

TITLEPAGE NOT RENDERED!
RECOMPILE WITH LATEX!

Contents

1 Logica Fuzzy	3
1.1 Logica fuzzy vs classica	3
1.1.1 Le funzioni di appartenenza	3
1.1.2 Classi di appartenenza	3
1.2 Logica fuzzy e probabilità	3
1.3 Gli operatori logici nella logica fuzzy	4
1.4 Misure in un insieme fuzzy	4
1.4.1 Norma di un vettore	4
1.4.2 Entropia	4
1.5 Fuzzy Associative Memory FAM	4
1.5.1 Come opera il sistema	5
2 Statistica	6
2.1 Probabilità o visione frequentista	6
2.1.1 Probabilità di eventi indipendenti e contemporanei	6
2.1.2 Probabilità condizionata (eventi indipendenti e successivi)	6
2.1.3 Teorema di Bayes	7
A Domande su Apprendimento con Rinforzo	8
A.1 Cosa si intende per Apprendimento con Rinforzo?	8
A.2 Quali sono gli attori?	8
A.3 Cosa rappresenta la critica?	9
A.4 Che tipo di architettura si può ipotizzare nell'apprendimento con rinforzo?	9
A.5 Condizionamento classico e condizionamento operante	9
A.6 Quale relazione c'è con l'intelligenza?	9
A.7 Come potreste illustrare: Exploration vs Exploitation?	9
A.8 Cos'è il problema del credit assignment? È un problema che riguarda la dimensione temporale o spaziale del task?	9
A.9 Cos'è l'eligibility trace (traccia) e quale è il suo ruolo?	9
A.10 Definire l'algoritmo di Q-learning, descrivendo le equazioni opportune. [2]	10
A.11 Scrivere le equazioni dell'algoritmo Q-learning in cui si consideri anche la traccia. [2]	10
A.12 Cosa si intende per politica epsilon-greedy? Come entra nell'algoritmo di Q-learning?	10
A.13 Che differenza c'è tra Q-learning e SARSA? [2]	10
A.14 Dato un problema a piacere si descriva uno degli algoritmi e mostrare due passaggi di addestramento	10
A.15 Quale criterio si sceglie per definire i Reward? A quali elementi sono associati? Allo stato? All'azione? Allo stato prossimo? Perché? [2]	10
A.16 Impostare un problema su griglia (apprendimento del percorso di un agente, con partenza ed arrivo prescelti + ostacoli). La griglia fornisce un reward, diverso da zero, in ogni transizione. [2]	10
A.16.1 Definire chiaramente il problema, farne un modello definendo le variabili e le funzioni che le legano. [2]	10
A.16.2 Scrivere un risultato possibile dei primi 2 passi di apprendimento del problema definito al punto precedente. [2]	10
B Domande sui Sistemi Fuzzy	11
B.1 Definire i passi per costruire un sistema fuzzy. [3]	11
B.2 Cosa si intende per FAM? [3]	11
B.3 Una FAM memorizza numeri o preposizione logiche? Come? [3]	11
B.4 Definire un problema a piacere che involva almeno due variabili in ingresso e due in uscita. [3]	11

B.5	Definire tutti i componenti e calcolare l'uscita passo a passo per un valore di input a piacere [3]	11
C	Domande sui Macchine ed Intelligenza	12
C.1	Descrivere il test di Turing e l'esperimento della stanza cinese . Come mai son stati proposti? Cosa volevano dimostrare? [4]	12
C.2	Discutere la relazione tra algoritmo, macchina di Turing ed intelligenza.	12
C.3	Cosa si intende per ipotesi forte ed ipotesi debole dell'AI? [4]	12
C.4	Riportare almeno due elementi del contraddittorio sulle ipotesi su cui è basata l'ipotesi debole sull'AI [3]	12
C.5	Descrivere il "Brain prosthesis thought experiment" di Moravec e commentarlo. [3]	12
D	Domande su Statistica	13
D.1	Esercizio sui Taxi	13
D.2	Esercizio sul Tumore al seno	13
D.3	Esercizio delle Macchine [2]	13
D.4	Enunciare il teorema di Bayes	13
D.5	Discutere l'analisi di varianza per un sistema lineare [4]	13
D.6	Dimostrare che la stima ai minimi quadrati è equivalente alla stima a massima verosimiglianza nel caso di errore Gaussiano sui dati. Cosa fornisce? Come? [3]	14
E	Domande su Apprendimento Supervisionato	16
E.1	Definire l'algoritmo di apprendimento di una rete neurale con unità arbitrarie. Definire la funzione obiettivo utilizzata. [3]	17
E.2	Come si utilizza la funzione obiettivo nell'algoritmo di apprendimento. [3]	17
E.3	Cosa si intende per apprendimento per epoche e per trial? Qual è il vantaggio di ciascuna delle modalità di apprendimento? [3]	17
E.4	Cosa si intende per training e test set? Perché mai vengono utilizzati? Quali problemi si vogliono evitare? [3]	17
E.5	Una rete neurale con unità sigmoidali e un modello parametrico? È lineare? Perché? [3]	17
E.6	Se i dati sono acquisiti senza errori, è una buona scelta aumentare di molto i parametri del modello in modo da garantirsi che l'errore sul training set vada a zero? Perché? [3]	17
E.7	Cosa si intende per un problema di regressione ed illustrare una possibile soluzione. [3]	17
E.8	Come funziona l'approssimazione incrementale multi-scala, cosa garantisce e quali vantaggi può avere? [3]	17
E.9	Determinare la forma analitica dell'aggiornamento dei parametri nel caso di unità lineari e di reti a singolo strato. [2]	17
E.10	Definire l'algoritmo di apprendimento di una rete neurale con unità lineari e con unità non-lineari. Definire la funzione obiettivo utilizzata.	17
F	Domande su Intelligenza Artificiale	18
F.1	Si descriva il funzionamento della Forward Search. Perché è considerato un template e non un algoritmo? [2]	18
F.2	Si elenchino due possibili implementazioni di Forward Search elencandone proprietà, vantaggi e svantaggi. [2]	18
F.2.1	Breadth first search	18
F.2.2	Depth first search	18
G	Domande su Clustering	19
G.1	Cosa si intende per clustering? In quali famiglie vengono divisi? [3]	19
G.2	Che relazione c'è tra clustering e classificazione e quali sono le criticità? [3]	19
H	Domande su Biologia	20
H.1	Definire il neurone biologico evidenziandone le parti più significative per la trasmissione dell'informazione ed il loro comportamento. [2]	20
H.2	Descrivere il funzionamento complessivo del neurone biologico.	20
H.3	Dove avviene principalmente l'"apprendimento" nei neuroni biologici?	20
H.4	Descrivere la modalità di trasmissione dell'informazione nel sistema nervoso e identificare le caratteristiche peculiari.	20
H.5	Che differenza c'è tra neuroni motori, neuroni sensoriali ed inter-neuroni? [2]	20
H.6	Come viene trasmessa ed elaborata l'informazione da un neurone?	20
H.7	Cos'è uno spike? [2]	20
H.8	Quali sono le aree corticali principali? [2]	20
H.9	Cos'è il codice di popolazione? [2]	20
H.10	Data un'area cerebrale è univoca la funzione implementata in quell'area? [2]	20

H.11 Cosa sono i mirror neurons? Quali implicazioni hanno per i sistemi intelligenti e l'apprendimento? [2] .	20
---	----

Chapter 1

Logica Fuzzy

1.1 Logica fuzzy vs classica

1.1.1 Le funzioni di appartenenza

In logica classica la funzione che descrive la verità di un'affermazione è rappresentabile come una funzione impulsiva, per esempio:

$$\begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Mentre la funzione di appartenenza nella logica fuzzy sono più adeguate funzioni come:

1. Una lineare che aumenta progressivamente da 0 a 1 in un certo Δx determinato.
2. Un sigmoide.
3. Funzioni probabilistiche, come una normale.

1.1.2 Classi di appartenenza

In logica classica le classi sono nette, come nel caso della funzione istintiva si ha una condizione del tipo:

$$\begin{cases} A & x \geq 0 \wedge x < 1 \\ B & x \geq 1 \wedge x < 2 \\ C & x \geq 2 \wedge x < 3 \\ D & x \geq 3 \wedge x < 4 \end{cases}$$

Nella logica fuzzy, vengono descritte per ogni gruppo funzioni che assumono valori anche negli insiemi in cui nella logica classica esse non sono definite. Linearmente esse raggiungono lo 0 mano a mano che esse si sovrappongono con le altre funzioni. In un qualsiasi punto di ascissa, vale la formula:

$$\sum_{i=0}^n m_i = 1$$

1.2 Logica fuzzy e probabilità

Descrivono cose diverse: prendendo per esempio le previsioni meteo, la **probabilità** si occupa di prevedere i mm di pioggia che potrebbero andare a cadere, mentre la **logica fuzzy** si occuperebbe di descrivere il grado di **fuzzyness**

tramite il quale andiamo a descrivere quanto è "pioggia", con una funzione che in base a quante gocce di pioggia sono cadute si descrive la *funzione di appartenenza fuzzy* tra le classi "piove" e "non piove".

Ulteriormente, una volta che un evento è avvenuto la sua **probabilità** scompare, nel senso che ora è un dato noto, mentre il valore di **fuzzyness** mantiene il suo valore descrittivo per l'evento.

1.3 Gli operatori logici nella logica fuzzy

Operatore	Logica Classica	Logica Fuzzy
\wedge	$A \wedge B$	$\min(T(A), T(B))$
\vee	$A \vee B$	$\max(T(A), T(B))$
\neg	$\neg A$	$1 - T(A)$

1.4 Misure in un insieme fuzzy

1.4.1 Norma di un vettore

$$M(A) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |m_A(x_i)|^p}$$

Figure 1.1: Norma di un vettore

1.4.2 Entropia

Dato un certo punto A , definisco due vettori \vec{a} e \vec{b} che descrivono la posizione del punto A a partire dagli estremi opposti del quadrato.

L'**entropia minima** risulta pari a 0.

L'**entropia massima** risulta pari a 1 e si trova nel punto di mezzo (Es. quando una macchina parcheggia tra un posto e l'altro e non è chiaro in quale posto andrebbe vista come parcheggiata). Questa coincide con la **massima fuzzyness** e in questo punto vale che $A \cup A_c = A \cap A_c$.

$$E(A) = \frac{a}{b} = \frac{l^1(A, A_{vicino})}{l^1(A, A_{lontano})}$$

Figure 1.2: Entropia

1.5 Fuzzy Associative Memory FAM

Una FAM trasforma uno spazio di input in uno spazio di output. Esse implementano una serie di regole su delle variabili logiche fuzzy in ingresso.

Le regole sono regole della logica classica, mentre le variabili sono fuzzy.

Una FAM va a descrivere un insieme di classi ed assegna un valore di una funzione di appartenenza ad ogni variabile su ogni classe, poi su queste classi vengono eseguite operazioni di logica classica.

1.5.1 Come opera il sistema

1. Riceve le classi attivate in input
2. Riceve il grado di fit per ogni classe
3. Identifica le regole attivate
4. Determino le classi in uscita attivate
5. Determino il grado di fitness per ogni classe in uscita (regola)
6. Defuzzyficazione

Chapter 2

Statistica

2.1 Probabilità o visione frequentista

Per il teorema centrale del limite la frequenza di un evento su infinite realizzazioni è uguale alla sua probabilità.

$$P(A = a_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{A=a_i}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N}$$

2.1.1 Probabilità di eventi indipendenti e contemporanei

Il prodotto nelle probabilità rappresenta la probabilità che entrambi gli eventi descritti dalle probabilità siano veri, premesso che gli eventi siano **INDIPENDENTI** ed essi non avvengano successivamente. Per esempio, sia $P(A)$ la probabilità che un dato A cada con la faccia esposta pari a 4 e $P(B)$ che un dato B mostri 6. La probabilità che entrambi gli eventi avvengano, cioè sia il dato A cade su 4 e il dato B su 6 è pari al prodotto, cioè $P(A)P(B) = P(A \wedge B)$.

2.1.2 Probabilità condizionata (eventi indipendenti e successivi)

Quando un evento avviene prima di un altro si parla di probabilità condizionata (Figura 2.1), cioè una tecnica che restringe lo spazio di ricerca della probabilità con cui un evento accadrà sapendo che l'altro ha avuto un determinato esito, probabilisticamente parlando. Ora, se tirassi il dato A dell'esempio precedente, leggendo il risultato prima di tirare il dato B vado a calcolare la probabilità $P(A \wedge B)$ come:

$$P(A \wedge B) = P(B|A)$$

In cui la barra verticale nella probabilità viene letta come "La probabilità di B dato che so A".

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

Figure 2.1: Formula delle probabilità condizionate

Esempio su probabilità condizionata: gioco delle carte

Sia dato un mazzo di 40 carte con 12 figure, di cui 4 re.

P. di estrarre un re $P(E) = \frac{\text{Numero di re}}{\text{Numero di carte}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

P. di estrarre un re, sapendo di avere estratto una figura $P(E) = \frac{\text{Numero di re}}{\text{Numero di carte che sono figure}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

2.1.3 Teorema di Bayes

Si tratta di un teorema estremamente utilizzato in statistica e nel machine learning come strumento per l'apprendimento statistico, la cui principale caratteristica è il fatto che permette di trarre deduzioni dalle conclusioni alle cause (inverte le Y con le X), viene chiamato anche **stima a posteriori**. Si deriva dalla formula della probabilità condizionata. In generale, la statistica bayesiana si basa su una modellizzazione tramite la quale è possibile trarre deduzioni sulla realtà, utilizzando il teorema di Bayes (figura 2.2).

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Figure 2.2: Teorema di Bayes

Esempio su teorema di bayes: i taxi

In una città abbiamo due società di taxi, ed uno di questi investe un anziano che non è particolarmente credibile. Bisogna, con i seguenti dati, andare a capire a quale società questo taxi appartenesse a una delle società.

$$Taxi = \{verde, blue\} = \{85\%, 15\%\}$$

$$Attendibilità_{anziano} = \{vero, falso\} = \{80\%, 20\%\}$$

Applico il teorema di Bayes:

$$P(Taxi incidente blue|Taxi testimone blu) = \frac{P(Taxi testimone blu|Taxi incidente blu)P(Taxi incidente blu)}{P(Taxi testimone blu)}$$

Appendix A

Domande su Apprendimento con Rinforzo

A.1 Cosa si intende per Apprendimento con Rinforzo?

L'apprendimento per rinforzo è una tecnica di apprendimento automatico che viene utilizzata per ideare sistemi capaci di apprendere ed adattarsi all'ambiente che gli circonda grazie ad una "ricompensa" detta rinforzo che consiste nella valutazione delle loro prestazioni.

A.2 Quali sono gli attori?

I principali attori quando si parla di reinforcement learning sono:

Agente software che svolge servizi per conto di un altro programma, solitamente in modo automatico ed invisibile. Formulato un problema l'agente cerca una soluzione e la implementa. Valuta inoltre la soluzione implementata e ragiona se ha avuto successo o no, se e quanto è adeguata e cerca di ottimizzare le prestazioni per creare agenti migliori.

Stato variabile interna all'agente che contiene una rappresentazione interna dell'ambiente. I possibili stati sono un insieme finito.

Azione le possibili azioni applicabili sull'ambiente. Sono un insieme finito contenuto nell'agente. Viene selezionata l'azione da effettuare in base alla policy.

Policy descrive l'azione scelta dall'agente. Mapping tra stato (input dall'ambiente) e azione. Funzione di controllo. Le policy possono avere una componente stocastica.

Ambiente descrive tutto quello su cui agisce la policy. È tutto quanto non è modificabile direttamente dall'agente. Si può rappresentare come una funzione che preso uno stato e una azione come input restituisce un altro stato come output, ma è una funzione non conosciuta a priori. L'agente deve costruirsi una rappresentazione implicita dell'ambiente attraverso la value function e deve selezionare i comportamenti che ripetutamente risultano favorevoli a lungo termine.

Segnale di rinforzo è un'informazione qualitativa (a volte binaria: giusto/sbagliato, successo/fallimento), puntuale. Due tipi: istantaneo, cioè azione per azione (condizionamento classico), o una tantum, (condizionamento operante) cioè viene rinforzata una catena di azioni, un comportamento. Viene generato all'esterno dell'agente e per esso rappresenta un input.

Reward/Quality function è la ricompensa immediata. Associata all'azione intrapresa in un certo stato. Può essere data al raggiungimento di un goal. È uno scalare (può essere associato allo stato e/o input e/o stato prossimo).

Value function ricompensa a lungo termine. Somma dei reward: costi associati alle azioni scelte istante per istante più costo associato allo stato finale. Orizzonte temporale ampio. Rinforzo secondario. Ricompensa attesa. Viene stimata all'interno dell'agente.

Goal obiettivo che deve raggiungere l'agente. Si può aggiungere che l'agente deve raggiungere l'obiettivo con una policy ottima.

A.3 Cosa rappresenta la critica?

L'ambiente o l'interazione con esso può essere complessa e/o variabile, inoltre il rinforzo può avvenire solo dopo una più o meno lunga sequenza di azioni (delayed reward). Questo genera difficoltà nell'analisi e nella valutazione di ambiente e azioni, questi problemi prendono il nome di: temporal credit assignment e structural credit assignment. L'apprendimento non è più determinato da esempi, ma dall'osservazione del proprio comportamento nell'ambiente.

A.4 Che tipo di architettura si può ipotizzare nell'apprendimento con rinforzo?

L'architettura dei sistemi di RL si basa sulla retroazione. L'agente si muove nell'ambiente utilizzando una Policy, l'ambiente fornisce un reward e fa cambiare lo stato dell'agente il quale utilizza i risultati ottenuti per aggiornare la propria Policy così da raggiungere il goal. Tramite dei sensori l'agente monitora continuamente l'ambiente (input), tramite degli attuatori compie azioni che modificano lo stato dell'ambiente.

A.5 Condizionamento classico e condizionamento operante

Nel condizionamento classico il rinforzo viene eseguito istante per istante o azione per azione e permette di ottenere un riscontro ad ogni azione eseguita o ad ogni variazione dell'ambiente o dello stato. Nel condizionamento operante invece il rinforzo avviene "una-tantum", viene quindi valutata una catena di azioni, un comportamento nel suo insieme e non nella singola azione.

A.6 Quale relazione c'è con l'intelligenza?

Se consideriamo l'intelligenza come una funzione attiva, che permetta di prendere decisioni e compiere azioni nell'interazione con l'ambiente, il Reinforcement Learning consente di far comportare un agente in modo intelligente.

A.7 Come potreste illustrare: Exploration vs Exploitation?

L'esplorazione (exploration) consiste nel provare varie azioni per scoprire nuove possibili azioni (promettenti). Un agente che esplora solamente raramente troverà una buona soluzione. Exploitation consiste nel scegliere la soluzione che garantisca il miglior reward tra quelle conosciute (le informazioni vengono raccolte tramite exploration). Se un agente non esplora nuove soluzioni potrebbe essere surclassato da nuovi agenti più dinamici. Inoltre l'ambiente potrebbe essere mutevole e una soluzione potrebbe non restare valida. Occorre quindi non interrompere del tutto l'esplorazione e usare un approccio statistico per valutare le bontà delle azioni bilanciando Exploration ed exploitation.

A.8 Cos'è il problema del credit assignment? È un problema che riguarda la dimensione temporale o spaziale del task?

I sistemi time-extended single-agent hanno il problema di valutare il contributo di un'azione rispetto alle altre (temporal credit assignment). Questo problema viene accentuato se le azioni rilevanti sono temporalmente molto distanti tra di loro perché è come se fossero spalmate su azioni non rilevanti e questo può portare a cattive valutazioni. Un algoritmo dovrebbe riuscire a valutare l'influenza di azioni precedenti rispetto all'azione finale. Sistemi multi-agente hanno inoltre il problema di determinare il contributo di un particolare agente ad un compito comune (structural credit assignment).

A.9 Cos'è l'eligibility trace (traccia) e quale è il suo ruolo?

L'eligibility trace è un buffer di memoria contenente tracce di eventi passati. Quando viene calcolato un errore usando metodi basati su TD (Temporal Difference), l'eligibility trace suggerisce quali variabili aggiornare. Amplia l'orizzonte

temporale sul quale fare l'aggiornamento a più di 1 passo definendo così se uno stato è eleggibile e "quanto", cioè che percentuale di aggiornamento meriti. L'eligibility trace è la base per risolvere i problemi di credit assignment. Gli eventi passati che vengono chiamati tracce e rappresentano stati visitati, azioni compiute, ecc. evaporano nel tempo, cioè diventano sempre meno rilevanti fino a scomparire.

A.10 Definire l'algoritmo di Q-learning, descrivendo le equazioni opportune. [2]

A.11 Scrivere le equazioni dell'algoritmo Q-learning in cui si consideri anche la traccia. [2]

A.12 Cosa si intende per politica epsilon-greedy? Come entra nell'algoritmo di Q-learning?

A.13 Che differenza c'è tra Q-learning e SARSA? [2]

Le differenze risiedono nel modo in cui viene aggiornato il valore di Q ad ogni azione verificatasi, SARSA è on-policy mentre Q-Learning è off-policy. Ovvero QLearning aggiorna il valore in funzione della migliore possibile scelta futura, mentre SARSA aggiorna il valore in funzione della scelta che verrà applicata dalla policy. Nella pratica Qlearning converge più lentamente di SARSA, ma è in grado di imparare più rapidamente nel caso l'ambiente si modifichi in quanto SARSA continuerebbe a seguire la propria policy.

A.14 Dato un problema a piacere si descriva uno degli algoritmi e mostrare due passaggi di addestramento

A.15 Quale criterio si sceglie per definire i Reward? A quali elementi sono associati? Allo stato? All'azione? Allo stato prossimo? Perché? [2]

L'ambiente fornisce un'informazione qualitativa, ad esempio success or fail. L'informazione disponibile si chiama segnale di rinforzo e non dà alcuna informazione su come aggiornare il comportamento dell'agente (e.g. i pesi). È per questo che il reward deve essere definito dall'agente in base alla politica adottata, e quindi si necessita di sistemi intelligenti che riescano a valutare al meglio le azioni da intraprendere. In base alla politica adottata il reward sarà legato allo stato, all'azione, allo stato prossimo o a un mix di essi.

A.16 Impostare un problema su griglia (apprendimento del percorso di un agente, con partenza ed arrivo prescelti + ostacoli). La griglia fornisce un reward, diverso da zero, in ogni transizione. [2]

A.16.1 Definire chiaramente il problema, farne un modello definendo le variabili e le funzioni che le legano. [2]

A.16.2 Scrivere un risultato possibile dei primi 2 passi di apprendimento del problema definito al punto precedente. [2]

Appendix B

Domande sui Sistemi Fuzzy

- B.1 Definire i passi per costruire un sistema fuzzy. [3]**
- B.2 Cosa si intende per FAM? [3]**
- B.3 Una FAM memorizza numeri o preposizione logiche? Come? [3]**
- B.4 Definire un problema a piacere che involva almeno due variabili in ingresso e due in uscita. [3]**
- B.5 Definire tutti i componenti e calcolare l'uscita passo a passo per un valore di input a piacere [3]**

Appendix C

Domande sui Macchine ed Intelligenza

- C.1 Descrivere il test di Turing e l'esperimento della stanza cinese . Come mai son stati proposti? Cosa volevano dimostrare? [4]**
- C.2 Discutere la relazione tra algoritmo, macchina di Turing ed intelligenza.**
- C.3 Cosa si intende per ipotesi forte ed ipotesi debole dell'AI? [4]**
- C.4 Riportare almeno due elementi del contraddittorio sulle ipotesi su cui è basata l'ipotesi debole sull'AI [3]**
- C.5 Descrivere il "Brain prosthesis thought experiment" di Moravec e commentarlo. [3]**

Appendix D

Domande su Statistica

D.1 Esercizio sui Taxi

In una città lavorano due compagnie di taxi: blue e verde, la maggior parte dei taxisti lavorano per la compagnia verde per cui si ha la seguente distribuzione di taxi in città: 85% di taxi verdi e 15% di taxi blu. Succede un incidente in cui è coinvolto un taxi. Un testimone dichiara che il taxi era blu. Era sera e buio, c'era anche un po' di nebbia ma il testimone ha una vista acuta, la sua affidabilità è stata valutata del 70%. Qual è la probabilità che il taxi fosse effettivamente blu? Quale deve essere l'affidabilità del testimone perché la probabilità che il taxi fosse effettivamente blu sia del 99%?

D.2 Esercizio sul Tumore al seno

Lo strumento principe per lo screening per il tumore al seno è la radiografia (mammografia). Definiamo X la situazione della donna: X=sana, malata, che non conosciamo. Definiamo Y l'esito della mammografia: Y=positiva, negativa, che viene misurato. Sappiamo che la sensibilità della mammografia è intorno al 90% ($P(Y=\text{positiva} | X=\text{malata})$) e che la specificità sia anch'essa del 90% ($P(Y=\text{negativa} | X=\text{sana})$). Qual è la probabilità che l'esame dia risultato positivo ($P(Y = \text{positivo})$), sapendo che le donne malate sono lo 0,01% ($P(X=\text{malata}) = 0,01\%$)? Qual è la percentuale di donne che hanno uno screening positivo, di essere effettivamente malate?

D.3 Esercizio delle Macchine [2]

Tre macchine, A B, e C, producono rispettivamente il 50%, il 40%, e il 10% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di produzione difettosa di queste macchine sono rispettivamente del 2%, 1% e 4%. Determinare la probabilità di estrarre un pezzo difettoso. Viene estratto a caso un pezzo che risulta difettoso. Determinare la probabilità che quel pezzo sia stato prodotto dalla macchina C.

D.4 Enunciare il teorema di Bayes

Data una partizione dello spazio degli eventi $A_1 \dots A_n$, vale che:

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(E|A_j)P(A_j)}$$

D.5 Discutere l'analisi di varianza per un sistema lineare [4]

Svolgere un'analisi di varianza per un sistema lineare significa analizzare quanto la stima di un parametro possa variare nelle diverse misure dei dati relativi al problema. L'analisi consente di esaminare a matrice dei covarianti,

misurare quanto varia una misura di una variabile al variare del rumore e misurare quanto covariano due misure di due variabilità. **L'indice di correlazione** di due variabili viene calcolato proprio per misurare quanto le variabili si trovino lungo una funzione.

D.6 Dimostrare che la stima ai minimi quadrati è equivalente alla stima a massima verosimiglianza nel caso di errore Gaussiano sui dati. Cosa fornisce? Come? [3]

Scriviamo il logaritmo negativo della verosimiglianza:

$$P(y_1, \dots, y_n; n, b; x_1, \dots, x_n) = - \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - mx_i - b}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \quad (D.1)$$

$$= - \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - mx_i - b}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (D.2)$$

$$= - \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \quad (D.3)$$

Massimizziamo la **likelihood** ponendo a zero le derivate prime rispetto a m :

$$\frac{\partial P(y_1, \dots, y_n; n, b; x_1, \dots, x_n)}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[- \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] \quad (D.4)$$

$$= 0 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 2(-x_i) \quad (D.5)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 x_i \quad (D.6)$$

$$-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 x_i = 0$$

$$m \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2) \right] + q \left[\sum_{i=1}^n (x_i) \right] = \left[\sum_{i=1}^n (y_i x_i) \right]$$

Figure D.1: Prima equazione

Massimizziamo la **likelihood** ponendo a zero le derivate prime rispetto a q :

$$\frac{\partial P(y_1, \dots, y_n; n, b; x_1, \dots, x_n)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left[- \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] \quad (D.7)$$

$$= 0 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 2(-1) \quad (D.8)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \quad (D.9)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 = 0$$

$$m \left[\sum_{i=1}^n (x_i) \right] + q \left[\sum_{i=1}^n (1) \right] = \left[\sum_{i=1}^n (y_i) \right]$$

Figure D.2: Seconda equazione

Ponendo a sistema le equazioni così ottenute ottengo:

$$\begin{bmatrix} [\sum_{i=1}^n (x_i^2)] & [\sum_{i=1}^n (x_i)] \\ [\sum_{i=1}^n (x_i)] & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sum_{i=1}^n (y_i x_i)] \\ [\sum_{i=1}^n (y_i)] \end{bmatrix}$$

Lo stesso problema visto dal punto di vista dei **minimi quadrati** è impostato nel seguente modo.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

L'obiettivo è trovare una x tale che $(Ax - b)^T (Ax - b)$ è minima (minimizzazione di residui). La soluzione si ottiene calcolando $A^T A x = A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sum_{i=1}^n (x_i^2)] & [\sum_{i=1}^n (x_i)] \\ [\sum_{i=1}^n (x_i)] & n \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sum_{i=1}^n (y_i x_i)] \\ [\sum_{i=1}^n (y_i)] \end{bmatrix}$$

Ovvero:

$$\begin{bmatrix} [\sum_{i=1}^n (x_i^2)] & [\sum_{i=1}^n (x_i)] \\ [\sum_{i=1}^n (x_i)] & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sum_{i=1}^n (y_i x_i)] \\ [\sum_{i=1}^n (y_i)] \end{bmatrix}$$

Che è la stessa soluzione ottenuta per la stima a massima verosimiglianza. Queste metodologie offrono una stima dei parametri di una funzione tramite la minimizzazione dei residui. La soluzione è quella che minimizza lo scarto quadratico medio dei residui, ovvero è a minima varianza.

Appendix E

Domande su Apprendimento Supervisionato

- E.1 Definire l'algoritmo di apprendimento di una rete neurale con unità arbitrarie. Definire la funzione obiettivo utilizzata. [3]**
- E.2 Come si utilizza la funzione obiettivo nell'algoritmo di apprendimento. [3]**
- E.3 Cosa si intende per apprendimento per epoche e per trial? Qual è il vantaggio di ciascuna delle modalità di apprendimento? [3]**
- E.4 Cosa si intende per training e test set? Perché mai vengono utilizzati? Quali problemi si vogliono evitare? [3]**
- E.5 Una rete neurale con unità sigmoidali e un modello parametrico? È lineare? Perché? [3]**
- E.6 Se i dati sono acquisiti senza errori, è una buona scelta aumentare di molto i parametri del modello in modo da garantirsi che l'errore sul training set vada a zero? Perché? [3]**
- E.7 Cosa si intende per un problema di regressione ed illustrare una possibile soluzione. [3]**
- E.8 Come funziona l'approssimazione incrementale multi-scala, cosa garantisce e quali vantaggi può avere? [3]**
- E.9 Determinare la forma analitica dell'aggiornamento dei parametri nel caso di unità lineari e di reti a singolo strato. [2]**
- E.10 Definire l'algoritmo di apprendimento di una rete neurale con unità lineari e con unità non-lineari. Definire la funzione obiettivo utilizzata.**

Appendix F

Domande su Intelligenza Artificiale

F.1 Si descriva il funzionamento della Forward Search. Perché è considerato un template e non un algoritmo? [2]

L'idea è quella di esplorare il grafo partendo dal nodo iniziale, provando a trovare la strada per arrivare ad uno stato di goal. Ad ogni step della ricerca un nodo può essere etichettato in 3 modi:

1. **Unvisited**: deve essere ancora visitato dall'algoritmo.
2. **Alive**: visitato, ma l'algoritmo deve ancora visitare i nodi direttamente raggiungibili da esso. I nodi alive sono raccolti di una coda di priorità a .
3. **Dead**: visitato, ed anche ogni nodo vicino è stato visitato.

È considerata un template e non un algoritmo perché non è specificato il criterio con cui ordinare a .

F.2 Si elenchino due possibili implementazioni di Forward Search elencandone proprietà, vantaggi e svantaggi. [2]

F.2.1 Breadth first search

La coda a è gestita in modo FIFO (First-in First-out). I percorsi con $k+1$ azioni vengono valutati dopo che ogni percorso con k azioni è stato esplorato. Se viene trovato il percorso, è garantito che questo avrà il minor numero di azioni (percorso più breve). Funziona in un tempo $O(|v| + |e|)$. Per costruire l'albero di ricerca individua in tutti i figli con la stessa profondità e garantisce il percorso più breve. Inoltre è simmetrico.

F.2.2 Depth first search

La coda a è uno stack gestito con una politica LIFO (Last-in First-out). È un algoritmo più "aggressivo" e cerca prima soluzioni nei percorsi più lunghi. Funziona con un tempo $O(|v| + |e|)$. Ha il vantaggio di ignorare cammini sbagliati nel caso in cui si trovi immediatamente una soluzione. Non è sistematico su spazi infiniti.

Appendix G

Domande su Clustering

G.1 Cosa si intende per clustering? In quali famiglie vengono divisi? [3]

G.2 Che relazione c'è tra clustering e classificazione e quali sono le criticità? [3]

Appendix H

Domande su Biologia

- H.1 Definire il neurone biologico evidenziandone le parti più significative per la trasmissione dell'informazione ed il loro comportamento. [2]**
- H.2 Descrivere il funzionamento complessivo del neurone biologico.**
- H.3 Dove avviene principalmente l'"apprendimento" nei neuroni biologici?**
- H.4 Descrivere la modalità di trasmissione dell'informazione nel sistema nervoso e identificare le caratteristiche peculiari.**
- H.5 Che differenza c'è tra neuroni motori, neuroni sensoriali ed inter-neuroni? [2]**
- H.6 Come viene trasmessa ed elaborata l'informazione da un neurone?**
- H.7 Cos'è uno spike? [2]**
- H.8 Quali sono le aree corticali principali? [2]**
- H.9 Cos'è il codice di popolazione? [2]**
- H.10 Data un'area cerebrale è univoca la funzione implementata in quell'area? [2]**
- H.11 Cosa sono i mirror neurons? Quali implicazioni hanno per i sistemi intelligenti e l'apprendimento? [2]**