\ddot{b} - b)\cos\alpha = a_{x_B} \\ (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cos\alpha + (\ddot{b} - b)\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Ricavo $\ddot{b}$:

$$(\ddot{b} - b)\sin\alpha = -(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cos\alpha$$

$$\ddot{b} = b - (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cot\alpha$$

Ricavo a_{x_B}:

$$-(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha + (b - (2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cot\alpha - b)\cos\alpha = a_{x_B}$$

$$-(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha - (2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cot\alpha\cos\alpha = a_{x_B}$$

$$-(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})(\sin\alpha + \cot\alpha\cos\alpha) = a_{x_B}$$

$$-2(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha}) = a_{x_B}$$

Sostituisco $\ddot{\alpha} = -\dot{\omega} = -0.4\, rad/s^2$:

$$-2(-2\dot{b} - b\dot{\omega}) = a_{x_B}$$

$$2(2\dot{b} + b\dot{\omega}) = a_{x_B}$$

$$2(\frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{4}{25}) = a_{x_B}$$

$$a_{x_B} \approx 3.1\, m/s^2$$

Utilizzando il legame cinematico dell'accelerazione angolare ottengo:

$$\omega_D = \frac{a_{x_B}}{R}\sin(-\frac{\pi}{2}) = -15.5\, m/s^2$$

Secondo punto Per calcolare la coppia C vado ad utilizzare *l'equazione del bilancio delle potenze* (formula 1):

$$\sum_{i=0}^{n} W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

Figure 1: Bilancio delle potenze

Energia cinetica totale: prendo in considerazione tutte le masse in movimento ed i loro momenti d'inerzia per poter utilizzare il *teorema dell'energia cinetica*.

1. La massa puntiforme m_1 si muove di una velocità $v_A = AO\omega$ e non ha momento di inerzia.

2. La massa del cerchio M_2 si muove con una velocità baricentrica calcolata precedentemente come $v_B = 2OB\omega$ e possiede un momento di inerzia baricentrico noto J_2.

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}M_2 v_B^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_B^2$$

Sostituisco con i legami cinematici noti ed ottengo:

$$E_c = \frac{1}{2}m_1(AO\omega)^2 + \frac{1}{2}M_2(2OB\omega)^2 + \frac{1}{2}J_2(\frac{2OB\omega}{R})^2$$

Sostituisco nell'equazione $AO = a$ e $OB = b$:

$$E_c = \frac{1}{2}m_1(a\omega)^2 + \frac{1}{2}M_2(2b\omega)^2 + \frac{1}{2}J_2(\frac{2b\omega}{R})^2$$

Raccolgo i coefficienti di b e ω:

$$E_c = \omega^2\frac{1}{2}m_1 a^2 + 2\omega^2 b^2(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)$$

Derivo l'equazione, tenendo a mente che i termini che variano nel tempo sono ω e b:

$$\frac{E_c}{dt} = 2\omega\dot{\omega}\frac{1}{2}m_1 a^2 + 4\omega\dot{\omega}b^2(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2) + 4\omega^2 b\dot{b}(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)$$

$$\frac{E_c}{dt} = \omega\dot{\omega}m_1 a^2 + 4\omega\dot{\omega}b^2(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2) + 4\omega^2 b\dot{b}(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)$$

$$\frac{E_c}{dt} = \omega(\dot{\omega} m_1 a^2 + 4\dot{\omega} b^2 (M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2) + 4\omega b\dot{b}(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2))$$

$$\frac{E_c}{dt} = \omega(\dot{\omega} m_1 a^2 + 4b(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)(\dot{\omega} b + \omega\dot{b}))$$

La potenza totale: prendo in considerazione tutte le forze che agiscono sui corpi, eventuali attriti, forze peso e coppie.

1. Sul disco agisce una forza peso, contro bilanciata da una forza normale, per cui si annullano reciprocamente. Il disco non subisce l'effetto di attrito volvente o di attriti dinamici.

2. Sulla massa M1 agisce una forza peso F_{g_A} che non è contro bilanciata da nessuna forza normale.

3. La coppia C da identificare.

$$\sum W_i = \vec{C} \bullet \vec{\omega} + \vec{F}_{g_A} \bullet \vec{v}_A$$

Sostituisco i legami cinematici, con $a = OA$:

$$\sum W_i = \vec{C} \bullet \vec{\omega} + \vec{F}_{g_A} \bullet (a\vec{\omega})$$

Risolvo il prodotto scalare:

1. La velocità $\vec{v}_A$ ha una direzione tangente alla circonferenza di raggio a e con verso a $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Tra il vettore $\vec{v}_A$ e $\vec{F}_{g_A}$ l'angolo è di $\pi - \alpha$.

2. La coppia C e la velocità angolare ω sono concordi, come da testo.

$$\sum W_i = C\omega + F_{g_A} a\omega \cos(\pi - \alpha) = C\omega - F_{g_A} a\omega \cos\alpha = \omega(C - m_1 g a \cos\alpha)$$

Bilancio delle potenze

$$\omega(C - m_1 g a \cos\alpha) = \omega(\dot{\omega} m_1 a^2 + 4b(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)(\dot{\omega} b + \omega \dot{b}))$$

Semplifico ω:

$$C - m_1 g a \cos\alpha = \dot{\omega} m_1 a^2 + 4b(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)(\dot{\omega} b + \omega \dot{b})$$

Risolvo per C:

$$C = m_1 g a \cos\alpha + \dot{\omega} m_1 a^2 + 4b(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)(\dot{\omega} b + \omega \dot{b})$$

Sostituisco numericamente:

$$C = 138.9\, Nm \quad (C_{riportato} = 120.2N)$$

Il secondo punto sembra venire errato, non riesco ad identificare l'errore.