

# METODI E MODELLI PER LE DECISIONI

Prof. Roberto Cordone  
6 CFU

**Luca Cappelletti**

Lecture Notes  
Year 2017/2018



Magistrale Informatica  
Università di Milano  
Italy  
18 gennaio 2018

# Indice

<b>1 Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1 Dispense . . . . .	4
<b>2 Problemi di Decisione</b>	<b>5</b>
2.1 Problemi complessi . . . . .	5
2.2 Proprietà delle preferenze . . . . .	6
2.3 Ipotesi funzione del valore . . . . .	7
2.4 Tabella riassuntiva . . . . .	7
2.5 Conto di Borda . . . . .	8
2.6 Problemi semplici . . . . .	8
<b>3 Programmazione matematica</b>	<b>9</b>
3.1 Programmazione matematica . . . . .	10
3.2 Lemma di Farkas . . . . .	10
3.3 Condizioni di KarushKuhnTucker (KKT) . . . . .	10
3.4 Metodo dei vincoli . . . . .	11
3.5 Metodo Lessicografico . . . . .	11
3.6 Metodo lessicografico con livelli di aspirazione . . . . .	11
3.7 Metodo del punto utopia . . . . .	11
<b>4 Teoria dell'utilità a molti attributi (MAUT)</b>	<b>12</b>
4.1 Indipendenza preferenziale . . . . .	13
<b>5 Programmazione in condizioni di incertezza</b>	<b>14</b>
5.1 Dominanza forte . . . . .	14
5.2 Criteri . . . . .	14
5.2.1 Criterio del caso pessimo . . . . .	14
5.2.2 Criterio del caso ottimo . . . . .	14
5.2.3 Criterio del caso Hurwicz . . . . .	14
5.2.4 Criterio di equiprobabilità o di Laplace . . . . .	15
5.2.5 Criterio del rammarico . . . . .	15
5.2.6 Criterio delle eccedenze . . . . .	15
5.3 Programmazione Robusta . . . . .	15
5.3.1 Robustezza relativa . . . . .	15
<b>6 Programmazione in condizioni di rischio</b>	<b>16</b>
6.1 Criterio del valore atteso (o medio) . . . . .	16
6.2 Teoria dell'utilità stocastica . . . . .	16
6.2.1 Assiomi fondativi dell'utilità stocastica . . . . .	17
6.2.2 Teorema dell'utilità stocastica . . . . .	17
6.2.3 Avversione e propensione al rischio . . . . .	17
6.2.4 Equivalente certo e premio di rischio . . . . .	17
<b>7 Albero delle decisioni</b>	<b>18</b>
<b>8 Teoria dei Giochi</b>	<b>19</b>
8.1 Calcolare gli equilibri di Nash . . . . .	20
8.2 Criteri per la scelta di strategie . . . . .	20
8.2.1 Strategia del caso pessimo . . . . .	20
<b>9 Giochi a somma zero</b>	<b>21</b>
9.1 Equilibri di Nash nei giochi a somma zero . . . . .	21
9.2 Strategie miste (probabilità) . . . . .	21

9.3 Teorema del minimax . . . . .	22
9.3.1 Determinazione della strategia mista di equilibrio . . . . .	22
<b>10 Giochi simmetrici</b>	<b>23</b>
10.1 Tassonomia dei giochi simmetrici a due persone e due strategie . . . . .	23
10.1.1 Matrimonio perfetto . . . . .	23
10.1.2 Caccia al cervo . . . . .	24
10.2 Giochi di coordinamento puro . . . . .	24
10.2.1 Gioco del coniglio . . . . .	24
10.2.2 La guerra dei sessi . . . . .	24
10.2.3 Il dilemma del prigioniero . . . . .	25
<b>11 Decisioni di gruppo</b>	<b>26</b>
11.1 Metodo di Condorcet o delle maggioranze . . . . .	26
11.2 Metodo di Borda . . . . .	26
11.3 Metodo lessicografico . . . . .	27
11.4 Sistema di Pluralità . . . . .	27
11.5 Approccio assiomatico . . . . .	27
<b>A Temi d'esame risolti</b>	<b>28</b>
A.1 Tema d'esame - 11 Aprile 2017 . . . . .	28
A.1.1 Esercizio 1 . . . . .	28
A.1.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	28
A.1.3 Esercizio 2 . . . . .	30
A.1.4 Soluzione esercizio 2 . . . . .	30
A.1.5 Esercizio 3 . . . . .	33
A.1.6 Soluzione esercizio 3 . . . . .	33
A.1.7 Esercizio 4 . . . . .	35
A.1.8 Soluzione esercizio 4 . . . . .	35
A.1.9 Esercizio 5 . . . . .	36
A.1.10 Soluzione esercizio 5 . . . . .	36
A.2 Tema d'esame - 14 Giugno 2016 . . . . .	37
A.2.1 Esercizio 1 . . . . .	37
A.2.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	37
A.2.3 Esercizio 2 . . . . .	38
A.2.4 Soluzione esercizio 2 . . . . .	38
A.2.5 Esercizio 3 . . . . .	41
A.2.6 Soluzione esercizio 3 . . . . .	41
A.2.7 Esercizio 4 . . . . .	43
A.2.8 Soluzione esercizio 4 . . . . .	43
A.2.9 Esercizio 5 . . . . .	44
A.2.10 Risoluzione esercizio 5 . . . . .	44
A.3 Tema d'esame - 22 Marzo 2016 . . . . .	46
A.3.1 Esercizio 1 . . . . .	46
A.3.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	46
A.3.3 Esercizio 2 . . . . .	47
A.3.4 Soluzione esercizio 2 . . . . .	47
A.3.5 Esercizio 3 . . . . .	50
A.3.6 Soluzione esercizio 3 . . . . .	50
A.3.7 Esercizio 4 . . . . .	52
A.3.8 Risoluzione esercizio 4 . . . . .	52
A.3.9 Esercizio 5 . . . . .	53
A.3.10 Soluzione esercizio 5 . . . . .	53
A.3.11 Esercizio 7 . . . . .	54
A.3.12 Soluzione esercizio 7 . . . . .	54
A.3.13 Esercizio 8 . . . . .	55
A.3.14 Soluzione esercizio 8 . . . . .	55
A.4 Tema d'esame - 10 Febbraio 2016 . . . . .	56
A.4.1 Esercizio 1 . . . . .	56
A.4.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	56
A.4.3 Esercizio 2 . . . . .	57
A.4.4 Soluzione esercizio 2 . . . . .	57

A.4.5 Esercizio 3 . . . . .	60
A.4.6 Soluzione esercizio 3 . . . . .	60
A.4.7 Esercizio 4 . . . . .	61
A.4.8 Soluzione esercizio 4 . . . . .	61
A.4.9 Esercizio 5 . . . . .	62
A.4.10 Soluzione esercizio 5 . . . . .	62
A.4.11 Esercizio 6 . . . . .	64
A.4.12 Soluzione esercizio 6 . . . . .	64
A.4.13 Esercizio 7 . . . . .	65
A.4.14 Soluzione esercizio 7 . . . . .	65
A.4.15 Esercizio 8 . . . . .	66
A.4.16 Soluzione esercizio 8 . . . . .	66

# 1

## Introduzione

### 1.1 Dispense

Sono disponibili dispense sul sito del corso.

# 2

## Problemi di Decisione

### 2.1 Problemi complessi

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figura 2.1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1.  $X$  rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **solutions** o anche delle **solutions ammissibili**.
2.  $\Omega$  rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3.  $F$  rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4.  $f$  rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5.  $D$  rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6.  $\Pi$  insieme delle **preferenze**.

$X$  viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ se } \mathbf{x} \in X \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine  $x_i$  viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

$\Omega$  viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{ se } \omega \in \Omega \Rightarrow \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine  $\omega_i$  viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

$F$  viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{ se } f \in F \Rightarrow f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le  $f_i \in \mathbb{R}$  vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La  $f$  viene definita come:

$$f(x, \omega) : X \times \Omega \rightarrow F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La  $\Pi$  viene definita come

$$\Pi : D \rightarrow 2^{F \times F}$$

, dove  $\pi_d \subseteq F \times F$ .  $F \times F$  rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre  $2^{F \times F}$  rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo  $F = \{f, f', f''\}$ , otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f, f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \preccurlyeq_d f' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il  $\preccurlyeq_d$ , minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi  $\succcurlyeq_d$ .

**Definizione 2.1.1** (indifferenza). Due preferenze  $f'$  e  $f''$  sono dette **indifferenti** quando:

$$f' \sim f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

**Definizione 2.1.2** (Preferenza Stretta). Una preferenza  $f'$  è detta **preferenza stretta** quando:

$$f' <_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

**Definizione 2.1.3** (Incomparabilità). Due preferenze  $f'$  e  $f''$  sono dette **incomparabili** quando:

$$f' \bowtie_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \not\preccurlyeq_d f'' \\ f' \not\succcurlyeq_d f'' \end{cases}$$

## 2.2 Proprietà delle preferenze

**Proprietà riflessiva**

$$f \preccurlyeq f \quad \forall f \in F$$

### Proprietà di completezza

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \not\sim f' \Rightarrow f' \preccurlyeq f \quad \forall f, f' \in F$$

### Proprietà di anti-simmetria

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f \Rightarrow f' = f \quad \forall f, f' \in F$$

### Proprietà Transitiva

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale. Viene generalmente considerata verificata.

$$f \preccurlyeq f' \wedge f' \preccurlyeq f'' \Rightarrow f \preccurlyeq f'' \quad \forall f, f', f'' \in F$$

## 2.3 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore  $v$ , ha in mente una relazione di preferenza  $\Pi$  **riflessiva, completa, non necessariamente anti simmetrica e transitiva**. Quando una relazione possiede queste proprietà viene chiamata **ordine debole**, debole perché possono esistere dei *pari merito*. Un campo di applicazione sono i campionati sportivi.

$$\exists v : F \rightarrow \mathbb{R} : f \preccurlyeq f' \Leftrightarrow v_{(f)} \geq v_{(f')}$$

### Condizioni di preordine

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività** si ottiene la condizione di **preordine**.

### Ordini deboli

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività e completezza** si ha la condizione di ordine debole, che è molto utilizzata.

### Ordine parziale

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività e antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine parziale**.

### Ordine totale

Avendo le condizioni di **riflessività, transitività, completezza e antisimmetria** si ottiene la condizione di **ordine totale**.

## 2.4 Tabella riassuntiva

Proprietà	Preordine	Ordine debole	Ordine parziale	Ordine totale
Riflessività	✓	✓	✓	✓
Transitività	✓	✓	✓	✓
Completezza		✓		✓
Antisimmetria			✓	✓

## 2.5 Conto di Borda

La formula in figura 2.2 utilizzato per costruire una **funzione valore**:

$$\nu(f) = |\{f' \in F : f \preccurlyeq f'\}|$$

Figura 2.2: Conto di Borda

Il valore di un impatto è pari al numero di impatti cui esso è preferibile, compreso l'impatto stesso.

Quando la cardinalità dell'insieme è  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$  è possibile ottenere una **funzione valore**, ma quando ci si trova in condizioni come  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  che non risultano più mappabili sull'insieme  $\mathbb{R}$  non risulta più possibile realizzare una **funzione valore**.

## 2.6 Problemi semplici

Un problema viene detto *semplice* quando essi possiedono queste caratteristiche:

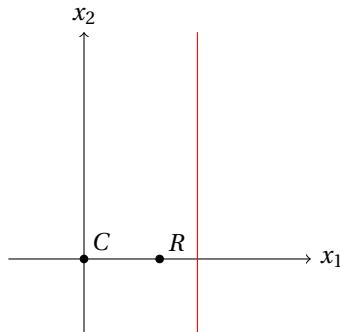
1.  $\exists \nu(f)$  conforme
2.  $|\Omega| = 1 \Rightarrow f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè esiste un  $f(x)$
3.  $|D| = 1$
4.  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0 \forall j = 1, \dots, n\}$  con  $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$

# 3

## Programmazione matematica

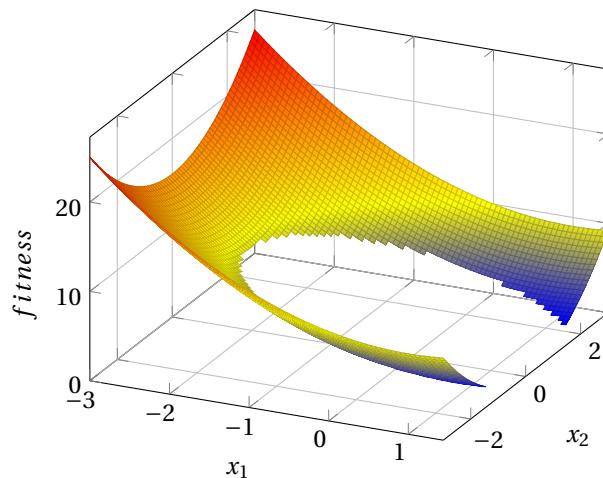
Minimizzo  $f(x)$ , con la condizione di  $g_j(x) \leq 0 \forall j = 1 \dots n$ .

Supponiamo di voler identificare la posizione migliore di una discarica, e che il punto in cui i rifiuti vengono prodotti sia  $R = (1, 0)$ , che in punto  $C = (0, 0)$  vi sia in una città e che si debba avere una distanza di almeno 2 dalla città. Inoltre, la nostra discarica deve trovarsi a sinistra di  $\frac{3}{2}$ , cioè  $x_0 < \frac{3}{2}$ , perché lì vi è un confine.



La funzione di minimo che vado a definire risulta:

$$\min f(x) = \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1 < \frac{3}{2} \end{cases}$$



### 3.1 Programmazione matematica

**Definizione 3.1.1.** Ottimo locale  $\tilde{x}$  ottimo locale  $\Leftrightarrow f(x) \geq f(\tilde{x}) \forall x \in \mathbb{U}_{\tilde{x}, \epsilon}$

Dato  $\tilde{x}$  come un **ottimo locale**, e  $\xi(\alpha)$  un **arco ammissibile** con la caratteristica di:

$$\xi(0) = \tilde{x} \quad \xi(\alpha) \in X \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha}]$$

Allora vale che  $\xi$  risulta **non migliorante**:

$$f(\xi(\alpha)) \geq f(\tilde{x}) = f(\xi(0)) \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha}]$$

La formula sopra riportata può essere espressa più semplicemente tramite:

$$[\nabla f(\tilde{x})]^T P_\xi \geq \phi$$

**Definizione 3.1.2** (Punti non regolari).

$\tilde{x}$  regolare  $\Leftrightarrow \nabla g_j(\tilde{x})$  per  $g_j$  attivo, con le varie funzioni  $g_j$  linearmente indipendenti

**Definizione 3.1.3** (Punti non regolari). Sono dei punti per cui non vale

$$[\nabla g_j(\tilde{x})]^T P_\xi \geq 0 \text{ per } g_j \text{ attivo} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x} \text{ arco ammissibile} \\ \tilde{x} \text{ ottimo locale} \end{cases} \Rightarrow [\nabla f(\tilde{x})]^T P_\xi \geq \phi$$

### 3.2 Lemma di Farkas

$$C_j = \{p \in \mathbb{R}^2 : g_j^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.1: Cono direzioni "opposte" ai vettori  $g_j$

$$C_f = \{p \in \mathbb{R}^2 : f^T p \leq 0 \forall j\}$$

Figura 3.2: Cono direzioni "opposte" a  $f$

$$\text{Se } \exists \mu_j \geq 0 : f = \sum_j \mu_j g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - f^T p \leq 0 \forall p : g_j^T p \leq 0 \forall j$$

Posso riscrivere questa formula usando i gradienti:

$$\text{Se } \exists \mu_j \geq 0 : \nabla f = \sum_j \mu_j \nabla g_j \Leftrightarrow (C_g \subseteq C_f) - \nabla f^T p \leq 0 \forall p : \nabla g_j^T p \leq 0 \forall j$$

che cosa è la combinazione lineare? e convessa? e conica?

### 3.3 Condizioni di KarushKuhnTucker (KKT)

Se  $\tilde{x}$  è un **ottimo locale e regolare**, allora  $\exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\tilde{x}) + \sum_j \mu_j \nabla g_j = \phi$

Questo viene posto a sistema con  $\mu_j g_j(\tilde{x}) = \phi \forall j = 1 \dots n$ :

$$\begin{cases} \exists \mu_j \geq 0 : \nabla f(\tilde{x}) + \sum_{j:g_j \text{ attivo}} \mu_j \nabla g_j = \emptyset \\ \mu_j g_j(\tilde{x}) = \emptyset \forall j = 1 \dots n \\ g_j(\tilde{x}) < 0 \Rightarrow \mu_j = 0 \\ g_j(x) \leq 0 \forall j = 1 \dots m \end{cases}$$

## 3.4 Metodo dei vincoli

Dato un punto  $x^*$  **globalmente paretiano** per  $\begin{cases} \min f_1 \\ \vdots \\ \min f_p \end{cases} \Rightarrow x^* \text{ è un ottimo globale per } f_l(x)$ , cioè vale che  $f_l(x) \leq \epsilon_l = f_l(x^*)$  con  $x \in X$

## 3.5 Metodo Lessicografico

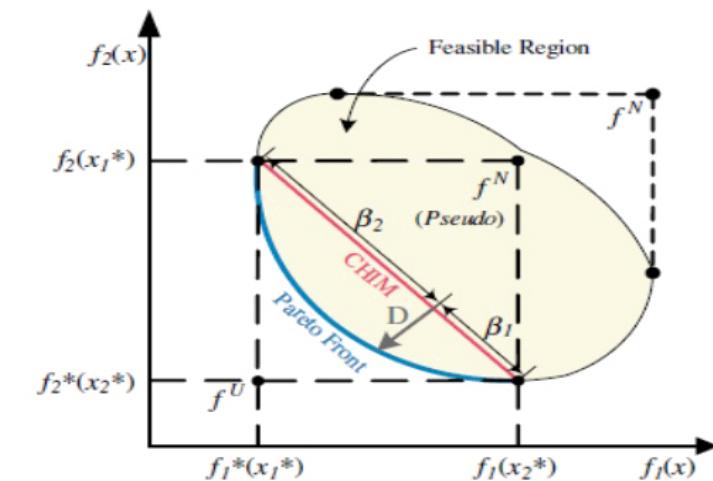
1. Si chiede al **decisore** di introdurre un **ordinamento totale** sugli indicatori, cioè  $1, \dots, P \rightsquigarrow \pi_1, \dots, \pi_P$ , dove  $\pi_1$  viene considerato **l'indicatore principale**.
2. Vado a selezionare tutti i **cammini a costo minimo**, limitandomi all'indicatore principale:  $\min_{x \in X} f_{\pi_1} \rightarrow X^*$
3. Continuo a cercare i cammini a costo minimo degli indicatori successivi, sino a che rimango con un'unica soluzione minimante valida. Se arrivo all'ultimo indicatore con più di una soluzione ne scelgo una a caso. La soluzione così ottenuta è **globalmente paretiana** (benché tendenzialmente molto squilibrata e che non da un compromesso) perché è un ottimo per tutte le funzioni.

## 3.6 Metodo lessicografico con livelli di aspirazione

In aggiunta al passaggio preliminare visto precedentemente fisso i **livelli di aspirazione**  $\epsilon_l \quad \forall l \neq \pi_1$

## 3.7 Metodo del punto utopia

Viene aggiunto un punto che viene descritto dal decisore come il migliore possibile, ignorando temporaneamente i vincoli, e si va quindi ad identificare una regione paretiana come quella che ne minimizza la distanza.



Where,

$f^N$  – Nadir point

$f^U$  – Utopia point

Figura 3.3: Metodo del punto utopia

# 4

## Teoria dell'utilità a molti attributi (MAUT)

La teoria MAUT (multiple attribute utility theory) ipotizza di trovarsi nella situazione in cui un decisore è in grado di ordinare gli indicatori, creando un set  $\Pi$  con un ordine debole. Ipotizza inoltre l'esistenza di una funzione valore  $u(f)$  conforme a  $\Pi$ . Spesso la  $u(f)$  non si conosce ed è necessario costruire il passaggio da  $\pi$  a  $u(f)$

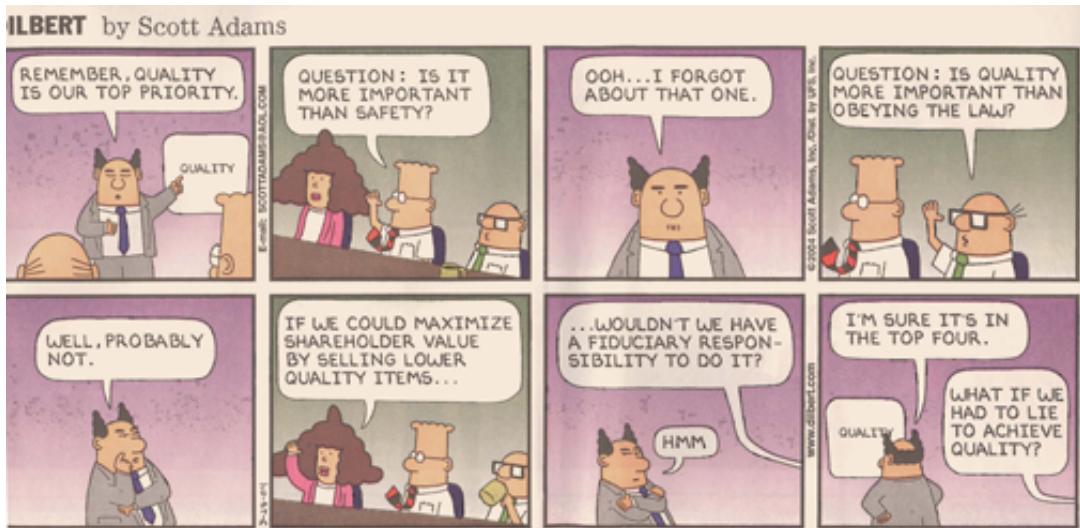


Figura 4.1: MAUT in progress

Campiono quindi gli impatti e connetto quelli che risultano indifferenti preferenzialmente, cercando di identificare forme analitiche che le descrivano.

$$u(b) = f_1 f_2 \rightarrow u(b) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}$$

Definita quindi una formula vado a verificare che valga su quei punti:

$$u(f_1) = u(f_2) \Rightarrow f_1^{\alpha_1} f_1^{\alpha_2} = f_2^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}$$

$$u(f) = \prod_{l=1}^p f_l^{\alpha_l}$$

Figura 4.2: **Funzioni di Cobb-Douglas:** descrive un consumatore, viene usata in economia

Questo procedimento diventa rapidamente insolubile all'aumentare dei decisori e degli indicatori. Viene quindi *ipotizzato* che la funzione di utilità sia **additiva**, cioè che valga:

$$u(f) = \sum_{l=1}^p u_l(f_l)$$

## 4.1 Indipendenza preferenziale

Dato un insieme  $P = \{1, \dots, p\}$  degli indici,  $L \subset P$  con  $L$  preferenzialmente indipendente da  $P \setminus L$ .

### Esempio sui viaggi

Viaggiare bene prima implica voler viaggiare bene dopo?

$$\begin{bmatrix} f_L \\ f \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} f'_L \\ f \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_L \\ \xi \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} f'_L \\ \xi \end{bmatrix} \quad \forall f_L \forall f'_L \forall f \forall \xi$$

### Esempio sui pranzi

Primo e secondo non sono preferenzialmente indipendenti.

$$f = \begin{bmatrix} primo \\ secondo \end{bmatrix}$$

# 5

## Programmazione in condizioni di incertezza

Viene applicata in problemi in cui uno scenario  $\omega$  viene svelato dopo che il decisore ha scelto l'alternativa  $x$ . Un problema di questo tipo può appartenere a una di due categorie:**decisione in condizioni di ignoranza** o **decisioni in condizioni di rischio**.

### 5.1 Dominanza forte

**Definizione 5.1.1** (Dominanza forte). Si dice che un'alternativa  $x$  domina fortemente un'alternativa  $x'$  quando il suo impatto è almeno altrettanto buono in tutti gli scenari  $\omega \in \Omega$  e migliore in almeno uno:

$$x \leq x' \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, \omega) \leq f(x', \omega) & \forall \omega \in \Omega \\ \exists \omega' \in \Omega : f(x, \omega') < f(x', \omega') \end{cases}$$

### 5.2 Criteri

#### 5.2.1 Criterio del caso pessimo

Si assume che qualsiasi scelta si faccia condurrà al proprio caso pessimo, per cui si sceglie l'opzione che ha valore migliore nel proprio caso pessimo.

#### 5.2.2 Criterio del caso ottimo

Si assume che qualsiasi scelta si faccia consurrà al proprio caso migliore, per cui si sceglie l'opzione che ha valore migliore nel proprio caso ottimo.

#### 5.2.3 Criterio del caso Hurwicz

Esegue la combinazione convessa del criterio del caso pessimo ed ottimo usando un coefficiente  $\alpha$  detto **coefficiente di pessimismo**. Quindi prima si assume che qualsiasi scelta condurrà al caso indicato dalla combinazione convessa e poi si sceglie la migliore tra queste.

Il coefficiente  $\alpha$  può essere determinato ponendo due scelte certamente indifferenti tra loro come uguali nell'equazione della combinazione convessa, andando anche a costruire questa scelta se necessario.

### 5.2.4 Criterio di equiprobabilità o di Laplace

Combina gli scenari sommandoli con un dato peso (uguale per tutti), per esempio la media degli scenari (caso di equiprobabilità, da cui il nome). Quindi va a scegliere l'opzione che porta al valore ottimo.

### 5.2.5 Criterio del rammarico

Questo criterio va a minimizzare il rammarico, cioè la differenza tra l'alternativa ottima di uno scenario e quella che andrebbe ad accadere con una determinata scelta. Per ogni scelta si cerca il rammarico massimo, e quindi si sceglie l'opzione che lo minimizza.

### 5.2.6 Criterio delle eccedenze

Si tratta del complementare al criterio del rammarico: si va a calcolare la differenza tra l'alternativa pessima di uno scenario e quella che andrebbe ad accadere con una determinata scelta. Per ogni scelta si cerca l'eccedenza minima e quindi si sceglie l'opzione che la massimizza.

## 5.3 Programmazione Robusta

In programmazione robusta il *criterio del caso pessimo* è chiamato **robustezza assoluta** ed il *criterio del rammarico* è chiamato **decisione robusta**. Un criterio della programmazione robusta che non ha controparte si chiama **robustezza relativa**.

### 5.3.1 Robustezza relativa

$$u_{\text{robustezza relativa}}(x) = \max_{\omega \in \Omega} \left[ \frac{f(x, \omega) - f(x^0, \omega)}{f(x^0, \omega)} \right]$$

Figura 5.1: Robustezza relativa

6

# Programmazione in condizioni di rischio

Rispetto alle condizioni di ignoranza, il modello include anche una definizione di probabilità.

## 6.1 Criterio del valore atteso (o medio)

Va a definire l'utilità di un impatto per il suo valore atteso:

Per ogni scelta, si sommano le utilità di ogni scenario per quella scelta moltiplicate con la probabilità dello scenario, quindi si sceglie la scelta che garantisce utilità ottima.

$$u(x) = E|f(x, \omega)| \quad u(x) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) f(x, \omega) \quad u(x) = \int_{\Omega} \pi(\omega) f(x, \omega) d\omega$$

(a) Caso generale

(b) Caso discreto

(c) Caso continuo

Figura 6.1: Criterio del valore atteso

## 6.2 Teoria dell'utilità stocastica

Si basa sull'idea che un decisore può definire una relazione di preferenza anche tra impatti definiti come variabili aleatorie.

**Definizione 6.2.1** (Lotteria). Definiamo **lotteria finita** una coppia di funzioni definite come:

$l_{f,\pi} = (f(\omega), \pi(\omega))$   
 $f(\omega) : \Omega \rightarrow F$  variabile aleatoria su spazio campionario finito.  
 $\pi(\omega) : \Omega \rightarrow [0, 1]$  probabilità di ogni scenario in  $\Omega$ .

Indichiamo con  $L_E$  l'insieme di tutte le lotterie definibili su  $E$ .

**Definizione 6.2.2.** Lotteria degenere Definiamo **lotteria degenere** una lotteria  $l_{f,1}$  con un solo impatto  $f$  ed un solo scenario di probabilità unitaria (certo di accadere).

**Definizione 6.2.3.** Lotteria composta Definiamo **lotteria composta** una lotteria i cui impatti sono altri impatti.

**Definizione 6.2.4.** Preferenza tra lotterie Data una relazione di preferenza fra lotterie  $\Pi \subset 2^{L \times L}$  si dice che essa ammette una **funzione conforme di utilità stocastica**  $u : L \rightarrow \mathbb{R}$  quando, per ogni coppia di lotterie  $l$  e  $l'$ , l'utilità della preferita supera l'utilità dell'altra.

$$l \preceq l' \Leftrightarrow u(l) \geq u(l')$$

### 6.2.1 Assiomi fondativi dell'utilità stocastica

Sono assiomi che una relazione di preferenza fra lotterie deve rispettare per essere considerata razionale.

**Ordinamento debole** La relazione è **riflessiva, transitiva e completa**.

**Monotonia** Lotterie che assegnano probabilità più alte sono preferite.

**Continuità** Date due lotterie, per qualsiasi impatto intermedio è possibile costruire una lotteria indipendente all'impatto con un adeguato valore di probabilità.

**Indipendenza (o sostituzione)** La preferenza tra due lotterie non cambia se si aggiunge o si toglie una stessa lotteria.

**Riduzione** Qualsiasi lotteria composta è indifferente alla lotteria semplice ottenuta elencando tutti gli impatti distinti finali della lotteria composta ed assegnando ad ognuno una probabilità data dalle regole di composizione.

### 6.2.2 Teorema dell'utilità stocastica

**Teorema 6.2.5** (Teorema dell'utilità stocastica). Dato un insieme di impatti  $F$  e una relazione relazione di preferenza  $\Pi$  fra lotterie su  $F$  che rispetti gli assiomi fondativi 6.2.1, esiste una e una sola funzione di utilità  $u(l)$  conforme a  $\Pi$  normalizzata in modo da assumere valore nullo nell'impatto pessimo e unitario in quello ottimo.

### 6.2.3 Avversione e propensione al rischio

**Definizione 6.2.6** (Profilo di rischio). Il **profilo di rischio** è l'andamento dell'utilità stocastica delle lotterie degeneri  $u(f, 1)$  al variare dell'impatto  $f \in F$ .

In particolare si possono fare affermazioni in base alla natura della funzione di utilità:

**Concava** Il decisore preferisce l'impatto certo ed è quindi **avverso al rischio**.

**Lineare** Il decisore è indifferente ed è quindi **neutrale al rischio**.

**Convessa** Il decisore preferisce la lotteria ed è quindi **propenso al rischio**.

### 6.2.4 Equivalente certo e premio di rischio

**Definizione 6.2.7** (Equivalente certo e premio di rischio). Data una lotteria  $l$ , si dice **equivalente certo** l'impatto  $f_l$  che le equivale e **premio di rischio** la differenza fra il valore atteso della lotteria ed il suo equivalente certo.

# 7

## Albero delle decisioni

Si tratta di uno strumento di risoluzione per i problemi decisionali di tipo finito, che introduce una gerarchia sulle variabili di decisione e sulle variabili esogene.

Usando il **criterio del caso pessimo**, **Laplace o del valore atteso** si costruisce ponendo prima gli scenari e quindi le scelte (figura 7.1).

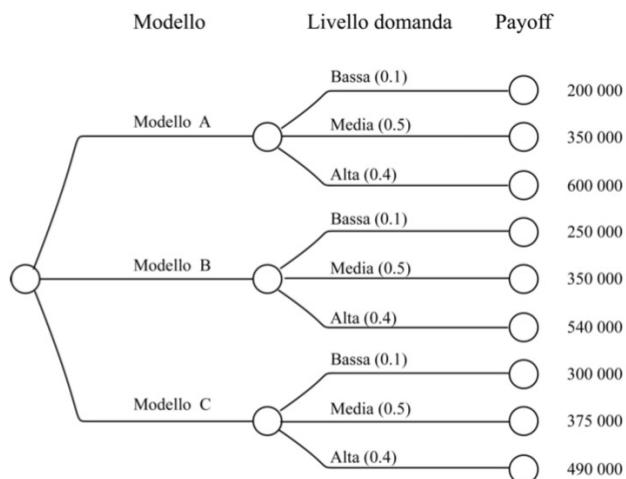


Figura 7.1: Albero delle decisioni

# 8

## Teoria dei Giochi

Studia le situazioni in cui ogni decisore (qui chiamato giocatore)  $d \in D$  ha proprie variabili  $x \in X$  di decisione che fissa in modo indipendente dagli altri decisori, cercando di massimizzare le funzioni impatto  $f^{(d)}$  (qui chiamati payoff).

$$\max_{x^{(d)} \in X^{(d)}} f^{(d)} = f^{(d)}(x^{(1)}, \dots, x^{(|D|)})$$

Figura 8.1: Problema di teoria dei giochi

I giochi possono essere rappresentati a **forma estesa** nella quale il gioco è rappresentato ad albero delle possibili scelte sino al termine del gioco o in **forma strategica** nella quale il gioco è rappresentato con una tabella dei payoff per ogni combinazione di scelte del giocatore e degli avversari.

**Definizione 8.0.1** (Strategia). Un strategia per il giocare  $d \in D$  corrisponde a un sottoinsieme di archi dell'albero di gioco che sia:

1. Costituito da archi associati al giocatore  $d$ .
2. Coerente, cioè che non contenga più archi uscenti dallo stesso nodo.
3. Massimale, cioè che contenga un arco per ogni nodo dotato di archi uscenti.

**Definizione 8.0.2** (Dominanza fra strategie). Date due strategie  $x^{(d)}$  e  $x'^{(d)}$  per il giocatore  $d$ , si dice che  $x^{(d)}$  domina  $x'^{(d)}$  quando, per qualsiasi comportamento di un altro giocatore, la strategia  $x^{(d)}$  da un payoff  $f^{(d)}$  maggiore.

**Definizione 8.0.3** (Equilibrio di Nash). Un vettore di strategie è detto **punto di equilibrio** o **equilibrio di Nash** quando a nessuno dei giocatori conviene cambiare la propria strategia (allontanarsi da quella nel vettore di strategie dell'equilibrio) perché avrebbe un payoff peggiore se nessuno degli altri giocatori cambia la propria strategia.

## 8.1 Calcolare gli equilibri di Nash

Nei giochi finiti in forma strategica l'equilibrio di Nash è una (o più) delle caselle della tabella dei payoff. Per individuarlo, se esiste, si procede nel modo seguente:

- Si marca ogni colonna con utilità massima per il giocatore di riga.
- Si marca ogni riga con utilità massima per il giocatore di colonna.
- Le celle in cui tutte le utilità sono marcate sono equilibri di Nash.

## 8.2 Criteri per la scelta di strategie

### 8.2.1 Strategia del caso pessimo

Il giocatore  $d$  considera che l'avversario farà sempre la mossa volta a danneggiarlo maggiormente, e segue la strategia che quindi, nel caso pessimo, gli garantisce il massimo guadagno.

**Definizione 8.2.1** (Valore di gioco). Si definisce **valore di gioco** (formula 8.2) per il giocatore  $d$  l'utilità massima ottenibile dal giocatore  $d$  nel caso pessimo, cioè la miglior garanzia possibile sulla sua prestazione:

$$u^{(d)} = \max_{x^{(d)} \in X^{(d)}} \min_{x^{(j)} \in X^{(j)}, j \neq d} f^{(j)}(x^{(1)}, \dots, x^{(|D|)})$$

(a) Valore di gioco a  $n$  giocatori

$$u^{(r)} = \max_{x^{(r)} \in X^{(r)}} \min_{x^{(c)} \in X^{(c)}} f^{(c)}(x^{(r)}, x^{(c)})$$

(b) Valore di gioco a 2 giocatori ( $r$  riga,  $c$  colonna)

Figura 8.2: Valore di gioco

Nei **giochi a somma zero a 2 giocatori** si determina il valore di gioco del giocatore di riga  $u^{(r)}$  e si indica quello del giocatore di colonna con  $-u^{(r)}$ , talvolta lasciato implicito nella notazione.

# 9

## Giochi a somma zero

Categoria di giochi in cui la vincita di un giocatore equivale alla perdita dell'altro. La matrice delle utilità del giocatore di colonna è opposta a quella del giocatore di riga sicché  $u^{(r)} = -u^{(c)}$ .

### 9.1 Equilibri di Nash nei giochi a somma zero

Nei giochi a somma zero una cella è equilibrio di Nash se e solo se è anche un **punto di sella**, cioè è un punto di massimo per la colonna e punto di minimo per la riga.

### 9.2 Strategie miste (probabilità)

**Definizione 9.2.1** (Strategia mista). Definiamo **strategia mista** per un giocatore un vettore di probabilità  $\xi$  di  $n$  elementi, dove  $n$  indica il numero delle strategie pure disponibili per il giocatore.

$$\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]' \in \Xi = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \xi_i = 1 \wedge \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \right\}$$

**Definizione 9.2.2** (Valore atteso del gioco). Definiamo **valore atteso del gioco**  $F$  il valore atteso del guadagno per il giocatore di riga e della perdita per il giocatore di colonna.

$$v(F) = E[f(\xi^{(r)}, \xi^{(c)})] = \sum_{i=1}^{n^{(r)}} \sum_{j=1}^{n^{(c)}} \xi^{(r)} \xi^{(c)} f_{ij}$$

$$v^{(r)}(F) = \max_{\xi^{(r)} \in \Xi^{(r)}} \min_{\xi^{(c)} \in \Xi^{(c)}} E[f(\xi^{(r)}, \xi^{(c)})]$$

(a) Valore atteso per il giocatore di riga

$$v^{(c)}(F) = \min_{\xi^{(c)} \in \Xi^{(c)}} \max_{\xi^{(r)} \in \Xi^{(r)}} E[f(\xi^{(r)}, \xi^{(c)})]$$

(b) Valore atteso per il giocatore di colonna

Figura 9.1: Valore atteso

**Teorema 9.2.3** (Il caso pessimo è sempre una strategia pura). Qualunque strategia mista un giocatore adotti, il caso pessimo per lui sarà rappresentato da una strategia pura dell'avversario. Di conseguenza, il valore atteso del gioco per i giocatori può essere espresso come:

$$v^{(r)}(F) = \sum_{i=1}^{n^{(r)}} \xi^{(r)} f_{ij}$$

(a) Valore atteso per il giocatore di riga

$$v^{(c)}(F) = \sum_{i=1}^{n^{(r)}} \xi^{(r)} f_{ij}$$

(b) Valore atteso per il giocatore di colonna

Figura 9.2: Valore atteso, considerando che il caso pessimo è sempre una strategia pura.

## 9.3 Teorema del minimax

**Teorema 9.3.1** (Teorema del minimax). Per ogni gioco finito a somma zero a due persone, i valori attesi dei giocatori coincidono. Inoltre, esistono due strategie miste ottimali  $\xi^{*(r)}$  e  $\xi^{*(c)}$  tali per cui:

$$u^{(r)} = u^{(c)} = E[f(\xi^{*(r)}, \xi^{*(c)})]$$

### 9.3.1 Determinazione della strategia mista di equilibrio

#### Gioco semplice

Se il gioco è particolarmente semplice ed i giocatori hanno un numero  $n$  basso di strategie è sufficiente risolvere dei problemi di ottimizzazione.

Nel caso  $n = 2$ , è sufficiente risolvere con due variabili di decisione rappresentanti le probabilità di procedere per una strategia o l'altra che essendo appunto probabilità (e quindi hanno somma unitaria) possono essere risolti monodimensionalmente.

#### Gioco complesso, metodo dei pivot

Si risolve tramite un problema di programmazione matematica non lineare.

# 10

## Giochi simmetrici

**Definizione 10.0.1** (Gioco simmetrico). Un gioco è **simmetrico** quando tutti i giocatori hanno lo stesso numero di strategie pure e per ogni permutazione delle strategie (se i giocatori scambiano strategia) si permutano allo stesso modo i payoff risultanti.

**Definizione 10.0.2** (Gioco simmetrico a due persone). In un gioco simmetrico a due persone, la matrice dei guadagni del secondo giocatore è la trasposta della matrice dei guadagni del primo giocatore.

### 10.1 Tassonomia dei giochi simmetrici a due persone e due strategie

#### 10.1.1 Matrimonio perfetto

$$f_{11} > f_{21} > f_{12} > f_{22}$$



	<i>C</i>	<i>NC</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(1, 2)
<i>NC</i>	(2, 1)	(0, 0)

Figura 10.1: Gioco del matrimonio perfetto

**C** Il coniuge collabora.

**NC** Il coniuge non collabora.

Quando entrambi collaborano si ha il payoff massimo, ma anche quando uno non collabora e il secondo si, per quanto si trovi in una situazione non preferibile è comunque migliore che non collaborare entrambi.

### 10.1.2 Caccia al cervo

$$f_{11} > f_{21} > f_{22} > f_{12}$$



	C	NC
C	(3, 3)	(0, 2)
NC	(2, 0)	(1, 1)

Figura 10.2: Gioco della caccia al cervo

**C** Il cacciatore collabora.

**NC** Il cacciatore non collabora.

Se i due cacciatori collaborano probabilmente catturano il cervo, se uno non collabora e l'altro cerca di collaborare probabilmente quello che non collabora riesce a catturare una preda minore (es. lepre) mentre se entrambi non collaborano forse possono catturare ognuno una preda minore.

## 10.2 Giochi di coordinamento puro

### 10.2.1 Gioco del coniglio

$$f_{21} > f_{11} > f_{12} > f_{22}$$



	C	NC
C	(2, 2)	(1, 3)
NC	(3, 1)	(0, 0)

Figura 10.3: Corsa del coniglio

**C** Il pilota frena.

**NC** Il pilota non frena.

Nella corsa del coniglio due piloti si sfidano a chi frenerà per ultimo prima di un precipizio. Se uno dei due frena l'altro vince ed entrambi rimangono vivi. Se entrambi frenano, nessuno vince ma rimandano vivi. Se nessuno dei due frena si schiantano.

### 10.2.2 La guerra dei sessi

$$f_{12} > f_{21} > f_{22} > f_{11} \wedge f_{21} > f_{12} > f_{22} > f_{11}$$



	<i>C</i>	<i>NC</i>
<i>C</i>	(0, 0)	( $\tilde{2}, \tilde{3}$ )
<i>NC</i>	( $\tilde{3}, \tilde{2}$ )	(1, 1)

Figura 10.4: La guerra dei sessi

**C** L'innamorato decide di seguire il piano dell'altro.

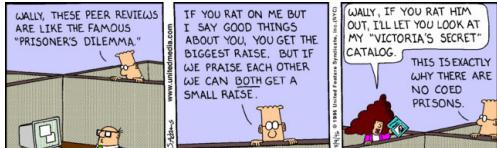
**NC** L'innamorato decide di seguire il proprio piano.

Due innamorati litigano al telefono su che piano seguire per la serata. Cade la linea e devono decidere che cosa fare, considerando che andare da soli rimanda sgradevole.

Se ognuno segue il piano stabilito dall'altro ognuno segue da solo qualcosa che non vuole. Se ognuno non collabora, ognuno segue qualcosa che vuole da solo. Se uno solo dei due collabora, segue qualcosa che non vuole ma almeno lo fa in compagnia.

### 10.2.3 Il dilemma del prigioniero

$$f_{21} > f_{11} > f_{22} > f_{12}$$



	<i>C</i>	<i>NC</i>
<i>C</i>	(2, 2)	(0, $\tilde{3}$ )
<i>NC</i>	( $\tilde{3}, 0$ )	( $\tilde{1}, \tilde{1}$ )

Figura 10.5: La guerra dei sessi

**C** Il prigioniero non tradisce l'altro arrestato.

**NC** Il prigioniero tradisce l'altro arrestato.

Due persone vengono arrestate con prove sufficienti per incriminare almeno uno e l'altro per collaborazione. I poliziotti sanno chi dei due sia effettivamente più colpevole.

Se un prigioniero parla e l'altro tace prende uno sconto sulla pena e l'altro la pena massima. Se entrambi tacciono nessuno prende la pena massima ma nemmeno lo sconto. Se entrambi parlano avranno entrambi la pena massima.



## Decisioni di gruppo

Nelle decisioni di gruppo il numero di decisori è maggiore di uno. Pertanto, oltre ai meccanismi di selezione delle decisioni visti per i casi a singolo decisore, vanno considerati dei metodi per unire nel modo migliore le scelte dei vari decisori.

**Definizione 11.0.1** (Costituzione). Si dice **costituzione** o **funzione di benessere collettivo** una funzione che associa ad ogni  $|\mathcal{D}| - upla$  di ordini deboli su un insieme di soluzioni dato un ordine debole (di gruppo) sullo stesso insieme:

$$g : \mathcal{D}(X)^{|\mathcal{D}|} \rightarrow \mathcal{D}(X)$$

### 11.1 Metodo di Condorcet o delle maggioranze

Una soluzione  $x_1$  è preferibile ad una seconda  $x_2$  se il gruppo dei decisori che preferisce  $x_1$  a  $x_2$  è maggiore del gruppo che preferisce  $x_2$  a  $x_1$ .

Questo metodo è soggetto ad un caso limite dove non può costruire un ordine debole, cioè quando le soluzioni sono espresse in modo tale per cui i gruppi creano un ciclo di preferenze.

Ordine	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
1	$a$	$b$	$c$	$d$
2	$b$	$c$	$d$	$c$
3	$c$	$d$	$a$	$a$
4	$d$	$a$	$b$	$b$

Tabella 11.1: Preferenze circolari: caso in cui Condorcet fallisce

### 11.2 Metodo di Borda

Assegna un punteggio ad una soluzione in base alla posizione che essa assume sulla lista di preferenze di ogni decisore, somma questi punteggi e va a scegliere quella soluzione che ha il punteggio più alto.

Talvolta è soggetto al **rank reversal**, cioè eliminando una soluzione (anche mediocre) soluzioni precedentemente non ottime lo diventano.

### 11.3 Metodo lessicografico

Il primo decisore (trattato come monarca o capo) sceglie per tutti la preferenza tra due soluzioni, e solo se è per lui è indifferente si passa al secondo decisore etc..

### 11.4 Sistema di Pluralità

Si sceglie la soluzione più condivisa come ottima tra i decisor. Qualora vi fosse un pareggio, si elimina la soluzione meno condivisa e si ripete il conteggio, sino ad arrivare ad una maggioranza.

Questo metodo permette però a soluzioni fortemente gradite da una minoranza di prevalere qualora piacesse sufficientemente a tutti gli altri.

### 11.5 Approccio assiomatico

Arrow, definendo tramite assiomi delle proprietà che sono desiderabili in un sistema di voto democratico dimostra che non è possibile realizzare un metodo di voto che goda di tutti gli assiomi contemporaneamente.

# A

## Temi d'esame risolti

In linea di principio, gli 8 esercizi dell'esame valgono 4 punti l'uno e sono abbastanza chiaramente scanditi in sottoesercizi da 0.5, 1, 1.5, a volte 2 punti.

### A.1 Tema d'esame - 11 Aprile 2017

#### A.1.1 Esercizio 1

Si definisca in modo formale un problema di decisione complesso  $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$  descrivendo brevemente il significato dei suoi elementi.

Si indichino le proprietà di cui deve godere la relazione di preferenza  $\Pi$  per essere un ordine debole e si spieghi se, in tal caso, essa ammette una funzione valore conforme.

#### A.1.2 Soluzione esercizio 1

Un problema di decisione complesso viene descritto dalla sestupla  $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$ :

$X$  L'insieme delle **soluzioni possibili**.

$\Omega$  L'insieme degli **scenari o esiti possibili**.

$F$  L'insieme degli **impatti possibili**.

$f(x, \omega) : X \times \Omega \rightarrow F$  La **funzione impatto**.

$D$  L'insieme dei **decisori**.

$\Pi(d) : D \rightarrow 2^{F \times F}$  La **relazione di preferenza**.

La **relazione di preferenza**  $\Pi$  per essere un *ordine debole* deve godere delle proprietà **riflessiva, transitiva e di completezza**.

**Proprietà riflessiva** Ogni impatto è **indifferent**e a se stesso:  $f \leq f$ .

**Proprietà transitiva** Se un impatto  $f_1$  è preferibile ad un altro  $f_2$  e questo ad un terzo  $f_3$ , allora il primo è preferibile al terzo:  
 $f_1 \leq f_2 \wedge f_2 \leq f_3 \Rightarrow f_1 \leq f_3$ .

**Proprietà di completezza** Dati due impatti, un dei due è certamente **preferibile** all'altro, o al limite sono **indifferenti**.

Una **funzione valore**  $v : F \rightarrow \mathbb{R}$  associa ad ogni impatto un valore reale, ed è conforme ad una relazione di preferenza  $\Pi$  quando il valore di un impatto  $f_1$  preferibile ad un impatto  $f_2$  è maggiore del valore dell'impatto  $f_2$ :

$$f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow v(f_1) \geq v(f_2) \forall f_1, f_2 \in F$$

Se una relazione di preferenza  $\Pi$  ammette una funzione valore, allora  $\Pi$  è un ordine debole.

**Non vale però il contrario**, per esempio un *ordine lessicografico* è un ordine totale che non ammette una funzione valore conforme.

Una relazione  $\Pi$  di ordine debole su  $F$  ammette una funzione valore conforme **se e solo se**  $\exists \tilde{F} \subseteq F$  numerabile e denso in  $F$ .

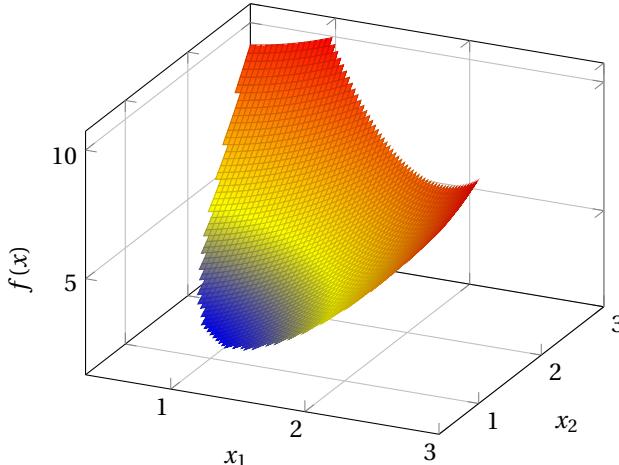
### A.1.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

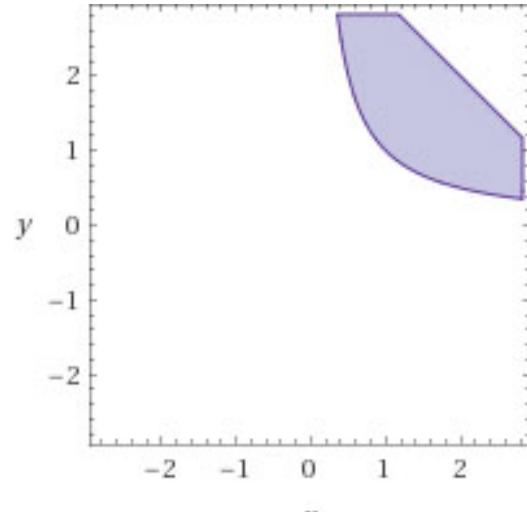
$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1^2 + x_2^2 \\ g_1(x) &= 1 - x_1 x_2 \leq 0 \\ g_2(x) &= x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \\ g_3(x) &= -x_1 - x_2 - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

- a) Si rappresenti il problema graficamente.
- b) Si determinino gli eventuali punti non regolari o si mostri che non ne esistono.
- c) Si determinino i punti candidati secondo le condizioni di KKT, e in particolare quello/i di minimo.

### A.1.4 Soluzione esercizio 2



(a) La funzione  $f(x)$



(b) Dominio della funzione  $f(x)$

a) La funzione nel suo dominio di definizione è la seguente:

**Calcolo dei punti non regolari:** Calcolo i gradienti dei vincoli:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il gradiente  $\nabla g_1$  si annulla nell'origine, che è all'esterno del dominio di interesse (nessun vincolo è attivo in quel punto). Gli altri gradienti  $\nabla g_2$  e  $\nabla g_3$  non si annullano.

Calcolo i punti dati dall'intersezione dei vincoli a coppie:

**Vincoli  $g_1$  e  $g_2$ :**

$$\begin{cases} 1 - x_1 x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x_2(4 - x_2) = 0 \\ x_1 = 4 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \pm \sqrt{3} \\ x_1 = 4 - x_2 \end{cases}$$

Da cui deriviamo i punti  $A = (2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$  e  $B = (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ . In nessuno di questi punti la matrice realizzata accostando i gradienti risulta singolare, quindi i punti  $A$  e  $B$  sono regolari.

**Vincoli**  $g_1$  e  $g_3$ :

$$\begin{cases} 1 - x_1 x_2 = 0 \\ x_1 = -x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 = -3 \end{cases}$$

Ne deriviamo il punto  $C = (-3, 1)$  che nuovamente non annulla il determinante della matrice dei gradienti ed è quindi regolare.

**Vincoli**  $g_2$  e  $g_3$ : I due vincoli non hanno intersezioni.

**Vincoli**  $g_1, g_2$  e  $g_3$ : I tre vincoli non hanno intersezioni comuni.

**Condizioni KKT**

**Calcolo della lagrangiana generalizzata**

$$l(x) = x_1^2 + x_2^2 + \mu_1(1 - x_1 x_2) + \mu_2(x_1 + x_2 - 4) + \mu_3(-x_1 - x_2 - 2)$$

**Realizzo il sistema delle condizioni KKT**

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + \mu_1 x_2 + \mu_2 + \mu_3 \\ 2x_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 + \mu_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_1(1 - x_1 x_2) = 0 \\ \mu_2(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \mu_3(-x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ 1 - x_1 x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leq 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_3 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ \mu_2(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \mu_3(-x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ 1 - x_1 x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leq 0 \\ \mu_1 = 2 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

**Caso**  $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_3 = -\frac{2}{x_2} - 2x_2 \Rightarrow \mu_3 = 3 \\ (1 + x_2^2)(x_2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 3 \end{array} \right.$$

Viene identificato il punto candidato  $D = (-1, -1)$ .

**Caso**  $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_2 = -\frac{2}{2 \pm \sqrt{3}} - 2(2 \pm \sqrt{3}) \\ \mu_3(1 + (2 \pm \sqrt{3})^2 + 2(2 \pm \sqrt{3})) = 0 \Rightarrow \mu_3 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2 \pm \sqrt{3}} \\ 1 + x_2^2 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \pm \sqrt{3} \\ -x_1 - x_2 - 2 \leq 0 \\ \mu_1 = 2 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 = 0 \end{array} \right.$$

I valori ottenuti non rispettano il vincolo  $\mu_2 \geq 0$ .

**Calcolo del valore dei punti candidati**

$$\begin{cases} f(A) = f(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}) = 14 \\ f(B) = f(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) = 14 \\ f(C) = f(-3, -1) = 10 \\ f(D) = f(-1, -1) = 2 \end{cases}$$

Il punto di ottimo locale risulta essere  $D$ .

### A.1.5 Esercizio 3

Dato il problema di programmazione a due obiettivi:

$$\begin{aligned} \max f_1(x) &= x_1 - 2x_2 \\ \max f_2(x) &= x_2 \\ \text{con } x \in X &= \{x : 2x_1 + x_2 \leq 5; 0 \leq x_1 \leq 2; x_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

- Si ricavi la regione paretiana con il metodo dei vincoli (sostituendo la seconda funzione obiettivo con un vincolo) e la si disegni nello spazio delle variabili  $x_1 - x_2$  e in quello degli obiettivi  $f_1 - f_2$ .
- Si determini graficamente la soluzione ottima con il metodo dei pesi, ponendo i pesi dei due obiettivi pari rispettivamente ad  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ .

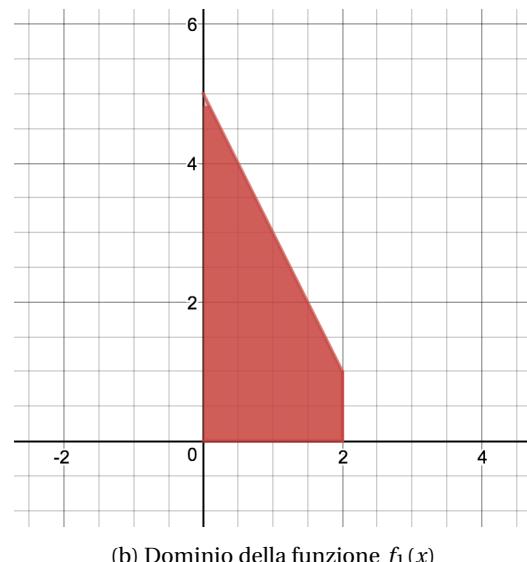
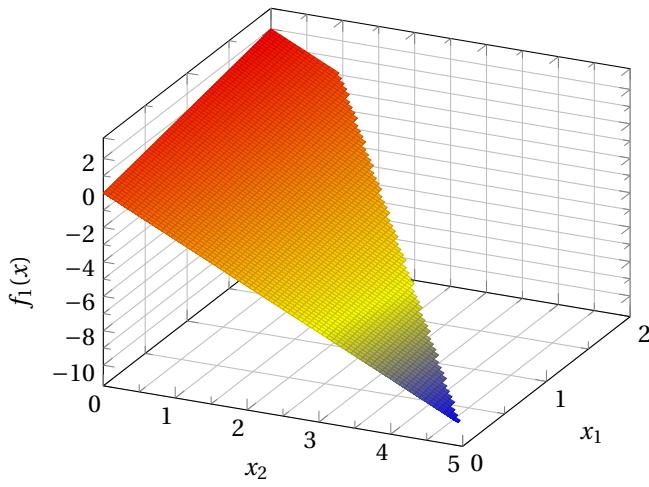
### A.1.6 Soluzione esercizio 3

#### Riscrivo il problema

La funzione obiettivo  $f_2$  è da massimizzare, per cui il vincolo che costruisco è  $f_2 \geq \epsilon_2$ .

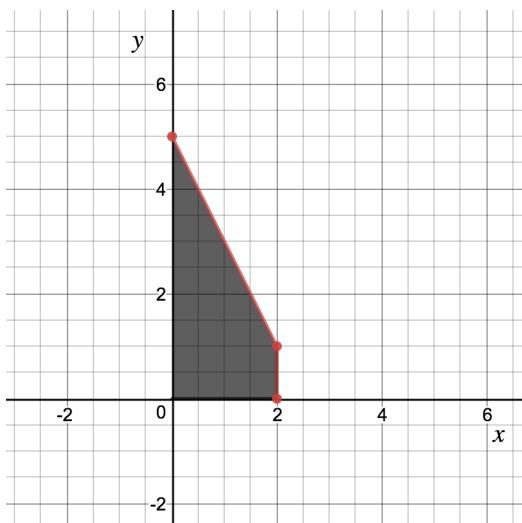
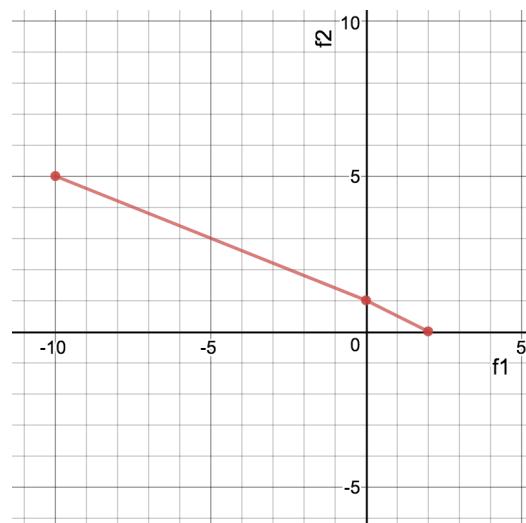
$$\begin{aligned} \max f_1(x) &= x_1 - 2x_2 \\ x_2 &\geq \epsilon_2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 0 \leq x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

#### Dominio del problema



#### Identifico lo standard $\epsilon_2$

Al variare del parametro  $\epsilon_2$  nel dominio di interesse  $[0,5]$  la funzione obiettivo  $f_1$  assume il massimo inizialmente in  $(0,5)$ , quindi si sposta sul segmento di destra sino al punto  $(2,1)$  ed infine si sposta gradualmente sino a  $(2,0)$ .

(a) Regione paretiana nello spazio  $x_1, x_2$ (b) Regione paretiana nello spazio  $f_1, f_2$ 

### Risoluzione con metodo dei pesi

$$\frac{1}{2}(x_1 - 2x_2) + \frac{1}{2}(x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

Il punto di massimo assunto dalla funzione del dominio di definizione è pari a  $(\max(x_1), \min(x_2))$ , cioè  $(2, 0)$  che fa parte della regione paretiana identificata al punto precedente.

### A.1.7 Esercizio 4

Si spieghi sotto quali condizioni è possibile ricavare da una matrice di confronti a coppie un vettore di pesi.

Se possibile, lo si faccia sulla seguente matrice.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 6 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 12 \\ 1/6 & 1/2 & 1/12 & 1 \end{bmatrix}$$

Si spieghi un metodo qualsiasi per ricavare un vettore di pesi da una matrice che non lo consente direttamente.

### A.1.8 Soluzione esercizio 4

#### Condizioni per ottenere un vettore di pesi

Una matrice di confronti a coppie per consentire di ottenere un vettore di pesi deve essere **coerente**, cioè possedere le seguenti proprietà:

**Positività** Tutti i pesi della matrice devono essere positivi:

$$\lambda_{lm} > 0$$

**Reciprocità** Tutti i pesi devono essere l'inverso del proprio simmetrico:

$$\lambda_{lm} = \frac{1}{\lambda_{ml}}$$

**Coerenza** Dati due pesi con indici successivi, da essi si deve poter determinare il terzo:

$$\lambda_{ln} = \lambda_{lm} \lambda_{mn}$$

#### Calcolo del vettore di pesi

La matrice  $M$  rispetta le proprietà di positività, di reciprocità e di coerenza, per cui si può procedere a calcolare il vettore dei pesi:

$$\omega_i = \frac{M_i}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 2/21 \\ 4/7 \\ 1/21 \end{bmatrix}$$

#### Ricostruzione di matrici coerenti

Si procede risolvendo il problema di minimizzazione seguente, dove  $\Lambda$  è la matrice costituita dai rapporti stimati dal decisore,  $W$  la matrice costituita dai rapporti  $\frac{\omega_l}{\omega_m}$ .

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \|W - \Lambda\| \\ \sum_{l \in P} \omega_l = 1 \\ \omega_l \geq 0 \quad l \in P \end{aligned}$$

Il valore ottimo della funzione obiettivo si può assumere come misura dell'incoerenza iniziale.

Per tenere conto dell'incoerenza del decisore è stato anche proposto di sostituire i valori stimati  $\lambda_{lm}$  con intervalli e di definire la norma componendo le distanze fra ciascun rapporto  $\frac{\omega_l}{\omega_m}$  e l'intervallo corrispondente, anziché il valore stimato.

### A.1.9 Esercizio 5

Viene dato il seguente problema di programmazione in condizioni di incertezza, i cui valori indicano utilità:

$u_{\omega a}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$\omega_1$	50	40	60	90
$\omega_2$	10	30	20	0

- a) Si indichi se vi sono alternative dominate e quali alternative le dominano.
- b) Si indichi l'alternativa scelta con il criterio del caso pessimo.
- c) Si mostri come cambia l'alternativa scelta con il criterio del caso medio al variare della probabilità  $\pi(\omega_1)$  del primo scenario.

### A.1.10 Soluzione esercizio 5

#### Alternative dominate

Un'alternativa domina un'altra quando, senza applicare particolari criteri, questa è migliore per almeno uno degli scenari ed uguale in tutti gli altri. Cerchiamo la soluzione che dia scenari a valore massimo poiché i valori rappresentano utilità.

In questo caso, l'alternativa solamente  $a_3 < a_1$ , mentre non è possibile affermare nulla delle altre che sono preferibili l'una alle altre per almeno uno scenario.

#### Criterio del caso pessimo

Nel criterio del caso pessimo, si assume che qualsiasi scelta venga effettuata accadrà il suo corrispondente caso pessimo. La scelta con scenario pessimo migliore è  $a_2$ .

$u_{\omega a}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$\omega_1$	50	40	60	90
$\omega_2$	10	30	20	0

Tabella A.1: Casi pessimi in rosso

#### Caso medio

Il caso medio (suppongo sia, dato che non appare nelle dispense) il caso di Hurwicz con coefficiente della combinazione convessa pari  $\pi(\omega_1)$  per il primo scenario (che coincide sempre con il caso ottimo) e  $1 - \pi(\omega_1)$  per il secondo (che coincide sempre con il caso pessimo).

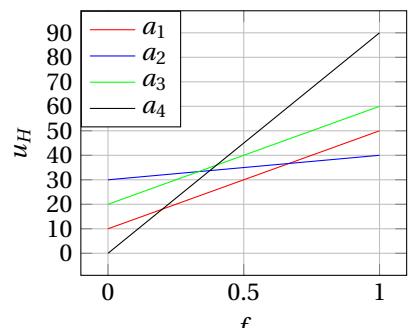
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$u_H$	$50\pi(\omega_1) + 10(1 - \pi(\omega_1))$	$40\pi(\omega_1) + 30(1 - \pi(\omega_1))$	$60\pi(\omega_1) + 20(1 - \pi(\omega_1))$	$90\pi(\omega_1)$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$u_H$	50	40	60	90

(a) Caso  $\pi(\omega_1) = 1$ : viene scelta  $a_4$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$u_H$	10	30	20	0

(b) Caso  $\pi(\omega_1) = 0$ : scelta  $a_2$



(c) L'utilità  $u_H$  al variare della probabilità

## A.2 Tema d'esame - 14 Giugno 2016

### A.2.1 Esercizio 1

Si definisca brevemente il concetto di impatto in un problema decisionale complesso, specificando che ruolo svolga nel processo decisionale.

Si descrivano alcune possibili rappresentazioni degli impatti di un problema finito (cioè con un numero finito, e piuttosto piccolo, di alternative).

Che cosa si intende dicendo che due impatti sono indifferenti? E incomparabili?

### A.2.2 Soluzione esercizio 1

Gli impatti descrivono tutto ciò che è rilevante ai fine della decisione. Essi vengono modellati matematicamente tramite la **funzione impatto**  $f : X \times \Omega \rightarrow F$ , dove  $F$  è l'insieme degli impatti possibili,  $\Omega$  quello degli esiti possibili ed  $X$  quello delle decisioni possibili.

Le componenti  $f_i$  di una funzione impatto  $f$  vengono chiamate **indicatori** e definiscono un aspetto dell'impatto.

Nel caso **finito** gli impatti possono essere rappresentati tramite la **matrice di valutazione**, le cui righe sono le *configurazioni*  $(x, \omega)$  mentre le colonne sono gli *indicatori*  $f_i$  ed in ogni cella vi è il valore dell'indicatore per quella configurazione.

In alternativa è possibile utilizzare la **rosa dei venti** (A.5), un grafico bidimensionale:

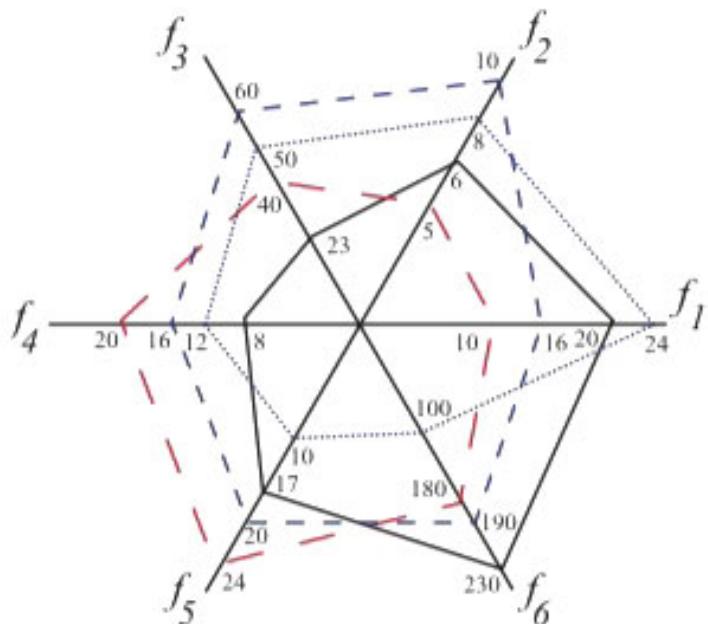


Figura A.5: Rosa dei venti

Due impatti sono **indifferenti** quando il decisore accetta di scambiarli in entrambi i versi:  $f_1 \leq f_2 \wedge f_2 \leq f_1 \Rightarrow f_1 \approx f_2$ .

Due impatti sono **incomparabili** quando il decisore non accetta di scambiarli in alcun verso:  $f_1 \not\leq f_2 \wedge f_2 \not\leq f_1 \Rightarrow f_1 \triangleright\!\!\!< f_2$ .

### A.2.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

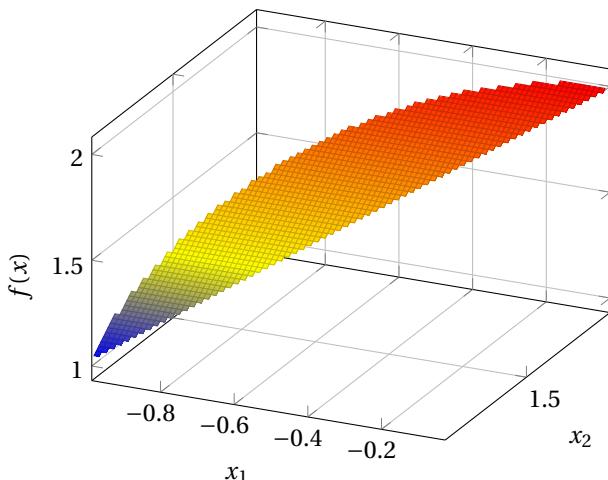
$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_2 \\ g_1(x) &= x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \\ g_2(x) &= x_1 - x_2 \leq -2 \end{aligned}$$

- a) Si rappresenti il problema graficamente.
- b) Si determinino gli eventuali punti non regolari.
- c) Si determinino i punti candidati secondo le condizioni di KKT, e in particolare quello/i di minimo.

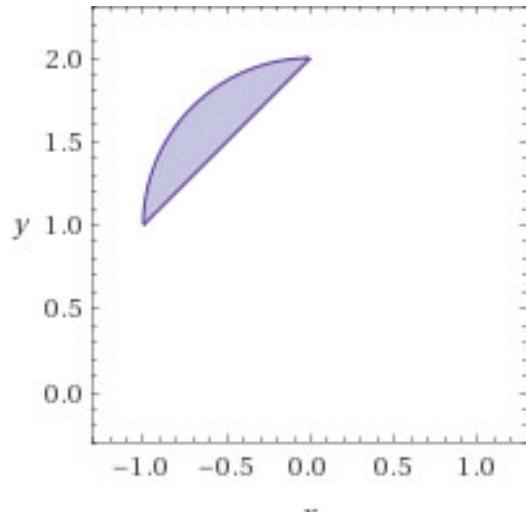
### A.2.4 Soluzione esercizio 2

Riscrivo il problema

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_2 \\ g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leq 0 \\ g_2(x) &= 2 + x_1 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$



(a) La funzione  $f(x)$



(b) Dominio della funzione  $f(x)$

Rappresentazione grafica del problema

Determino i punti non regolari

Calcolo i gradienti dei vincoli

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - 2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il gradiente  $\nabla g_1$  si annulla in  $P = (0, 1)$  in cui il vincolo  $g_1$  non è attivo ed è pertanto regolare. Il gradiente  $\nabla g_2$  non si annulla mai.

### Calcolo i punti di intersezione dei vincoli

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \\ 2 + x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_2 - 2)^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \\ x_1 = x_2 - 2 \end{cases}$$

Dall'intersezione deriviamo i punti  $A = (-1, 1)$  e  $B = (0, 2)$ . Sostituendo i punti nella matrice dei gradienti verifico che né  $A$  né  $B$  la rende singolare e sono pertanto regolari.

### Condizioni di KKT

#### Costruisco la lagrangiana generalizzata

$$l(x) = x_2 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) + \mu_2(2 + x_1 - x_2)$$

#### Costruisco il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2\mu_1 x_1 + \mu_2 \\ 1 + \mu_1(2x_2 - 2) - \mu_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) = 0 \\ \mu_2(2 + x_1 - x_2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leq 0 \\ 2 + x_1 - x_2 \leq 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema procedo con un albero di bisezione sui vincoli, partendo dal più semplice,  $\mu_2 g_2$ :

**Caso  $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leq 0$ :**

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2\mu_1 x_1 \\ 1 + \mu_1(2x_2 - 2) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = 0 \\ \mu_1(x_2^2 - 2x_2) = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 \leq 0 \\ 2 - x_2 \leq 0 \\ \mu_1 \geq 0 \end{cases}$$

Poichè  $x_1 = 0$  è uno dei punti di intersezione dei vincoli, quindi  $x_2 = 2$ , altrimenti cadrebbe al di fuori del dominio.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 = -\frac{1}{2} \\ \mu_1 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema risulta impossibile.

**Caso  $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$ :**

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2\mu_1(x_2 - 2) + \mu_2 \\ 1 + \mu_1(2x_2 - 2) - \mu_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 \neq 0 \\ x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0 \\ x_1 = x_2 - 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} -2\mu_1 + \mu_2 \\ 1 - \mu_1 - \mu_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_2 > 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \\ \cancel{\mu_2 = 0} \\ \cancel{\mu_2 > 0} \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \\ \mu_1 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{\mu_2}{2} \\ \frac{\mu_2}{2} + \mu_2 = 1 \\ \mu_2 > 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{1}{3} \\ \mu_2 = \frac{2}{3} \\ \mu_2 > 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le condizioni KKT eliminano il punto  $B$  e confermano  $A$  come punto candidato.

**Sostituisco il valore numerico dei punti** Il punto  $A$  è l'ultimo candidato rimasto ed è quindi certamente l'ottimo locale. Questo è verificabile anche guardando il grafico della funzione in figura A.6a.

$$f(A) = f(-1, 1) = 1$$

### A.2.5 Esercizio 3

Si descriva brevemente il metodo della trasformazione inversa per enumerare le soluzioni paretiane, specificandone le condizioni di applicazione.

Si applichi tale metodo al seguente problema:

$$\begin{aligned} \max f_1 &= x_1 + x_2 \\ \max f_2 &= x_1 - x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

### A.2.6 Soluzione esercizio 3

#### Metodo della trasformazione inversa

Si determina l'inversa della funzione  $f, \phi : F \rightarrow X$ , si sostituisce  $x = \phi(x)$  nei vincoli e quindi si ottiene il sottoinsieme  $F^o$  degli impatti preferibili e da quest'ultimo si ottiene quindi la regione paretiana  $X^o$ . È applicabile solo quando  $f \in \mathbb{R}^2$ .

#### Determino l'inversa $\phi$

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \\ f_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 2x_1 - f_2 \\ x_2 = x_1 - f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{f_1 + f_2}{2} \\ x_2 = \frac{f_1 - 2f_2}{2} \end{cases}$$

#### Sostituisco l'inversa nei vincoli

$$\begin{cases} \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{f_1 - 2f_2}{2}\right)^2 \leq 1 \\ \frac{f_1 + f_2}{2} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f_1 + f_2)^2 + (f_1 - 2f_2)^2 \leq 4 \\ f_1 + f_2 \leq 0 \end{cases}$$

L'immagine della regione paretiana  $F^o$  è l'insieme di punti che non ammettono altri punti nel quadrante in basso a sinistra, che in questo caso costituiscono il segmento evidenziato in rosso nella figura A.7.

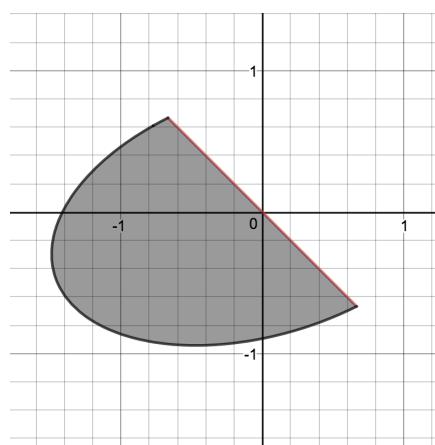


Figura A.7: In rosso l'immagine della regione paretiana.

La trasformazione inversa in questo caso è **lineare**, quindi anche la regione  $X^o$  risulterà un segmento di retta.

Determino i punti di intersezione:

$$\begin{cases} (f_1 + f_2)^2 + (f_1 - 2f_2)^2 = 4 \\ f_1 + f_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-f_2 + f_2)^2 + (-f_2 - 2f_2)^2 = 4 \\ f_1 = -f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3f_2)^2 = 4 \\ f_1 = -f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9f_2^2 = 4 \Rightarrow \pm \frac{2}{3} \\ f_1 = -f_2 \end{cases}$$

I due punti risultano essere quindi:  $A = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$  e  $B = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .

Calcolo quindi i punti che determina il segmento della regione paretiana.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{-3f_2}{2} = \pm 1 \end{cases}$$

Da cui i due punti che determinano il segmento della regione paretiana  $X^0$  sono  $C = (0, -1)$  e  $D = (0, 1)$ .

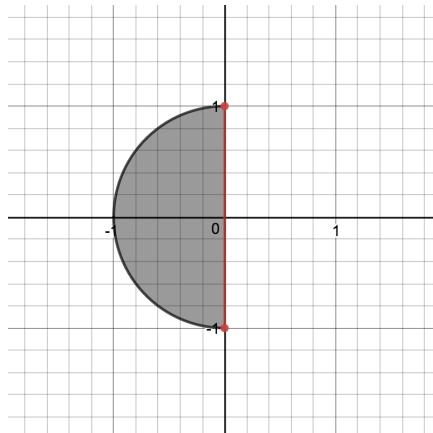
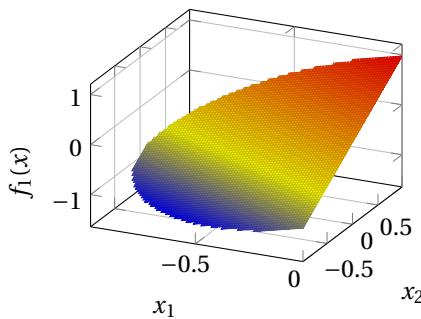
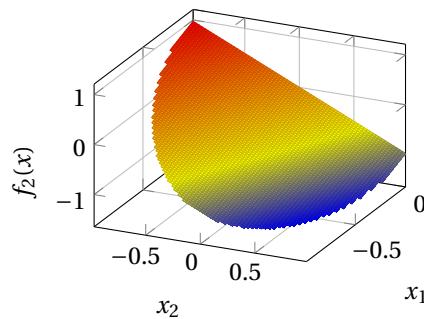


Figura A.8: In rosso la regione paretiana.

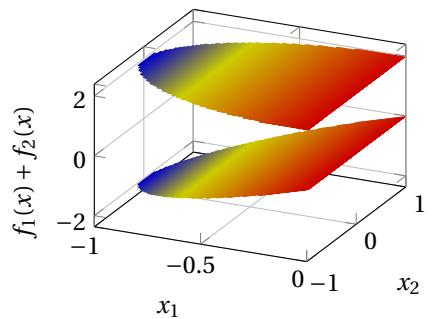
#### Verifico i risultati ottenuti



(a) L'indicatore  $f_1(x)$



(b) L'indicatore  $f_2(x)$



(c) La somma degli indicatori

I due indicatori assumono valori nella stessa magnitudo nel dominio di definizione per cui, in questo caso, è possibile stimare il massimo dei due indicatori come il massimo della funzione ottenuta sommandoli. Il risultato ottenuto è coerente con la regione paretiana evidenziata.

### A.2.7 Esercizio 4

Si elenchino le condizioni che rendono coerente una matrice di confronti a coppie.

Si descriva il procedimento per determinare un vettore di pesi corretto a partire da una matrice di confronti a coppie coerente.

Si descriva brevemente un modo per derivare una matrice coerente a partire da una non coerente e un criterio per valutare la qualità di tale derivazione.

### A.2.8 Soluzione esercizio 4

#### Condizioni di coerenza

Una matrice di confronti a coppie è coerente quando ha le seguenti proprietà:

**Positività** I tassi di sostituzione fra utilità normalizzati sono sempre positivi.

$$\lambda_{lm} > 0$$

**Reciprocità** Il tasso di sostituzione di una utilità normalizzata rispetto ad un'altra è il reciproco del tasso della seconda rispetto alla prima.

$$\lambda_{ln} = \frac{1}{\lambda_{ml}}$$

**Coerenza** Due tassi di sostituzione con indici “in sequenza” determinano il terzo:

$$\lambda_{ln} = \lambda_{lm} \lambda_{mn}$$

#### Calcolo del vettore di pesi

Il vettore dei pesi di una matrice coerente risulta pari ad una colonna qualsiasi della matrice normalizzata per la somma di sé stessa:

$$\omega_i = \frac{M_i}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}}$$

#### Ricostruzione di matrici coerenti

Si procede risolvendo il problema di minimizzazione seguente, dove  $\Lambda$  è la matrice costituita dai rapporti stimati dal decisore,  $W$  la matrice costituita dai rapporti  $\frac{\omega_l}{\omega_m}$ .

$$\begin{aligned} \min_{\omega} & \|W - \Lambda\| \\ \text{s.t.} & \sum_{l \in P} \omega_l = 1 \\ & \omega_l \geq 0 \quad l \in P \end{aligned}$$

Il valore ottimo della funzione obiettivo si può assumere come misura dell'incoerenza iniziale.

Per tenere conto dell'incoerenza del decisore è stato anche proposto di sostituire i valori stimati  $\lambda_{lm}$  con intervalli e di definire la norma componendo le distanze fra ciascun rapporto  $\frac{\omega_l}{\omega_m}$  e l'intervalllo corrispondente, anziché il valore stimato.

### A.2.9 Esercizio 5

Dato un problema di decisione con alternative  $X = \{a_1, \dots, a_5\}$  e scenari  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , e con le utilità  $u(f(x, \omega))$  e le probabilità  $\pi(\omega)$  riportate nella tabella seguente:

$u(f(x, \omega))$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$\pi(\omega)$
$u_1$	80	100	50	0	90	0.5
$u_2$	20	10	50	30	30	0.4
$u_3$	40	10	50	100	20	0.1

- a) Si elenchino le eventuali alternative dominate, specificando da quali altre alternative sono dominate.
- b) Si indichi l'alternativa scelta con il criterio del caso medio, spiegando il procedimento.
- c) Si mostri come cambia l'alternativa scelta al variare della probabilità  $\pi(\omega_1)$  del primo scenario, ipotizzando che le altre mantengano le reciproche proporzioni.

### A.2.10 Risoluzione esercizio 5

#### Alternative dominate

Senza considerare criteri particolari, nessuna alternativa risulta dominata.

#### Criterio del caso medio

Procedendo con il criterio del caso medio, sommando le utilità pesandole con la probabilità dello scenario, si ottiene:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$u_m$	52	55	50	22	59

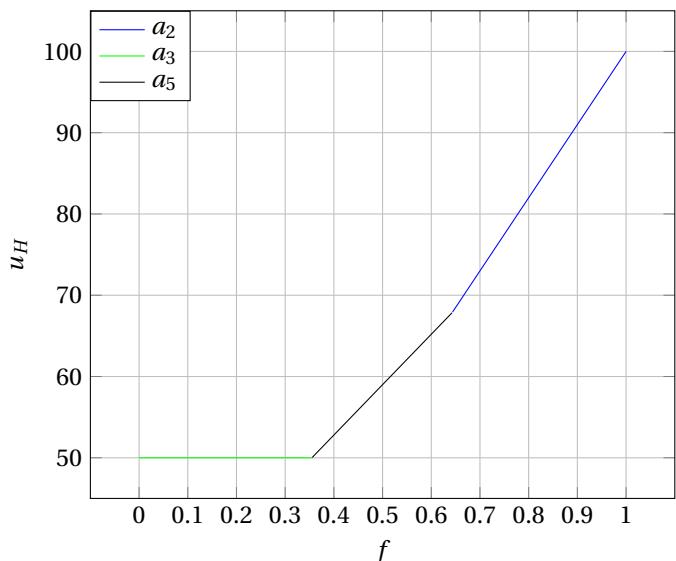
Da cui la scelta preferibile risulta essere  $a_5$ .

#### Analisi di sensitività

Al variare della probabilità  $\pi(\omega_1)$ , se le altre probabilità mantengono le stesse proporzioni, vale il sistema:

$$\begin{cases} \pi(\omega_1) = \alpha \\ \pi(\omega_2) = (1 - \alpha) * 0.8 \\ \pi(\omega_3) = (1 - \alpha) * 0.2 \end{cases}$$

Per  $\alpha \lesssim 0.36$  viene scelta  $a_3$ , per  $\alpha \gtrsim 0.36 \wedge \alpha \lesssim 0.64$  viene scelta  $a_5$  e per  $\alpha \gtrsim 0.64$  viene scelta  $a_2$ .



(a) La massima utilità al variare della probabilità

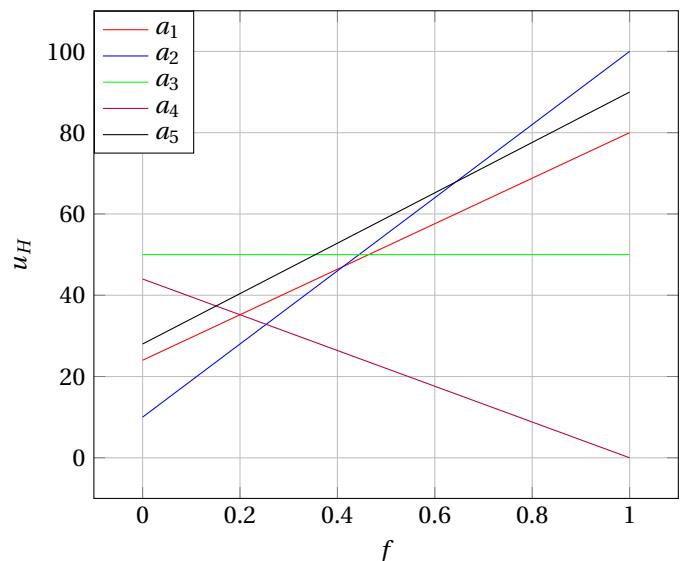
(b) L'utilità  $u_m$  al variare della probabilità  $\pi(\omega_1)$ 

Figura A.10: Analisi di sensitività

## A.3 Tema d'esame - 22 Marzo 2016

### A.3.1 Esercizio 1

Si introduca formalmente un problema di decisione complesso  $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$ , descrivendo brevemente il significato dei suoi elementi.

Si descriva brevemente la distinzione tra modelli prescrittivi e modelli descrittivi e si indichino i ruoli che essi possono svolgere in un processo decisionale complesso.

### A.3.2 Soluzione esercizio 1

Un problema di decisione complesso viene descritto dalla sestupla  $(X, \Omega, F, f, D, \Pi)$ :

$X$  L'insieme delle **soluzioni possibili**.

$\Omega$  L'insieme degli **scenari o esiti possibili**.

$F$  L'insieme degli **impatti possibili**.

$f(x, \omega) : X \times \Omega \rightarrow F$  La **funzione impatto**.

$D$  L'insieme dei **decisori**.

$\Pi(d) : D \rightarrow 2^{F \times F}$  La **relazione di preferenza**.

In un **modello prescrittivo** vengono usati come dati gli impatti e le preferenze e danno come risultato un'alternativa ottima mentre in un **modello descrittivo** vengono usati come dati la descrizione del sistema, gli scenari e le alternative e danno come risultati gli impatti. In generale, i modelli vengono utilizzati per prendere decisioni e prevederne i risultati.

### A.3.3 Esercizio 2

Dato il problema di programmazione matematica

$$\min f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2$$

$$g_1(x) = x_1 - x_2 \leq 0$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_3 \geq 0$$

- a) Si rappresenti il problema graficamente.
- b) Si determinino gli eventuali punti non regolari.
- c) Si determinino i punti candidati secondo le condizioni di KKT, e in particolare quello/i di minimo.

### A.3.4 Soluzione esercizio 2

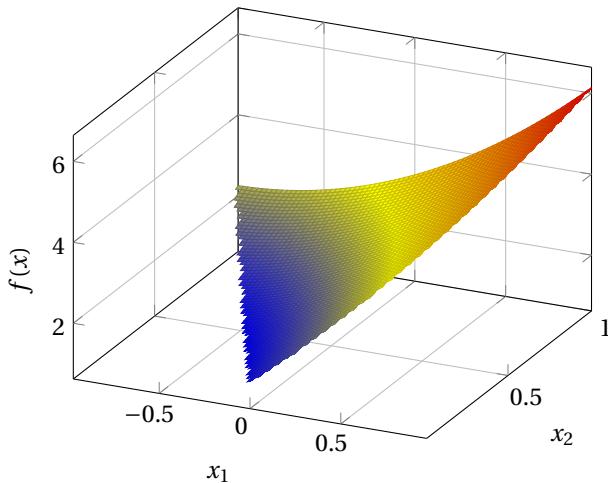
Riscrivo i vincoli

$$\min f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2$$

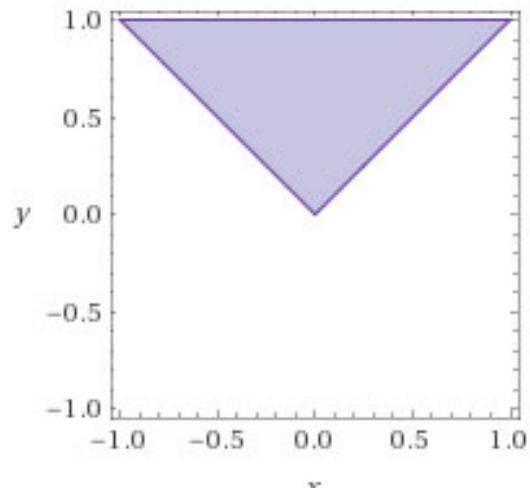
$$g_1(x) = x_1 - x_2 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_1 - x_2 \leq 0$$

$$g_3(x) = -x_2 \leq 0$$



(a) La funzione  $f(x)$



(b) Dominio della funzione  $f(x)$

Rappresentazione grafica del problema

Calcolo dei punti non regolari

Calcolo i gradienti dei vincoli

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nessuno dei gradienti si può annullare.

**Calcolo dei punti di intersezione dei vincoli** L'unico punto di intersezione esistente è l'origine  $O = (0, 0)$ . Questo punto è regolare poiché non rende singolare la matrice dei gradienti (che non può mai annullarsi).

### Condizioni di KKT

#### Costruisco la lagrangiana generalizzata

$$l(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2 + \mu_1(x_1 - x_2) - \mu_2(x_1 + x_2) - \mu_3 x_2$$

#### Costruisco il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + 1) + \mu_1 - \mu_2 \\ 2(x_2 + \frac{1}{2}) - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_1(x_1 - x_2) = 0 \\ \mu_2(x_1 + x_2) = 0 \\ \mu_3 x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_3 \geq 0 \end{cases}$$

Porre a 0 uno qualsiasi dei vincoli significa imporre pari a 0 tutti i vincoli, dato che l'origine è un punto di intersezione dei tre vincoli.

**Caso  $\mu_3 = 0 \wedge g_3 < 0$ :**

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + 1) + \mu_1 - \mu_2 \\ 2(x_2 + \frac{1}{2}) - \mu_1 - \mu_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_1(x_1 - x_2) = 0 \\ \mu_2(x_1 + x_2) = 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_2 > 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases}$$

Spezzo il problema in due ulteriori sotto casi:  $P_1 : g_2 < 0 \wedge \mu_2 = 0$

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + 1) + \mu_1 \\ 2(x_2 + \frac{1}{2}) - \mu_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_1(x_1 - x_2) = 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 > -x_2 \\ x_2 > 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 + x_2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} - x_2 \\ \mu_1(x_1 - x_2) = 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 > -x_2 \\ x_2 > 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema risulta impossibile.

L'unico punto che risolve il sistema delle condizioni KKT rimane quindi l'origine.

**Calcolo del valore del punto ottimo** L'unico punto candidato che rimane è  $O = (0, 0)$

$$f(O) = f(0, 0) = 1.25$$

### A.3.5 Esercizio 3

Si descriva brevemente il metodo dei vincoli per enumerare le soluzioni paretiane, specificandone vantaggi e svantaggi.

Si applichi tale metodo al problema seguente risolvendo graficamente i sottoproblemi richiesti.

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 \\ \min f_2(x) &= -x_1 \\ X &= \{x : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2\} \end{aligned}$$

### A.3.6 Soluzione esercizio 3

#### Il metodo dei vincoli

Il teorema su cui si basa questo metodo afferma che un punto di ottimo globale  $x^o$  per gli indicatori  $f_l$  è punto di ottimo globale anche per il problema costruito come:

$$\begin{aligned} \min f_{l^*}(x) \\ f_l(x) \leq \epsilon_l = f_l(x^o) \quad l \in \{1, \dots, p\} \setminus \{l^*\} \end{aligned}$$

Si procede vincolando al valore ottimo assunto dall'indicatore  $\epsilon_l = f_l(x^o)$  l'indicatore  $l$ -esimo e quindi si può identificare il valore dello standard  $\epsilon_l$  e quindi  $x^o$  risolvere tramite KKT o graficamente.

#### Vantaggi

1. È sempre applicabile.

#### Svantaggi

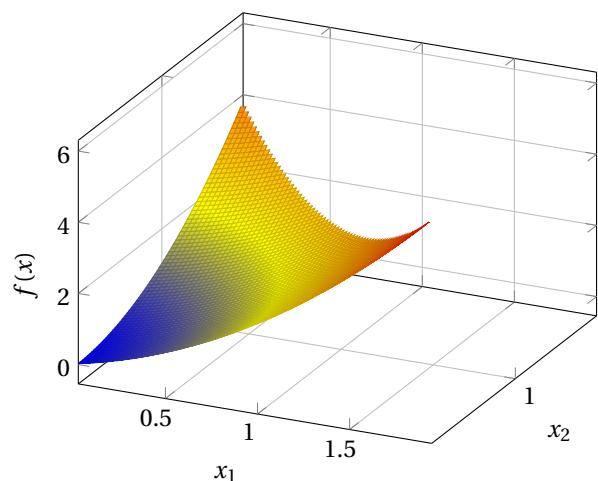
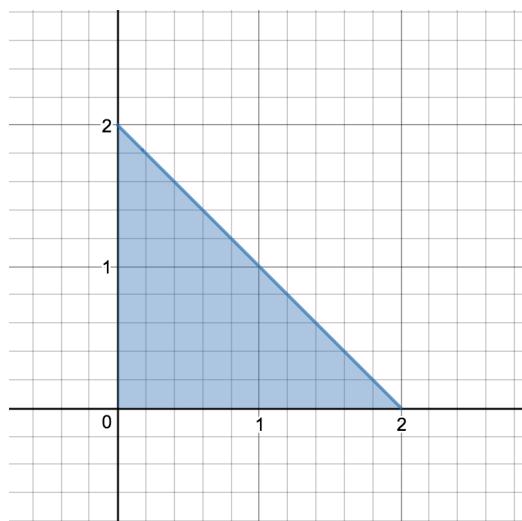
1. Produce una sovrastima di  $X^o$ .
2. In problemi con molti indicatori l'identificazione dei vari standard può risultare ardua.

#### Risoluzione con metodo dei vincoli

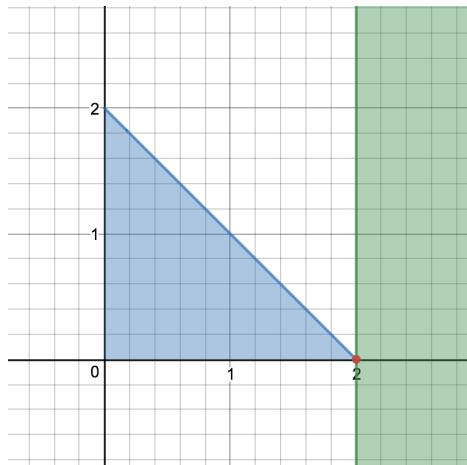
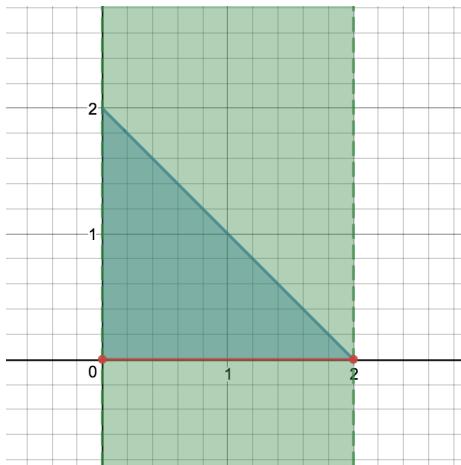
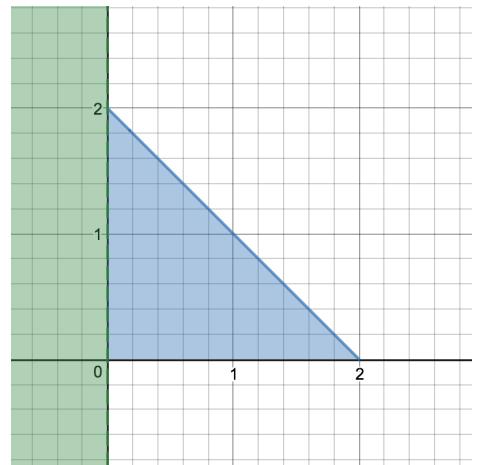
Riformulo il problema:

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 &\leq \epsilon_2 \end{aligned}$$

È chiaro che la funzione  $f_1$  sia un cerchio con centro in  $C = (-\frac{1}{2}, 0)$ , che quindi coincide con il punto di minimo globale non vincolato. In base ai vincoli che costringono la  $x_1$ , lo standard  $\epsilon_2 \in [-2, \infty)$ , ma oltre  $\epsilon_2 \in [-2, 0]$  i valori perdono di interesse per il problema.

(a) La funzione  $f_1(x)$  nel suo dominio

(b) Dominio delle soluzioni

(a) Caso  $\epsilon_2 \geq -2$  l'unico ottimo globale è  $A = (2,0)$ .(b) Caso  $-2 < \epsilon_2 \leq 0$ , l'ottimo si sposta gradualmente da  $A$  a  $B = (0,0)$ .(c) Nel caso  $\epsilon_2 > 0$  non vi sono più soluzioni nel dominio di definizione.

La regione paretiana quindi è il segmento tra il punto  $A$  e  $B$ .

### A.3.7 Esercizio 4

Si descrivano brevemente i seguenti aspetti dell'Analisi Gerarchica (AHP), spiegandone le motivazioni:

- a) Luso di scale qualitative.
- b) Luso di confronti a coppie.
- c) Luso di una gerarchia di attributi.

Se è possibile farlo con semplici calcoli, si ricavi dalla seguente matrice di confronti a coppie un vettore di pesi; si spieghi perché possibile farlo o perché non è possibile.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1/12 & 1/4 & 1/20 \\ 12 & 1 & 3 & 3/5 \\ 4 & 1/3 & 1 & 1/5 \\ 20 & 5/3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

### A.3.8 Risoluzione esercizio 4

#### Scale qualitative

Si usano scale qualitative per semplificare la valutazione della preferenza tra due impatti e si assegna un valore numerico arbitrariamente grande in base alla preferenza, per esempio 1 per l'indifferenza o 7 se un impatto fossero molto preferibile ad un'altro. L'idea è di tradurre un giudizio qualitativo in un valore numero. Questo, intrensicamente, impedisce a chi fa uso del modello di affidarsene completamente come modello perfetto della realtà.

#### Confronti a coppie

I pesi degli attributi vengono costruiti tramite l'elaborazione dei giudizi sul peso relativo degli indicatori forniti dal decisore, partendo da matrici di confronti a coppie costruite con i valori qualitative tratti dalla scala di Saaty.

#### Gerarchia di attributi

Gli attributi vengono divisi in categorie di ordine e omogeneità simile per facilitare il confronto, considerando che nel caso di molti attributi procedere unicamente per confronti a coppie sarebbe impraticabile, mentre così il numero di confronti totale si riduce sensibilmente.

#### Calcolo dei pesi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1/12 & 1/4 & 1/20 \\ 12 & 1 & 3 & 3/5 \\ 4 & 1/3 & 1 & 1/5 \\ 20 & 5/3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_M = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} / (1 + 12 + 4 + 20) = \begin{bmatrix} 1/37 \\ 12/37 \\ 4/37 \\ 20/37 \end{bmatrix}$$

### A.3.9 Esercizio 5

Si descriva brevemente il criterio del rammarico per la risoluzione di problemi di decisione in condizioni di ignoranza, spiegandone la logica intrinseca.

Si indichi se tale criterio fornisce un ordinamento debole delle alternative del problema, spiegando che cosa si intende con tale proprietà e motivando la risposta.

Si dica se tale criterio garantisce l'indipendenza dalle alternative irrilevanti, spiegando che cosa si intende con tale proprietà e motivando la risposta.

### A.3.10 Soluzione esercizio 5

#### Criterio del rammarico

Il criterio del rammarico identifica il caso ottimo per ogni scenario, quindi calcola per ogni combinazione di scelta e scenario la distanza dal valore ottimo dello scenario, detta rammarico. Si va a determinare quindi, per ogni scelta, il rammarico massimo e si sceglie la scelta con rammarico minimo.

#### Ordinamento

Fornisce sempre un ordine debole poiché rende lineare il confronto tra i vari scenari. Il rammarico al più risulterà uguale tra più scelte, ma sono certamente ordinate debolmente.

#### Indipendenza tra alternative irrilevanti

Nessuno dei criteri di scelta rispetta la proprietà di indipendenza, che garantirebbe l'assenza del **rank reversal**.

### A.3.11 Esercizio 7

Si distinguano i concetti di strategia pura e strategia mista nel contesto della teoria dei giochi.

Si definisca il concetto di strategia dominata nel caso dei giochi a due persone.

Si indichi se il gioco rappresentato dalla seguente matrice di payoff ammette strategie dominate oppure no, motivando la risposta.

	1	2	3
1	(1, 4)	(2, 3)	(5, 0)
2	(0, 0)	(1, 1)	(3, 3)
3	(3, 1)	(6, 2)	(2, 7)

Nel caso dei giochi a due persone a somma zero, è possibile che vi siano strategie dominate? In caso positivo, si fornisca un esempio; in caso negativo, si spieghi perché no.

### A.3.12 Soluzione esercizio 7

#### Strategia pura e mista

Una strategia pura è composta da un solo impatto certo cioè con probabilità unitaria. Una strategia mista è composta da più strategie pure, ognuna con una determinata probabilità di essere scelta.

#### Strategia dominata

Una strategia  $s_1$  è dominata da una strategia  $s_2$  quando ogni possibile payoff di  $s_1$  è peggiore o uguale dei rispettivi payoff di  $s_2$ .

#### Strategie dominate nel gioco

Per il giocatore di riga, la seconda riga è dominata sia dalla prima che dalla terza, pertanto viene eliminata (tabella A.2). Per il giocatore di colonna nessuna strategia risulta dominata.

	1	2	3
1	(1, 4)	(2, 3)	(5, 0)
3	(3, 1)	(6, 2)	(2, 7)

Tabella A.2: Elimino seconda riga

#### Strategie dominate nei giochi a somma zero

Si, nei giochi a somma zero esistono strategie dominate. Per esempio, nel gioco a somma zero in tabella A.14a il giocatore di riga sceglierà sempre la riga  $B$  (tabella A.14b) ed il giocatore di colonna sceglierà sempre la colonna  $B$  (tabella A.14c).

	A	B
A	0	-1
B	3	2

(a) Gioco a somma zero con strategie dominate

	A	B
B	3	2

(b) Elimino la riga  $A$

	B
B	2

(c) Elimino la colonna  $A$

### A.3.13 Esercizio 8

La tabella seguente riporta le preferenze di 27 elettori fra 3 alternative possibili, indicate con le lettere A, B e C. Ogni riga riporta un possibile ordine di preferenza e il numero di elettori che vi si riconosce.

Ordine	Numero di elettori
A B C	11
A C B	2
B C A	8
C A B	2
C B A	4

Si applichino i metodi di Condorcet e di Borda per determinare la relazione di preferenza del gruppo.

### A.3.14 Soluzione esercizio 8

#### Metodo di Condorcet

Nel metodo di Condorcet, una scelta  $x_1$  domina una seconda  $x_2$  quando il numero di decisori per cui  $x_1 \leq x_2$  è maggiore del numero di decisori per cui  $x_2 \leq x_1$ . Questo, generalmente, consente di creare un ordine debole dal quale trarre la decisione di gruppo.

$$\begin{aligned}\#\{A \leq_d B\} &= 15 > \#\{B \leq_d A\} = 12 \Rightarrow A \leq_D B \\ \#\{B \leq_d C\} &= 19 > \#\{C \leq_d B\} = 8 \Rightarrow B \leq_D C \\ \#\{A \leq_d C\} &= 13 < \#\{C \leq_d A\} = 14 \Rightarrow C \leq_D A\end{aligned}$$

Siamo in un caso di preferenze circolari, per cui il metodo di Condorcet non è in grado di realizzare un ordine debole.

#### Metodo di Borda

Assegna un punteggio ad una soluzione in base alla posizione che essa assume sulla lista di preferenze di ogni decisore, somma questi punteggi e va a scegliere quella soluzione che ha il punteggio più alto.

Talvolta è soggetto al **rank reversal**, cioè eliminando una soluzione (anche mediocre) soluzioni precedentemente non ottime lo diventano.

Scelta	Somma	punteggio
A	$3 * (11 + 2) + 2 * (2) + 1 * (8 + 4)$	52
B	$3 * (8) + 2 * (4) + 1 * (2 + 2)$	36
C	$3 * (2 + 4) + 2 * (2 + 8) + 1 * (11)$	39

Per il conto di Borsa la soluzione migliore risulta essere la A. Se procedessimo ad eliminare la soluzione peggiore, la B, il punteggio cambia nel modo seguente:

Scelta	Somma	punteggio
A	$2 * (11 + 2) + 1 * (2 + 4 + 8)$	40
C	$2 * (2 + 4 + 8) + 1 * (11 + 2)$	41

La soluzione C diviene quella migliore: avviene quindi un rank reversal.

## A.4 Tema d'esame - 10 Febbraio 2016

### A.4.1 Esercizio 1

Dato un problema decisionale con insieme di impatti  $F = \{a, b, c, d, e, f\}$  e relazione di preferenza  $\Pi$ :

$$\Pi = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, d), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e), (f, b), (f, c), (f, d), (f, f)\}$$

1. Si spieghi il significato della relazione per il problema decisionale.
2. Si elenchino le proprietà principali di cui  $\Pi$  gode.
3. Si derivi la relazione di indifferenza associata  $\text{Ind}_\Pi$ .
4. Si dica se la relazione è un ordine di qualche genere e quali conseguenze questo ha sul problema decisionale.

### A.4.2 Soluzione esercizio 1

1. La relazione  $\Pi$  è binaria, cioè specifica coppie di impatti  $(f_1, f_2) : f_1 \leq f_2$ .

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	0	0
b	0	1	1	1	0	0
c	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	1	1	1	1	0
f	0	0	1	1	0	1

Tabella A.3: Rappresentazione a tabella di  $\Pi$

2. La relazione  $\Pi$  gode della proprietà **riflessiva** (la diagonale principale della matrice è composta da soli 1, evidenziati in verde).

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	0	0
b	0	1	1	1	0	0
c	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	1	1	1	1	0
f	0	0	1	1	0	1

Tabella A.4: Rappresentazione a tabella di  $\Pi$ , con  $\text{Ind}_\Pi$  evidenziata.

3. La **relazione di indifferenza**  $\text{Ind}_\Pi$  è composta dalle coppie indifferenti, cioè che il decisore accetta di scambiare in entrambe le direzioni (nella tabella evidenziate in rosso).

$$\Pi = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c), (c, b), (d, d), (e, e), (f, f)\}$$

4. Tutte le tipologie di ordine richiedono la proprietà **transitiva**, che nella relazione  $\Pi$  non è rispettata:

$$a \leq b, b \leq e \not\Rightarrow a \leq e$$

Di conseguenza non è possibile definire una funzione valore, perchè questa richiede almeno un ordine debole come condizione necessaria.

### A.4.3 Esercizio 2

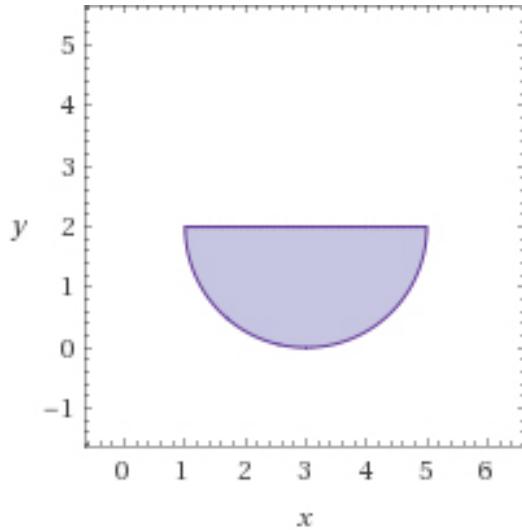
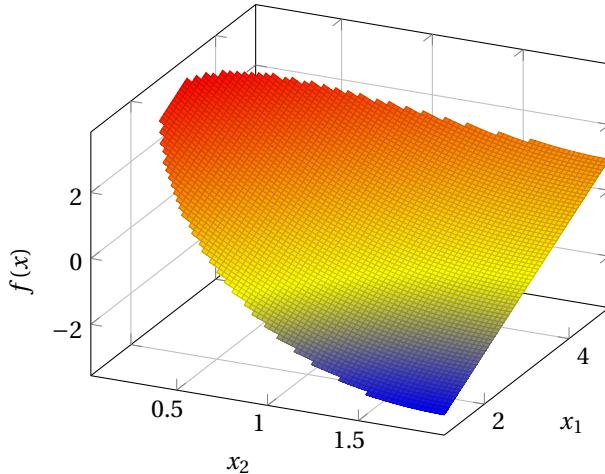
Dato il problema di programmazione matematica

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_2^2 + x_1 - 4x_2 \\ g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 \leq 0 \\ g_2(x) &= x_2 - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

- a) Si rappresenti il problema graficamente.
- b) Si scrivano le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker.
- c) Si determinino i punti candidati, e in particolare quello/i di minimo.

### A.4.4 Soluzione esercizio 2

a) La funzione nel suo dominio di definizione è la seguente:



b) Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono le seguenti:

**Teorema A.4.1** (Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker). Sia  $f$  una funzione,  $h_i$  con  $i \in \{1, \dots, s\}$  dei vincoli bilateri e  $g_j$  con  $j \in \{1, \dots, m\}$  dei vincoli monolateri e sia l'insieme  $X$  definito come:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, h_i(x) = 0 \quad \forall i, j\} \quad \text{e} \quad f, g_j, h_i \in C^1(X) \quad \forall i, j$$

Se  $x^*$  è un punto regolare in  $X$  e un punto di minimo locale per  $f \in X$ , allora esistono  $s$  moltiplicatori  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  e  $m$   $\mu_j \geq 0$  tali che:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

c) Calcolo dei punti candidati.

**Calcolo dei punti non regolari** I punti regolari sono quei punti nei quali i gradienti dei vincoli attivi sono fra loro linearmente indipendenti. Punti interni alle regioni di ammissibilità sono tutti regolari. Vanno investigati i punti che annullano il gradiente.

Calcolo quindi i gradienti dei due vincoli,  $\nabla g_1(x)$  e  $\nabla g_2(x)$ :

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 6 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il primo gradiente si annulla per  $P = (x_1 = 3, x_2 = 2)$ , che è posto dove si attiva il vincolo  $g_2$  ma non  $g_1$  ed il secondo gradiente non si annulla mai (menchieremo in  $P$ ) per cui  $P$  è considerato regolare.

Identifichiamo ora i punti di intersezione dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

I punti candidati quindi sono  $A = (1, 2)$  e  $B = (5, 2)$ .

Verifichiamo che i gradienti siano linearmente indipendenti tramite il metodo della matrice: se per uno di essi fossero dipendenti (cioè la matrice ha determinante 0) allora  $A$  non sarebbe regolare e le condizioni KKT perderebbero di validità.

$$\det M_g(A) = \det \begin{bmatrix} \nabla g_1(A) & \nabla g_2(A) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\det M_g(B) = \det \begin{bmatrix} \nabla g_1(B) & \nabla g_2(B) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

I gradienti sono linearmente indipendenti sia in  $A$  che in  $B$ .

**Calcolo della lagrangiana generalizzata** La formula della lagrangiana generalizzata (figura A.16) assomiglia molto alle condizioni KKT ma si applica sulle primitive (non i gradienti).

$$l(x) = f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j g_j(x)$$

Figura A.16: Formula della lagrangiana generalizzata

$$\begin{aligned} l(x) &= f(x) + \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) \\ &= x_2^2 + x_1 - 4x_2 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9) + \mu_2(x_2 - 2) \end{aligned}$$

### Costruisco il sistema delle condizioni KKT

$$\begin{cases} \nabla l(x) = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1(2x_1 - 6) \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9) = 0 \\ \mu_2(x_2 - 2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 \leq 0 \\ x_2 - 2 \leq 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_2(x_2 - 2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leq 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che  $\mu_1$  deve essere strettamente maggiore di 0, altrimenti la prima equazione  $\mu_1(2x_1 - 6) = -1$  non sarebbe rispettata. Se  $\mu_1 > 0$ , allora  $g_1 = 0$ .

Impostiamo un albero di ricerca dicotomico per risolvere il sistema, dividendo tra:

$$\mu_j = 0 \wedge g_j \leq 0 \quad \vee \quad \mu_j > 0 \wedge g_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Iniziamo scegliendo il vincolo più semplice, nel nostro caso  $g_2$ :

**Caso in cui  $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leq 0$ :**

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leq 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ \mu_1 = -1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 \leq 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases}$$

Ponendo  $\mu_2 = 0 \wedge g_2 \leq 0$  si ottiene che  $\mu_1 = -1 \wedge \mu_1 > 0$ , per cui il sistema è impossibile. Se restringiamo il caso in analisi a  $\mu_2 = 0 \wedge g_2 = 0$  è possibile rispettare il vincolo  $\mu_1 > 0$  proseguendo così:

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ x_1^2 - 6x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -\frac{1}{2x_1 - 6} \\ x_1 = 3 \pm \sqrt{9 + 5} = 3 \pm \sqrt{14} \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \end{cases}$$

Solamente  $x_1 = 3 - \sqrt{14}$  è accettabile poiché  $\mu_1 > 0$ :

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{1}{3 - \sqrt{14} - 6} = \frac{1}{\sqrt{14} + 3} = \frac{\sqrt{14} - 3}{5} \\ x_1 = 3 - \sqrt{14} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ne otteniamo quindi il punto candidato  $C = (3 - \sqrt{14}, 2)$  con  $\mu = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{14} - 3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$ .

**Caso in cui  $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$ :**

$$\begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 2x_2 - 4 + \mu_1(2x_2 - 4) + \mu_2 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ 4 - 4 + \mu_1(4 - 4) + 2\mu_2 = 0 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1(2x_1 - 6) = -1 \\ \mu_2 = 0 \\ x_1^2 + 4 - 6x_1 - 8 + 9 = 0 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases}$$

Ponendo  $\mu_2 > 0 \wedge g_2 = 0$  si ottiene che  $\mu_2 = 0 \wedge \mu_2 > 0$ , per cui il sistema è impossibile. Ne segue che il caso in analisi è impossibile.

**Calcolo del valore dei punti candidati** Sostituisco i punti candidati nella funzione da minimizzare ed ottengo:

$$\begin{cases} f(A) = f(1, 2) = 4 + 1 - 8 = -3 \\ f(B) = f(5, 2) = 4 + 5 - 8 = 1 \\ f(C) = f(3 - \sqrt{14}, 2) \approx -4.74 \end{cases}$$

Il punto di ottimo locale risulta essere quello ottenuto con le condizioni di KKT,  $C = (3 - \sqrt{14}, 2)$ .

### A.4.5 Esercizio 3

Riferendosi ai problemi di programmazione a molti obiettivi:

- Si definisca il concetto di soluzione paretiana.
- Si elenchino i principali metodi per determinare le soluzioni paretiane.
- Si descriva brevemente il metodo dei pesi, specificandone vantaggi e svantaggi.

### A.4.6 Soluzione esercizio 3

#### Definizione di soluzione paretiana

**Definizione A.4.2** (Soluzione paretiana). Si dice soluzione paretiana qualsiasi soluzione ammissibile  $x^0 \in X$  tale che nessun'altra soluzione  $x'$  la domina.

$$\forall x \in X, l \in \{1, \dots, p\} : f_l(x') > f_l(x^0) \vee f_l(x') = f_l(x^0)$$

Le soluzioni paretiane non coincidono con gli ottimi globali poiché non sono necessariamente indifferenti tra loro e non sono preferibili a tutte le altre, proprietà che invece valgono per i punti di ottimo globale.

#### Metodi per determinare soluzioni paretiane

I metodi sono 5:

**Applicazione della definizione** Vale **caso finito** è possibile risolvere costruendo il grafo di dominanza fra soluzioni.

**Condizioni KKT** Vale nel **caso continuo**. Le condizioni KKT (aggiungendo le opportune condizioni di normalizzazione per i pesi) producono una sovrastima di  $X^0$ .

**Metodo della trasformazione inversa** Utilizzabile se ci sono solo due indicatori ( $f \in \mathbb{R}^2$ ), dato che si procede graficamente identificando gli impatti ottimi  $F^0$  e quindi tramite l'inversa della funzione  $f$ ,  $\phi: F \rightarrow X$  si calcola la regione paretiana  $X^0$ .

**Metodo dei pesi** Vale sempre e consiste nel costruire una combinazione convessa degli indicatori di un impatto e di andare a minimizzare le combinazioni. Produce una sottostima di  $X^0$ .

**Metodo dei vincoli** Preso uno o più indicatori  $f_l$ , li si rende disequazioni vincolate da un coefficiente  $\epsilon_l$  (detto standard), che quindi si identifica via KKT o metodo grafo. Produce una sovrastima di  $X^0$

#### Il metodo dei pesi

**Come si procede** Si sceglie uno o più impatti e si costruisce la combinazione convessa dei suoi indicatori, quindi minimizzare la sommatoria ottenuta.

#### Vantaggi

- Il metodo dei pesi è sempre applicabile.
- Non altera la regione ammissibile ma si limita ad aggiungere un obiettivo ausiliario.

#### Svantaggi

- Con problemi di grandi dimensioni il numero di pesi può diventare intrattabile.
- Per ogni peso  $\omega$  è necessario trovare tutte le soluzioni ottime.
- Produce una sottostima di  $X^0$ .

### A.4.7 Esercizio 4

Si descrivano brevemente i seguenti aspetti dei metodi Electre:

- Le critiche di fondo alla teoria classica che motivano la loro proposta.
- Come si definisce una relazione di surclassamento e in che cosa differisce da una relazione di preferenza.
- Come si determina il nucleo del problema (facendo un piccolo esempio).

### A.4.8 Soluzione esercizio 4

#### Le critiche alla teoria clasica

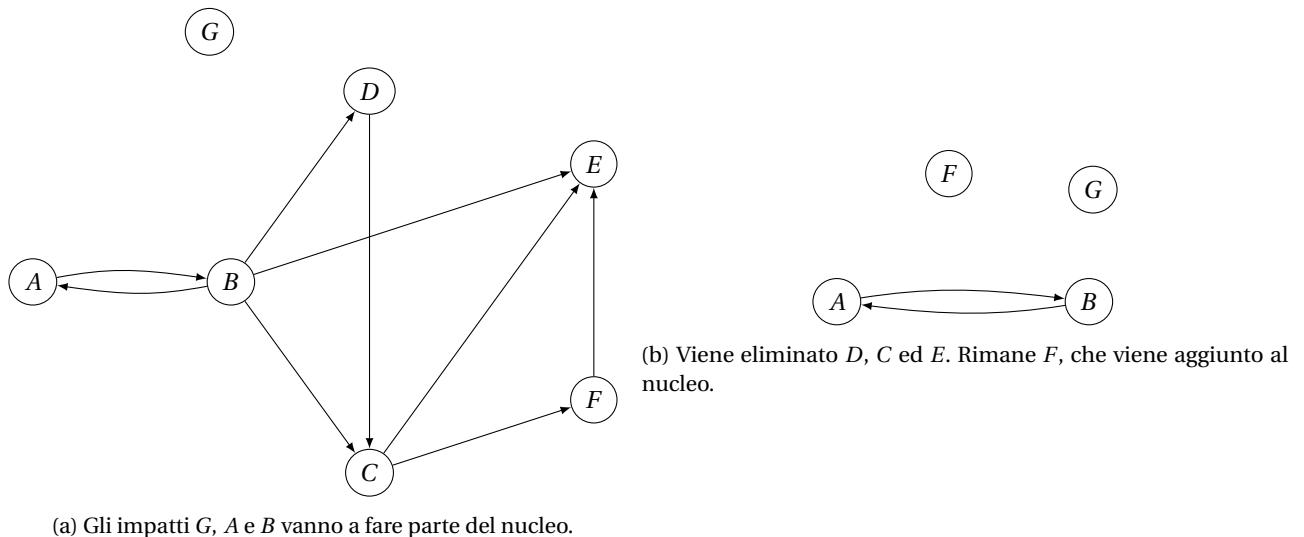
La critica nasce dall'ipotesi che il decisore non sia in grado di confrontare tutte le coppie di impatti e che esistano soluzioni (quali quelle trattate nel paradosso del caffè) in cui gli impatto sono, a coppia, indistinguibili se non per un  $\epsilon$  infinitesimo che il decisore non è in grado di cogliere.

#### La relazione di surclassamento

Un impatto  $f^{(1)}$  surclassa un secondo impatto  $f^{(2)}$  non unicamente quando è migliore su tutti gli attributi come nel caso della **relazione di preferenza** ma anche quando esso è peggiore per alcuni attributi purché meno di una certa soglia  $\epsilon$ .

#### Determinazione del nucleo del problema

- Il nucleo è inizialmente vuoto.
- Si aggiunge al nucleo il sottoinsieme delle soluzioni non surclassate nel grafo corrente.
- Si elimina dal grafo ogni soluzione surclassata da una soluzione nel nucleo.
- Se il grafo coincide con il nucleo si termina, altrimenti si ritorna al punto 2.



### A.4.9 Esercizio 5

Dato un problema di decisione con alternative  $X = \{a_1, \dots, a_5\}$ , scenari  $\Omega = \omega_1, \omega_2$  e le utilità  $u(f(x, \omega))$  riportate nella tabella seguente:

$u(f(x, \omega))$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$\omega_1$	70	90	40	50	20
$\omega_2$	20	10	30	40	80

- a) Si elenchino le eventuali alternative dominate, specificando da quali altre alternative sono dominate.
- b) Si indichi l'alternativa scelta con il criterio del caso pessimo, spiegando il procedimento.
- c) Si indichi l'alternativa scelta con il criterio del rammarico, spiegando il procedimento.
- d) Si mostri come cambia l'alternativa scelta con il criterio di Hurwics al variare del coefficiente di pessimismo  $\alpha$ .

### A.4.10 Soluzione esercizio 5

#### Alternative dominate

L'alternativa  $a_4 < a_3$  poiché in entrambi gli scenari le utilità previste sono maggiori. Nei casi alternativi le utilità previste per i due scenari si superano mutualmente, per cui non è possibile identificare nessuna ulteriore coppia di scelte dominata.

#### Criterio del caso pessimo

Per ogni scelta identifico lo scenario peggiore, quindi tra questi scelgo il migliore. La scelta identificata in questo caso è  $a_4$ .

$u(f(x, \omega))$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$\omega_1$	70	90	40	50	20
$\omega_2$	20	10	30	40	80

Tabella A.5: In rosso i casi pessimi

#### Criterio del rammarico

Vado a calcolare per ogni scelta, per ogni scenario, la distanza dal caso ottimo (detta rammarico). Identifico quindi la distanza massima per ogni scelta e scelgo l'opzione che la minimizza.

$u(f(x, \omega))$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$\omega_1$	70	90	40	50	20
$\omega_2$	20	10	30	40	80

(a) In verde i casi ottimi

$u(f(x, \omega))$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$\omega_1$	20	0	50	40	70
$\omega_2$	60	70	50	40	0
$u_S$	60	70	50	40	70

(b) Utilità del criterio del rammarico

La scelta che minimizza il rammarico è la  $a_4$ .

#### Criterio di Harwicks

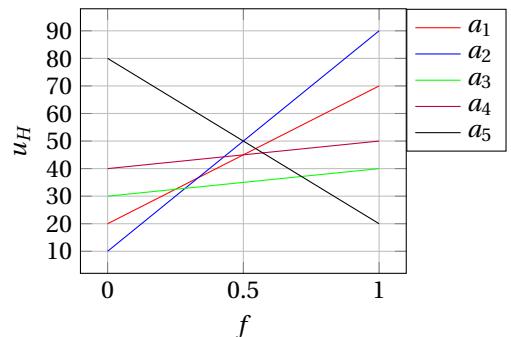
Vado a calcolare la combinazione convessa dei due scenari:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$u_H$	$70\alpha + 20(1-\alpha)$	$90\alpha + 10(1-\alpha)$	$40\alpha + 30(1-\alpha)$	$50\alpha + 40(1-\alpha)$	$20\alpha + 80(1-\alpha)$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$u_H$	70	90	40	50	20

(a) Caso  $\pi(\omega_1) = 1$ : viene scelta  $a_2$ 

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$u_H$	20	10	30	40	80

(b) Caso  $\pi(\omega_1) = 0$ : scelta  $a_5$ (c) L'utilità  $u_H$  al variare del coef. di pessimismo  $\alpha$ 

Per  $\alpha < 0.5$  prevale sempre  $a_5$ , per  $\alpha > 0.5$  prevale sempre  $a_2$ . Questi scenari risultano estremamente sbilanciati.

### A.4.11 Esercizio 6

Riferendosi ai problemi di programmazione in condizioni di rischio:

- Si descriva il procedimento di scelta con il criterio del valore atteso.
- Si definisca il concetto di lotteria secondo la teoria di Von Neumann e Morgenstern.
- Si definisca il concetto di profilo di rischio di un decisore e si spieghi perché esso rivela l'atteggiamento del decisore nei confronti del rischio insito in una decisione.

### A.4.12 Soluzione esercizio 6

#### Criterio del valore atteso

Per ogni scelta, si sommano le utilità di ogni scenario per quella scelta moltiplicate con la probabilità dello scenario, quindi si sceglie la scelta che garantisce utilità ottima.

#### Lotteria

Una lotteria (finita) è una coppia di funzioni  $l_{f,\pi} = (f(\omega), \pi(\omega))$  che associa ad ogni payoff  $f(\omega)$  (una variabile aleatoria) una determinata probabilità  $\pi(\omega)$ .

#### Profilo di rischio

Si tratta dell'andamento dell'utilità legata alle lotterie degeneri  $u(f, 1)$ :

**Utilità concava** Il decisore preferisce l'impatto certo: è avverso al rischio.

**Utilità lineare** Il decisore è indifferente: è neutrale al rischio.

**Utilità convessa** Il decisore preferisce la lotteria: è propenso al rischio.

### A.4.13 Esercizio 7

Dato il seguente gioco a due persone:

	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>A</i>	(0, 5)	(-1, 3)
<i>B</i>	(0, 0)	(-1, 3)

1. Determinare se vi siano strategie dominate.
2. Determinare gli eventuali punti di equilibrio (o dimostrare che non ve ne sono).
3. Applicare il criterio del caso pessimo al gioco in forma estesa, assumendo che i due giocatori non muovano simultaneamente, ma muova prima  $G_r$  e poi  $G_c$ .
4. Applicare il criterio del caso pessimo al gioco in forma estesa, assumendo che i due giocatori non muovano simultaneamente, ma muova prima  $G_c$  e poi  $G_r$ .

### A.4.14 Soluzione esercizio 7

#### Strategie dominate

Non esistono strategie dominate.

#### Punti di equilibrio

L'unico punto di equilibrio è per la strategia  $(A, A)$ .

	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>A</i>	(0, 5)	(-1, 3)
<i>B</i>	(0, 0)	(-1, 3)

#### Criterio del caso pessimo

Nel criterio del caso pessimo un giocatore assume che l'altro cercherà di danneggiarlo il più possibile.

**Prima  $G_r$ , poi  $G_c$**  Per  $G_r$  scegliere *A* o *B* non porta ad payoff differenti.

**Prima  $G_c$ , poi  $G_r$**   $G_c$  sceglierà *B*, poichè, nel caso pessimo,  $G_r$  può scegliere *B* e imporgli un payoff pari a 0, mentre scegliendo *B* il payoff sarà sempre 3.

### A.4.15 Esercizio 8

Considerando il metodo di Condorcet per le decisioni di gruppo:

- Si descriva il metodo stesso.
- Se ne indichi il difetto principale, fornendo un esempio.
- Si fornisca un esempio (non banale) nel quale il metodo produce una preferenza di gruppo che sia un ordine debole.

### A.4.16 Soluzione esercizio 8

#### Il metodo di Condorcet

Nel metodo di Condorcet, una scelta  $x_1$  domina una seconda  $x_2$  quando il numero di decisori per cui  $x_1 \leq x_2$  è maggiore del numero di decisori per cui  $x_2 \leq x_1$ . Questo, generalmente, consente di creare un ordine debole dal quale trarre la decisione di gruppo.

#### Il difetto del metodo di Condorcet

Nel caso di preferenze circolari il metodo di Condorcet non è in grado di realizzare un ordine debole.

Ordine	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
1	$a$	$b$	$c$	$d$
2	$b$	$c$	$d$	$c$
3	$c$	$d$	$a$	$a$
4	$d$	$a$	$b$	$b$

Tabella A.6: Preferenze circolari: caso in cui Condorcet fallisce

#### Esempio del metodo di Condorcet

Ordine	$d_1$	$d_2$	$d_3$
1	$a$	$b$	$c$
2	$b$	$c$	$b$
3	$c$	$d$	$a$
4	$d$	$a$	$d$

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	1	0	0	1
$b$	1	1	1	1
$c$	1	0	1	1
$d$	0	0	0	1

Ordine	Scelta
1	$b$
2	$c$
3	$a$
4	$d$

(a) Tabella delle preferenze per decisore

(b) Tabella delle preferenze di gruppo

(c) Ordine debole secondo Condorcet

Figura A.20: Esempio del metodo di Condorcet