

0.1 Tema d'esame del 29/06/2015

0.1.1 Secondo esercizio

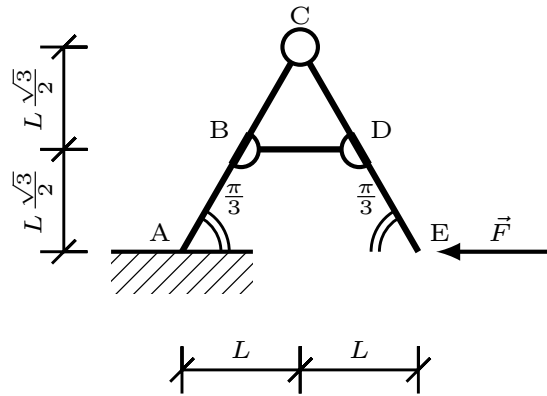


Figure 1: Isostatica con biella, incastro e cerniera con forza puntiforme

L'esercizio richiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari a terra (in A) e nel punto C;
2. Le azioni interne nell'asta AC.

0.1.2 Soluzione

Osservazioni

Prima di iniziare l'esercizio, è importante osservare che:

- La struttura forma un triangolo equilatero.
- Possiede un unico punto che la vincola a terra, A.
- L'asta BD si comporta come una *biella* o *pendolo semplice*.
- Nella struttura son presenti 2 corpi rigidi.
- Nella struttura son presenti 3 vincoli, una biella, una cerniera ed un incastro.

Verifica preliminare di isostaticità

Noi sappiamo risolvere solamente sistemi isostatici, per cui verifichiamo la condizione di isostaticità: $gdl_{totali} = gdl_{totali}$

$$gdl_{totali} = 3 + 3 = 6$$

Ci aspettiamo quindi che i gradi di vincolo siano pari a 6:

$$gdl_{totali} = gdl_{biella} + gdl_{cerniera} + gdl_{incastrato}$$

Richiami sulle cerniere interne

Definition 0.1.1 (Cerniera interna) Una cerniera è detta interna quando non è fissata a terra ed è compresa tra un numero n di aste tale per cui:

$$n > 1$$

Theorem 0.1.2 (Formula delle cerniere interne) Una cerniera interna compresa tra n aste impone un numero di gradi di vincolo pari a:

$$gdl_{cerniera} = 2(n - 1)$$

Per cui, sommando i gradi di vincolo di biella, cerniera ed incastrato si ottiene:

$$gdl_{totali} = 1 + 2(2 - 1) + 3 = 6$$

Quindi, in base all'analisi preliminare, la struttura è *isostatica*.

Limiti dell'analisi dei vincoli L'analisi dei vincoli dà un risultato decisamente limitato: esistono infatti casi in cui la struttura risulta persino *iperstatica* che in base ad un'analisi dei gradi di libertà risulterebbe *labile*, cioè in grado di muoversi, e strutture che questa analisi descriverebbe *iperstatiche* che in realtà sono *labili*. Per vedere esempi di questi casi particolari, leggete la parte relativa alla statica nell'introduzione della dispensa.

In questo corso tuttavia, solo strutture *isostatiche* sono considerate, per cui non preoccupiamoci oltre.

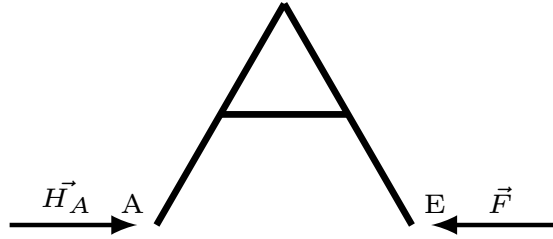


Figure 2: Analisi dei vincoli esterni

Primo punto

Vincoli esterni Iniziamo con l'analisi dei vincoli esterni (Figura 2), che in questo caso sono unicamente A. Consideriamo quindi l'intero sistema come un corpo rigido, rimuovendo tutti i dettagli che non ci interessano e sostituiamo all'incastro in A le rispettive reazioni vincolari.

Normalmente, un vincolo ad incastro presenta 3 reazioni vincolari: una verticale (V_A), una orizzontale (H_A) ed un momento resistente (M_A) che si contrappone al momento imposto dalla forza esterna.

In questo caso, però, sul corpo rigido agisce una forza orientata sul piano orizzontale, senza alcuna componente verticale, per cui il vincolo a incastro non contrappone alcuna reazione verticale.

Inoltre il vettore \vec{r} , che rappresenta la distanza dal punto di applicazione della forza E al punto di applicazione del vincolo A, possiede unicamente una componente orizzontale, per cui la forza esterna non va ad applicare alcun momento sul corpo rigido, essendo i due vettori paralleli.

Procedendo con le leggi di equilibrio della statica otteniamo:

$$R_A : \begin{cases} H_A - F = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H_A = F \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$$

Asta CE Ora per andare a calcolare le reazioni vincolari in C, andiamo a considerare l'asta CE e ne sostituiamo i vincoli con reazioni vincolari corrispondenti (figura 3).

È importante ricordare che l'asta BD agisce da biella, e una biella trasmette unicamente la reazione assiale, indirizzata appunto con l'asse della biella.

Possiamo quindi notare che nulla agisce in direzione verticale sull'asta CE, per cui la C non impone una reazione verticale.

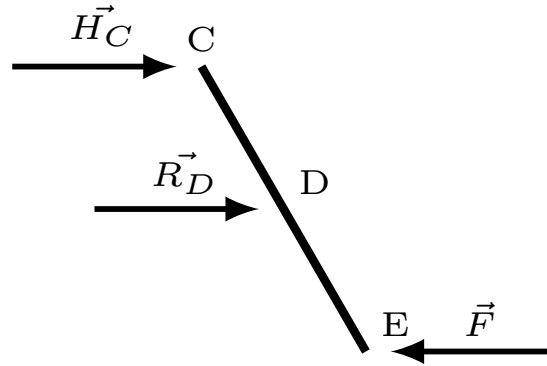


Figure 3: Analisi dell'asta CE

Procediamo nuovamente con la legge dell'equilibrio della statica, scegliendo (arbitrariamente¹) come punto in cui calcolare l'equilibrio dei momenti il punto C, otteniamo:

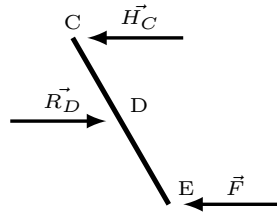
$$R_C : \begin{cases} H_C + R_D - F = 0 \\ V_C = 0 \\ M_C = 0 = LR_D - 2LF \end{cases} \implies \begin{cases} H_C = F - R_D \\ V_C = 0 \\ R_D = 2F \end{cases} \implies \begin{cases} H_C = -F \\ V_C = 0 \\ R_D = 2F \end{cases}$$

Siccome \vec{H}_C è risultato negativo, ne abbiamo scelto una direzione "sbagliata". Poco male. Correggiamo quindi la figura, per avere un'immagine che meglio rifletta la realtà (figura 4):

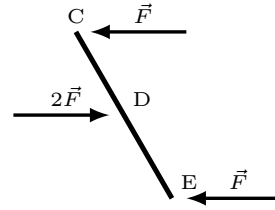
Ricapitolo primo punto

$$R_A : \begin{cases} H_A = F \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} ; R_C : \begin{cases} H_C = F \\ V_C = 0 \\ M_C = 0 \end{cases}$$

¹generalmente si sceglie il punto con più forze applicate, così che non debbano essere considerate per semplificare l'equazione dell'equilibrio dei momenti. In questo caso in tutti i punti vi è applicata al più una forza, per cui è indifferente. Oltre a questo motivo, se fosse presente un momento (applicato dall'esterno, o presente per via di un momento resistente) viene scelto il punto in cui vi è il momento.

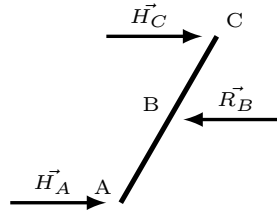


(a) Asta CE con reazioni vincolari.

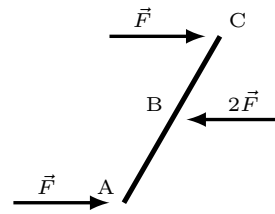


(b) Asta CE con modulo della forza esterna.

Figure 4: Analisi corretta dell'asta CE.



(a) Reazioni vincolari nell'asta AC.



(b) Asta AC con modulo della forza esterna.

Figure 5: Analisi dell'asta AC.

Secondo punto

Per calcolare le azioni interne dell'asta AC, iniziamo disegnando le reazioni vincolari (e le forze e momenti applicati, se vi fossero) che la caratterizzano (figura 13). Riassumendo, sull'asta AC agiscono:

In B agisce la reazione assiale $\vec{R}_D = \vec{R}_B$ (pari ed opposta a quanto vista nell'asta CE in D);

In C agisce la reazione vincolare \vec{H}_C ;

In A agisce la reazione vincolare \vec{H}_A ;

Nota sulla divisione in componenti di un vettore Prendiamo in considerazione quattro esempi:

1. Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, inclinata.
2. Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso, inclinata.
3. Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, inclinata.
4. Asta inclinata con forza agente sul lato in basso, inclinata.



(a) Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, inclinata. (b) Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, separata in componenti.

Figure 6: Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto



(a) Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso, inclinata. (b) Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso, separata in componenti.

Figure 7: Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso

1) Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, inclinata La forza \vec{F} viene applicata nel punto B con un angolo $\alpha < \pi$ (figura 6a).

Dobbiamo ricondurre questa forza nelle sue componenti di *taglio* e *sforzo normale* (figura 6b), per cui, usando della cara vecchia trigonometria si ottiene:

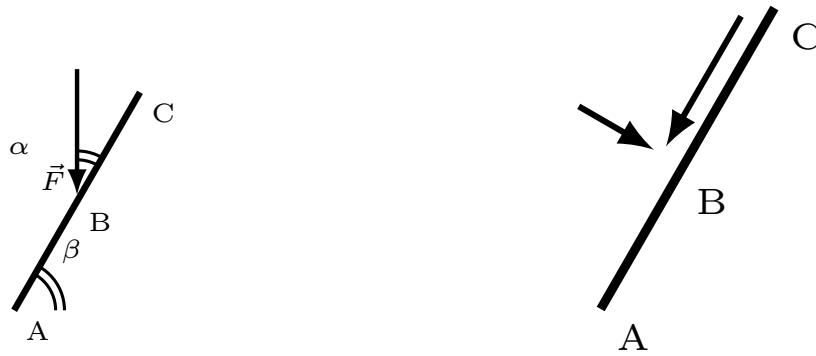
$$\vec{F} : \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = |F| \sin \alpha \end{cases}$$

2) Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso, inclinata La forza \vec{F} viene applicata nel punto B con un angolo $\alpha < 0$ (figura 7a).

Dobbiamo nuovamente ricondurre questa forza nelle sue componenti di *taglio* e *sforzo normale* (figura 7b), per cui, usando della cara vecchia trigonometria, ricordando le regole per angoli $> \pi$ si ottiene:

$$\vec{F} : \begin{cases} N_F = |F| \cos (2\pi - \alpha) \\ T_F = |F| \sin (2\pi - \alpha) \end{cases} \implies \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = -|F| \sin \alpha \end{cases}$$

3) Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, inclinata. La forza \vec{F} viene applicata nel punto B con un angolo $\alpha > 0$ (figura 8a) su di un'asta inclinata di un angolo β .



(a) Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, inclinata. (b) Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, separata in componenti.

Figure 8: Asta inclinata con forza agente sul lato in alto

È necessario calcolare l'angolo α con un sistema di riferimento solidale con l'asta AC, per cui ruotato di β .

$$\vec{F} : \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = |F| \sin \alpha \end{cases}$$

4) Asta inclinata con forza agente sul lato in basso, inclinata. La forza \vec{F} viene applicata nel punto B con un angolo $\alpha < 0$ (figura 9a) su di un'asta inclinata di un angolo β .

È necessario calcolare l'angolo α con un sistema di riferimento solidale con l'asta AC, per cui ruotato di β .

$$\vec{F} : \begin{cases} N_F = |F| \cos 2\pi - \alpha \\ T_F = |F| \sin 2\pi - \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = -|F| \sin \alpha \end{cases}$$

Divisione in componenti Separiamo ora le singole componenti in taglio e sforzo normale.



(a) Asta inclinata con forza agente sul basso (b) Asta inclinata con forza agente sul lato in basso, separata in componenti.

Figure 9: Asta inclinata con forza agente sul lato in basso

Calcolo dello sforzo normale Procediamo al calcolo della componente di sforzo normale di ogni forza applicata all'asta AC:

$$N : \begin{cases} \vec{N}_A = H_A \cos(\frac{\pi}{3}) \\ \vec{N}_B = R_B \cos(-\frac{\pi}{3}) \\ \vec{N}_C = H_C \cos(\frac{\pi}{3}) \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{N}_A = \frac{1}{2}F \\ \vec{N}_B = F \\ \vec{N}_C = \frac{1}{2}F \end{cases}$$

Disegniamo il grafico dello sforzo normale Ricordando la convenzione dello sforzo normale, **positivo** quando produce *trazione* e **negativo** quando produce *contrazione*, procediamo al disegno del grafico:

Mentre si disegna un grafico di questo tipo, è importante ricordare che il grafico deve risultare, quando è verticale, di un'altezza pari al vettore che agisce in quel punto. Per esempio, nel punto B il grafico ha un'altezza complessiva pari al valore di N_B , così come è analogamente in A ed in C.

Si può iniziare a disegnare il grafico partendo da un qualsiasi estremo del corpo rigido.

Iniziamo per esempio dall'estremo A. Spostiamoci di un ds verso l'alto e osserviamo per questo *concio elementare* se lo sforzo normale sia di trazione o contrazione. In questo caso, lo sforzo è di contrazione, per cui nella nostra convenzione definiamo il valore come negativo. Procedendo via via lungo l'asta, arriviamo al punto B, in cui è applicata una nuova forza. Qui, sommiamo i due valori dello sforzo e procediamo oltre. Da questo punto, siccome $N_B > N_A$ lo sforzo diviene di trazione e così rimane sino alla fine dell'asta in C.

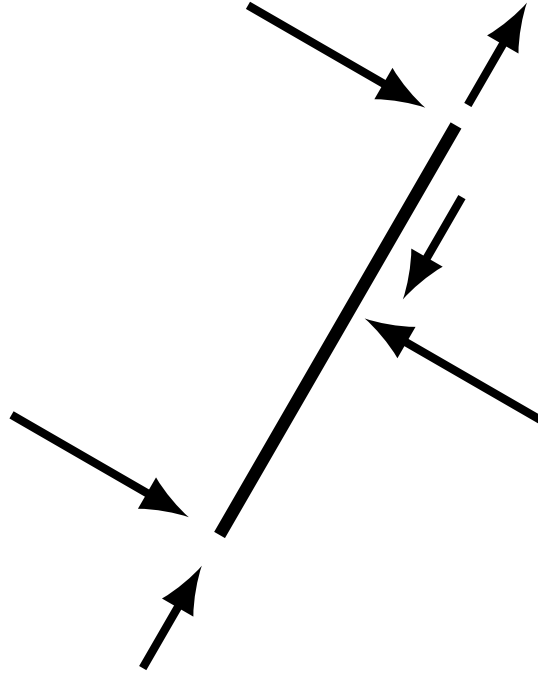


Figure 10: Componenti nell'asta AC

Come già detto, se si esegue la stessa operazione partendo dall'estremo C al posto che in A si *deve* ottenere lo stesso risultato.

Calcolo del taglio Procediamo al calcolo della componente di taglio di ogni forza applicata all'asta AC:

$$T : \begin{cases} \vec{T}_A = H_A \sin(\frac{\pi}{3}) \\ \vec{T}_B = R_B \sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \vec{T}_C = H_C \sin(\frac{\pi}{3}) \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{T}_A = \frac{\sqrt{3}}{2}F \\ \vec{T}_B = -\sqrt{3}F \\ \vec{T}_C = \frac{\sqrt{3}}{2}F \end{cases}$$

Disegniamo il grafico del taglio Ricordando la convenzione del taglio, **positivo** quando produce *rotazione oraria* e **negativo** quando produce *rotazione anti-oraria*, procediamo al disegno del grafico:

Mentre si disegna un grafico di questo tipo, è importante ricordare che il grafico deve risultare, quando è verticale, di un'altezza pari al vettore che agisce in quel punto. Per esempio, nel punto B il grafico ha un'altezza complessiva pari al valore di T_B , così come è analogamente in A ed in C.

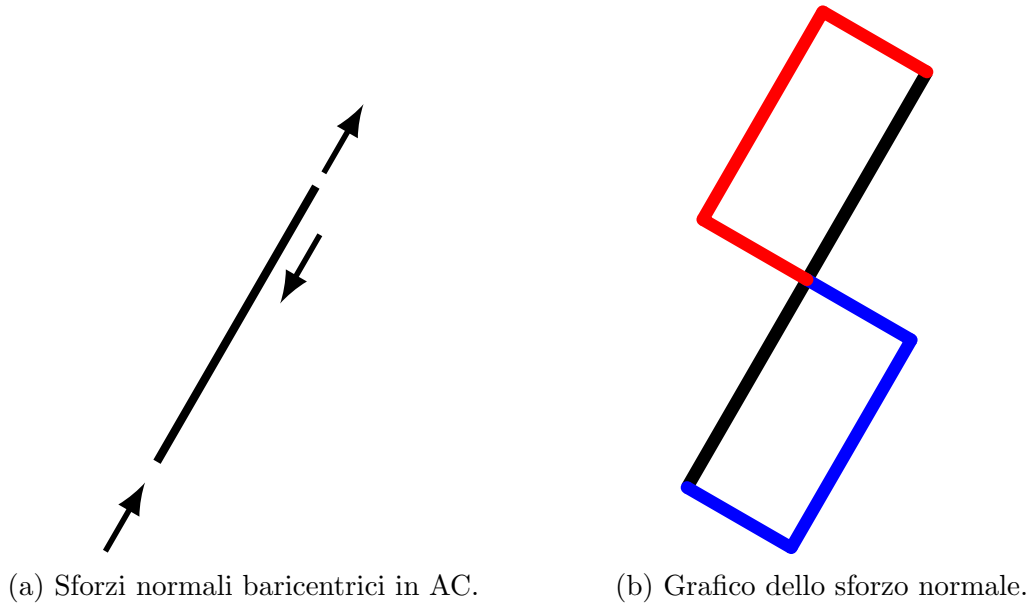


Figure 11: Analisi dello sforzo normale nell'asta AC.

Si può iniziare a disegnare il grafico partendo da un qualsiasi estremo del corpo rigido.

Iniziamo per esempio dall'estremo A. Spostiamoci di un ds verso l'alto e osserviamo per questo *concio elementare* se il taglio produca rotazione oraria o anti-oraria. In questo caso, produce una rotazione anti-oraria. Procedendo via via lungo l'asta, arriviamo al punto B, in cui è applicata una nuova forza. Qui, sommiamo i due valori del taglio e procediamo oltre. Da questo punto, siccome $T_B > T_A$ il taglio produce una rotazione oraria e così rimane sino alla fine dell'asta in C.

Come già detto, se si esegue la stessa operazione partendo dall'estremo C al posto che in A si *deve* ottenere lo stesso risultato.

Calcolo del momento flettente Procediamo al calcolo della componente del momento flettente. Scegliamo, per esempio, A come punto di origine del nostro calcolo del momento flettente. Un qualsiasi altro estremo dovrà dare lo stesso risultato.

La forza normale all'asta (che in questo caso è T_A) che viene applicata in A, se per un attimo immaginiamo l'asta come duttile, *piega l'asta verso destra*. In A quindi, le fibre saranno *tese sul lato di sinistra*.

Chiamiamo ΔS la distanza dal punto A. Il momento, in un generico punto tra A e B, sarà pari quindi a $M = \Delta S T_A$. Quando arriviamo in B, viene introdotta un'altra

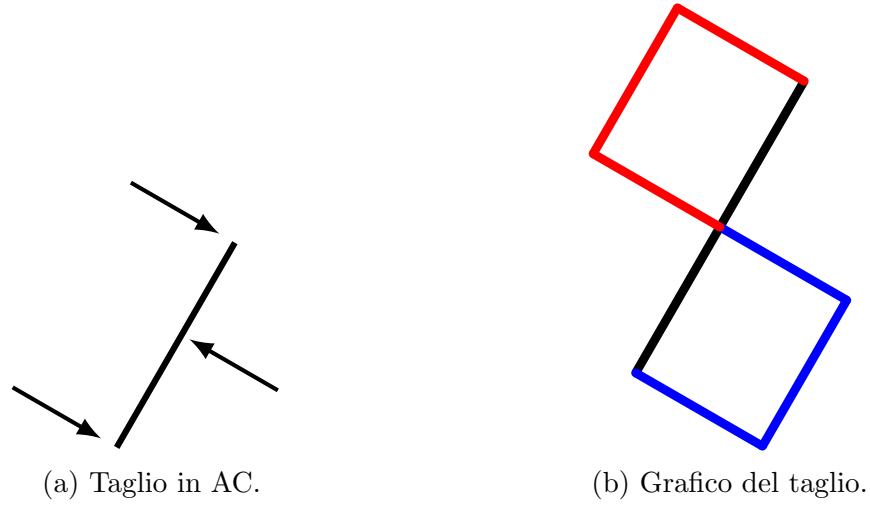


Figure 12: Analisi del taglio nell'asta AC.

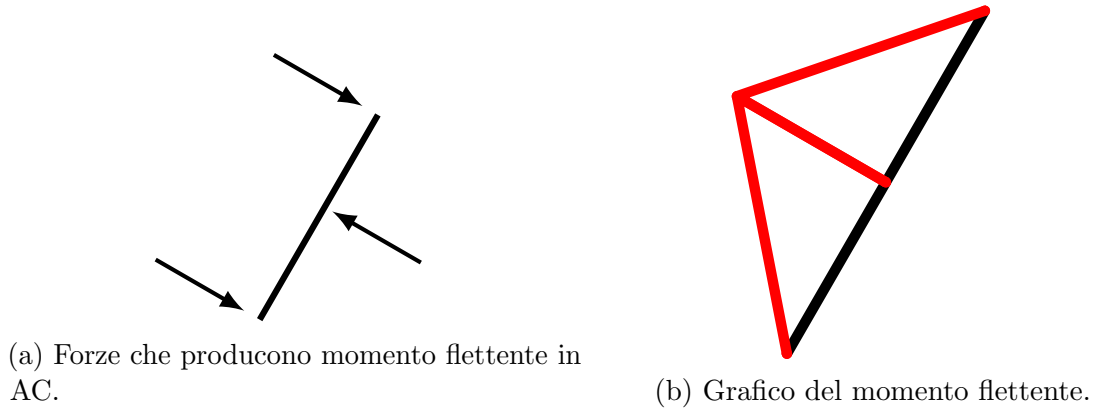


Figure 13: Analisi del momento flettente nell'asta AC.

forza normale all'asta, T_B , di direzione opposta. Chiamiamo la distanza dal punto B Δk e procediamo. Questo porta il momento a divenire pari a $M = \Delta S T_A - \Delta K T_B$, e gradualmente riduce il valore del momento sino ad azzerarsi in C.

Come già detto, se si esegue la stessa operazione partendo dall'estremo C al posto che in A si *deve* ottenere lo stesso risultato.

$$M_{max} = \Delta S_{M_{max}} T_A = L T_A = L \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

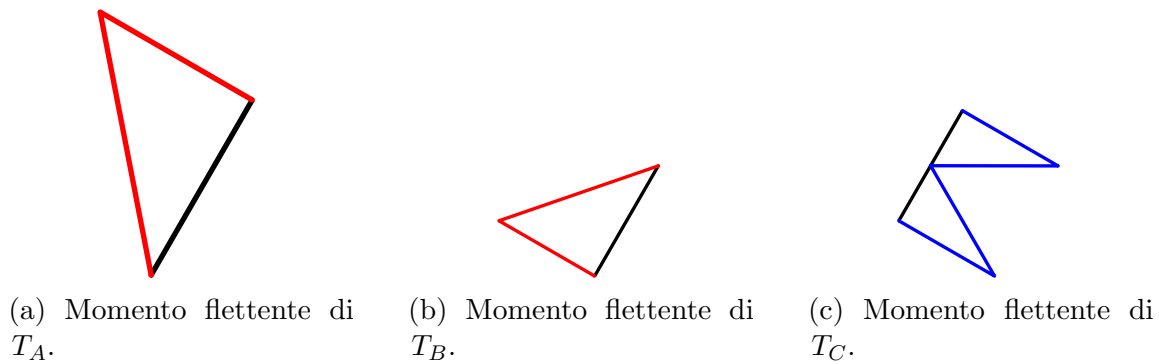


Figure 14: Momento flettente delle singole forze.

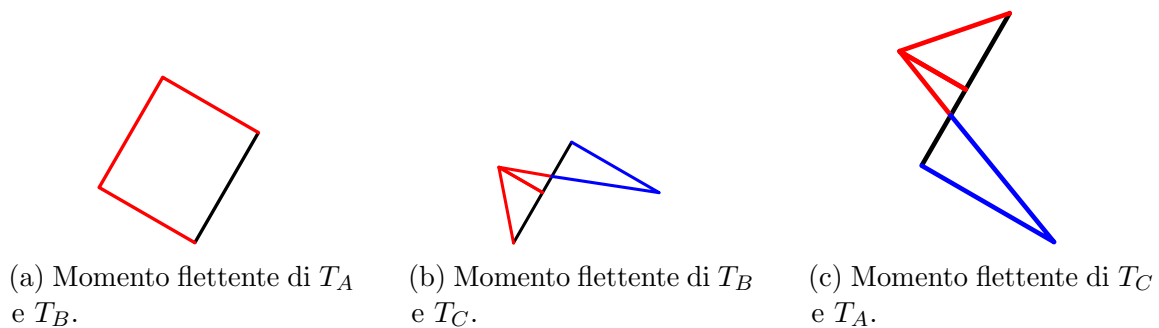


Figure 15: Momento flettente di forze accoppiate due a due.

Calcolo del momento flettente tramite sovrapposizione degli effetti È possibile calcolare il momento flettente anche tramite la sovrapposizione degli effetti di tutte le varie forze che agiscono in direzione normale rispetto allo spostamento. Questo può essere un utile strumento per confermare se il risultato ottenuto è corretto anche tramite questo metodo.

A seguire, disegnando l'effetto di una sola forza per volta (figura 14), l'effetto delle forze accoppiate due a due (figura 15) si capisce come l'applicazione di forze diverse in punti diversi vada a formare dei momenti flettenti diversi.

È importante notare che questo metodo **non sia utilizzabile** nel caso di sforzo normale e taglio.