

## RICERCA OPERATIVA

Prof. Marco Trubian  
6 CFU

**Luca Cappelletti**

Lecture Notes  
Year 2017/2018



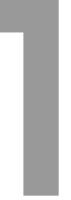
Magistrale Informatica  
Università di Milano  
Italy  
7 febbraio 2018

# Indice

<b>1 Modelli di programmazione lineare</b>	<b>4</b>
1.1 Formulazione di un modello PL . . . . .	4
1.2 Modelli di pianificazione della produzione . . . . .	4
1.3 Modelli di miscelazione . . . . .	5
1.4 Modelli di flusso su rete . . . . .	5
1.4.1 Problema di flusso a costo minimo . . . . .	5
1.4.2 Problema del cammino orientato di costo minimo . . . . .	5
1.4.3 Problema del massimo flusso . . . . .	6
1.4.4 Problema di trasporto . . . . .	6
1.4.5 Problema dell'assegnamento . . . . .	7
1.5 Modelli multi periodo . . . . .	7
1.6 Riassunto . . . . .	8
<b>2 Modelli di programmazione intera</b>	<b>9</b>
2.1 Modelli di taglio ottimo . . . . .	9
2.2 Modelli dello zaino . . . . .	9
2.3 Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento . . . . .	10
2.4 Modelli di localizzazione . . . . .	10
2.4.1 Capacitated Plant Location (CPL) . . . . .	10
2.5 Modello di caricamento di contenitori . . . . .	11
2.6 Modelli di copertura, di riempimento e di partizionamento d'insieme . . . . .	11
2.6.1 Modelli di copertura o set-covering . . . . .	11
2.6.2 Modelli di riempimento d'insieme o set-packing . . . . .	11
2.6.3 Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning . . . . .	12
<b>3 Modelli di programmazione lineare</b>	<b>13</b>
3.1 Geometria poliedrale . . . . .	13
3.1.1 Combinazione di vettori . . . . .	13
3.1.2 Poliedro . . . . .	13
3.2 Problema duale . . . . .	13
3.2.1 Regole di simmetria generali . . . . .	14
3.2.2 Condizioni sufficienti di ottimalità . . . . .	14
3.2.3 Relazioni tra primale e duale . . . . .	14
3.2.4 Teorema degli scarti complementari . . . . .	14
3.3 Analisi di Sensitività . . . . .	15
3.3.1 Variazione di un costo . . . . .	15
3.3.2 Variazione di una risorsa . . . . .	15
3.3.3 Variazione di un vincolo . . . . .	15
3.3.4 Ulteriore variabile . . . . .	15
3.3.5 Ulteriore vincolo . . . . .	15
3.4 Interpretazioni economiche della dualità . . . . .	15
3.4.1 Prezzo ombra . . . . .	15
3.5 Esercizi - Risoluzione grafica di PL . . . . .	17
3.5.1 Esercizio 2.6 . . . . .	17
3.5.2 Risoluzione esercizio 2.6 . . . . .	17
3.5.3 Esercizio 2.7 . . . . .	17
3.5.4 Risoluzione esercizio 2.7 . . . . .	18
3.5.5 Esercizio 2.8 . . . . .	18
3.5.6 Risoluzione esercizio 2.8 . . . . .	18
3.5.7 Esercizio 2.9 . . . . .	19
3.5.8 Risoluzione esercizio 2.9 . . . . .	19

<b>4 Teoria di programmazione lineare intera</b>	<b>20</b>
4.1 Rilassamenti . . . . .	21
4.1.1 Rilassamento per eliminazione di vincoli . . . . .	21
4.1.2 Rilassamento lagrangiano . . . . .	21
4.1.3 Problema lagrangiano duale . . . . .	21
<b>5 Metodi di programmazione lineare intera</b>	<b>22</b>
5.1 Branch & Bound . . . . .	22
5.2 Algoritmo dei piani di taglio . . . . .	22
<b>6 Problema del massimo flusso</b>	<b>23</b>
6.1 Algoritmo di Ford e Fulkerson . . . . .	23
6.2 Taglio di capacità minima . . . . .	23
6.3 Flusso massimo a costo minimo . . . . .	23
6.4 Algoritmo di Prim . . . . .	24
<b>A Come è fatto il tema d'esame</b>	<b>25</b>
A.1 Domande di teoria . . . . .	26
A.1.1 Domande su Branch & Bound . . . . .	26
A.1.2 Domande su problema duale . . . . .	27
A.1.3 Domande su rilassamento del problema lineare continuo . . . . .	28
A.1.4 Domande su Analisi di sensitività . . . . .	29
A.1.5 Domande varie . . . . .	29
<b>B Temi d'esame risolti</b>	<b>30</b>
B.1 Esame del 18/06/2014 . . . . .	30
B.1.1 Esercizio 1 . . . . .	30
B.1.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	31
B.2 Esame del 03/07/2014 . . . . .	33
B.2.1 Esercizio 1 . . . . .	33
B.2.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	33
B.3 Esame del 16/09/2014 . . . . .	35
B.3.1 Esercizio 1 . . . . .	35
B.3.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	35
B.3.3 Esercizio 1 . . . . .	36
B.3.4 Soluzione esercizio 1 . . . . .	37
B.4 Esame del 17/11/2014 . . . . .	39
B.4.1 Esercizio 1 . . . . .	39
B.4.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	39
B.5 Esame del 28/01/2015 . . . . .	41
B.5.1 Esercizio 1 . . . . .	41
B.5.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	41
B.6 Esame del 18/02/2015 . . . . .	43
B.6.1 Esercizio 1 . . . . .	43
B.6.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	43
B.7 Esame del 19/06/2015 . . . . .	45
B.7.1 Esercizio 1 . . . . .	45
B.7.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	45
B.8 Esame del 16/09/2015 . . . . .	47
B.8.1 Esercizio 1 . . . . .	47
B.8.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	47
B.9 Esame del 20/06/2016 . . . . .	49
B.9.1 Esercizio 1 . . . . .	49
B.9.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	49
B.10 Esame del 04/07/2016 . . . . .	52
B.10.1 Esercizio 1 . . . . .	52
B.10.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	52
B.11 Esame del 05/09/2016 . . . . .	55
B.11.1 Esercizio 1 . . . . .	55
B.11.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	55
B.12 Esame del 16/11/2016 . . . . .	57
B.12.1 Esercizio 1 . . . . .	57

B.12.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	57
B.13 Esame del 24/01/2017 . . . . .	59
B.13.1 Esercizio 1 . . . . .	59
B.13.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	59
B.14 Esame del 23/01/2018 . . . . .	61
B.14.1 Esercizio 1 . . . . .	61
B.14.2 Soluzione esercizio 1 . . . . .	61
<b>C Teoria</b>	<b>63</b>
C.1 Criterio di ottimalità della base . . . . .	64
C.2 Teorema Minkowsky-Weyl . . . . .	64
C.3 Esistenza di vertice ottimo . . . . .	64
C.4 Teorema fondamentale della programmazione lineare . . . . .	65
C.5 Regola di Bland . . . . .	66
C.6 Teorema di convergenza del simplex . . . . .	66
C.7 Lemma di Farkas . . . . .	67
C.8 Il duale del duale è il primale . . . . .	67
C.9 Teorema di dualità forte . . . . .	68
C.10 Teorema di dualità debole . . . . .	68
C.11 Condizioni di ottimalità . . . . .	68
C.12 Matrici totalmente unimodulari . . . . .	69
C.13 Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo . . . . .	70
C.14 MAX-FLOW = MIN-CUT . . . . .	70



# Modelli di programmazione lineare

## 1.1 Formulazione di un modello PL

Un modello di programmazione lineare si ottiene assumendo che **funzione obiettivo** e **vincoli** e viene espresso come:

$$\begin{aligned} \min x(x) &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &\geq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &\geq b_m \end{aligned}$$

Esso include anche i vincoli di non negatività delle variabili di decisione:

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

In forma matriciale (compatta) il modello di PL può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Dove  $c \in \mathbb{R}^n$  è il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo mentre  $b \in \mathbb{R}^m$  è il vettore dei termini noti dei vincoli ed  $A$  è la matrice dei coefficienti delle variabili di decisione nei vincoli.

## 1.2 Modelli di pianificazione della produzione

Dato un numero di risorse  $m$  disponibile per la produzione di  $n$  prodotti,  $a_{ij}$  con  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$  la quantità di risorsa  $i$  necessaria per produrre una unità di prodotto  $j$ ,  $b_i$  la quantità della risorsa disponibile  $i$  e  $p_j$  il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita di un prodotto  $j$ , il modello PL è costituito come segue:

$$\begin{aligned} \max z(x) &= \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Figura 1.1: Modello di pianificazione della produzione

### 1.3 Modelli di miscelazione

Si supponga di avere a disposizione  $n$  ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità degli  $m$  componenti,  $a_{ij}$  la quantità di componente  $i$  presente nell'ingrediente  $j$  mentre  $b_i$  rappresenta la quantità minima di componente  $i$  richiesto nella miscela. Il costo unitario dell'ingrediente  $j$  è indicato con  $c_j$ .

$$\begin{aligned} \max z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Figura 1.2: Modello di miscelazione

Ulteriori vincoli tipici potrebbero essere la presenza di un componente  $i$  minore di un valore  $d_i$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq d_i$$

### 1.4 Modelli di flusso su rete

#### 1.4.1 Problema di flusso a costo minimo

Dato un grafo orientato  $\mathcal{D} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$  dove  $\mathcal{N}$  è l'insieme dei nodi, mentre  $\mathcal{A}$  è l'insieme degli archi, si indica con  $b_i$  con  $i \in \mathcal{N}$  la fornitura (se positivo) o domanda (se negativo) del nodo  $i$  e con  $c_{ij}$ ,  $l_{ij}$  e  $u_{ij}$  rispettivamente il costo, la capacità minima e massima dell'arco  $(i, j)$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{A}$ . La sestupla  $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, b, c, l, u)$  si definisce **rete**.

Il vincolo afferma che la differenza tra la quantità di flusso entrante e la quantità uscente dal nodo deve essere uguale alla fornitura / domanda.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{(i, j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(i, j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j, i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

Figura 1.3: Problema di flusso a costo minimo

#### 1.4.2 Problema del cammino orientato di costo minimo

Basandosi sul caso base visto nel **problema di flusso a costo minimo 1.4.1** aggiungiamo i nodi  $s$  (origine) e  $t$  (destinazione), considerando quindi  $i \neq s \neq t$  e le forniture  $b_i = 0$ ,  $b_s = 1$  e  $b_t = -1$ :

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= b_s = 1 \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -1 \end{aligned}$$

Figura 1.4: Problema del cammino orientato di costo minimo

### 1.4.3 Problema del massimo flusso

Basandosi sempre sul caso base del **problema di flusso a costo minimo 1.4.1**, poniamo i costi  $c_{ij}$ , capacità minime  $l_{ij}$  e le forniture  $b_i$  a 0. L'obiettivo posto è di inviare la massima quantità di flusso possibile da un nodo di ingresso  $s$  (detto sorgente) ed uno di uscita  $t$  (detto pozzo). Viene indicata con  $v$  la fornitura del nodo  $s$  (che non è un parametro ma una variabile dipendente dalle  $x_{ij}$ , rappresentante il flusso netto uscente da  $s$ )

$$\begin{aligned} \min z(x) &= v \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= b_s = v \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -v \\ x_{ij} &\leq u_{ij} \quad (i,j) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Figura 1.5: Problema del massimo flusso

### 1.4.4 Problema di trasporto

Dati  $n$  nodi di origine (stabilimenti di produzione) con una produzione di  $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$  e  $m$  nodi di destinazione (punti vendita), ciascuno caratterizzato da una domanda  $b_j, j \in \{1, \dots, m\}$  ed un costo unitario di trasporto  $c_{ij}$ . L'obiettivo del problema è di determinare il quantitativo di prodotto da inviare da ciascuna origine verso ciascuna destinazione in modo tale da minimizzare il costo complessivo di trasporto rispettando i vincoli sulla quantità di prodotto disponibile in ciascuna origine e garantendo il soddisfacimento delle domande di ogni destinazione.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &\leq a_i \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= b_j \quad \forall j \end{aligned}$$

Figura 1.6: Problema di trasporto

Per ricondursi al caso in cui vale il vincolo  $\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i$  è sempre possibile aggiungere una destinazione fittizia  $m+1$  che funge da discarica.

Una variante del problema di trasporto considera la possibilità di includere  $p$  nodi intermedi di transito, che possono scambiare il materiale anche tra loro. Questo porta il numero delle origini e destinazioni a divenire  $n+p$  e  $m+p$  (ogni origine può inviare a  $p$  nuovi nodi ed ogni destinazione può ricevere da  $p$  nuovi nodi). Diviene necessario aggiungere due vincoli ulteriori per modellare i

nodi  $p$  come intermedi, cioè che ogni punto di transito abbia un flusso entrante coincidente con il flusso uscente e che non ponga ulteriori limitazioni:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{m+p} c_{ij} x_{ij} \\ &\sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \\ &\sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} = b_j \quad \forall j \\ &\sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall i \\ &\sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall j \end{aligned}$$

Figura 1.7: Problema di trasporto con  $p$  nodi intermedi

#### 1.4.5 Problema dell'assegnamento

Supponiamo di avere  $n$  oggetti (per esempio lavoratori) ed altrettanti posti (per esempio postazioni di lavoro) associate da un costo di assegnamento  $c_{ij}$ . Il problema consiste nel determinare il modo più conveniente di assegnare ogni oggetto  $i$  ad uno e un solo posto  $j$ . Il problema è a variabili di tipo binario ( $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ).

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ &\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \end{aligned}$$

Figura 1.8: Problema dell'assegnamento

Varianti tipiche possono essere sull'assegnare un numero oggetti diverso dal numero di posti, che vanno a modificare i vincoli di uguaglianza a  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$ .

### 1.5 Modelli multi periodo

Modelli in cui viene utilizzata un intervallo di tempo, con  $t \in \{1, \dots, T\}$  la generica frazione di tempo, genericamente utilizzata per la minimizzazione dei costi su un intervallo o massimizzazione di un'utilità.

## 1.6 Riassunto

$$\begin{aligned}\max z(x) &= \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i \quad \forall i \in \mathcal{N}\end{aligned}$$

(a) Modello di pianificazione della produzione

(b) Modello di miscelazione

(c) Problema di flusso a costo minimo

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= b_s = 1 \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -1 \\ \sum_{(s,j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \mathcal{A}} x_{js} &= v \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} &= b_i = v \\ \sum_{(t,j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \mathcal{A}} x_{jt} &= b_t = -v \\ x_{ij} &\leq u_{ij} \quad (i,j) \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

(d) Problema del cammino orientato di costo minimo

(e) Problema del massimo flusso

(f) Problema di trasporto

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{m+p} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} &\leq a_i \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} &= b_j \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^{m+p} x_{ij} &= \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n+p} x_{ij} &= \sum_{j=1}^m b_j \quad \forall j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min z(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall j\end{aligned}$$

(h) Problema dell'assegnamento

(g) Problema di trasporto con  $p$  nodi intermedi

# 2

## Modelli di programmazione intera

In questi modelli tutte o alcune variabili di decisione sono vincolate ad assumere valori interi o binari. Talvolta è possibile svincolare dall'interessezza tramite il rilassamento continuo, arrotondando poi i valori frazionari ottenuti, con un risultato trascurabile sul soddisfacimento dei vincoli.

### 2.1 Modelli di taglio ottimo

**Obiettivo:** Minimizzare lo scarto di prodotto derivato dal taglio di moduli di materiale.

Nel caso base **monodimensionale** si assume di dover tagliare moduli di dimensione  $D$  in moduli di dimensioni  $d_i, i \in \{1, \dots, m\}$ , in numero  $r_i, i \in \{1, \dots, m\}$  (per ogni dimensione  $d_i$ ). Ogni modulo standard può essere tagliato in modo differente, considerando  $n$  possibili schemi di taglio:  $a_{ij}$  sarà il numero di moduli di dimensione  $d_i$  ottenuti da un modulo standard tagliato secondo lo schema  $j$ . Per minimizzare lo sfrido (scarto) sarà quindi sufficiente minimizzare il numero di moduli tagliati.

Chiamo  $x_j$  il numero di moduli tagliati secondo lo schema  $j$ .

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{j=1}^n x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq r_i, \forall i \\ x_j &\geq 0, x_j \in \mathbb{N}, \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.1: Modello di taglio ottimo

Qualora i moduli avessero più dimensioni il problema diviene molto più difficile da risolvere.

### 2.2 Modelli dello zaino

**Obiettivo:** Massimizzare il valore degli oggetti nello zaino.

Si ha un insieme di  $n$  oggetti, ciascuno con un valore  $c_j$  ed un peso  $p_j$  e uno zaino con un limite di capacità  $b$ .

Chiamo  $x_j$  la variabile binaria che indica se aggiungo o meno l'oggetto  $j - esimo$  nello zaino.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j &\leq b, \forall i \\ x_j &\in \{0, \dots, 1\}, \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.2: Modello dello zaino

## 2.3 Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

**Obiettivo:** Minimizzare i costi di avvio e di produzione.

Avviando una nuova produzione si hanno costi fissi  $f_j$  e costi per unità prodotta  $c_j$ . Rappresentiamo con  $x_j \geq 0$  il numero di prodotti che si decide di produrre, e introduciamo una variabile  $y_j \in \{1, 0\}$  che rappresenta se decidiamo o meno di produrre un prodotto  $j$  per eliminare la discontinuità all'origine causata dal costo fisso  $f_j$ . Per ogni prodotto, consideriamo una domanda  $b_j$  ed un vincolo di produzione massima  $M_j$ .

$$\begin{aligned} \min z(x, y) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n f_j y_j \\ \min z(x, y) &= \sum_{j=1}^n b_j - x_j \\ x_j &\leq M_j \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.3: Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

## 2.4 Modelli di localizzazione

**Obiettivo:** Posizionare centri di servizio in modo da soddisfare la domanda e minimizzare una funzione di costo.

### 2.4.1 Capacitated Plant Location (CPL)

Posizionamento di impianti di produzione o immagazzinamento di prodotti da cui deve essere trasportato il prodotto a dei punti vendita. Viene modellato tramite un grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2, \mathcal{A})$ , con  $\mathcal{N}_1$  nodi rappresentanti i siti potenziali e  $\mathcal{N}_2$  i nodi successori. Chiamiamo  $d_j, j \in \mathcal{N}_2$  la domanda del nodo successore  $j$  – esimo,  $q_i, i \in \mathcal{N}_1$  il massimo livello di attività del nodo sito candidato  $i$  – esimo,  $k_{ij}$  il costo unitario di trasporto da nodo candidato  $i$  a nodo successore  $j$ ,  $f_i$  il costo fisso di avviamento del nodo candidato  $i$ .

Chiamo  $y_i \in \{0, 1\}$  la variabile binaria rappresentante l'approvazione o meno del nodo candidato  $i$  – esimo e  $s_{ij}$  il flusso di prodotto dal nodo  $i$  a  $j$ .

$$\begin{aligned} \min z(s, y) &= \sum_{i \in \mathcal{N}_1} \sum_{j \in \mathcal{N}_2} k_{ij} s_{ij} + \sum_{i \in \mathcal{N}_1} f_i y_i \\ \sum_{i \in \mathcal{N}_1} s_{ij} &= d_j, \forall j \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_2} s_{ij} &\leq q_i y_i, \forall i \end{aligned}$$

Figura 2.4: Capacitated Plant Location (CPL)

Modelli più completi considerano una soglia di attivazione minima per considerare l'approvazione di un nodo candidato.

## 2.5 Modello di caricamento di contenitori

Si tratta di una generalizzazione del problema dello zaino, in cui sono considerati  $n$  zaini o contenitori sempre di dimensione uguale  $q$ .

**Obiettivo:** Utilizzare meno contenitori il possibile inserendo tutti gli oggetti.

Ogni oggetto ha un peso  $p_i$ , la variabile  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  è vera quando l'oggetto  $i$  è inserito nel contenitore  $j$  e  $y_j \in \{0, 1\}$  è vera quando il contenitore  $j$  è utilizzato.

$$\begin{aligned} \min z(x, y) & \sum_{j=1}^n y_j \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} & = 1, \forall i \\ \sum_{i=1}^m p_i x_{ij} & \leq q y_j, \forall j \end{aligned}$$

Figura 2.5: Modello di caricamento di contenitori

Un'alternativa di modello è considerare le capacità dei contenitori diverse  $q_j$  ed assegnare ad ogni contenitore un costo  $c_j$ .

## 2.6 Modelli di copertura, di riempimento e di partizionamento d'insieme

Definito un insieme  $I$  di  $m$  elementi ed una collezione  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  di sottoinsiemi di  $I$ , ognuno dei quali con un valore  $c_j$ , e una sotto-collezione  $SC$  di  $C$ . Viene usata una matrice  $A$  di dimensione  $m \times n$  detta *di copertura* il cui elemento  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  assume valore 1 se  $i \in C_j$ .

Le variabili di decisione sono  $x_j \in \{0, 1\}$  e sono vere se  $C_j \in SC$ .

### 2.6.1 Modelli di copertura o set-covering

**Obiettivo:** Determinare una sotto-collezione  $SC$  di valore minimo, detta **copertura**, tale che ogni elemento di  $I$  appartenga ad almeno un sottoinsieme di  $SC$ .

$$\begin{aligned} \min z(x) & = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \geq 1, \forall i \end{aligned}$$

Figura 2.6: Modelli di copertura o set-covering

### 2.6.2 Modelli di riempimento d'insieme o set-packing

**Obiettivo:** Determinare una sotto-collezione  $SC$  di valore massimo, detto **riempimento**, tale che ogni elemento di  $I$  appartenga ad al più una sotto-collezione di  $SC$ .

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq 1, \forall i \end{aligned}$$

Figura 2.7: Modelli di riempimento d'insieme o set-packing

### 2.6.3 Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning

**Obiettivo:** Determinare una sotto-collezione  $SC$  di valore minimo, detta **partizione**, tale che ogni elemento di  $I$  appartenga esattamente ad una sotto-collezione di  $SC$ . Essa costituisce sia una **copertura** sia un **riempimento** di  $I$ .

$$\begin{aligned} \min z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= 1, \forall i \end{aligned}$$

Figura 2.8: Modelli di posizionamento d'insieme o set-partitioning

# 3

## Modelli di programmazione lineare

### 3.1 Geometria poliedrale

#### 3.1.1 Combinazione di vettori

Dati  $k$  vettori  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  e  $k$  scalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , il vettore  $v = \sum_{j=1}^k \lambda_j v^{(j)} \in \mathbb{R}^n$  si dice:

**Combinazione affine** se  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ .

**Combinazione conica** se  $\lambda_j \geq 0 \forall j$ .

**Combinazione convessa** se è sia *conica* che *affine*.

#### 3.1.2 Poliedro

Un poliedro  $P$  è intersezione di un numero finito di semispazi.

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Se il poliedro definisce un'area limitata viene chiamato **politopo**.

### 3.2 Problema duale

**Teorema 3.2.1 (Problema duale).** Dato un problema  $P$  di PL in forma standard (funzione in forma di minimizzazione):

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

ogni soluzione ammissibile  $\tilde{x}$  di  $P$  è tale che:

$$c^T \tilde{x} \geq b^T \tilde{y}$$

dove  $\tilde{y}$  è una soluzione ammissibile del seguente problema  $D$  (detto **duale** di  $P$ ) di PL:

$$\begin{aligned} \max w(y) &= b^T y \\ A^T y &\leq c \end{aligned}$$

### 3.2.1 Regole di simmetria generali

1. A un vincolo di disegualanza primale corrisponde una variabile vincolata nel duale.
2. A una variabile vincolata in segno nel primale un vincolo di disegualanza nel duale.
3. A un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale.
4. A una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale.
5. Se la funzione del primale è in forma di minimo, nel duale sarà di massimo e viceversa.

Il duale del problema duale è il problema primale.

### 3.2.2 Condizioni sufficienti di ottimalità

**Teorema 3.2.2 (Condizioni sufficienti di ottimalità).** Date due soluzioni  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  ammissibili rispettivamente nel problema primale e duale. Se vale la relazione C.9.1:

$$c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$$

Figura 3.1: Condizione sufficiente di ottimalità

allora  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi.

Una soluzione  $\tilde{x}$  è ottima se e solo se esiste una soluzione nel problema duale  $\tilde{y}$  che rispetti la relazione C.9.1. In tal caso, sia  $\tilde{x}$  che  $\tilde{y}$  sono ottime.

### 3.2.3 Relazioni tra primale e duale

**Teorema 3.2.3 (Relazioni tra primale e duale).** Dato un problema ed il suo duale, è vera esattamente **una** delle seguenti affermazioni:

- a) I due problemi ammettono soluzioni ottime finite,  $x^*$  e  $y^*$  rispettivamente, tali da rispettare la relazione C.9.1.
- b) Il problema primale è illimitato inferiormente ed il duale è inammissibile.
- c) Il problema duale è illimitato superiormente ed il primale è inammissibile.
- d) I problemi primale e duale sono entrambi inammissibili.

### 3.2.4 Teorema degli scarti complementari

**Teorema 3.2.4 (Teorema degli scarti complementari o condizioni di ortogonalità).** Date due soluzioni  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ , soluzioni ammissibili nel problema primale e duale rispettivamente ( $a_{ij} \in A$ , matrice dei coefficienti dei vincoli nei problemi), esse sono ottime se vale la relazione 3.2 (forma vettoriale di C.9.1):

$$(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \tilde{y}_i) \tilde{x}_j = 0 \quad \forall j$$

Figura 3.2: Condizioni Ortogonalità

### 3.3 Analisi di Sensitività

Si tratta di un'analisi svolta *dopo* aver identificato la soluzione ottima di un problema di PL volta a determinare la qualità del modello, attraverso la modifica di coefficienti di costo  $c_j$ , di risorse  $b_k$ , dei vincoli  $a_{ij}$  oppure introducendo ulteriori variabili e/o vincoli e osservando in che modo la soluzione ottima va a variare.

#### 3.3.1 Variazione di un costo

Non modifica il poliedro del problema, la soluzione ottima precedente rimane ammissibile ma potrebbe non essere più ottima.

#### 3.3.2 Variazione di una risorsa

Cambia il poliedro del problema (la regione ammissibile) per cui la soluzione ottima potrebbe non essere più ammissibile

#### 3.3.3 Variazione di un vincolo

Va ad introdurre una variazione analoga alla variazione del costo, con l'aggiunta che la matrice  $A$  potrebbe diventare invertibile e quindi porterebbe la soluzione di base a non rispettare più le condizioni di ammissibilità o di ottimalità.

#### 3.3.4 Ulteriore variabile

Viene inserita come fosse una variabile precedentemente esistente con costi e coefficienti dei vincoli nulli, che quindi vengono variati con le implicazioni viste nella sezione 3.3.1 e 3.3.3.

#### 3.3.5 Ulteriore vincolo

Si procede analogamente all'aggiunta di variabile.

### 3.4 Interpretazioni economiche della dualità

Il problema duale può essere interpretato come il problema della determinazione del minimo prezzo a cui all'impresa produttrice converrebbe vendere in blocco le risorse disponibili piuttosto che utilizzarle ai fini produttivi.

#### 3.4.1 Prezzo ombra

**Definizione 3.4.1 (Prezzo ombra).** Data una variazione  $\delta$  di una risorsa  $b_h$  nel problema primale, con una rispettiva variazione dell'ottimo  $\Delta z^*$ , si definisce **prezzo ombra** la variabile  $y_h^*$  del problema duale tale per cui:

$$y_h^* = \frac{\Delta z^*}{\delta}$$

Figura 3.3: Prezzo ombra

#### Massimizzazione

In un problema in cui la funzione obiettivo è da massimizzare , il prezzo ombra della risorsa  $h - esima$  sarà:

**Non negativo** nel caso in cui il vincolo  $h$  è del tipo  $\leq$ .

**Non positivo** nel caso in cui il vincolo  $h$  è del tipo  $\geq$ .

**Minimizzazione**

In un problema in cui la funzione obiettivo è da minimizzare , il prezzo ombra della risorsa  $h$  – *esima* sarà:

**Non negativo** nel caso in cui il vincolo  $h$  è del tipo  $\geq$ .

**Non positivo** nel caso in cui il vincolo  $h$  è del tipo  $\leq$ .

## 3.5 Esercizi - Risoluzione grafica di PL

### 3.5.1 Esercizio 2.6

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura 3.4: Esercizio 2.6

### 3.5.2 Risoluzione esercizio 2.6

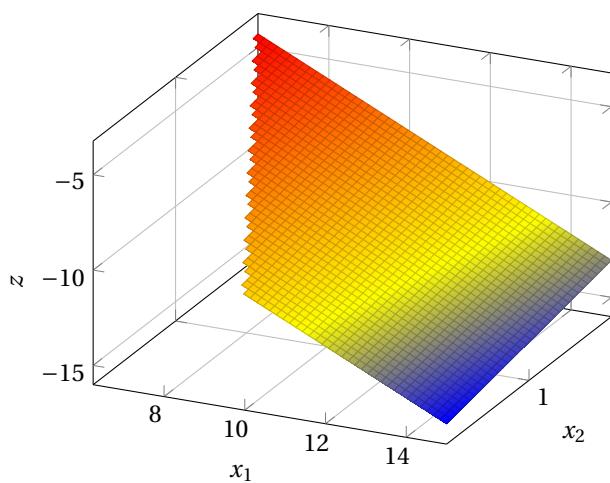
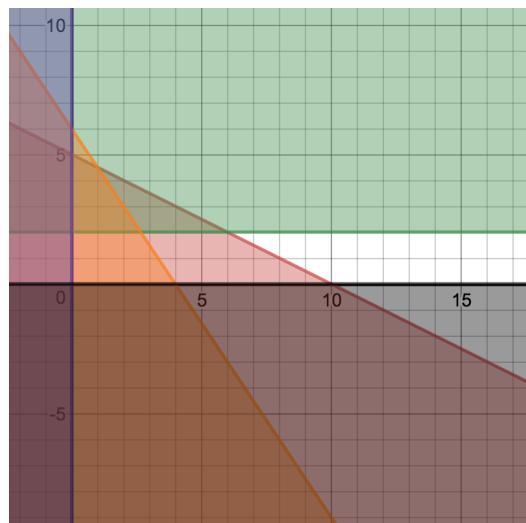
(a) La funzione  $z$ (b) I vincoli del problema nello spazio  $x_1 - x_2$ 

Figura 3.5: Risoluzione esercizio 2.6

Il minimo della funzione risulta essere  $(\inf, 0)$  siccome la variabile  $x_1$  non è vincolata. La soluzione quindi è illimitata.

### 3.5.3 Esercizio 2.7

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 9x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura 3.6: Esercizio 2.7

### 3.5.4 Risoluzione esercizio 2.7

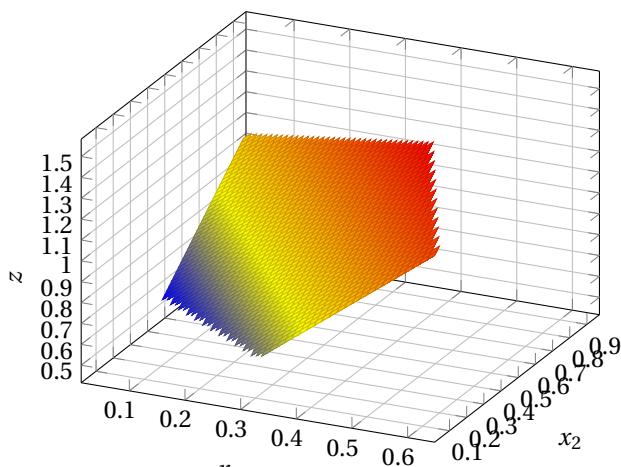
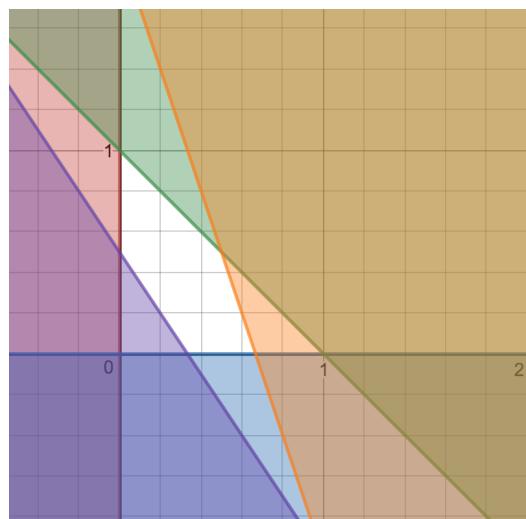
(a) La funzione  $z$ (b) I vincoli del problema nello spazio  $x_1 - x_2$ 

Figura 3.7: Risoluzione esercizio 2.7

### 3.5.5 Esercizio 2.8

$$\begin{aligned} \min z &= x_2 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 &\geq 7 \\ 3x_1 + 3x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura 3.8: Esercizio 2.8

### 3.5.6 Risoluzione esercizio 2.8

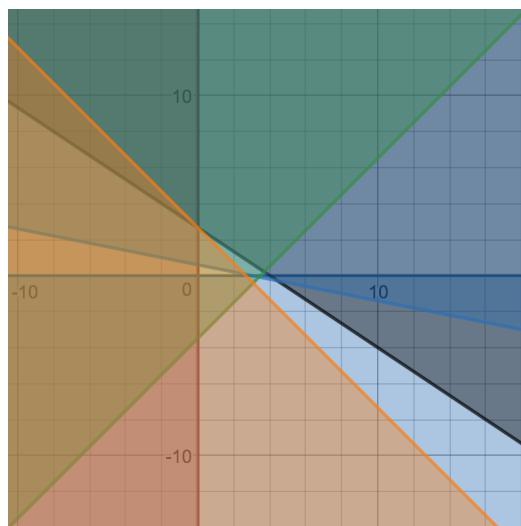
(a) I vincoli del problema nello spazio  $x_1 - x_2$ 

Figura 3.9: Risoluzione esercizio 2.8

La regione ammissibile è vuota.

### 3.5.7 Esercizio 2.9

$$\begin{aligned}
 \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\
 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 -x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\
 2x_1 + 5x_2 &\geq 6 \\
 8x_1 - 5x_2 &\geq 2 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Figura 3.10: Esercizio 2.9

### 3.5.8 Risoluzione esercizio 2.9

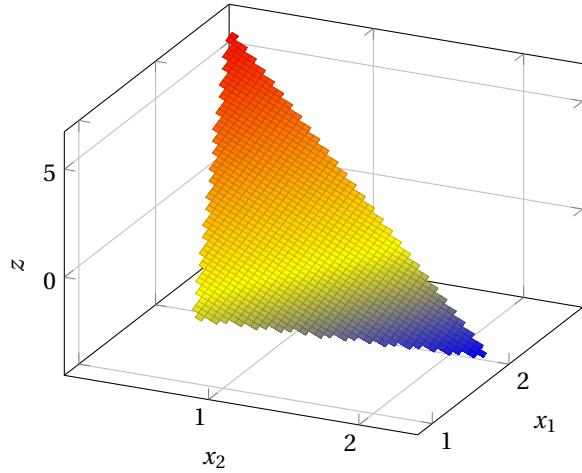
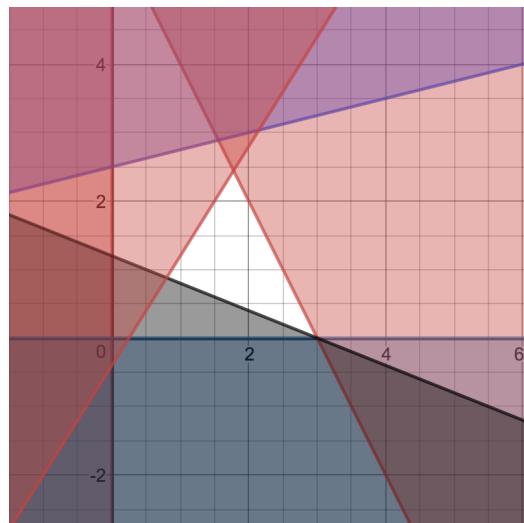
(a) La funzione  $z$ (b) I vincoli del problema nello spazio  $x_1 - x_2$ 

Figura 3.11: Risoluzione esercizio 2.9

Il punto di minimo è l'angolo dove l'ordinata è massima e l'ascissa minima.

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x_1 - 5(6 - 2x_1) = 2 \\ x_2 = 6 - 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{9} \\ x_2 = 6 - \frac{32}{9} = \frac{54-32}{9} = \frac{22}{9} \end{cases}$$

Il valore di minimo della funzione risulta  $\min z = \frac{32}{9} - \frac{66}{9} = \frac{34}{9}$ .

# 4

## Teoria di programmazione lineare intera

**Definizione 4.0.1 (Matrice unimodulare (UM)).** Una matrice quadrata  $M$  di dimensione  $m$  a elementi interi con  $\det M = \pm 1$  si dice **unimodulare (UM)**.

**Definizione 4.0.2 (Matrice totalmente unimodulare (TUM)).** Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è **totalmente unimodulare (TUM)** se tutte le sue sotto-matrici quadrate non singolari sono unimodulari.

**Teorema 4.0.3 (Condizione necessaria e sufficiente per vertici a componenti intere).** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \leq n$  a elementi interi e rango  $m$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché il poliedro in forma standard  $P$  abbia tutti i vertici a componenti interi per qualsiasi  $b \in \mathbb{R}^m$  a componenti intere è che ogni base sia **UM**.

**Teorema 4.0.4 (Soluzione ottima con basi UM).** Una SBA ottima del rilassamento lineare di  $P$  è ottima anche per  $P$  se ogni base ammissibile di  $A$  è **UM** e  $b$  è a componenti intere.

Sfortunatamente, determinare se tutte le basi ammissibili sono **UM** è un problema esponenziale.

Nel caso in cui  $A$  sia una **TUM** vale il seguente risultato.

**Teorema 4.0.5 (Soluzione ottima con A TUM).** Condizione sufficiente affinché il poliedro  $P$  abbia tutti i vertici a componenti intere, per qualsiasi  $n$  intera, è che  $A$  sia **TUM**.

Ne segue che una soluzione ottima del rilassamento continuo del poliedro  $P$ , se  $A$  è **TUM** sarà soluzione ottima anche per  $P$ .

**Teorema 4.0.6 (Proprietà di una TUM).** Una matrice  $A$  è **TUM** se:

1. Ogni colonna ha al più due elementi diversi da 0.
2. Risulta possibile partizionare gli indici di riga in due sottoinsiemi  $R_1$  ed  $R_2$  tali che:

Se una colonna  $j$  contiene due elementi non nulli dello stesso segno, allora le corrispondenti righe non appartengono allo stesso sottoinsieme.

Se una colonna  $i$  contiene due elementi non nulli di segno opposto, allora le corrispondenti righe appartengono allo stesso sottoinsieme.

**Teorema 4.0.7.** La matrice di incidenza di un grafo orientato (digrafo) o un grafo bipartito è TUM.

## 4.1 Rilassamenti

### 4.1.1 Rilassamento per eliminazione di vincoli

Banalmente si elimina uno o più dei vincoli di  $P$  estendendo la regione ammissibile.

### 4.1.2 Rilassamento lagrangiano

La soluzione ottima del rilassamento lagrangiano fornisce una limitazione inferiore sul valore ottimo della funzione obiettivo del problema originario.

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ \underline{A}x &\geq b \\ \underline{C}x &\geq d \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Problema di PI

$$\begin{aligned} \min_x L(\underline{\lambda}, x) &= c^T x - \underline{\lambda}^T (\underline{A}x - b) \\ \underline{C}x &\geq d \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z} \\ \underline{\lambda} &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Rilassamento lagrangiano  $RL_{\underline{\lambda}}$  di  $P$

**Teorema 4.1.1.** In generale, la soluzione ottima identificata tramite un rilassamento lineare (RL) è sempre peggiore o uguale a quella identificata tramite rilassamento lagrangiano L.

$$z_{RL}^* \leq L^*$$

**Teorema 4.1.2 (Proprietà di integralità).** la soluzione ottima identificata tramite un rilassamento lineare (RL) è sempre uguale a quella identificata tramite rilassamento lagrangiano L (o meglio il rilassamento lagrangiano non può arrivare ad una approssimazione migliore) se vale la **proprietà di integralità**, cioè l'inviluppo convesso dei vincoli in  $P$  è uguale all'area ammissibile nel rilassamento continuo.

### 4.1.3 Problema lagrangiano duale

Il duale lagrangiano estende alla PI il concetto di dualità ma non garantisce che gli ottimi siano uguali tra il problema primale e duale.

**Teorema 4.1.3.** L'ottimo del problema lagrangiano duale coincide con il rilassamento continuo se il poliedro dei vincoli rimasti gode della **proprietà di integralità**.

Si risolve tramite un algoritmo iterativo, detto del **sottogradiente**, un'approssimazione dell'algoritmo del gradiente necessaria perché  $L^*(\lambda)$  è generalmente non differenziabile.

**Definizione 4.1.4 (Sottogradiente).** Per sottogradiente si intende il vettore:

$$s(\lambda) = -(Ax - b)$$

# 5

## Metodi di programmazione lineare intera

### 5.1 Branch & Bound

Si tratta del metodo risolutivo per PI più comune, un po' come il simplex per PL.

Si procede risolvendo molteplici rilassamenti continui di un problema LI usando il metodo del simplex.

A ogni iterazione, può accadere che:

1. L'iterazione  $i - esima$  è inammissibile.
2. Le variabili sono intere e pertanto non è necessario suddividere ulteriormente ma è stata identificata la soluzione ottima intera di questo ramo.
3. La soluzione continua identificata è inferiore alla soluzione intera identificata in un altro ramo e quindi non ha senso esplorare questa regione ulteriormente.
4. La soluzione intera ottenuta è abbastanza vicina alla soluzione continua ottima e si decide pertanto di interrompere l'algoritmo (per motivi di tempo).
5. Le variabili sono continue e quindi suddivideremo ulteriormente la regione in due sotto problemi, per esempio se la variabile intera fosse  $x = a$  andremmo a dividere tra  $x \leq \lfloor a \rfloor$  e  $x \geq \lceil a \rceil$ , quindi ripeteremo il calcolo della soluzione ottima con l'algoritmo del simplex avendo aggiunti questi vincoli.

### 5.2 Algoritmo dei piani di taglio

Banalmente si applicano iterativamente tagli di Chvatal-Gomory alla regione del problema (che sebbene inizialmente molto efficaci lo divengono sempre meno) per eliminare soluzioni non accettabili dal problema discreto ma ottime per il rilassamento continuo.

**Definizione 5.2.1 (Taglio di Gomory).** Ogni soluzione ammissibile di  $P$  soddisfa la relazione:

$$x_h + \sum_{j \in N} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$$

# 6

## Problema del massimo flusso

### 6.1 Algoritmo di Ford e Fulkerson

Si tratta di un algoritmo per calcolare il **massimo flusso** su un grafo da un nodo sorgente  $s$  ad un nodo destinazione  $t$ .

**Definizione 6.1.1 (Cammino incrementante).** Un **cammino incrementante** è un cammino che ha archi con direzione positiva non pieni o archi con direzione negativa non vuoti.

L'algoritmo procede nel modo seguente:

1. Si identifica un cammino aumentante.
2. Si identifica la capacità di strozzatura, cioè quella che su questo specifico cammino limita la capacità massima.
3. Si aumenta la capacità occupata di ogni arco ed il flusso totale della differenza, ciò significa che in un cammino inverso (con freccia nella direzione inversa del flusso) il valore di flusso cala.
4. Si ripete sino a che non è più possibile identificare un cammino aumentante.

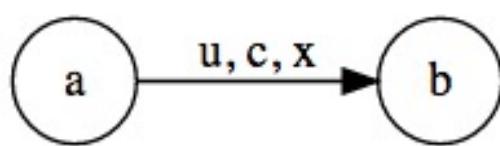
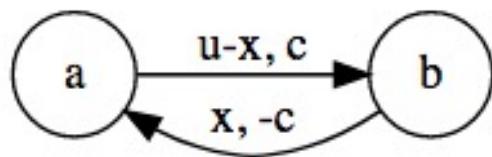
### 6.2 Taglio di capacità minima

Si tratta dell'insieme di archi che va da un sottoinsieme di nodi  $\mathcal{P}_1$  ad un secondo sottoinsieme  $\mathcal{P}_2$ , con il totale dei nodi  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  e  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ , cioè nessuno dei nodi in  $\mathcal{P}_1$  si trova anche in  $\mathcal{P}_2$  costruito in modo tale che esso limiti la capacità massima di flusso (insieme degli archi di strozzatura) che può andare dal nodo  $s$  a  $t$ .

Un bel sito web che risolve questo problema è <https://blocks.org/estk/9629395>.

### 6.3 Flusso massimo a costo minimo

Si tratta di riportare ogni arco  $ij$  del digrafo tra un nodo  $i$  e  $j$ , definito come  $(u_{ij}, c_{ij}, x_{ij})$ , dove  $u_{ij}$  è la massima capacità di flusso dell'arco,  $c_{ij}$  il costo per unità dell'arco e  $x_{ij}$  la quantità di flusso che effettivamente scorre sull'arco, ad una forma a due archi come segue:

(a) Arco con massima capacità  $u$ , costo  $c$  e flusso inviato  $x$ .

(b) Archi con flusso inviato e costo

Figura 6.1: Flusso massimo a costo minimo

Una volta sostituiti tutti gli archi (nei temi d'esame è possibile compilare degli archi forniti) è necessario identificare circuiti in cui la somma dei costi è negativa.

Se questi esistono, il costo non è minimo ed è possibile ridurlo re-instradando il flusso del circuito identificato.

## 6.4 Algoritmo di Prim

Nell'algoritmo di Prim si procede con un metodo greedy: dato un set di nodi iniziali (spesso solo uno), a ogni step si sceglie il nodo con distanza minima connesso a uno dei nodi del set, lo si aggiunge al set e si ripete sino ad ottenere un albero ricoprente.

# A

## Come è fatto il tema d'esame

Un tema d'esame di Ricerca Operativa risulta composto da 4/5 esercizi pratici e talvolta alcune domande di teoria.

1. Risolvere graficamente un problema di programmazione lineare a due variabili.

Riportare i valori ottenuti (ottimo, variabili, slack).

Caratteristiche della soluzione (degenero, multipla).

Valore della risorsa  $b_i$  per cui la base ottima non cambia.

Valore del costo  $c_i$  per cui la base ottima non cambia.

Risolvere mediante scarti complementari il problema duale.

2. Data una richiesta, formulare un modello di Programmazione Lineare.

Dato il modello realizzato, applicare una data estensione.

3. Applicare a un grafo l'algoritmo di Ford-Fulkerson.

Riportare tutti i cammini aumentati.

Calcolare il flusso massimo (quanto flusso arriva alla fine).

Determinare il taglio minimo (taglio minimo = insieme di archi che determina strozzatura in massimo flusso).

Determinare se il flusso è stato inviato a costo minimo (se esistono circuiti di costo negativo).

Si costruisca un reinstradamento che vada a ridurre il costo del flusso.

4. Applicare Branch & Bound al problema dello zaino

5. Problema di programmazione intera:

Verificare se una soluzione è ottima per il rilassamento lineare del problema.

Risolvere il rilassamento lagrangiano del problema.

Taglio di Gomory.

Risolvere il duale tramite scarti complementari.

## A.1 Domande di teoria

### A.1.1 Domande su Branch & Bound

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C) e la miglior soluzione ammissibile disponibile vale 100. L'upper bound associato al nodo A vale 110, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 99 e 100.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

- a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso
- b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso
- c) il nodo A viene chiuso
- d) una tale situazione non si può mai verificare

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da minimizzare. Vi sono tre nodi aperti (A, B, C). Analizzando l'ultimo nodo chiuso l'algoritmo ha identificato la miglior soluzione ammissibile disponibile, di valore 100. Il lower bound associato al nodo A vale 90, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 101 e 99.8. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia best bound first si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera

- a) il nodo A sarà il prossimo nodo espanso
- b) il nodo B sarà il prossimo nodo espanso
- c) il nodo A viene chiuso
- d) una tale situazione non si può mai verificare

Si consideri una generica iterazione di un algoritmo di Branch and Bound applicato ad un problema di programmazione lineare intera con funzione obiettivo da massimizzare. Vi sono solo tre nodi ancora aperti (A, B, C) e l'attuale valore della migliore soluzione ammissibile è 120. L'upper bound associato al nodo A vale 190.5, mentre quelli associati ai nodi B e C valgono rispettivamente 120 e 97.2. Sapendo che l'albero viene esplorato utilizzando la strategia highest first, si indichi quale delle seguenti affermazioni è vera:

- a) si possono chiudere i nodi B e C
- b) solo il nodo C può essere chiuso
- c) il nodo B sarà il prossimo nodo visitato
- d) l'algoritmo si arresta

### A.1.2 Domande su problema duale

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :

- a) Se P è illimitato allora D è illimitato
- b) Se D è illimitato allora P è inammissibile
- c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita
- d) nessuna delle precedenti

Sia P un problema di programmazione lineare continua e sia D il suo modello duale. Quale delle seguenti affermazioni è vera? :

- a) Se P è illimitato allora D è illimitato
- b) Se D è illimitato allora P è inammissibile
- c) Se D è inammissibile allora P può avere soluzione ottima finita
- d) nessuna delle precedenti

Con riferimento al metodo a due fasi per la soluzione di problemi di PL continua, si consideri la risoluzione del problema ausiliario e si immagini che il valore ottimo di tale problema risulti positivo ( $z_{AUS}^* > 0$ ). Cosa si può dedurre con certezza per il duale D del problema originale?

- a) D è illimitato
- b) D è limitato
- c) D è o inammissibile, o illimitato
- d) D è inammissibile

### A.1.3 Domande su rilassamento del problema lineare continuo

- | Sia dato un problema di PLI ammissibile e se ne consideri il rilassamento continuo PLC. Quale delle seguenti affermazioni è vera :
- esiste sempre almeno un taglio che consente di restringere la regione ammissibile di PLC lasciando invariata quella di PLI
  - esiste sempre un vertice intero di PLC
  - se esiste un vertice intero di PLC, questo è un ottimo di PLI
  - se esiste un vertice non intero di PLC, esiste un taglio valido per il problema di PLI

Si consideri un problema di programmazione lineare intera ed il suo rilasciamento continuo. Quale delle seguenti affermazioni è falsa:

- la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ammissibile per il problema intero
- la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere ottima per il problema intero
- la soluzione ottima del rilassamento continuo, se arrotondata a valori interi, può essere inammissibile per il problema intero
- la soluzione ottima del rilassamento continuo, nel caso sia intera, non è necessariamente ammissibile per il problema intero

Siano dati un problema  $P_I$  di programmazione lineare a numeri interi con funzione obiettivo da massimizzare ed il corrispondente rilassamento continuo  $P_C$ . È nota una soluzione ammissibile  $\mathbf{x}$  di  $P_I$  di valore  $w$ . Sia  $\mathbf{x}_C$  la soluzione ottimale di  $P_C$  di valore  $z$ .

Se  $w=z$  se ne deduce che:

- la soluzione  $\mathbf{x}_C$  ha coordinate intere
- la soluzione  $\mathbf{x}$  è soluzione ottimale di  $P_I$
- tutte le soluzioni di base ammissibili di  $P_C$  hanno coordinate intere
- le precedenti affermazioni non si possono dedurre con certezza

#### A.1.4 Domande su Analisi di sensitività

Si consideri un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da massimizzare. Siano  $b_i$  e  $p_i$  il termine noto ed il prezzo ombra associati al vincolo  $i$ -esimo nella soluzione ottima, il cui valore è  $z$ . Dall'analisi di sensitività sappiamo che l'intervallo di variazione di  $b_i$  che lascia inalterata la base ottima vale  $[\alpha, \beta]$ . Se sommiamo la quantità  $\delta > 0$  al termine noto  $b_i$ , con  $b_i + \delta = \beta$  il valore della funzione obiettivo diviene:

- a)  $z$
- b)  $z + \delta * p_i$
- c)  $z - \delta * p_i$
- d) non si può dire con le informazioni a disposizione

Si consideri un problema di programmazione lineare continua con funzione obiettivo da minimizzare. Se sommando la quantità  $\delta > 0$  al termine noto  $b_i$  del vincolo  $i$ -esimo il valore della funzione obiettivo subisce una variazione  $\epsilon < 0$  ne deduciamo che il vincolo era

- a) di minore uguale
- b) di maggiore uguale
- c) di uguaglianza
- d) non si può dire con le informazioni a disposizione

#### A.1.5 Domande varie

Si riportino i modelli di PLI del problema del commesso viaggiatore (TSP) e dell'albero di supporto di costo minimo (MST) su grafo non orientato  $G=(N,E)$ .

Si fornisca un modello di PLI per il problema di trovare nel grafo  $G$  sia un ciclo hamiltoniano, sia un albero di supporto. I lati scelti devono avere costo complessivo minimo e almeno metà di essi deve appartenere sia al ciclo, sia all'albero. (Suggerimento: si aggiunga una variabile per ogni lato che vale 1 se quel lato fa parte di entrambi gli alberi).

Si consideri un problema di "mix produttivo". Relativamente ai prodotti A, B, C e D, è necessario imporre la condizione che A e B vengano prodotti solo se C oppure D sono in produzione (cioè almeno uno fra C e D deve essere realizzato). Quale fra le seguenti alternative rappresenta l'insieme minimo di vincoli necessari alla corretta rappresentazione del problema come modello di programmazione lineare a numeri interi? (Se la variabile binaria  $y_i$  è uguale a 1 significa che il prodotto  $i$  è in produzione e se è uguale a 0 significa che non lo è).?

- a)  $y_C \geq y_A; y_D \geq y_A; y_C \geq y_B; y_D \geq y_B$
- b)  $y_A \leq y_C + y_D; y_B \leq y_C + y_D$
- c)  $2y_A \geq y_C + y_D; 2y_B \geq y_C + y_D$
- d)  $y_C \leq y_A; y_D \leq y_A; y_C \leq y_B; y_D \leq y_B$

# B

## Temi d'esame risolti

### B.1 Esame del 18/06/2014

#### B.1.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

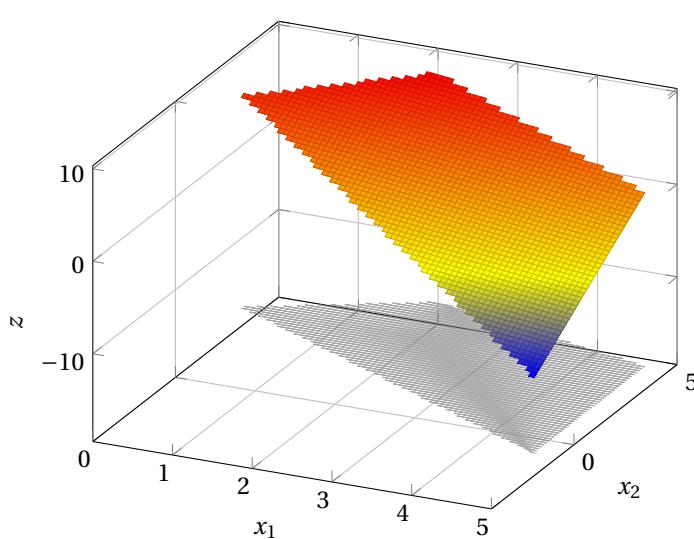
$$\begin{aligned} \max z &= -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.1: Esercizio 1

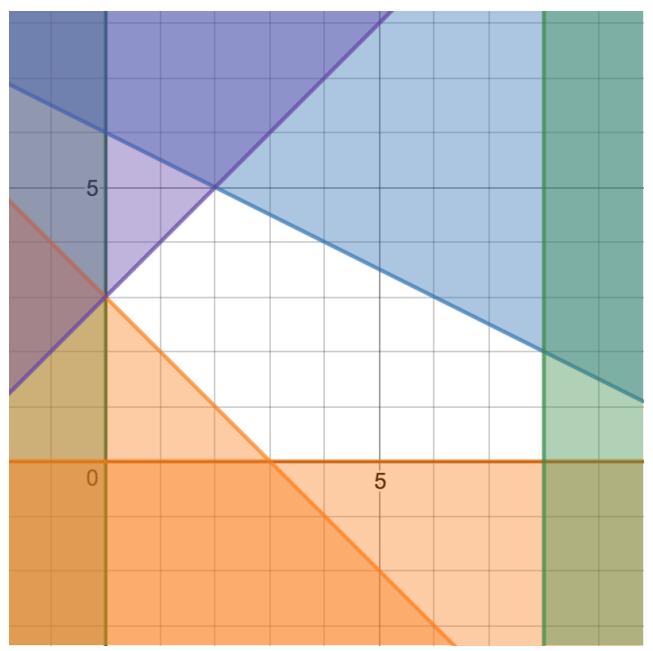
1. Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto.
2. Da quali variabili è composta la base associata al vertice dato dall'intersezione del vincolo  $III$  e l'asse delle  $x_1$ ?
3. Si ricavi per via grafica per quali valori di  $b_4$ , ora pari a 3, la **composizione** della base ottima non cambia.
4. Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.1.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = (2, 5)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.2: Vertice ottimo del problema di minimo

#### Riporto variabili

$$z = 8, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = 4, \quad s_4 = 0$$

#### Variabili di base

Nel vertice di intersezione tra il secondo vincolo  $x_1 + x_2 \geq 3$  ed il terzo  $x_2 \geq 0$  le variabili in base sono  $B = \begin{bmatrix} x_1 & s_1 & s_2 & s_4 \end{bmatrix}$  e le variabili fuori base sono  $F = \begin{bmatrix} x_2 & s_3 \end{bmatrix}$ .

#### Analisi di sensitività

Posso variare  $b_4$  tra  $-3$  arrivando al vertice  $(3,0)$  e  $6$  al vertice  $(0,6)$ .

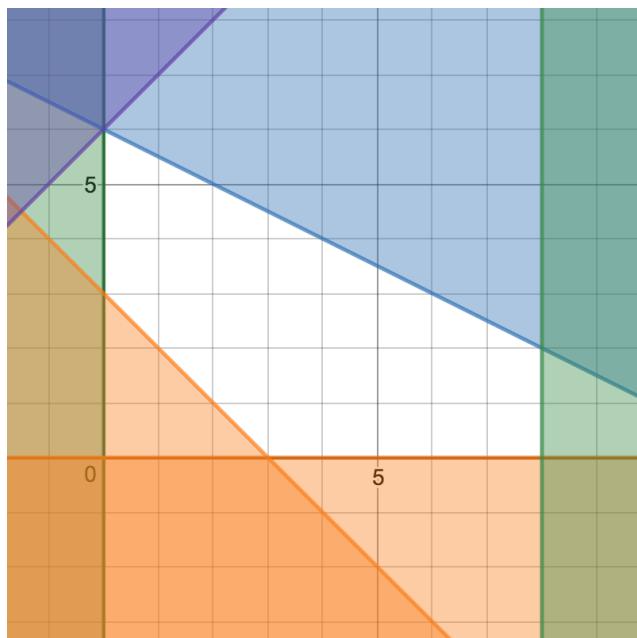
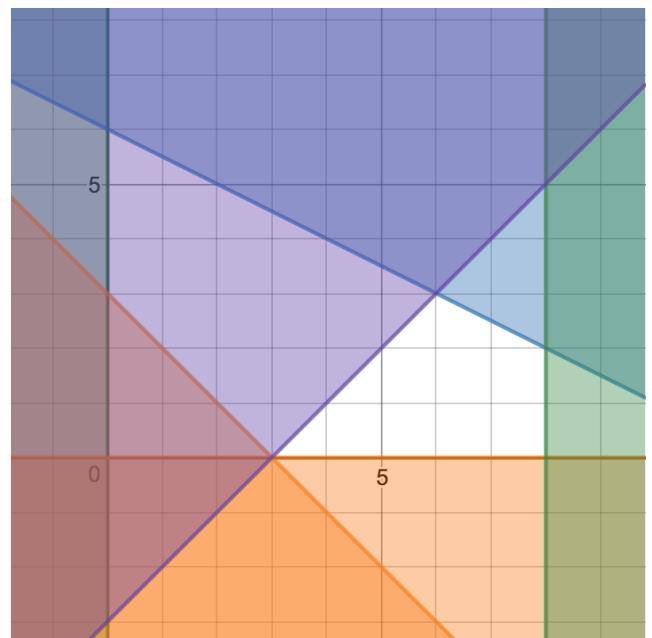
(a)  $b_4 = 6$ (b)  $b_4 = -3$ 

Figura B.3: Analisi di sensitività

**Costruisco problema duale**

$$\begin{aligned}
 \min z_D &= 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 + 3y_4 \\
 y_1 + y_2 + y_3 - y_4 &\geq -1 \\
 2y_1 + y_3 + y_4 &\geq 2 \\
 y_1, y_2, y_4 &\geq 0 \\
 y_3 &\leq 0
 \end{aligned}$$

**Scarti complementari**

$$\begin{cases} x_1(y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + 1) = 0 \\ x_2(2y_1 + y_3 + y_4 - 2) = 0 \\ y_1(x_1 + 2x_2 - 12) = 0 \\ y_2(x_1 - 8) = 0 \\ y_3(x_1 + x_2 - 3) = 0 \\ y_4(-x_1 + x_2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_4 + 1 = 0 \\ 2y_1 + y_4 - 2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_4 = \frac{4}{3} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima del duale corrisponde a quella del primale:  $z = z_D = 8$

## B.2 Esame del 03/07/2014

### B.2.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

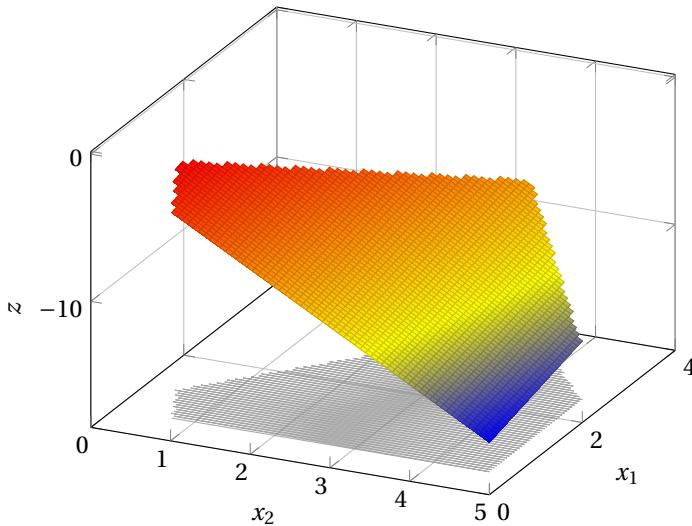
$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.4: Esercizio 1

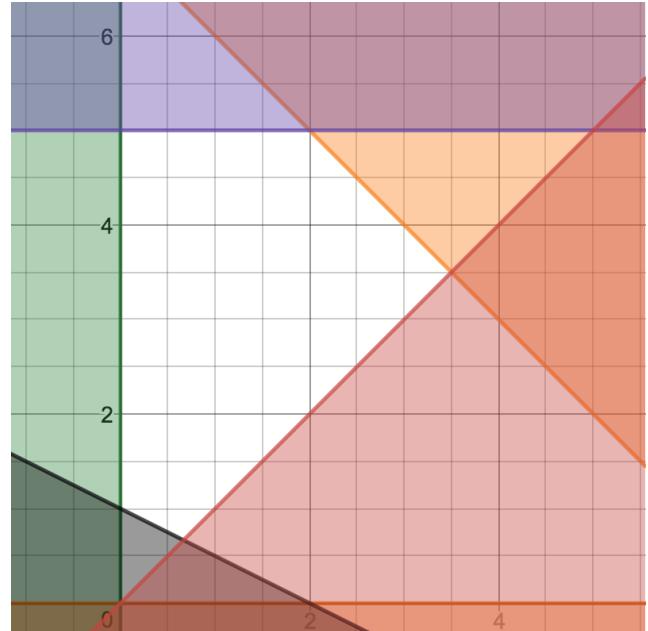
- Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto.
- Si ricavi per via grafica per quali valori di  $b_3$ , ora pari a 2, la **composizione** della base ottima non cambia.
- Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.2.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\mathbf{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.5: Vertice ottimo del problema di massimo

#### Ripporto variabili

$$z = -\frac{4}{3}, \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad s_1 = \frac{17}{3}, \quad s_2 = \frac{13}{3}, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 0$$

#### Analisi di sensitività

La variabile  $b_3$  può variare tra 0, valore in cui il vincolo incrocia il vertice  $(0,0)$  e  $\frac{21}{2}$ , valore in cui incrocia il vertice in  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ .

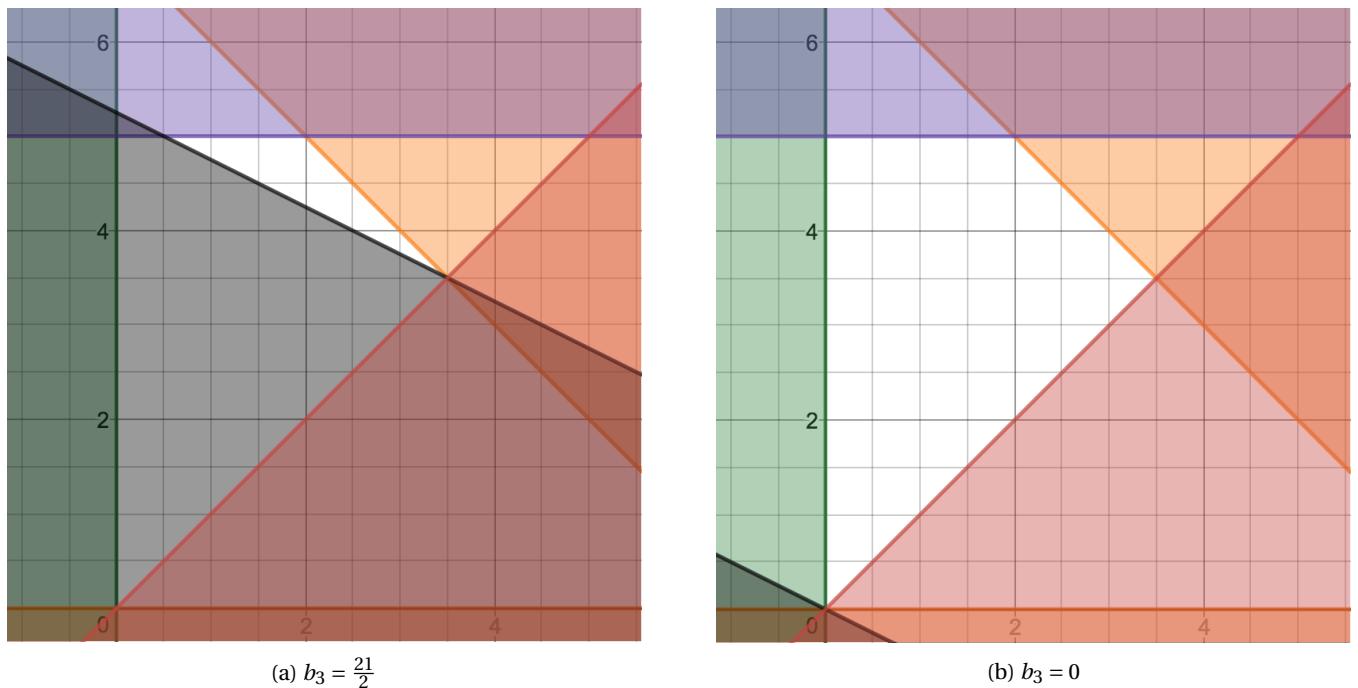


Figura B.6: Analisi di sensitività

**Costruisco problema duale**

$$\begin{aligned}
 \min z_D &= 7y_1 + 5y_2 + 2y_3 \\
 y_1 + y_3 + y_4 &\geq 1 \\
 y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 &\geq -3 \\
 y_1, y_2, y_4 &\geq 0 \\
 y_3 &\leq 0
 \end{aligned}$$

**Scarti complementari**

$$\begin{cases} x_1(y_1 + y_3 + y_4 - 1) = 0 \\ x_2(y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 + 3) = 0 \\ y_1(x_1 + x_2 - 7) = 0 \\ y_2(x_2 - 5) = 0 \\ y_3(x_1 + 2x_2 - 2) = 0 \\ y_4(x_1 - x_2 - 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_3 + y_4 - 1 = 0 \\ 2y_3 - y_4 + 3 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_3 = -\frac{2}{3} \\ y_4 = \frac{5}{3} \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Verifico che la soluzione ottima del duale corrisponda a quella del primale:  $z = z_D = -\frac{4}{3}$ .

## B.3 Esame del 16/09/2014

### B.3.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

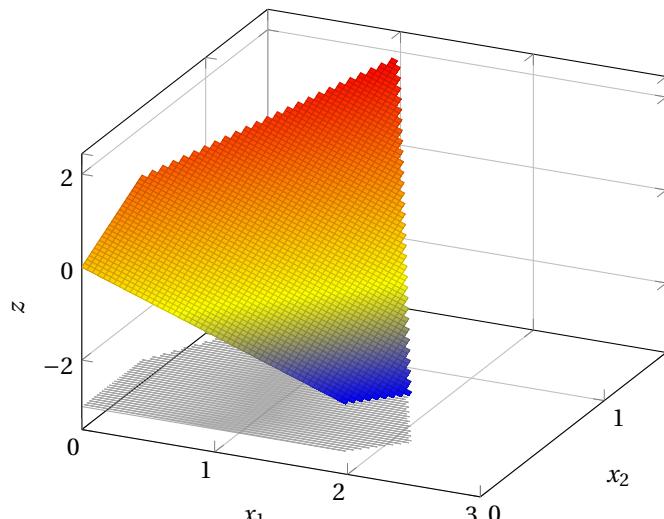
$$\begin{aligned} \max z &= -x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ +x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.7: Esercizio 1

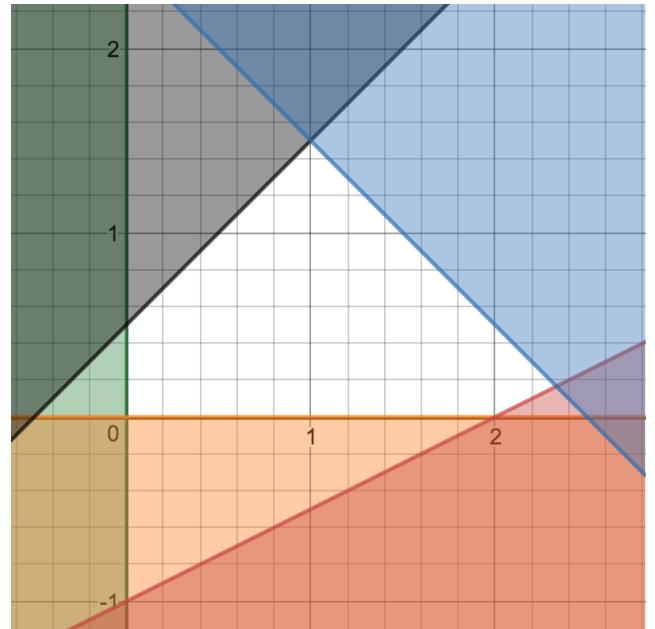
1. Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto.
2. Si ricavi per via grafica per quali valori di  $c_2$ , ora pari a 2, la **composizione** della base ottima non cambia.
3. Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.3.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = \left(1, \frac{3}{2}\right)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.8: Vertice ottimo del problema di minimo

#### Ripporto variabili

$$z = 2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 0$$

### Analisi di sensitività

$$-(1) + \left(\frac{3}{2}\right)c_2 = 0 + \frac{1}{2}c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$

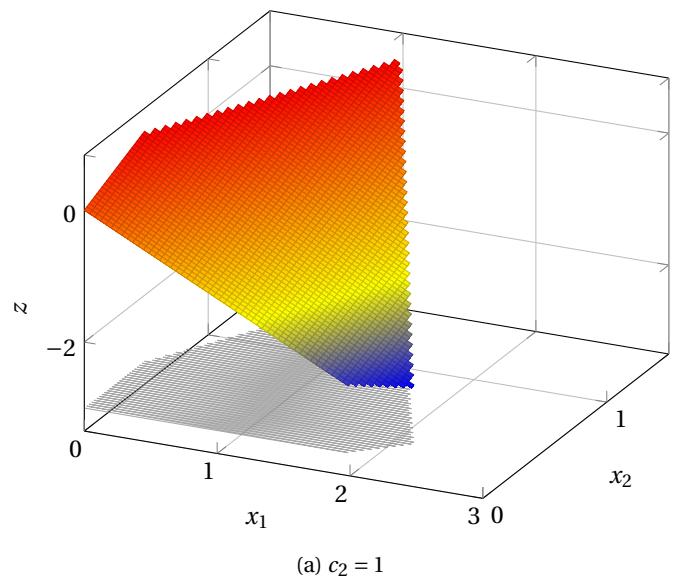


Figura B.9: Analisi di sensitività

### Costruisco problema duale

$$\begin{aligned} \min z_D &= y_1 + 2y_2 + 5y_3 \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq -1 \\ 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 &\geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(-2y_1 + y_2 + 2y_3 + 1) = 0 \\ x_2(2y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2) = 0 \\ y_1(-2x_1 + 2x_2 - 1) = 0 \\ y_2(+x_1 - 2x_2 - 2) = 0 \\ y_3(2x_1 + 2x_2 - 5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y_1 + y_2 + 2y_3 + 1 = 0 \\ 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{3}{4} \\ y_3 = \frac{1}{4} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima del problema duale corrisponde a quella del primale:  $z = z_D = \frac{8}{2} = 2$ .

### B.3.3 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 \\ \frac{7}{2}x_1 - 2x_2 + x_3 &= \frac{9}{2} \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ \underline{x} &\in \mathbb{N}^4 \end{aligned}$$

Figura B.10: Esercizio 1

1. Si risolva il suo rilassamento continuo.
2. Se la soluzione ottima non è intera si trovi un opportuno taglio di Gomory in forma frazionaria, lo si aggiunga al tableau e si trovi l'elemento di pivot senza riottimizzare.

3. Si disegni il vincolo identificato.

### B.3.4 Soluzione esercizio 1

#### Rilassamento continuo

Il valore minimo che la funzione obiettivo può raggiungere, nel rilassamento continuo, visti i vincoli, è 0, con  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{9}{2}, x_4 = 3$ .

#### Verifico ottimalità

Verifico che la funzione ottenuta sia ottima mediante il metodo degli scarti complementari.

$$\begin{aligned} \max z_D &= \frac{9}{2}y_1 + 3y_2 \\ \frac{7}{2}y_1 + 3y_2 &\leq 1 \\ -2y_1 + 1y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Problema duale

$$\begin{cases} x_1(\frac{7}{2}y_1 + 3y_2 - 1) = 0 \\ x_2(-2y_1 + 1y_2 - 1) = 0 \\ x_3y_1 = 0 \\ x_4y_2 = 0 \\ y_1(\frac{7}{2}x_1 - 2x_2 + x_3 - \frac{9}{2}) = 0 \\ y_2(3x_1 + x_2 + x_4 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

(b) Scarti complementari

Figura B.11: Verifica soluzione ottima

La soluzione è confermata ottima  $z = z_D = 0$ .

#### Taglio di Gomory

La soluzione ottima comprende valori di  $x$  non interi, per cui procedo con il taglio di Gomory. Considerando come base  $B = [x_3, x_4]$ , il problema considerato è già posto in forma canonica:

$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_2$	$\bar{b}$
0	0	1	1	0
1	0	$\frac{7}{2}$	-2	$\frac{9}{2}$
0	1	3	1	3

Figura B.12: Tableau in forma canonica

Costruisco il taglio di Gomory sulla riga evidenziata in verde:

$$\begin{aligned} \sum (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor)x_j &\geq b_i - \lfloor b_i \rfloor \\ (1 - \lfloor 1 \rfloor)x_3 + 0x_4 + \left(\frac{7}{2} - \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor\right)x_1 + 0x_2 &\geq \frac{9}{2} - \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor \\ \frac{1}{2}x_1 &\geq \frac{1}{2} \\ x_1 &\geq 1 \end{aligned}$$

Aggiungo il nuovo vincolo al tableau:

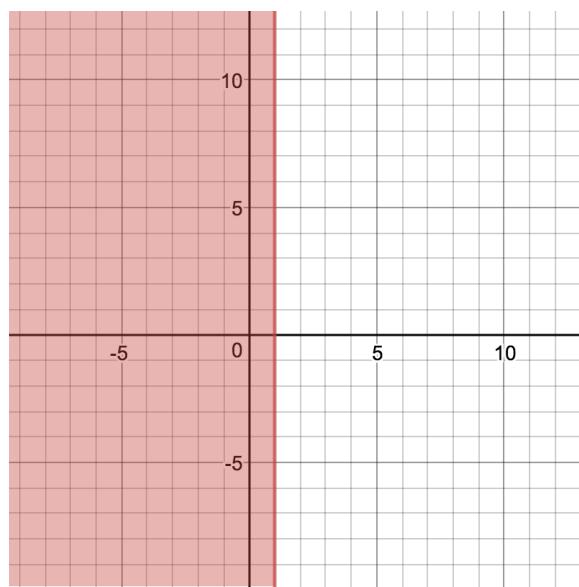
$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_2$	$\tilde{b}$
0	0	1	1	0
1	0	$\frac{7}{2}$	-2	$\frac{9}{2}$
0	1	3	1	3
0	0	1	0	1

Figura B.13: Tableau in forma canonica

A parità di coefficiente di costo ridotto, scelgo la colonna di  $x_1$  essendo quella con i coefficienti maggiori. Per l'operazione di pivot posso scegliere sia il termine appena inserito, 1, sia 3 poiché il rapporto tra questi ed il rispettivo termine noto risulta uguale.

### Disegnare il vincolo

Rappresento il vincolo sul piano  $x_1 - x_2$ :



## B.4 Esame del 17/11/2014

### B.4.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

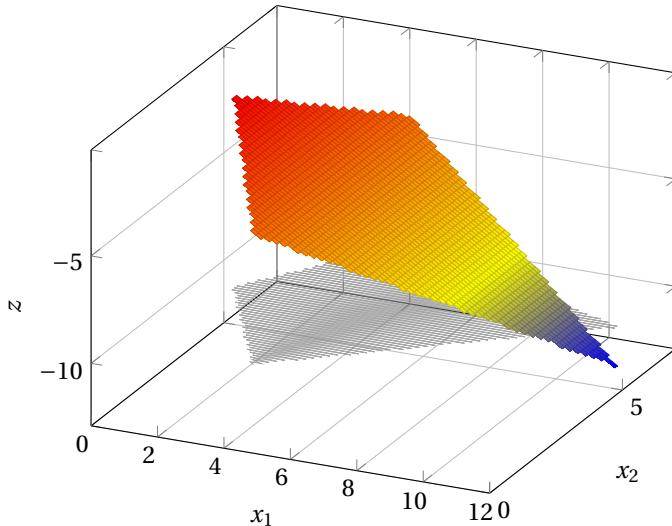
$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 32 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.14: Esercizio 1

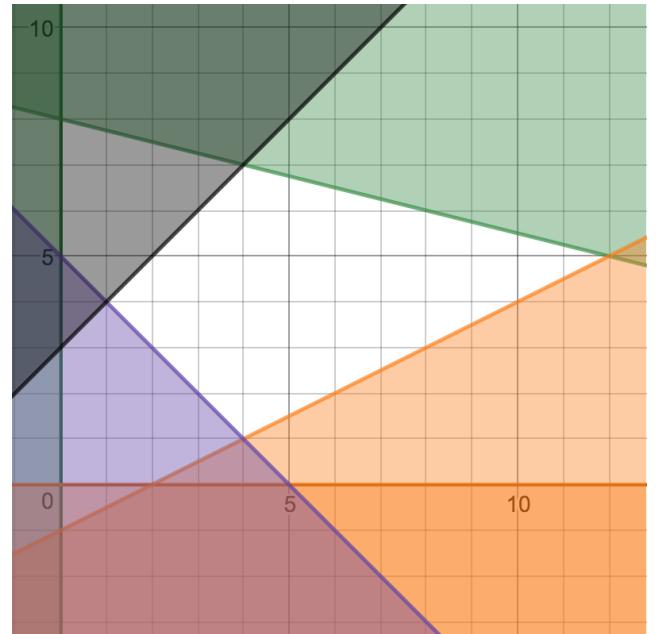
- Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto.
- Si ricavi per via grafica per quali valori di  $b_1$ , ora pari a 32, la **composizione** della base ottima non cambia.
- Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.4.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = (4, 7)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.15: Vertice ottimo del problema di minimo

#### Ripporto variabili

$$z = -10, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 7, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 8, \quad s_3 = 6, \quad s_4 = 0$$

### Analisi di sensitività

Riducendo il valore di  $b_1$  sino a 17 la base ottima si sposta sino a (1, 4). Non esiste un valore massimo per  $b_1$  che modifica la base ottima.

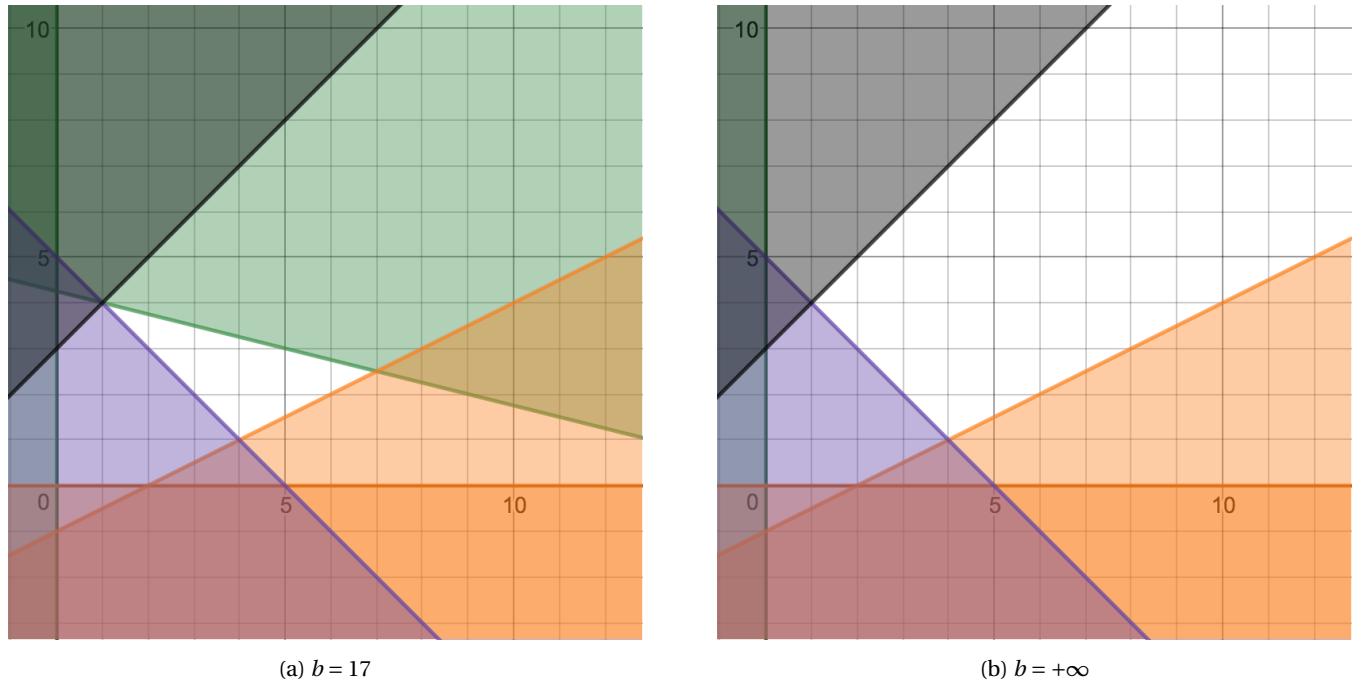


Figura B.16: Analisi di sensitività

### Costruisco problema duale

$$\begin{aligned} \max z_D &= 32y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 3y_4 \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 &\leq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 &\leq -2 \\ y_1, y_2, y_4 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - 1) = 0 \\ x_2(4y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 + 2) = 0 \\ y_1(x_1 + 4x_2 - 32) = 0 \\ y_2(x_1 - 2x_2 - 2) = 0 \\ y_3(x_1 + x_2 - 5) = 0 \\ y_4(-x_1 + x_2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_4 - 1 = 0 \\ 4y_1 + y_4 + 2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_4 = -\frac{6}{5} \\ y_1 = -\frac{1}{5} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima del problema duale coincide con la soluzione ottima del problema primale:  $z = z_D = -10$ .

## B.5 Esame del 28/01/2015

### B.5.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

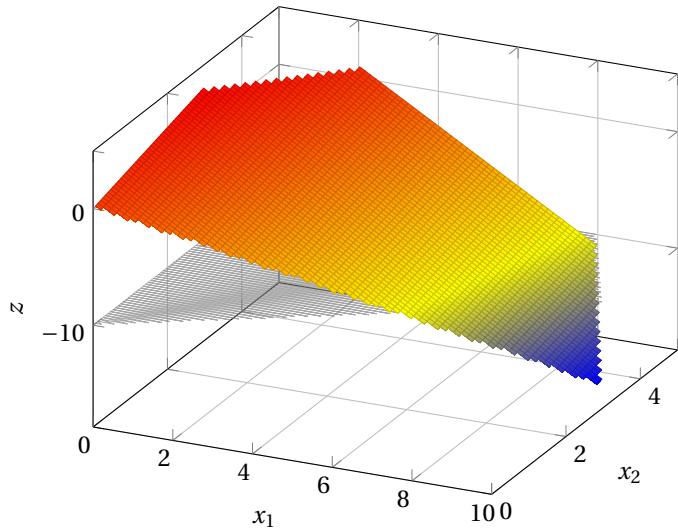
$$\begin{aligned} \min z &= -2x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 10x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 13 \\ x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.17: Esercizio 1

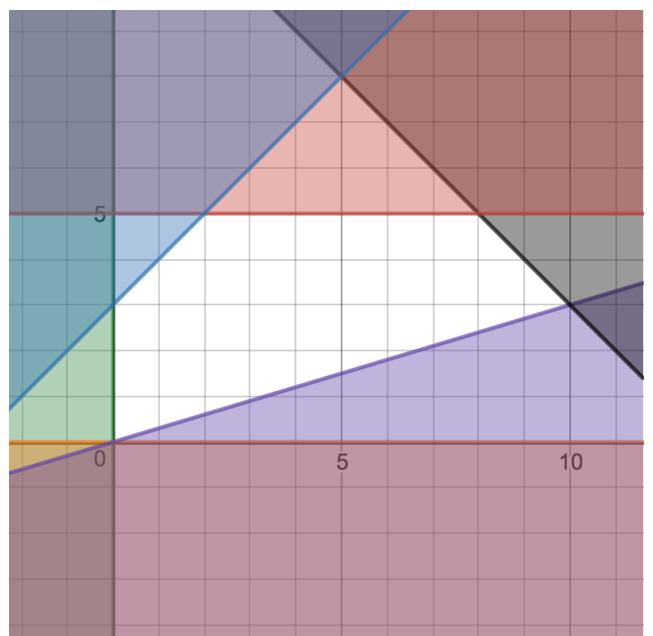
1. Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto.
2. Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.5.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = (10, 3)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.18: Vertice ottimo del problema di minimo

#### Ripporto variabili

$$z = -17, \quad x_1 = 10, \quad x_2 = 3, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 10,$$

### Costruisco il problema duale

$$\begin{aligned} \max z_D &= 13y_2 + 5y_3 + 3y_4 \\ -3y_1 + y_2 - y_4 &\leq -2 \\ 10y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\leq 1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2, y_3, y_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(-3y_1 + y_2 - y_4 + 2) = 0 \\ x_2(10y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 1) = 0 \\ y_1(-3x_1 + 10x_2) = 0 \\ y_2(x_1 + x_2 - 13) = 0 \\ y_3(x_2 - 5) = 0 \\ y_4(-x_1 + x_2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y_1 + y_2 + 2 = 0 \\ 10y_1 + y_2 - 1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = -2 + 3y_1 \Rightarrow y_2 = -\frac{17}{13} \\ y_1 = \frac{3}{13} \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

I valori ottenuti rispettano i vincoli di segno delle variabili.

Verifico che le soluzioni ottime coincidono:  $z = z_D = -17$

## B.6 Esame del 18/02/2015

### B.6.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 - 16x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &\leq 3 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_1 &\leq 0 \\ x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.19: Esercizio 1

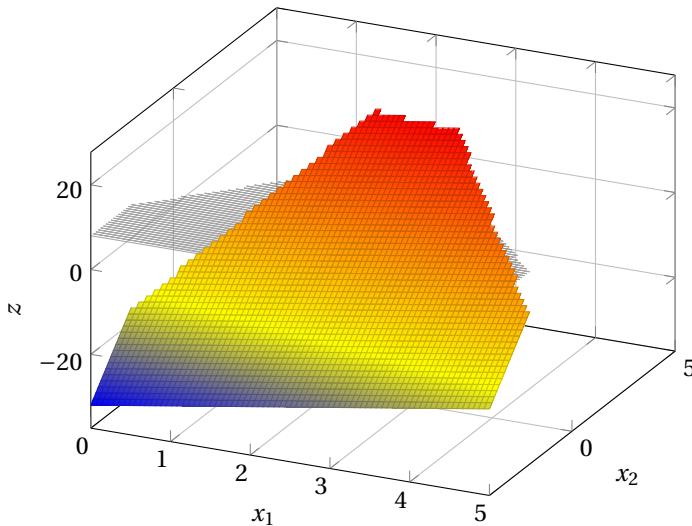
- Si formuli il duale di tale problema e lo si risolva graficamente, evidenziando il valore ottimo della funzione obiettivo e delle variabili duali.
- Sulla base dei risultati ottenuti nel problema duale, si determini anche la soluzione ottima del problema primale.

### B.6.2 Soluzione esercizio 1

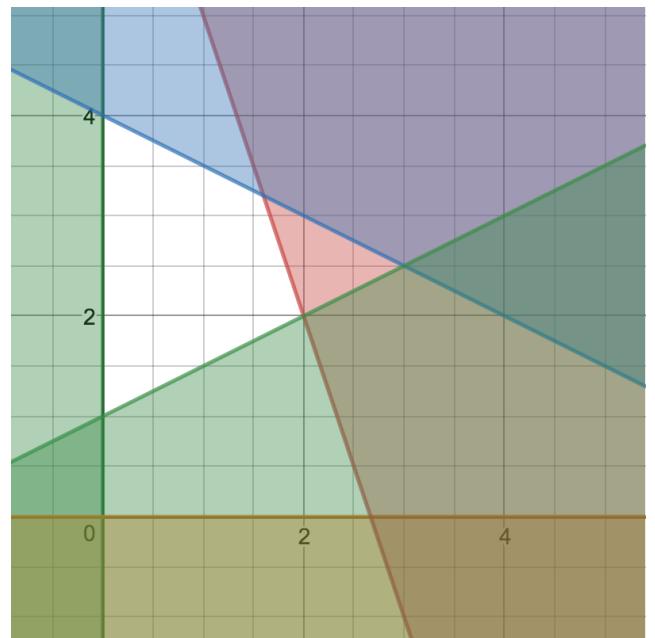
#### Formulo problema duale

$$\begin{aligned} \min z_D &= 3y_1 + 8y_2 \\ 3y_1 + y_2 &\leq 8 \\ -2y_1 - 4y_2 &\geq -16 \\ -y_1 + 2y_2 &\geq 2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = (0, 1)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.20: Vertice ottimo del problema duale di minimo

### Ripporto variabili

$$z_D = 8, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad s_1 = 7, \quad s_2 = 12, \quad s_3 = 0$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(3y_1 + y_2 - 8) = 0 \\ x_2(-2y_1 - 4y_2 + 16) = 0 \\ x_3(-y_1 + 2y_2 - 2) = 0 \\ y_1(3x_1 - 2x_2 - x_3 - 3) = 0 \\ y_2(x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

La soluzione ottima del problema primale si trova in  $\underline{x} = [0 \quad 0 \quad 4]$ , con  $z = z_D = 8$ .

## B.7 Esame del 19/06/2015

### B.7.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

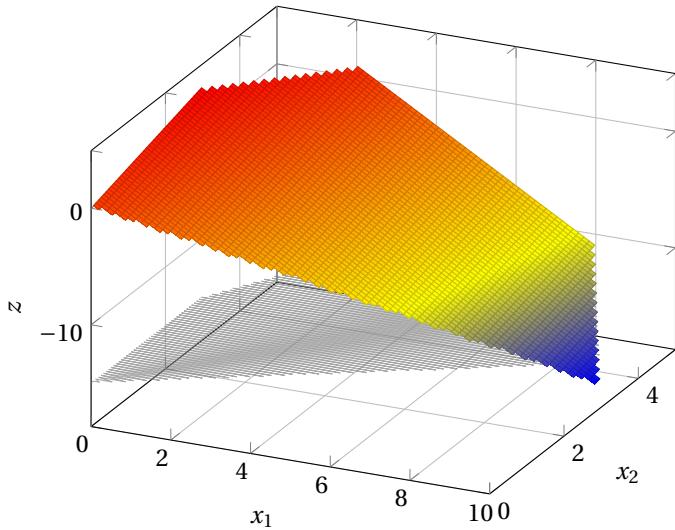
$$\begin{aligned} \min z &= -2x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 10x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 13 \\ x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.21: Esercizio 1

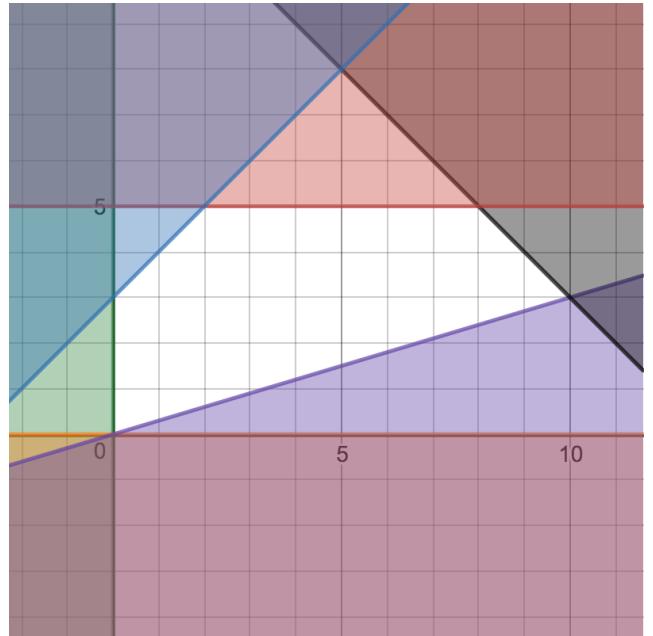
- Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto.
- Si ricavi per via grafica per quali valori di  $c_1$ , ora pari a  $-2$  la **composizione** della base ottima non cambia.
- Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.7.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = (10, 3)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.22: Vertice ottimo del problema di minimo

#### Ripporto variabili

$$z = -17, \quad x_1 = 10, \quad x_2 = 3, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 10,$$

#### Analisi di sensitività

Aumentando il valore di  $c_1$  posso portare la base ottima in  $(0,0)$ , mentre non esiste un valore minimo che modifica la base ottima.

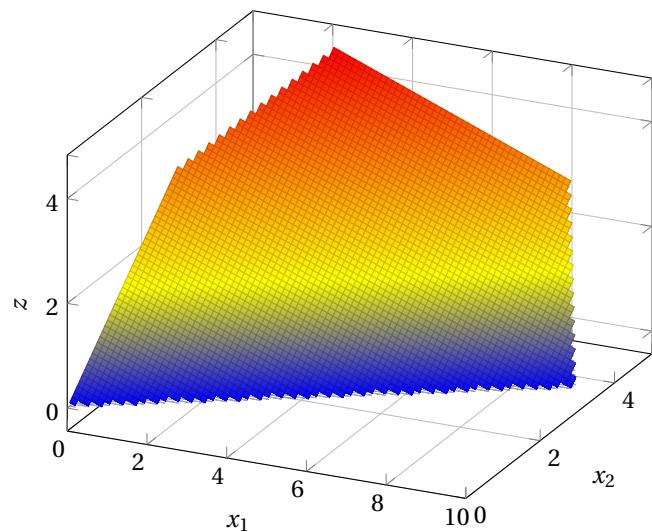
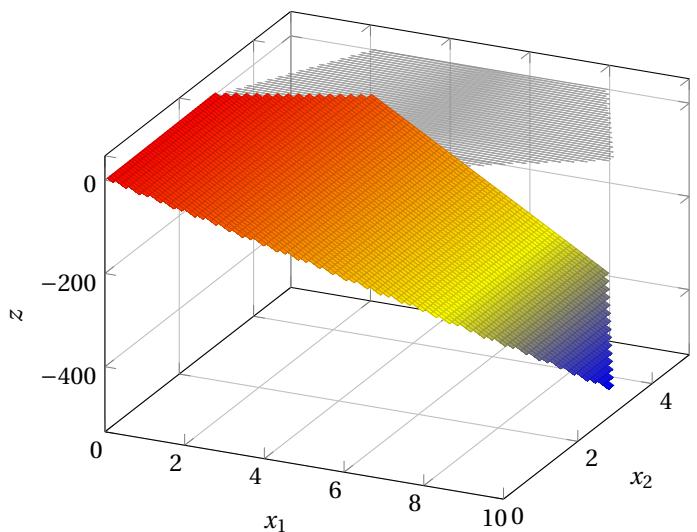
(a) Caso  $(0, 0)$ :  $10c_1 + 3 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{10}$ (b) Non esiste limite inferiore, per esempio:  $c_1 = -50$ 

Figura B.23: Analisi di sensitività

### Costruisco il problema duale

$$\begin{aligned} \max z_D &= 13y_2 + 5y_3 + 3y_4 \\ -3y_1 + y_2 - y_4 &\leq -2 \\ 10y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\leq 1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2, y_3, y_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(-3y_1 + y_2 - y_4 + 2) = 0 \\ x_2(10y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 1) = 0 \\ y_1(-3x_1 + 10x_2) = 0 \\ y_2(x_1 + x_2 - 13) = 0 \\ y_3(x_2 - 5) = 0 \\ y_4(-x_1 + x_2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y_1 + y_2 + 2 = 0 \\ 10y_1 + y_2 - 1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = -2 + 3y_1 \Rightarrow y_2 = -\frac{17}{13} \\ y_1 = \frac{3}{13} \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

I valori ottenuti rispettano i vincoli di segno delle variabili.

Verifico che le soluzioni ottime coincidono:  $z = z_D = -17$

## B.8 Esame del 16/09/2015

### B.8.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

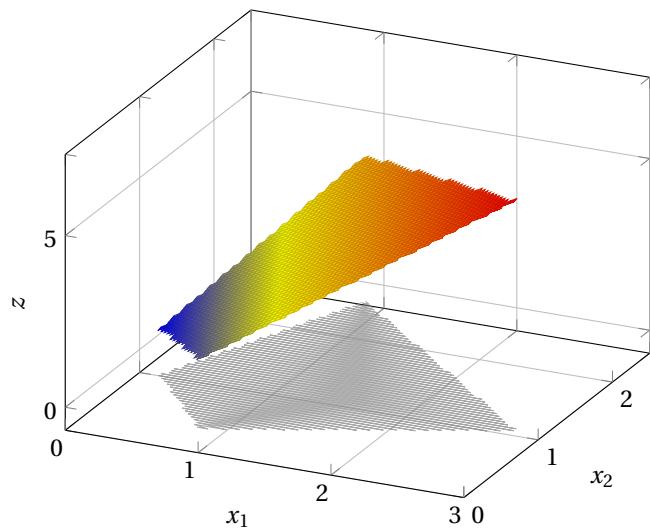
$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -9x_1 + 4x_2 &\leq 0 \\ 3x_1 - 8x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.24: Esercizio 1

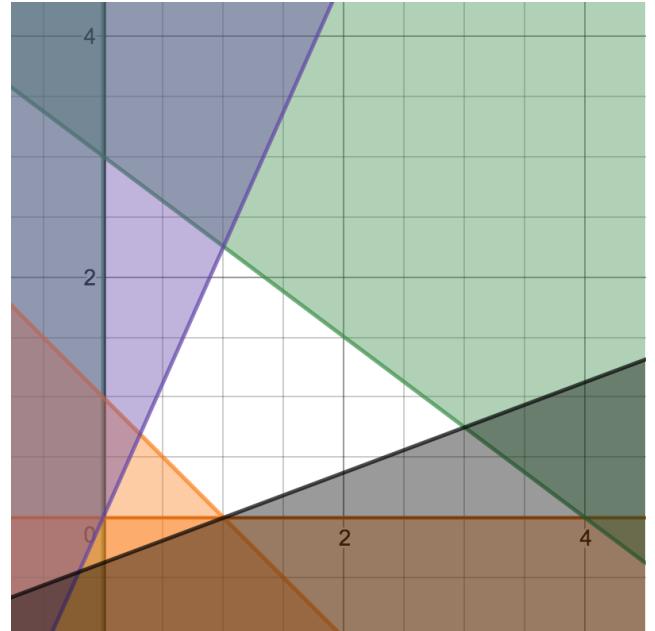
- Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello, comprese quelle di scarto.
- Da quali variabili è composta la base associata al vertice dato dall'intersezione del secondo e terzo vincolo?
- Si ricavi per via grafica per quali valori di  $b_4$ , ora pari a 3, la **composizione** della base ottima non cambia.
- Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.8.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = \left(3, \frac{3}{4}\right)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.25: Vertice ottimo del problema di minimo

#### Ripporto variabili

$$z = \frac{27}{4}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{3}{4}, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{11}{4}, \quad s_3 = 24, \quad s_4 = 0$$

### Variabili di base

Nel vertice di intersezione tra il secondo vincolo  $x_1 + x_2 \geq 1$  ed il terzo  $-9x_1 + 4x_2 \leq 0$  le variabili in base sono  $B = [x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_4]$  e le variabili fuori base sono  $F = [s_2 \quad s_3]$ .

### Analisi di sensitività

Il valore di  $b_4$  può variare tra  $-15$  e  $12$ .

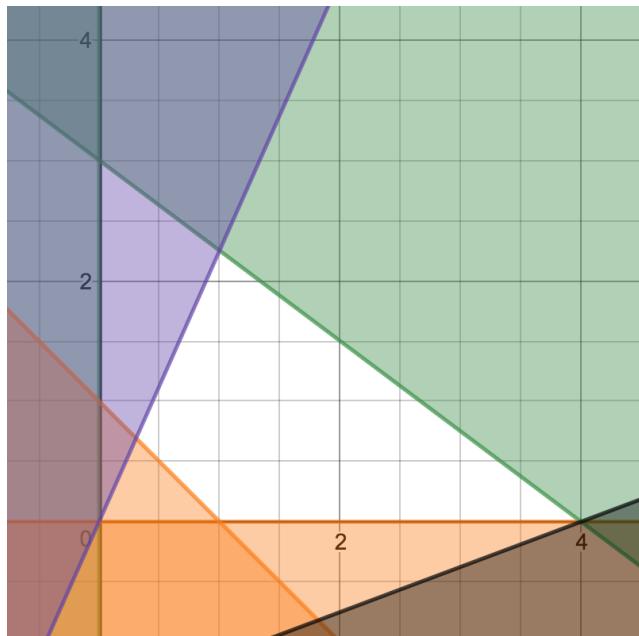
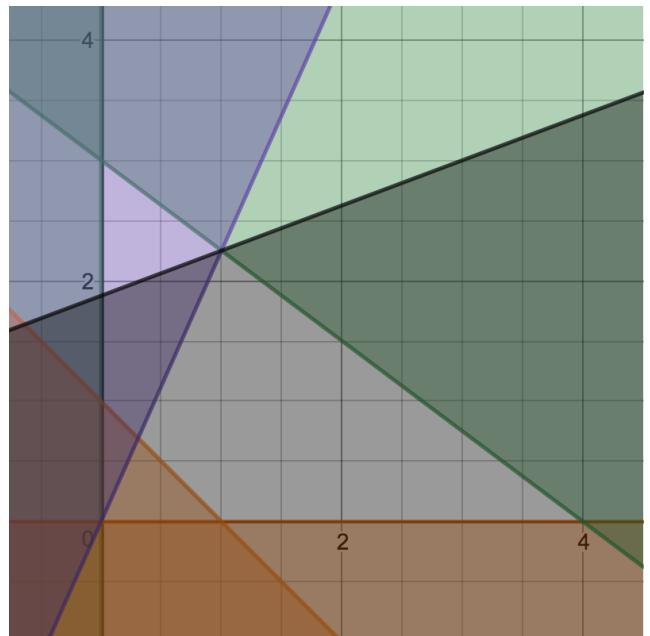
(a)  $3(4) - 8(0) = b_4 = -15$ (b)  $3(1) - 8(2.25) = b_4 = 12$ 

Figura B.26: Analisi di sensitività

### Costruisco problema duale

$$\begin{aligned} \min z_D &= 12y_1 + y_2 + 3y_4 \\ 3y_1 + y_2 - 9y_3 + 3y_4 &\geq 2 \\ 4y_1 + y_2 + 4y_3 - 8y_4 &\geq 1 \\ y_1, y_3, y_4 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(3y_1 + y_2 - 9y_3 + 3y_4 - 2) = 0 \\ x_2(4y_1 + y_2 + 4y_3 - 8y_4 - 1) = 0 \\ y_1(3x_1 + 4x_2 - 12) = 0 \\ y_2(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ y_3(-9x_1 + 4x_2 - 0) = 0 \\ y_4(3x_1 - 8x_2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + y_2 - 9y_3 + 3y_4 - 2 = 0 \\ 4y_1 + y_2 + 4y_3 - 8y_4 - 1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} - y_4 \\ 4\left(\frac{2}{3} - y_4\right) - 8y_4 - 1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{19}{36} \\ y_4 = \frac{5}{36} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni ottime coincidono:  $z = z_D = \frac{27}{4}$ .

## B.9 Esame del 20/06/2016

### B.9.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

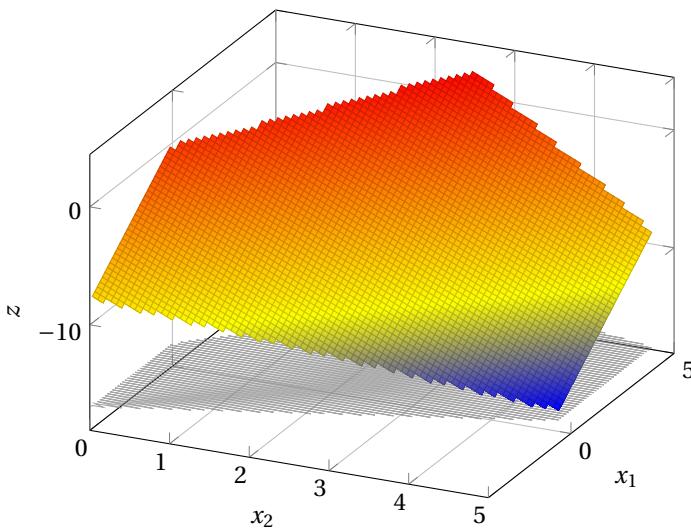
$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_1 &\in \mathbb{R} \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.27: Esercizio 1

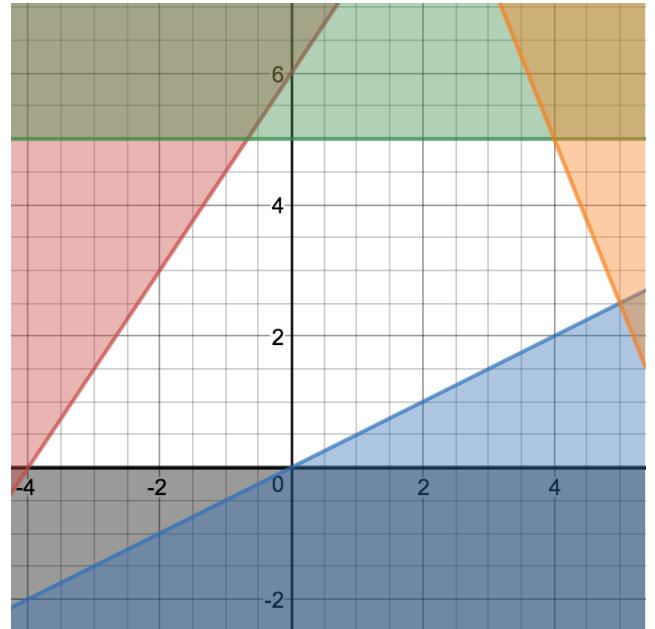
1. Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello.
2. Si ricavi per via grafica per quali valori di  $c_1$ , ora pari a 2, la **composizione** della base ottima non cambia.
3. Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.9.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = \left(\frac{3}{2}, 5\right)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.28: Vertice ottimo del problema di minimo

#### Ripporto variabili

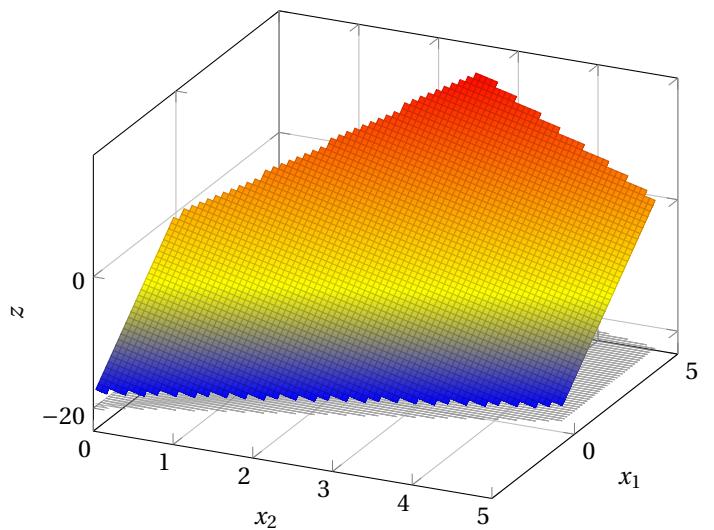
$$z = -\frac{49}{3}, \quad x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = 5, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{28}{3}, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = \frac{50}{3},$$

### Determino il valore di $c_1$

Variare il valore di  $c_1$  può portare la soluzione ottima in  $(-4, 0)$  o in  $(4, 5)$ :

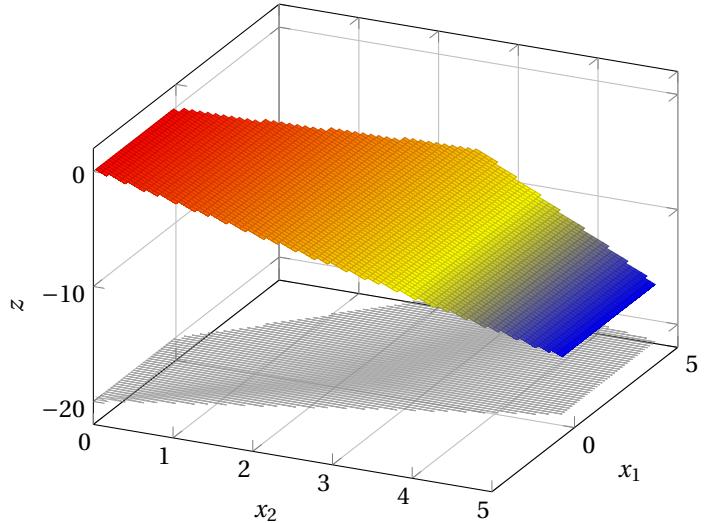
$$-\frac{2}{3}c_1 - 15 = -4c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{9}{2}$$

(a) Determino il valore massimo del costo  $c_1$



(b) Sostituendo  $c_1 \geq \frac{9}{2}$  la soluzione ottima si sposta in  $\underline{x} = (-4, 0)$

(c) Determino il valore minimo del costo  $c_1$



(d) Sostituendo  $c_1 \leq 0$  la soluzione ottima si sposta in  $\underline{x} = (4, 5)$

Figura B.29: Analisi di sensitività

### Costruisco problema duale

$$\begin{aligned} & \max 12y_1 + 5y_3 + 30y_4 \\ & -3y_1 - y_2 + 5y_4 = 2 \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 \leq -3 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_1, y_3, y_4 \leq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(-3y_1 - y_2 + 5y_4 - 2) = 0 \\ x_2(2y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 + 3) = 0 \\ y_1(-3x_1 + 2x_2 - 12) = 0 \\ y_2(-x_1 + 2x_2) = 0 \\ y_3(x_2 - 5) = 0 \\ y_4(5x_1 + 2x_2 - 30) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y_1 - 2 = 0 \\ 2y_1 + y_3 + 3 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{2}{3} \\ y_3 = -\frac{5}{3} \\ y_2 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Sostituisco nella funzione obiettivo e verifico che  $z = z_D = -\frac{49}{3}$ .

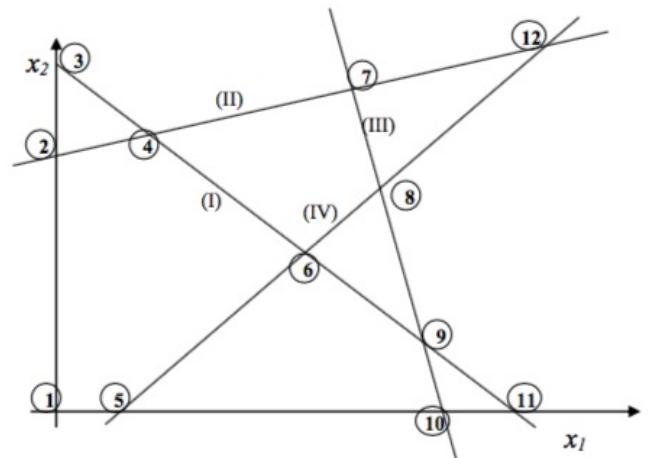
## B.10 Esame del 04/07/2016

### B.10.1 Esercizio 1

In figura B.30a sono rappresentati gli iperpiani di supporto della regione ammissibile di un modello di PL.

Si determini quale verso devono avere i vincoli in modo che i vertici della regione ammissibile siano individuati dai punti 6, 8 e 9.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - 2x_2 \\ (I) \quad x_1 + x_2 &\geq 16 \\ (II) \quad -x_1 + 3x_2 &\leq 32 \\ (III) \quad 5x_1 + x_2 &\leq 64 \\ (IV) \quad x_1 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$



(a) Iperpiani di supporto

Figura B.30: Esercizio 1

Si determini quindi il vertice ottimo e si riporti il valore di tutte le variabili del modello, incluso scarto e surplus.

Si ricavi per via grafica i valori di  $b_2$  per cui la composizione della base ottima non cambia.

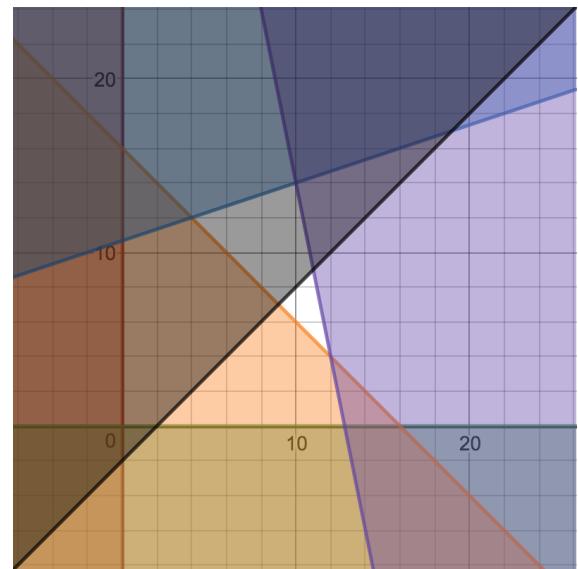
Si risolva il duale del problema tramite il metodo degli scarti complementari.

### B.10.2 Soluzione esercizio 1

#### Determino il segno dei vincoli

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - 2x_2 \\ (I) \quad x_1 + x_2 &\geq 16 \\ (II) \quad -x_1 + 3x_2 &\leq 32 \\ (III) \quad 5x_1 + x_2 &\leq 64 \\ (IV) \quad x_1 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

(a) Problema con vincoli a disequazione



(b) Regione di definizione del problema

Figura B.31: Determino il segno dei vincoli

#### Determino soluzione ottima

Dalla funzione di ottimo data, bisogna identificare il punto con ascissa massima e ordinata minima. Il punto 9, intersezione tra i vincoli I e III, pari a (12, 4) è evidentemente il punto ottimo:  $z = 4$ .

$$z = 4, \quad x_1 = 12, \quad x_2 = 4, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -32, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 6$$

### Verifico soluzione ottima

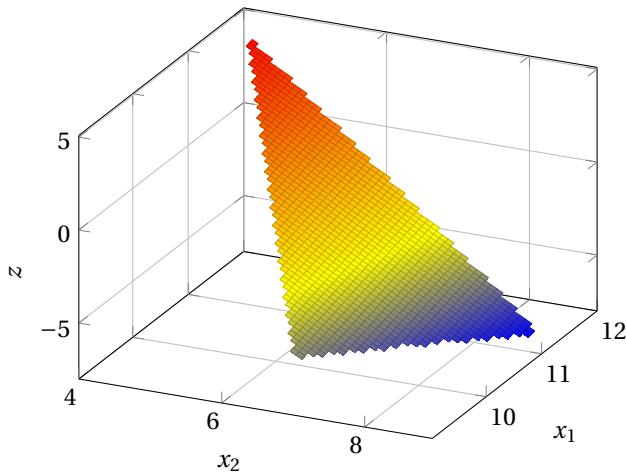


Figura B.32: Il grafo conferma la soluzione ottima in (12, 4)

### Analisi di sensitività

Fino a che  $b_2$  non tale per cui il vincolo  $II$  supera il punto di ottimo 9, quindi  $b_2$  non modifica la base ottima sino a:

$$b_{2\min} = -1(12) + 3(4) = 0$$

### Problema duale con scarti complementari

$$\begin{aligned} & \min 16y_1 + 31y_2 + 64y_3 + 2y_4 \\ & y_1 - y_2 + 5y_3 + y_4 \geq 1 \\ & y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Figura B.33: Problema duale

Costruisco il sistema degli scarti complementari:

$$\begin{cases} y_1(x_1 + x_2 - 16) = 0 \\ y_2(-x_1 + 3x_2 - 32) = 0 \\ y_3(5x_1 + x_2 - 64) = 0 \\ y_4(x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ x_1(y_1 - y_2 + 5y_3 + y_4 - 1) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_1 + 5y_3 - 1 = 0 \\ y_1 + y_3 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_1 = 1 - 5y_3 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{15}{4} \Rightarrow y_1 = -\frac{11}{4} \\ 1 - 5y_3 + y_3 + 2 = 0 \Rightarrow 4y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

La soluzione ottima del problema duale risulta essere:

$$z = z_D = 4$$

$$y_1 = -\frac{11}{4}$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = \frac{3}{4}$$

$$y_4 = 0$$

## B.11 Esame del 05/09/2016

### B.11.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

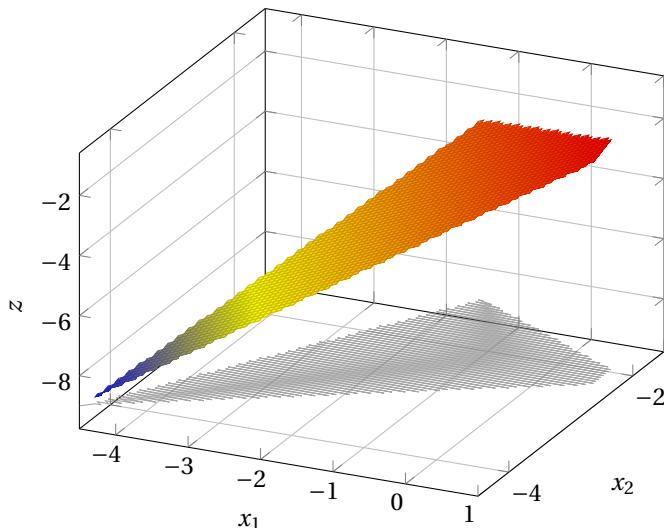
$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 9 \\ -x_1 - 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1 &\in \mathbb{R} \\ x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Figura B.34: Esercizio 1

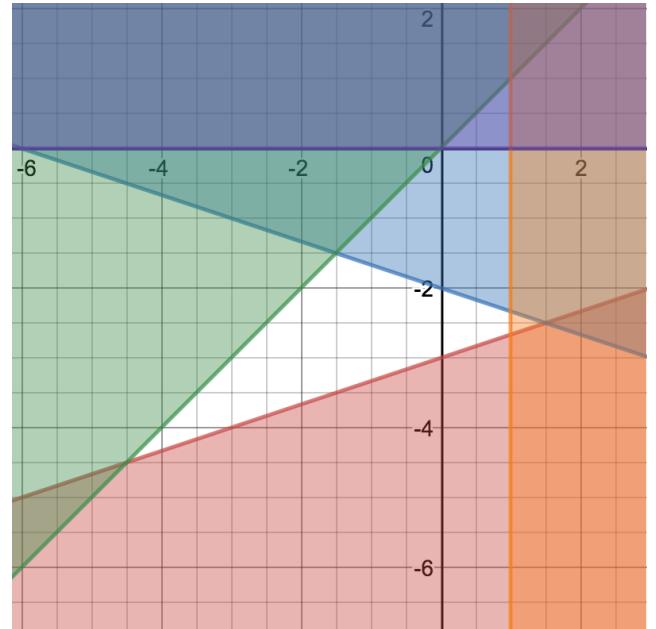
1. Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello.
2. Si ricavi per via grafica per quali valori di  $c_1$ , ora pari a 1, la **composizione** della base ottima non cambia.
3. Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.11.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Il vertice ottimo ha coordinate  $\underline{x} = \left(1, -\frac{7}{3}\right)$



(b) Regione di ammissibilità del problema

Figura B.35: Vertice ottimo del problema

#### Ripporto variabili

$$z = -\frac{4}{3}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{7}{3}, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{10}{3}, \quad s_4 = 0$$

### Determino il valore di $c_1$

Il vertice verso cui posso spostarmi abbassando il valore di  $c_1$  è quello identificato dall'intersezione di  $v_3$  e  $v_2$ .

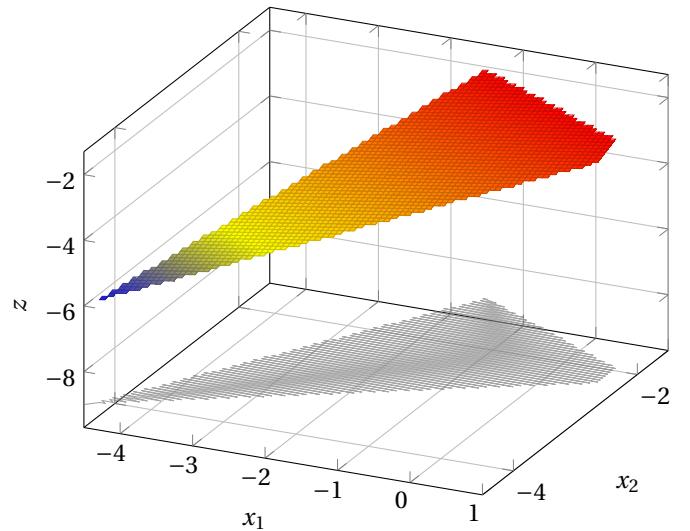
Il vertice più "vicino" alla posizione ottima non potrebbe mai diventare soluzione ottima a sua volta perché la  $x_1$  rimane costante a 1 mentre la  $x_2$  peggiora.

Non esiste un limite superiore a cui posso portare  $c_1$  che modifichi la soluzione ottima.

Costruisco quindi l'equazione per determinare il valore minimo a cui può variare  $c_1$ :

$$c_1 - \frac{7}{3} = -\frac{3}{2} c_1 - \frac{3}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$$

(a) Determino il valore massimo dell'utilità  $c_1$



(b) Sostituendo  $c_1 \leq \frac{1}{3}$  la soluzione ottima si sposta in  $\underline{x} = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

Figura B.36: Analisi di sensitività

### Costruisco problema duale

$$\begin{aligned} & \min 9y_1 + 6y_2 + y_4 \\ & y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ & -3y_1 - 3y_2 - y_3 \leq 0 \\ & y_1, y_4 \geq 0 \\ & y_2, y_3 \leq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} y_1(x_1 - 3x_2 - 9) = 0 \\ y_2(6 + x_1 + 3x_2) = 0 \\ y_3(x_2 - x_1) = 0 \\ y_4(x_1 - 1) = 0 \\ x_1(y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - 1) = 0 \\ x_2(-1 - 3y_1 - 3y_2 - y_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ -y_2 + y_4 - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Sostituisco nella funzione obiettivo e verifico che  $z = z_D = -\frac{4}{3}$ .

## B.12 Esame del 16/11/2016

### B.12.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL, si risolva graficamente e si ottenga il valore della soluzione ottima e di tutte le variabili di scarto.

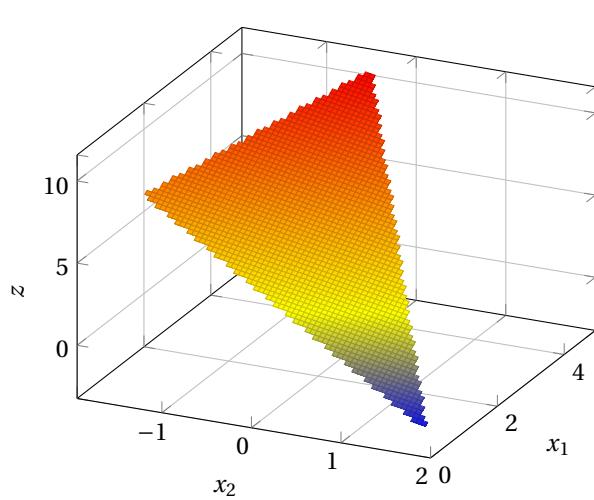
Si ricavi, per via grafica, per quali valori di  $c_2$ , inizialmente pari a  $-1$ , la **composizione** della base ottima non cambia.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

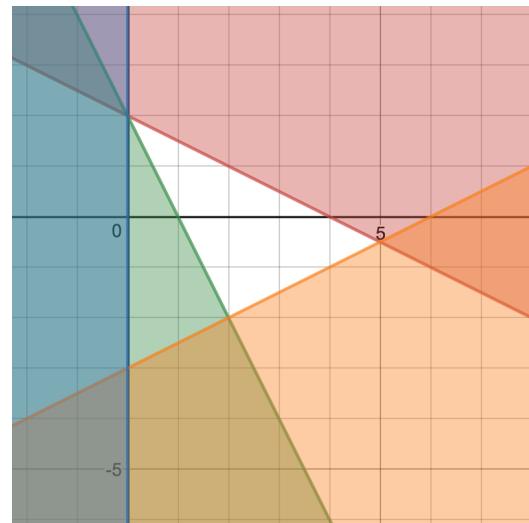
Figura B.37: Esercizio 1

### B.12.2 Soluzione esercizio 1

**Disegno l'area di definizione del problema**



(a) La funzione  $z$



(b) Regione di definizione del problema

**Identifico il punto di massimo**

Il punto di massimo si trova all'intersezione tra primo e terzo vincolo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

$$z = \frac{21}{2}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -\frac{15}{2}, \quad s_3 = 0$$

**Analisi di sensitività**

Al variare di  $c_2$  posso spostare la soluzione ottima da  $(5, -\frac{1}{2})$  negli altri due vertici:

**Sposto soluzione ottima in  $(2, -2)$ :**

$$2(2) + c_2(-2) = 2(5) + c_2(-\frac{1}{2}) \Rightarrow c_2 = -4$$

**Sposto soluzione ottima in (0, 2):**

$$2(0) + c_2(2) = 2(5) + c_2(-\frac{1}{2}) \Rightarrow c_2 = 4$$

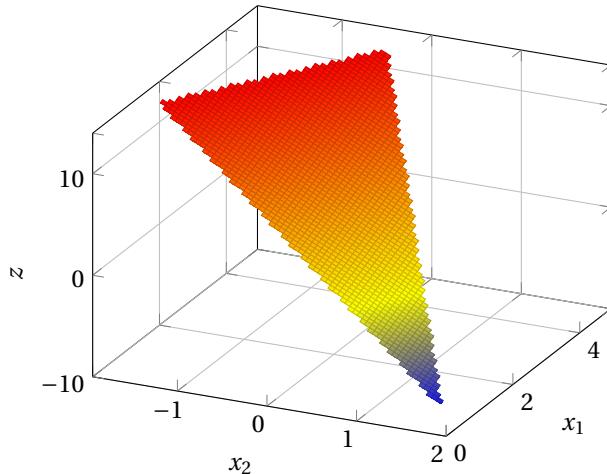
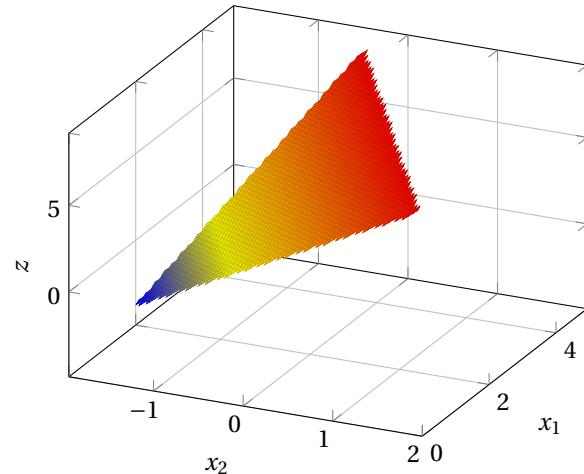
(a) Sostituisco  $c_2 = -4$ (b) Sostituisco  $c_2 = 4$ 

Figura B.39: Analisi di Sensitività

### Problema duale

$$\begin{aligned} \min z_D &= 4y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 &= -1 \\ y_1, y_3 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

### Scarti complementari

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 2y_2 + y_3 - 2) = 0 \\ x_2(2y_1 + y_2 - 2y_3 + 1) = 0 \\ y_1(x_1 + 2x_2 - 4) = 0 \\ y_2(2x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ y_3(x_1 - 2x_2 - 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_3 - 2 = 0 \\ 2y_1 - 2y_3 + 1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 - y_3 \\ 2(2 - y_3) - 2y_3 + 1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 - y_3 \Rightarrow \frac{3}{4} \\ y_3 = \frac{5}{4} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Verifico la soluzione ottima del duale:  $z = z_D = \frac{21}{2}$

## B.13 Esame del 24/01/2017

### B.13.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL, si risolva graficamente e si ottenga il valore della soluzione ottima e di tutte le variabili di scarto.

Vi sono vertici ammissibili ai quali corrispondono basi degeneri?

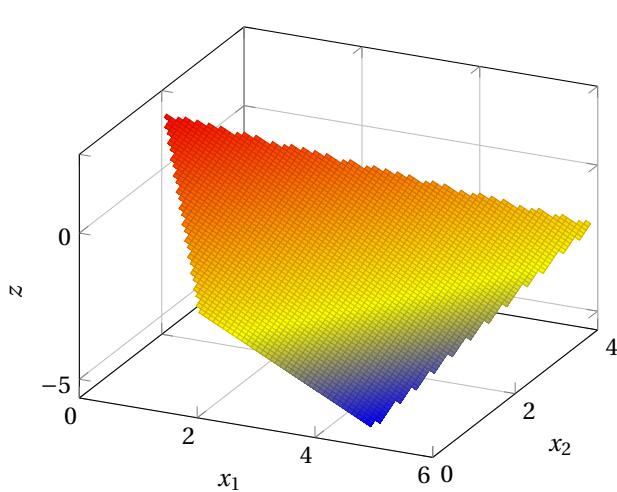
Si ricavi, per via grafica, per quali valori di  $b_3$ , inizialmente pari a  $-1$ , la **composizione** della base ottima non cambia.

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

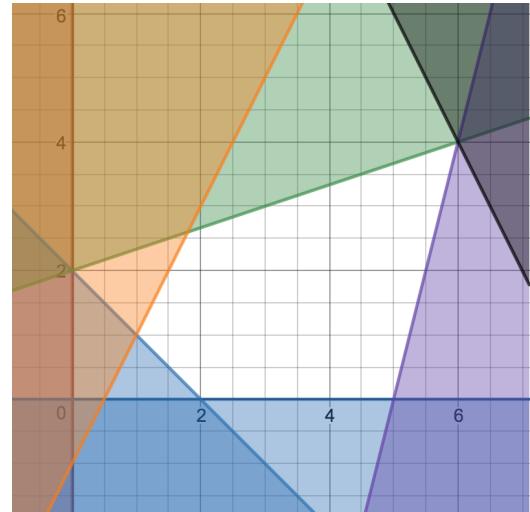
Figura B.40: Esercizio 1

### B.13.2 Soluzione esercizio 1

**Disegno l'area di definizione del problema**



(a) La funzione  $z$



(b) Regione di definizione del problema

**Identifico la soluzione ottima**

Dall'area di definizione e dalla composizione della funzione si intuisce che il vincolo ottimo sarà quello con  $x_1$  minimo e  $x_2$  massimo. Procedo quindi a calcolare il valore assunto da  $x_1$  e  $x_2$  nell'intersezione tra il vincolo 2 e 3:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 6 \\ -2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3(2x_1 - 1) = 6 \\ x_2 = 2x_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 3 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{5} \\ x_2 = 2x_1 - 1 \Rightarrow x_2 = \frac{18-5}{5} = \frac{13}{5} \end{cases}$$

La soluzione ottima si trova nel vertice tra il vincolo 2 e 3 in  $(\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$  ed ha valore  $z = \frac{13}{5} - \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$ .

$$z = \frac{4}{5}, \quad x_1 = \frac{9}{5}, \quad x_2 = \frac{13}{5}, \quad s_1 = \frac{12}{5}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = \frac{49}{5}$$

**Identifico basi degeneri**

Una base è degenere quando in un vertice sono attivi più vincoli delle variabili esistenti. In questo caso, nel punto (6, 4) sono attivi 3 vertici.

**Analisi di sensitività**

Modifica il valore di  $b_3$  significa traslare il vincolo 3, che è uno dei due che definisce il punto di ottimo  $(\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$ . Non è pertanto possibile alterare il valore di  $b_3$  senza modificare il valore ottimo.

Per quanto riguarda la composizione della base ottima, essa rimane invariata tra  $b_{3_{max}}$  dove il vincolo  $v_3$  incontra il vincolo  $v_1$  nel punto (0, 2) e  $b_{3_{min}}$  dove il vincolo  $v_3$  incrocia  $v_4$  nel punto (6, 4). Per calcolare il valore assunto da  $b_3$  nei due punti di interesse è sufficiente sostituire i punti nella disequazione del vincolo.

$$b_{3_{max}} = -2(0) + 1(2) = 2 \quad b_{3_{min}} = -2(6) + 1(4) = -8$$

## B.14 Esame del 23/01/2018

### B.14.1 Esercizio 1

Dato il seguente problema di PL:

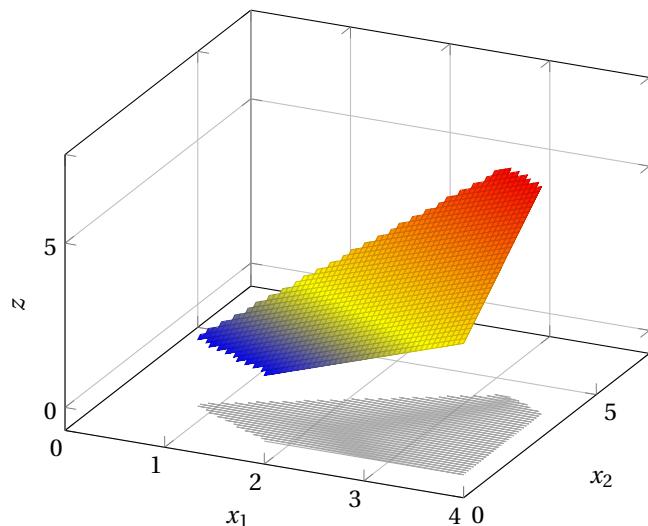
$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura B.42: Esercizio 1

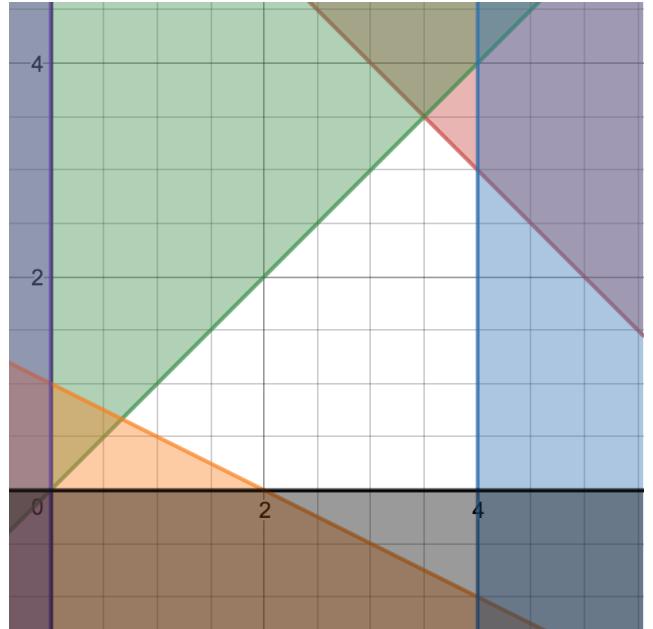
1. Si disegni la regione ammissibile e si evidenzi il vertice ottimo per via grafica, riportando il valore di  $z$  e di tutte le variabili del modello.
2. Quale caratteristica ha la soluzione così ottenuta?
3. Si ricavi per via grafica per quali valori di  $b_3$ , ora pari a 2, la **composizione** della base ottima non cambia.
4. Si risolva mediante gli scarti complementari il duale del problema.

### B.14.2 Soluzione esercizio 1

#### Identifico soluzione ottima



(a) Tutti i punti sul vertice tra  $(3.5, 3.5)$  e  $(4, 3)$  sono ottimi



(b) Regione di ammissibilità del problema

Il piano  $z = x_1 + x_2$  è inclinato come il vincolo  $x_1 + x_2 \leq 7$ , per cui vi sono infinite soluzioni di massimo tra il vertice in  $(3.5, 3.5)$  ed il vertice in  $(4, 3)$ .

Posso scegliere quindi, **arbitrariamente**, uno dei vertici ottimi. Procedo scegliendo  $\underline{x} = [4 \quad 3]$ .

#### Determino le variabili

N.B: Le variabili di slack non possono mai essere negative.

$$z = 7, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 8, \quad s_4 = 0$$

### Caratteristiche della soluzione

La soluzione ha le caratteristiche di essere un ottimo multiplo, cioè esistono più vertici ottimi nella regione ammissibile.

### Valori di $b_2$

Per calcolare il valore di  $b_2$  è sufficiente sostituire le coordinate del vertice ottimo considerato nel vincolo.

Considerando come vertice (4,3) si ottiene  $b_2 = 10$  (figura B.44a) mentre considerando (3.5,3.5) si ottiene  $b_2 = 10.5$  (figura B.44b).

Non esiste un valore inferiore di  $b_2$  che va a variare la composizione della base ottima (figura B.44c).

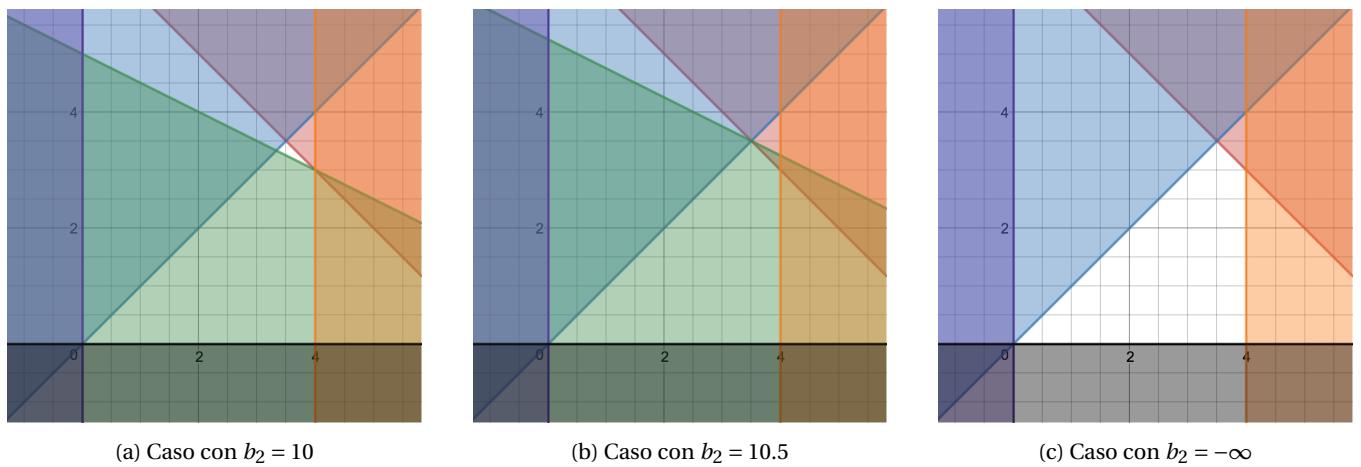


Figura B.44: Regione ammissibile al variare di  $b_2$

### Scarti complementari

Costruisco il problema complementare:

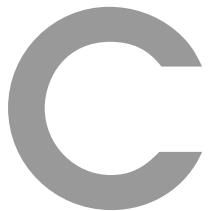
$$\begin{aligned} \min z_D &= 7y_1 + 2y_3 + 4y_4 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\geq 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\ y_1, y_4 &\geq 0 \\ y_2, y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Figura B.45: Problema complementare

Costruisco il problema degli scarti complementari:

$$\begin{cases} x_1(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 1) = 0 \\ x_2(y_1 - y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ y_1(x_1 + x_2 - 7) = 0 \\ y_2(x_1 - x_2) = 0 \\ y_3(x_1 + 2x_2 - 2) = 0 \\ y_4(x_1 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima del problema duale è  $z = z_D = 7$ .



## Teoria

### **Lista degli argomenti**

- Criterio di ottimalità della base
- Teorema Minkowsky-Weyl
- Esistenza di un vertice ottimo
- Teorema fondamentale della PL

Corollario: Se  $P$  è politopo allora esiste almeno una soluzione di base ottima per un problema PL definito su  $P$ .

- Regola di Bland
- Teorema di convergenza dell'algoritmo del simplesso (con dimostrazione)
- Lemma di Farkas (con dimostrazione)
- Il duale del duale è primale (con dimostrazione)
- Teorema di dualità forte (segue dal Lemma di Farkas)
- Teorema di dualità debole (con dimostrazione)
- Condizioni di ottimalità (segue da dualità debole)
- Matrici totalmente unimodulari.

Definizione di TUM.

Praticità di una TUM.

Condizioni necessarie per TUM.

Condizioni sufficienti per TUM.

- Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo (con dimostrazione)
- Teorema MaxFlow = MinCut.

Nota: vengono aggiunte immagini casuali a fianco dei teoremi per aiutare nella memorizzazione.

## C.1 Criterio di ottimalità della base

**Teorema C.1.1 (Criterio di ottimalità della base).** Se i **coefficienti di costo ridotto** (CCR)  $\bar{\underline{c}}^T = \underline{c}^T - \underline{c}_B^T B^{-1} A$  sono *non negativi* allora la soluzione di base associata a  $B$  è *ottima*.

$$\bar{\underline{c}}^T \geq 0 \Rightarrow \underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} \quad \forall \underline{x}$$

*Dimostrazione.*

$z = \underline{c}^T \underline{x}$	Inizio dalla funzione obiettivo
$\underline{c}^T \underline{x} = \bar{\underline{c}}^T \underline{x} + \underline{c}_B^T B^{-1} A \underline{x}$	Sostituisco la definizione di CCR
$\underline{c}^T \underline{x} = \bar{\underline{c}}^T \underline{x} + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b}$	Sostituisco $A \underline{x} = \underline{b}$
$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b}$	Elimino $\bar{\underline{c}}^T$ , termine positivo per ipotesi

□

## C.2 Teorema Minkowsky-Weyl

**Teorema C.2.1 (Minkowsky-Weyl, forma sintetica).** Ogni punto di un **politopo** si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici.

$$\forall \underline{x} \in P, \exists \underline{\lambda}: \sum \lambda_i = 1, \underline{x} = \sum \lambda_i \underline{v}_i$$

## C.3 Esistenza di vertice ottimo

**Teorema C.3.1 (Esistenza di un vertice ottimo).** In ogni **politopo** non vuoto esiste almeno un vertice ottimo.

*Dimostrazione.* Siano  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k$  i vertici del politopo e sia  $z^* = \min \{ \underline{c}^T \underline{y}_i, i = 1, \dots, k \}$ , cioè il valore ottimo della funzione obiettivo tra i vertici del politopo.

Per il **teorema di Minkowsky-Weil** (teorema C.2.1) posso descrivere  $\underline{x}$  come una combinazione convessa dei vertici  $\underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{y}_i$

$z = \underline{c}^T \underline{x}$	Iniziamo dalla funzione obiettivo
$z = \underline{c}^T \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{y}_i \right)$	Sostituisco a $\underline{x}$ la comb. convessa equivalente
$z = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{c}^T \underline{y}_i$	Sposto il coefficiente dei costi nella serie
$\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{c}^T \underline{y}_i \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i z^* = z^*$	$\underline{c}^T \underline{y}$ è sempre maggiore o uguale alla soluzione ottima.

□

## C.4 Teorema fondamentale della programmazione lineare

**Teorema C.4.1 (Teorema fondamentale della programmazione lineare).** Un punto è vertice di un **poliedro** non vuoto se e solo se è anche una soluzione di base ammissibile.

$$\underline{x} \text{ vertice} \Leftrightarrow B^{-1}\underline{b} \geq 0$$

*C.s.: Se un punto è SBA  $\Rightarrow$  è vertice.* Consideriamo una SBA  $\underline{x}$  con i primi  $k \geq 0$  elementi positivi ed i successivi nulli. Queste prime  $k$  colonne di  $A$ , più eventuali altre nel caso di soluzione degenere, devono fare parte di  $B$  per l'ipotesi di SBA.

$$\underline{x} = [x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0]^T$$

Supponiamo **per assurdo** che  $\underline{x}$  non sia un vertice. Allora è possibile costruire una combinazione convessa tra due punti distinti  $\underline{y}' \in P$  e  $\underline{y}'' \in P$ , anch'essi con i primi  $k$  elementi positivi ed i successivi nulli:

$$\exists \underline{y}' = [y'_1, \dots, y'_k, 0, \dots, 0]^T, \underline{y}'' = [y''_1, \dots, y''_k, 0, \dots, 0]^T : \underline{x} = \lambda \underline{y}' + (1 - \lambda) \underline{y}''$$

È possibile scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} A\underline{y}' = \underline{b} \\ A\underline{y}'' = \underline{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 y'_1 + \dots + A_k y'_k = \underline{b} \\ A_1 y''_1 + \dots + A_k y''_k = \underline{b} \end{cases} \Rightarrow (y'_1 - y''_1) A_1 + \dots + (y'_k - y''_k) A_k = 0$$

Non tutte le coppie  $(y'_i, y''_i)$  possono essere uguali, per cui, perché l'equazione sia pari a 0, le colonne  $A_1, \dots, A_k$  devono essere linearmente dipendenti e non possono fare parte della base  $B$ , da cui l'assurdo.  $\square$

*C.n.: Se un punto è vertice  $\Rightarrow$  è SBA.* Consideriamo un punto  $\underline{x} \in P$  vertice:

$$\underline{x} = [x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0]^T$$

Supponiamo **per assurdo** che  $\underline{x}$  sia un vertice ma non una SBA. Allora le prime  $k$  colonne di  $A$  devono essere linearmente dipendenti. Ne segue che deve esistere una combinazione lineare tale che:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = 0$$

Allora è possibile scegliere uno scalare  $\epsilon$  che consenta di costruire due punti distinti  $\underline{y}' \neq \underline{y}''$  e ammissibili:

$$\exists \epsilon : \begin{cases} \underline{y}' = [x'_1 + \epsilon \alpha_1, \dots, x'_k + \epsilon \alpha_k, 0, \dots, 0]^T \\ \underline{y}'' = [x'_1 - \epsilon \alpha_1, \dots, x'_k - \epsilon \alpha_k, 0, \dots, 0]^T \end{cases} \quad \underline{y}', \underline{y}'' \in P$$

Ma questo significa che è possibile costruire il punto  $\underline{x}$  come combinazione convessa di altri due punti appartenenti al poliedro:

$$\underline{x} = \frac{1}{2} \underline{y}' + \frac{1}{2} \underline{y}''$$

Ma  $\underline{x}$ , per ipotesi, è vertice, per cui non può essere ottenuto come combinazione di altri due punti del poliedro.  $\square$

**Corollario C.4.1.1 (Esistenza di soluzione ottima).** Ogni problema di PL definito su un **politopo** non vuoto ha almeno una soluzione ottima che è soluzione di base ammissibile.

## C.5 Regola di Bland

**Teorema C.5.1 (Regola di Bland).** Quando è lecito scegliere, preferire sempre la variabile  $x_j$  entrante o uscente con indice minimo (regola lessicografica).

## C.6 Teorema di convergenza del simplex

**Teorema C.6.1 (Teorema di convergenza del simplex).** Usando la regola di Bland, l'algoritmo del simplex converge in al più  $\binom{n}{m}$  passi, cioè termina senza compiere cicli.

*Dimostrazione.* Per assurdo supponiamo che, applicando la regola di Bland, l'algoritmo compia dei cicli. Consideriamo il più piccolo tableau che genera una sequenza ciclica pur applicando la regola di Bland, cioè tutte le variabili, a turno, entrano ed escono di base:  $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow B_1$ .

Consideriamo un tableau  $T$  e supponiamo che  $x_h$  entri in base e  $x_n$  esca. Perché questo avvenga deve essere valido che:

1.  $\bar{b} = \underline{0}$ , altrimenti uscirei dal ciclo.
2.  $\bar{c}_h < 0$ , coefficiente che entra in base.
3.  $\bar{c}_{B[i]}$ , in base.
4. I rapporti  $\left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$  sono tutti nulli, quindi uso la regola di Bland e scelgo il primo indice  $i$  tale per cui il coefficiente del vincolo  $\bar{a}_{ih}$  sia positivo.
5.  $\bar{a}_{ih} \leq 0$  e  $\bar{a}_{th} > 0$  perché con la regola di Bland di scelga  $x_h$ .

(a) Le condizioni iniziali

	$x_{B[i]}$	$x_h$	$x_n$	
$-z$	0	$\bar{c}_h$	0	
	0	$\bar{a}_{1h}$	0	0
$x_{B[i]}$	1	$\bar{a}_{ih}$	0	0
$x_{B[t]=n}$	0	$\bar{a}_{th}$	1	0
	0	$\bar{a}_{mh}$	0	0

(b) Tableau iniziale  $T$ Figura C.1: Condizioni iniziali di  $T$ 

Considero ora  $\tilde{T}$  quando, dopo qualche iterazione, rientra in base  $x_n$  e quindi, siccome seguendo la regola di Bland,  $\tilde{c}_n$  deve essere l'unico coefficiente di costo ridotto negativo.

La riga 0 di  $\tilde{T}$  è ottenibile come la riga 0 di  $T$  sommata a una combinazione lineare di righe di  $T$  (figura C.2a), quindi è possibile ottenere il coefficiente di costo ridotto  $\tilde{c}_n$  come una combinazione lineare dei coefficienti di vincolo (figura C.2b).

$$\tilde{T}_0 = T_0 + \sum_{i=1}^m \mu_i T_i \quad \tilde{c}_n = \bar{c}_n + \sum_{i=1}^m \mu_i \bar{a}_{in} = \bar{c}_n + \mu_t \quad \tilde{c}_{B[i]} = \bar{c}_{B[i]} + \sum_{j=1}^m \mu_j a_{jB[i]} = \bar{c}_{B[i]} + \mu_i \text{ con } i \neq t$$

(a) Comb. lin. della prima riga di  $\tilde{T}_0$ (b) Comb. lin. del CCN di base entrante  $\tilde{c}_n$ (c) Comb. lin. del CCN di base  $\tilde{c}_{B[i]}$ 

Figura C.2: Combinazioni lineari

Ma  $\bar{c}_n$  in  $T$  è nullo e l'unico coefficiente di vincolo  $\bar{a}_{in}$  non nullo è  $\bar{a}_{tn}$  che è pari a 1. Ne segue che il coefficiente della combinazione  $\mu_t$  deve essere negativo se  $\tilde{c}_n$  deve essere negativo.

Anche i coefficienti di costo in base sono ottenibili tramite combinazioni lineari (figura C.2b).

Tutti i coefficienti  $\tilde{c}_{B[i]}$ , con  $i \neq t$ , devono essere non negativi poiché seguendo la regola di Bland.  $\bar{c}_{B[i]}$  è certamente nullo per la costruzione di  $T$ , in quanto è in base. Ne segue che  $\mu_i$  deve essere non negativo.

Il coefficiente di costo ridotto della variabile  $x_h$  che viene rimossa dalla base deve essere positivo. Anche questo termine può essere ottenuto tramite una combinazione lineare di termini:

$$\tilde{c}_h = \bar{c}_h + \sum_{i=1, i \neq t}^m \mu_i \bar{a}_{ih} + \mu_t \bar{a}_{th}$$

Inizialmente avevamo scelto di inserire la variabile  $x_h$  in base poiché per la regola di Bland valeva che  $\bar{a}_{ih} \leq 0, i \neq t, \bar{a}_{th} > 0$  e  $\bar{c}_h < 0$ .

In base alle relazioni C.2b e C.2c, risulta che  $\tilde{c}_h$  deve essere strettamente negativo, mentre, siccome viene rimossa dalla base la variabile  $x_h$ ,  $\tilde{c}_h$  dovrebbe essere non negativo, da cui l'assurdo.  $\square$

## C.7 Lemma di Farkas

**Teorema C.7.1 (Lemma di Farkas).** Se un problema primale definito su un poliedro non vuoto ha soluzione limitata, allora il suo problema duale deve ammettere una soluzione limitata.

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq c_0 \Leftrightarrow \exists \underline{u} = \underline{c}_B^T B^{-1} \in \mathbb{R}^m : \underline{c}^T \geq \underline{u}^T A \wedge \underline{u}^T \underline{b} \geq c_0$$

C.s.: Se il duale è limitato  $\Rightarrow$  il primale è limitato.

$\underline{c}^T \geq \underline{u}^T A$	Iniziamo dalla regione ammissibile del duale
$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{u}^T A \underline{x}$	Moltiplichiamo ambo i termini per $\underline{x} \geq \mathbf{0}$
$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{u}^T \underline{b} \geq c_0$	Sostituisco $A \underline{x} = \underline{b}$

□

C.n.: Se il primale è limitato  $\Rightarrow$  il duale è limitato. Dalle ipotesi il poliedro ha soluzione limitata, allora per il **teorema di convergenza del simplex** esiste una SBA ottenibile in tempo finito con l'**algoritmo del simplex**.

Chiamiamo  $B$  la base ottima e sia  $\underline{u}^T = \underline{c}_B^T B^{-1}$ . I costi ridotti, calcolati in corrispondenza della base ottima devono essere:

$$\bar{\underline{c}}^T = \underline{c}^T - \underline{c}_B^T B^{-1} A \geq \mathbf{0}^T \Rightarrow \bar{\underline{c}}^T \geq \underline{u}^T A$$

Figura C.3: Dalla regola dei costi ridotti si ottiene la regione di ammissibilità del duale

Infine per ipotesi vale che  $\underline{c}^T \underline{x} \geq c_0 \forall \underline{x} \in P$ , da cui:

$z^* = \underline{c}^T \underline{x}^* \geq c_0$	La $z^*$ è data da $x^*$
$= \underline{c}_B^T \underline{x}_B^* + \underline{c}_F^T \underline{x}_F^*$	Spezzo il vettore dei costi in base e fuori base
$= \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b}$	La parte fuori base, $\underline{x}_B^*$ è un vettore di zeri.
$= \underline{u}^T \underline{b} \geq c_0$	Sostituisco la definizione di $\underline{u} = \underline{c}_B^T B^{-1}$

Figura C.4: Dalla funzione obiettivo del primale si ottiene la funzione obiettivo del duale, entrambe limitate

□

## C.8 Il duale del duale è il primale

**Teorema C.8.1.** Il duale del problema duale è il problema primale.

*Dimostrazione.* Considero un problema  $P$  in forma canonica e procedo con le seguenti operazioni:

1. Trasformo  $P$  nel duale  $D$ .
2. Riscrivo  $D$  in modo da “assomigliare” a  $P$ .
3. Trasformo il  $D$  riscritto in  $P'$ .
4. Riscrivo  $P'$  ed esso coincide con  $P$ .

$$\begin{cases} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A \underline{x} \geq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max \underline{u}^T \underline{b} \\ \underline{c}^T \geq \underline{u}^T A \\ \underline{u} \geq \mathbf{0} \end{cases} \equiv \begin{cases} -\min(-\underline{b}^T) \underline{u} \\ (-A^T) \underline{u} \geq -\underline{c} \\ \underline{u} \geq \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\max \underline{y}^T (-\underline{c}) \\ -\underline{b}^T \geq \underline{y}^T (-A^T) \\ \underline{y} \geq \mathbf{0} \end{cases} \equiv \begin{cases} \min \underline{c}^T \underline{y} \\ A \underline{y} \geq \underline{b} \\ \underline{y} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

□

## C.9 Teorema di dualità forte

**Teorema C.9.1 (Dualità forte).** Se la soluzione ottima del problema primale esiste ed è limitata allora coincide con la soluzione ottima del problema duale.

$$\min \{\underline{c}^T \underline{x} : A\underline{x} \geq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\} = \max \{\underline{u}^T \underline{b} : \underline{c}^T \geq \underline{u}^T A, \underline{u} \geq \underline{0}\}$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal lemma di Farkas (C.7.1). □

## C.10 Teorema di dualità debole

**Teorema C.10.1 (Dualità debole).** Una soluzione ammissibile del problema duale è sempre minore o uguale di una soluzione ammissibile del problema primale in forma canonica.

$$\bar{\underline{u}}^T \underline{b} \leq \underline{c}^T \bar{\underline{x}}$$

*Dimostrazione.* Dati due punti  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  ammissibili rispettivamente nel primale e duale vale che:

$\underline{u}^T A \leq \underline{c}^T$	Inizio dalla regione di ammissibilità del duale
$\underline{u}^T A \underline{x} \leq \underline{c}^T \underline{x}$	Moltiplico entrambi i termini per $\underline{x} \geq \underline{0}$
$\underline{u}^T \underline{b} \leq \underline{c}^T \underline{x}$	Sostituisco $A \underline{x} = \underline{b}$

□

**Corollario C.10.1.1.** Si consideri una coppia di problemi primale e duale. Sono possibili solo 4 casi:

1. Entrambi i problemi hanno ottimo finito, che coincide (da teorema di dualità forte C.9.1).
2. Il problema primale è illimitato ed il duale è impossibile (da teorema di dualità debole C.10.1).
3. Il problema duale è illimitato ed il primale è impossibile (da teorema di dualità debole C.10.1).
4. Entrambi i problemi sono impossibili (banalmente non è escluso da nessuna proprietà).

## C.11 Condizioni di ottimalità

**Teorema C.11.1 (Condizioni di ottimalità).** I due vettori  $\bar{\underline{x}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\underline{y}} \in \mathbb{R}^m$  sono ottimi per i problemi primale  $P$  e duale  $D$  rispettivamente se valgono le seguenti proprietà:

1.  $\bar{\underline{x}} \in P$  (ammissibilità primale)
2.  $\bar{\underline{y}} \in D$  (ammissibilità duale)
3.  $\underline{c}^T \bar{\underline{x}} = \bar{\underline{u}}^T \underline{b}$  (condizioni di ortogonalità)

*Dimostrazione.* Segue dal teorema di dualità debole (teorema C.10.1) □

## C.12 Matrici totalmente unimodulari

**Definizione C.12.1 (Matrice totalmente unimodulare).** Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  si dice **totalmente unimodulare** (TUM) se per ogni sua sotto-matrice quadrata  $Q$  vale che  $\det(Q) \in \{-1, 0, 1\}$ .

**Teorema C.12.2.** Se  $A$  è TUM e  $\underline{b}$  è intero, allora  $P$  ha solo vertici interi, cioè  $\text{conv}(\underline{x}) = P$ .

**Teorema C.12.3 (Condizioni necessarie per TUM).** Se  $A$  è TUM, allora deve valere che:

1. Ogni termine della matrice  $A$   $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ .
2.  $A^T$  è TUM.
3.  $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$  è TUM.
4. Moltiplicando una riga o colonna per  $-1$   $A$  rimane TUM.
5. Scambiando righe o colonne  $A$  rimane TUM.
6. L'operazione di pivot lascia  $A$  TUM.

**Teorema C.12.4 (Condizioni sufficienti per TUM).** Sia  $A$  una matrice con  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ . Condizione sufficiente perché  $A$  sia TUM è che valgano:

1. In ogni colonna vi siano al più due elementi non nulli.
2. Esiste una partizione  $\begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix}$  delle righe di  $A$  tale che ogni colonna con due elementi non nulli ha questi elementi su righe appartenenti ad insiemi  $I_1$  e  $I_2$  diversi se e solo se i due elementi sono concordi in segno.

*Dimostrazione.* Per dimostrare che  $A$  sia TUM è necessario dimostrare che il determinante di ogni sotto-matrice  $Q$  è  $\det(Q) \in \{-1, 0, 1\}$ , con ordine  $k$ . Procediamo per induzione su  $k$ .

Se  $k = 1$  allora  $Q = a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ .

Supponiamo ora che  $\det(Q') \in \{-1, 0, 1\}$  per ogni sotto-matrice  $Q'$  di ordine  $k' \geq 1$ , ove  $k'$  è un valore fissato. Consideriamo quindi una qualsiasi sotto-matrice  $Q$  di ordine  $k = k' + 1$ . Possono avvenire solo tre casi:

1.  $Q$  ha una colonna di zeri: in questo caso  $\det(Q) = 0$ .
2.  $Q$  ha una colonna con un solo elemento diverso da zero: in questo caso,  $\det(Q) = \pm \det(Q') \in \{-1, 0, 1\}$ .
3. Ogni colonna di  $Q$  ha esattamente due elementi diversi da zero: in questo caso, le righe di  $Q$  risultano linearmente dipendenti e  $\det(Q) = 0$ .

□

## C.13 Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo

**Teorema C.13.1 (Caratterizzazione dei lati che appartengono ad alberi ricoprenti di costo minimo).** Un lato appartenente ad un albero a costo minimo è l'arco a costo minimo in un taglio tra due insiemi di nodi del grafo.

$$l \in T^* \Leftrightarrow \exists S \subset V : l = \operatorname{argmin} \{c_f : f \in \delta(S)\}$$

*C.s: Se un arco è a costo minimo tra due insiemi di nodi  $\Rightarrow$  appartiene all'albero ricoprente minimo. Per assurdo sia  $l \notin T^*$ . Allora  $T^* \cup \{l\}$  contiene un ciclo  $C(T^*, l)$ .*

Sia  $f \in C(T^*, l) \cap \delta(S) \Rightarrow T^* \cup \{l\} \setminus \{f\}$  è albero ricoprende.

Essendo  $T^*$  minimo e  $l = \operatorname{argmin} c_f$ , allora  $c_l \leq c_f$ , da cui l'assurdo.  $\square$

*C.n: Se un arco appartiene all'albero ricoprende a costo minimo  $\Rightarrow$  è l'arco a costo minimo tra due insiemi di nodi. Dato  $l \in T^*$ , sia  $S$  uno degli insiemi di nodi di una delle componenti connesse in  $G' = (\mathcal{N}, T \setminus \{l\})$ .*

**Per assurdo**  $\exists f \in \delta(S) \setminus \{l\}$  con  $c_f < c_l$ .

Allora  $T^* \cup \{f\} \setminus \{l\}$  costa meno di  $T^*$ , da cui l'assurdo.  $\square$

## C.14 MAX-FLOW = MIN-CUT

**Teorema C.14.1 (Max-flow = Min-cut).** Un flusso ammissibile è ottimo per il problema di flusso massimo se esiste un taglio minimo con capacità pari al flusso. I due problemi sono duali.