0.0.1 Problema di decisione

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figure 1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1. X rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **soluzioni** o anche delle **soluzioni ammissibili**.
2. Ω rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3. F rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4. f rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5. D rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6. Π insieme delle **preferenze**.

X viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{se } \boldsymbol{x} \in X \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine x_i viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

Ω viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{se } \boldsymbol{\omega} \in \Omega \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine ω_i viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

F viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{se } \boldsymbol{f} \in F \Rightarrow \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le $f_l \in \mathbb{R}$ vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obbiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La f viene definita come:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) : X \times \Omega \to F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La Π viene definita come

$$\Pi : D \to 2^{F \times F}$$

, dove $\pi_d \subseteq F \times F$. $F \times F$ rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre $2^{F \times F}$ rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo $F = \{f, f', f''\}$, otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f, f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \leq_d f' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il $\leq_d$, minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi $\geq_d$.

Definizione 0.0.1 (indifferenza) *Due preferenze f' e f'' sono dette **indifferenti** quando:*

$$f' \; f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \leq_d f'' \\ f' \geq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 0.0.2 (Preferenza Stretta) *Una preferenza f' è detta **preferenza stretta** quando:*

$$f' <_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \leq_d f'' \\ f' \ngeq_d f'' \end{cases}$$

Definizione 0.0.3 (Incomparabilità) *Due preferenze f' e f'' sono dette **incomparabili** quando:*

$$f' \not\bowtie_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \nleq_d f'' \\ f' \ngeq_d f'' \end{cases}$$

0.0.2 Proprietà delle preferenze

Proprietà riflessiva

$$f \leq f \qquad \forall f \in F$$

Proprietà di completezza

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \nleq f' \Rightarrow f' \leq f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà di anti-simmetria

$$f \leq f' \wedge f' \leq f \Rightarrow f' = f \qquad \forall f, f' \in F$$

Proprietà Transitiva

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale.

$$f \leq f' \wedge f' \leq f'' \Rightarrow f \leq f'' \qquad \forall f, f', f'' \in F$$

0.0.3 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore v, ha in mente una relazione di preferenza Π **riflessiva**, **completa**, **non necessariamente anti simmetrica** e **transitiva**.

$$\exists v : F \to \mathbb{R} : f \leq f' \Leftrightarrow v_{(f)} \geq v_{(f')}$$