

# **MECCANICA**

Prof. Alan Facchinetti

5 CFU

**Luca Cappelletti**

Lecture Notes  
Year 2017/2018



Triennale Ingegneria Informatica  
Politecnico di Milano  
Italy  
31 dicembre 2017

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Cinematica del corpo rigido . . . . .	3
1.1.1	Analisi dimensionali e come può aiutare. . . . .	3
1.1.2	Considerazioni ed errori comuni nelle derivate in meccanica . . . . .	4
1.2	Traccia generale di un esercizio di cinematica . . . . .	5
1.2.1	Avvertenze . . . . .	5
1.2.2	Argomenti . . . . .	5
1.2.3	Traccia primo punto . . . . .	5
1.2.4	Traccia secondo punto . . . . .	5
1.3	Statica del corpo rigido . . . . .	6
1.3.1	Fonti di studio . . . . .	6
1.3.2	Gradi di libertà . . . . .	6
1.3.3	Asta nel piano . . . . .	6
1.3.4	Vincoli . . . . .	6
1.3.5	L'analisi (o computo) dei vincoli . . . . .	7
1.3.6	Limiti del computo dei vincoli . . . . .	8
1.3.7	Caratteristiche della sollecitazione interna . . . . .	8
1.3.8	Grafici della sollecitazione interna . . . . .	10
1.4	Traccia generale di un esercizio di statica . . . . .	12
1.4.1	Avvertenze . . . . .	12
1.4.2	Argomenti . . . . .	12
1.4.3	Traccia primo punto . . . . .	12
1.4.4	Traccia secondo punto . . . . .	12
1.5	Principio del lavoro virtuale (PLV) . . . . .	13
1.5.1	Cosa cambia dal metodo delle equazioni cardinali della statica . . . . .	13
1.6	Motori . . . . .	14
1.6.1	Come identificare il tipo di moto, se diretto o retrogrado . . . . .	14
1.7	Traccia generale di un esercizio di motori . . . . .	15
1.7.1	Avvertenze . . . . .	15
1.7.2	Argomenti . . . . .	15
1.7.3	Traccia generale . . . . .	15
<b>2</b>	<b>2014</b>	<b>16</b>
2.1	Tema d'esame del 4/07/2014 . . . . .	16
2.1.1	Secondo esercizio . . . . .	16
2.1.2	Soluzione secondo esercizio . . . . .	17
2.2	Tema d'esame del 22/07/2014 . . . . .	20
2.2.1	Secondo esercizio . . . . .	20
2.2.2	Soluzione secondo esercizio (non verificata) . . . . .	21
2.3	Tema d'esame del 10/09/2014 . . . . .	24
2.3.1	Primo esercizio . . . . .	24
2.3.2	Soluzione primo esercizio (non verificata) . . . . .	25
2.3.3	Secondo esercizio . . . . .	27
2.3.4	Soluzione secondo esercizio (non verificata) . . . . .	28
2.4	Tema d'esame del 24/09/2014 . . . . .	34
2.4.1	Secondo esercizio . . . . .	34
2.4.2	Soluzione secondo esercizio . . . . .	35
2.4.3	Terzo esercizio . . . . .	40
2.4.4	Soluzione terzo esercizio . . . . .	41
2.5	Tema d'esame del 4/02/2015 . . . . .	44
2.5.1	Secondo esercizio . . . . .	44

2.5.2	Soluzione secondo esercizio (non verificata)	45
2.6	Tema d'esame del 26/02/2015	48
2.6.1	Secondo esercizio	48
2.6.2	Soluzione secondo esercizio	49
<b>3</b>	<b>2015</b>	<b>52</b>
3.1	Tema d'esame del 29/06/2015	52
3.1.1	Primo esercizio	52
3.1.2	Soluzione primo esercizio	54
3.1.3	Secondo esercizio	58
3.1.4	Soluzione secondo esercizio	58
3.1.5	Terzo esercizio	71
3.1.6	Soluzione terzo esercizio	72
3.2	Tema d'esame del 22/07/2015	76
3.2.1	Primo esercizio	76
3.2.2	Soluzione primo esercizio (non corrispondente)	77
3.2.3	Secondo esercizio	81
3.2.4	Soluzione secondo esercizio	81
3.2.5	Terzo esercizio	85
3.2.6	Soluzione terzo esercizio	86
3.3	Tema d'esame del 01/09/2015	90
3.3.1	Primo esercizio	90
3.3.2	Soluzione primo esercizio	91
3.3.3	Secondo esercizio	95
3.3.4	Soluzione secondo esercizio	96
3.3.5	Terzo esercizio	100
3.3.6	Soluzione terzo esercizio	101
<b>4</b>	<b>2017</b>	<b>105</b>
4.1	Tema d'esame del 11/09/2017	105
4.1.1	Primo esercizio	105
4.1.2	Risoluzione primo esercizio (non verificata)	107
4.1.3	Secondo esercizio	109
4.1.4	Soluzione secondo esercizio (non verificata)	110
4.1.5	Terzo esercizio	114
4.1.6	Soluzione terzo esercizio (non verificata)	115
<b>A</b>	<b>Formulario</b>	<b>118</b>
A.1	Formule per la cinematica	118
A.1.1	Brevissimo formulario per le derivate	118
A.1.2	Brevissimo formulario per numeri complessi	119
A.2	Formule per la statica	119
A.3	Formule per motori	119

## 1.1 Cinematica del corpo rigido

### 1.1.1 Analisi dimensionali e come può aiutare.

Un **forte aiuto** nella risoluzione di esercizi, in meccanica, è *l'analisi dimensionale*. Quando ci si trova di fronte ad equazioni di una grossa mole, come per esempio quella in figura 1.1, ci si può sentire istintivamente intimoriti, ma un ottimo strumento per identificare eventuali errori è proprio il *controllo delle unità di misura*.

$$\dot{\omega}_m = \frac{gR_p\tau(m - \frac{M}{2}(\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))) + \mu_d C_m}{\mu_d J_m + m(R_p\tau)^2 + \frac{1}{4}M(R_p\tau)^2 + J_p\tau^2 + \frac{1}{4}J\frac{(R_p\tau)^2}{R^2}} \quad (1.1)$$

Figura 1.1: Soluzione di uno dei punti di un esercizio d'esame, che descrive l'accelerazione di un motore, dato un determinato sistema.

**Esempio 1** Prendiamo ad esempio un sottoinsieme della formula qui sopra. Potrebbe risultare possibile che, per distrazione ricopiando oppure con un errore di derivazione, al posto della formula corretta (figura 1.2a) si finisce per scrivere un errore (figura 1.2b).

$$m - \frac{M}{2}(\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))$$

(a) Formula corretta.

$$m - \omega \frac{M}{2}(\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))$$

(b) Formula con un errore.

Figura 1.2: Sottoinsieme della formula vista sopra.

Nel nostro esempio, appare una velocità angolare che fa assumere un significato dimensionalmente completamente diverso. Ora, questo errore posto nella formula di grosse dimensioni può sfuggire di vista, ma ogni singola somma e sottrazione **deve** essere tra termini nella stessa unità di misura, altrimenti risulta priva di senso.

Possiamo quindi controllare per ogni sottoinsieme dove viene effettuata un'addizione aritmetica se i due termini (previa assenza di sostituzioni precedenti) abbiano dimensionalmente lo stesso significato.

Per quanto ovvio possa essere che non è possibile sommare mele e pere, questo piccolo strumento può risultare molto utile controllando i passaggi di equazioni di grande dimensione, senza dover immediatamente rifare completamente i calcoli.

### 1.1.2 Considerazioni ed errori comuni nelle derivate in meccanica

Quando si eseguono derivazioni in meccanica, è importante tenere a mente che non si sta derivando in funzione dell'incognita (figura 1.3), ma del tempo (figure 1.4 e 1.5), e la dipendenza delle variabili sul tempo è spesso implicita:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ \frac{df(t)}{dx} &= 2x \end{aligned}$$

Figura 1.3: Derivata in funzione dell'incognita  $x$ .

$$\begin{aligned} f(t) &= be^{i\alpha} + b \\ \frac{df(t)}{dt} &= b\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} \end{aligned}$$

Figura 1.4: Derivata in funzione del tempo, con  $\alpha$  variabile nel tempo e  $b$  costante.

$$\begin{aligned} f(t) &= be^{i\alpha} + b \\ \frac{df(t)}{dt} &= b\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + \dot{b}e^{i\alpha} + \dot{b} \end{aligned}$$

Figura 1.5: Derivata in funzione del tempo, con  $\alpha$  e  $b$  variabili nel tempo.

## 1.2 Traccia generale di un esercizio di cinematica

### 1.2.1 Avvertenze

**Questo NON è un "algoritmo risolutivo", ma una linea guida su come questo tipo di esercizio va svolto.**

Può essere molto utile per identificare quali argomenti sia necessario conoscere e ripassare prima di poter affrontare un esercizio di questo tipo, alcuni magari ovvi, e per questo viene fornita una checklist da riempire.

Ogni esercizio è unico e questa lista non può e non intende sostituire uno studio adeguato dell'argomento, quindi non intendetela come tale.

### 1.2.2 Argomenti

- ☐ Sapere derivare equazioni nel campo complesso.
- ☐ Sapere realizzare equazioni di chiusura.
- ☐ Sapere risolvere sistemi lineari.
- ☐ Conoscere il teorema dell'energia cinetica, per masse e momenti d'inerzia.
- ☐ Sapere risolvere prodotti scalari.
- ☐ Conoscere il bilancio delle potenze.
- ☐ Avere almeno una base generale di cinematica.

### 1.2.3 Traccia primo punto

1. Capire come il sistema va a muoversi.
2. Identificare eventuali vettori (velocità, accelerazioni) che vengono forniti indirizzati in senso opposto al moto del sistema.
3. Identificare vincoli cinematici.
4. Identificare un'equazione di chiusura.
5. Trascrivere l'equazione di chiusura in forma complessa, rappresentante lo spostamento.
6. Separare in componenti cartesiane ed ottenere i termini incogniti.
7. Derivare una volta la forma complessa, ottenendo velocità.
8. Separare la velocità in forma cartesiana ed ottenere i termini incogniti.
9. Derivare una seconda volta la forma complessa, ottenendo accelerazione.
10. Separare l'accelerazione in forma cartesiana ed ottenere i termini incogniti.

### 1.2.4 Traccia secondo punto

1. Calcolare l'energia cinetica totale sommando le componenti di tutte le masse in moto di traslazione ed i momenti d'inerzia di corpi in rotazione.
2. Derivare energia cinetica.
3. Calcolare potenza totale, sommando i contributi di tutte le forze e coppie applicate a corpi in moto.
4. Usare il bilancio delle potenze.

## 1.3 Statica del corpo rigido

### 1.3.1 Fonti di studio

Un ottimo canale youtube è Romaprof, ricco di esercizi di statica risolti sia per metodo grafico che analitico, passo passo con spiegazioni.

### 1.3.2 Gradi di libertà

Un corpo rigido possiede, nel piano, 3 gradi di libertà, 2 traslazionali e uno rotazionale, ovvero può muoversi in 3 direzioni (in orizzontale, verticale e ruotare). Nello spazio, un corpo rigido possiede 6 gradi di libertà, 3 traslazionali e 3 rotazionali. In questo corso presteremo attenzione unicamente al caso piano.

### 1.3.3 Asta nel piano

Un'asta (figura 1.6), nel piano, viene rappresentata con una linea che viene chiamata asse baricentrico della trave (o asta).



Figura 1.6: Asta nel piano.

### 1.3.4 Vincoli

Un vincolo è un oggetto che viene applicato ad un corpo rigido e ne va a limitare il moto. Esistono diverse tipologie di vincoli, ed ogni vincolo possiede caratteristiche particolari.

#### Carrello

Vincolo semplice che impedisce un moto perpendicolare ad esso, cioè un modo che farebbe "staccare" il carrello dalla parete. In questa dispensa sarà indicato con il simbolo in figura 1.7. Questo vincolo impone 1 grado di vincolo.

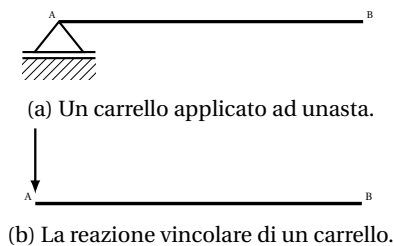


Figura 1.7: Il vincolo Carrello.

#### Pendolo semplice o Biella

Vincolo semplice (figura 1.8) che si oppone ad un moto lungo la propria direzione assiale. Questo vincolo impone 1 grado di vincolo.

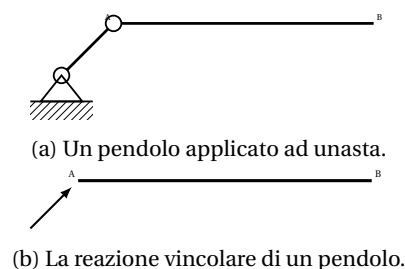
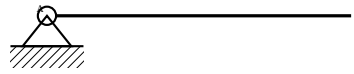


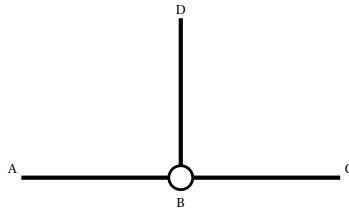
Figura 1.8: Il vincolo Pendolo.

### Cerniera

Vincolo doppio (figura 1.9) che consente unicamente la rotazione, quando è bloccato a terra, o blocca i movimenti assiali delle aste quando interna.



(a) Una cerniera ancorata applicata ad un'asta impone  $2gdv$ .

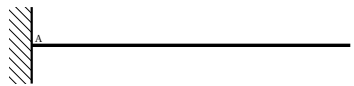


(b) Una cerniera interna applicata a 3 aste impone  $2(3 - 1) = 4gdv$ .

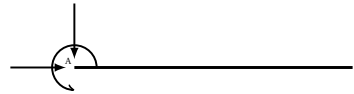
Figura 1.9: Il vincolo Cerniera.

### Incastro

Vincolo triplo (figura 1.10) che impedisce qualsiasi movimento quando applicato ad un corpo rigido.



(a) Un incastro applicato ad un'asta impone  $3gdv$ .



(b) Le reazioni vincolari di un incastro.

Figura 1.10: Il vincolo Incastro.

### 1.3.5 L'analisi (o computo) dei vincoli

Per computo dei vincoli si intende contare tutti i gradi di libertà e di vincolo di un sistema di corpi rigidi e vincoli per dare una prima approssimazione alla categoria in cui questo sistema va ad appartenere. Si tratta di una approssimazione perché esistono casi particolari in cui questa fallisce, che sono illustrati alla fine di questa sotto sezione. È importante tenere a mente il teorema delle cerniere interne mentre si procede con il calcolo.

**Struttura Isostatica:**  $gdv = gdl$

Le strutture isostatiche sono oggetto di questo corso. Il calcolo delle reazioni interne in questi sistemi è sempre risolubile tramite un sistema lineare.

**Struttura Iperstatica:**  $gdv > gdl$

Viene chiamato livello di iperstaticità della struttura  $i$  il delta tra  $gdv$  e  $gdl$  ed indica il numero di incognite aggiuntive che vengono introdotte per risolvere il sistema delle reazioni interne.

**Struttura Labile:**  $gdv < gdl$

Una struttura che potrebbe essere mossa da una forza esterna.



### 1.3.6 Limiti del computo dei vincoli

#### Esempio 1

Struttura (figura 1.11) apparentemente iperstatica ma con vincoli a carrello con e senza cerniera ridondanti, per cui risulta labile.

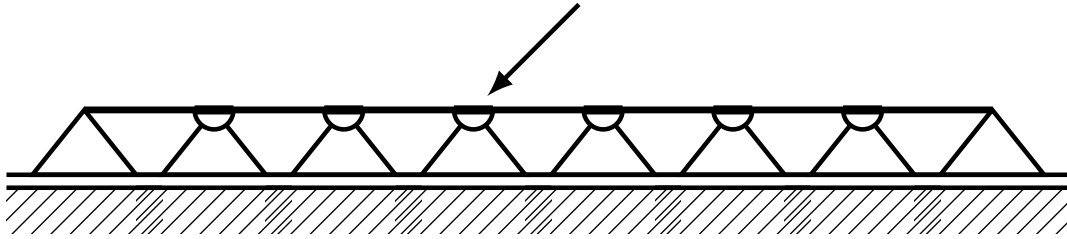


Figura 1.11: Esempio 1: Struttura apparentemente *iperstatica*.

#### Esempio 2

Struttura (figura 1.12) che al calcolo dei vincoli risulta isostatica, potrebbe sembrare labile in base all'esempio precedente, ma che in seguito all'applicazione di un'unica forza verticale risulta addirittura iperstatica.

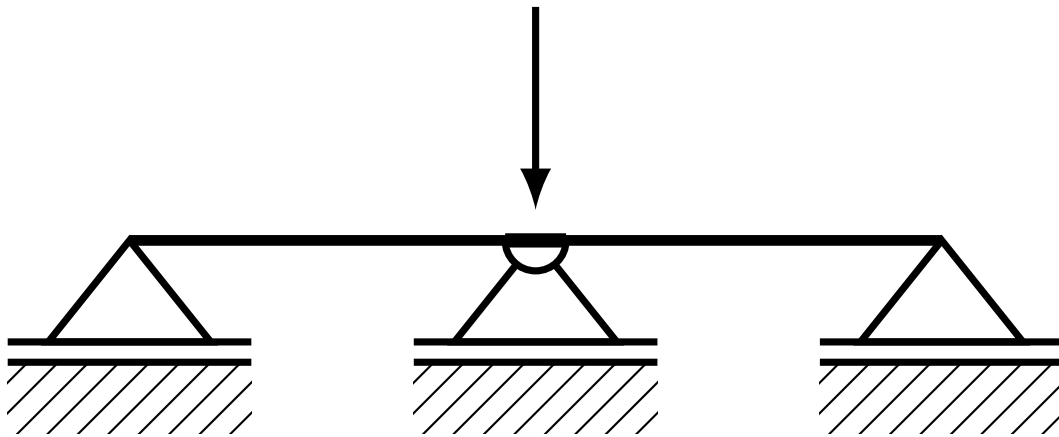


Figura 1.12: Esempio 1: Struttura apparentemente *iperstatica*.

### 1.3.7 Caratteristiche della sollecitazione interna

Immaginiamo di tagliare un'asta (figura 1.13) in un punto  $S_1$ , ottenendo così due tronchi,  $t_1$  e  $t_2$ . In quel punto agiscono un **taglio**  $T$  verticale, una **forza normale**  $N$  ed un **momento flettente**  $M$ .

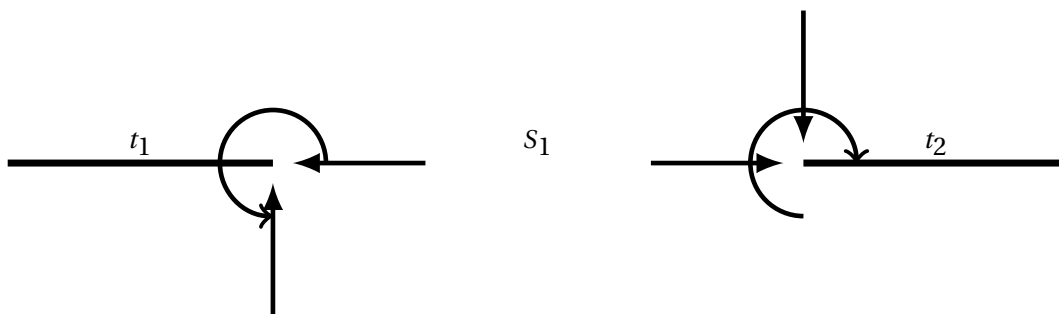


Figura 1.13: Le caratteristiche di sollecitazione interne nel punto  $S_1$ .

Se ora andiamo a fare un secondo taglio  $S_2$ , punto definito come  $S_2 = S_1 + ds$ , costruiamo un segmento infinitesimo di tronco che viene chiamato **conco elementare**. In particolare, siccome noi stiamo guardando proiezioni sul piano di corpi rigidi, viene chiamato **sezione laterale di conco elementare**, che è da ambo i lati soggetto alle sollecitazioni interne dell'asta.

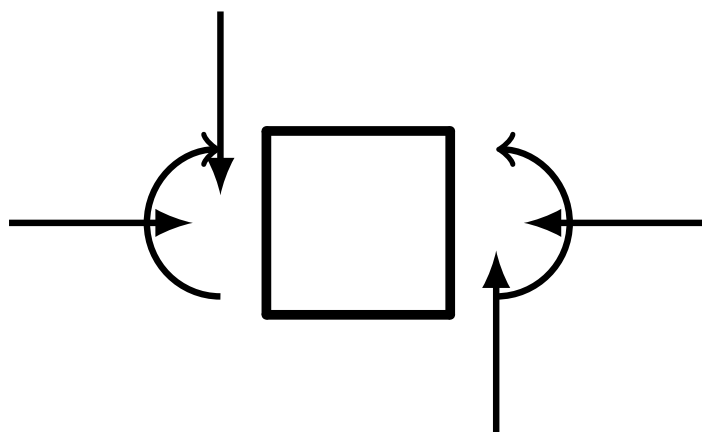


Figura 1.14: Sezione di concio elementare.

**Convenzione per lo sforzo normale baricentrico**

Viene considerato positivo quando esso impone una trazione (figura 1.15a), mentre viene considerato negativo se esso impone una contrazione (figura 1.15b).

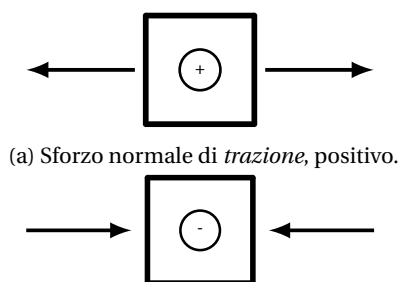
(a) Sforzo normale di *trazione*, positivo.(b) Sforzo normale di *compressione*, negativo.

Figura 1.15: Convenzione dello sforzo normale baricentrico.

**Convenzione per il taglio**

Viene considerato positivo quando esso impone al concio una rotazione oraria (figura 1.16a), cioè a sinistra del concio il taglio va verso l'alto e a destra verso il basso, mentre è negativo quando esso impone al concio una rotazione anti-oraria (figura 1.16b), cioè a sinistra del concio il taglio va verso il basso e a destra verso l'alto.

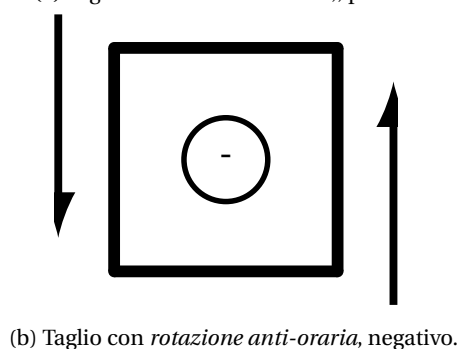
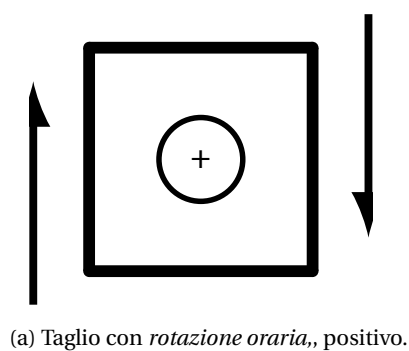


Figura 1.16: Convenzione del taglio.

### Convenzione per il momento flettente

È considerato positivo (figura 1.17) quando tende le fibre inferiori ed è sempre disegnato dalla parte delle fibre tese.

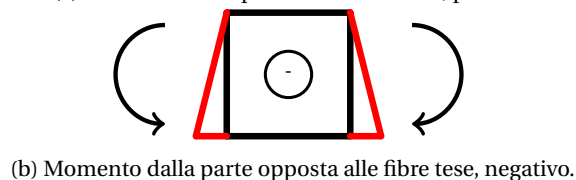
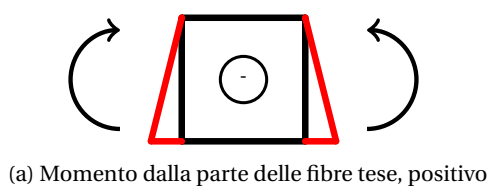


Figura 1.17: Convenzione del momento flettente.

### 1.3.8 Grafici della sollecitazione interna

Si tratta di una serie di convenzioni adottate per comodità nel lavoro di chi fa studi di statica. Per comprendere al meglio come questi grafici vengono realizzati, guardate agli esercizi svolti più avanti nella dispensa.

#### Convenzione grafica dello sforzo normale

In alto positivo, in basso negativo. A destra positivo, a sinistra negativo.

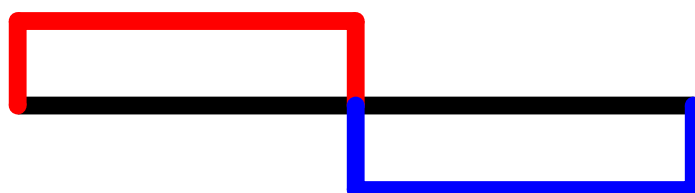


Figura 1.18: Convenzione grafica dello sforzo normale.

**Convenzione grafica del taglio**

In alto positivo, in basso negativo. A destra positivo, a sinistra negativo.

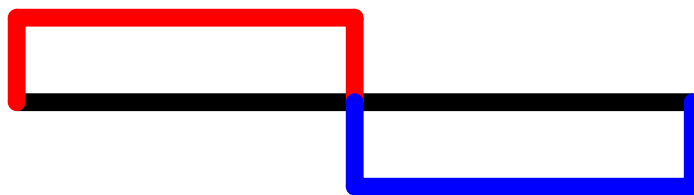


Figura 1.19: Convenzione grafica del taglio.

**Convenzione grafica del momento flettente**

**Sempre dalla parte delle fibre tese**, cioè dalla parte dove le forze di taglio vanno a tirare le fibre dell'asta (nel disegno, nel caso della figura qui riportata, le fibre sono dalla parte inferiore), o alternativamente in alto negativo, in basso positivo. A destra negativo, a sinistra positivo.

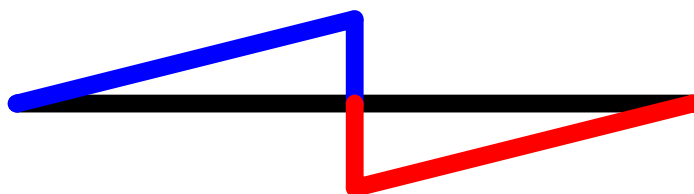


Figura 1.20: Convenzione grafica del momento flettente.

## 1.4 Traccia generale di un esercizio di statica

### 1.4.1 Avvertenze

**Questo NON è un "algoritmo risolutivo", ma una linea guida su come questo tipo di esercizio va svolto.**

Può essere molto utile per identificare quali argomenti sia necessario conoscere e ripassare prima di poter affrontare un esercizio di questo tipo, alcuni magari ovvi, e per questo viene fornita una checklist da riempire.

Ogni esercizio è unico e questa lista non può e non intende sostituire uno studio adeguato dell'argomento, quindi non intendetela come tale.

### 1.4.2 Argomenti

- ☐ Sapere risolvere sistemi lineari.
- ☐ Sapere cosa significa che un sistema è isostatico.
- ☐ Conoscere TUTTI i tipi di vincoli e le reazioni vincolari per ogni tipo.
- ☐ Sapere risolvere prodotti vettoriali (per il segno nel calcolo dei momenti).
- ☐ Conoscere le convenzioni per taglio, sforzo e momento flettente.

### 1.4.3 Traccia primo punto

1. Verificare con l'analisi dei vincoli l'isostaticità del sistema.
2. Considerare inizialmente i vincoli esterni, costruendo un sistema con le reazioni di questi vincoli alle forze applicate.
3. Aggiungere al sistema le reazioni vincolari di uno o più dei corpi rigidi del sistema, sino ad avere un numero di equazioni indipendenti pari al numero di incognite.

### 1.4.4 Traccia secondo punto

1. Separare le forze applicate sull'asta richiesta nelle componenti di sforzo e taglio.
2. Calcolare momento flettente massimo, partendo da ENTRAMBI i lati, per avere una verifica.
3. Disegnare i grafici.

## 1.5 Principio del lavoro virtuale (PLV)

A differenza dell'approccio che studia l'equilibrio di *forze* e *momenti*, esiste un approccio basato su considerazioni di tipo energetico.

**Definizione 1.5.1** (Spostamento o rotazione virtuale). Uno spostamento o rotazione virtuale, è rispettivamente uno spostamento o una rotazione che rispetta le seguenti caratteristiche:

1. È infinitesimo.
2. È arbitrario.
3. È compatibile con i vincoli (non rompe le condizioni di vincolo).
4. È reversibile, cioè può avvenire in entrambi i sensi.
5. Avviene in tempo congelato.

Vengono indicati con il simbolo:  $\delta \vec{S}_i$  e  $\delta \vec{\theta}_j$ .

**Definizione 1.5.2** (Principio del lavoro virtuale). In un sistema meccanico con vincoli fissi e in assenza di attrito, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che sia nullo il *lavoro virtuale* compiuto dalle forze e dalle coppie attive per qualsiasi spostamento virtuale del sistema.

Viene calcolato come il prodotto scalare di forze e spostamenti virtuali sommati a quello di coppie e rotazioni virtuali.

$$\delta L = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{S}_i + \sum_j \vec{C}_j \cdot \delta \vec{\theta}_j = 0$$

### 1.5.1 Cosa cambia dal metodo delle equazioni cardinali della statica

Per risolvere un esercizio con il metodo delle **equazioni cardinali della statica** venivano aggiunte come incognite le reazioni vincolari (le reazioni orizzontali, verticali e momenti), ma in questo metodo esse vengono interamente ignorate poichè non compiono lavoro.

Nel caso, per esempio, di un'asta inclinata di massa non trascurabile su cui viene applicata una forza  $F_1$  esterna, nel bilancio del **PLV** sarebbero considerate unicamente la forza peso  $F_g$  agente sul centro di massa dell'asta e la forza  $F_1$ . Le incognite introdotte saranno gli spostamenti e rotazioni virtuali che le forze producono sul sistema.

## 1.6 Motori

### 1.6.1 Come identificare il tipo di moto, se diretto o retrogrado

Definita  $W_m$  (o  $W_1$ ) come la potenza motrice,  $W_r$  (o  $W_2$ ) come la potenza resistente, chiamata a volte anche potenza dell'utilizzatore  $W_u$  e  $W_p$  come potenza perduta, procediamo a identificare il tipo del moto in condizioni di regime e di transitorio.

$$\frac{dE_{c_m}}{dt} = J_m \omega \dot{\omega}$$

Figura 1.21: Spesso la derivata dell' $E_{c_m}$  assume questo valore.

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt} \Rightarrow \frac{dE_{c_r}}{dt} = \frac{dE_c}{dt} - \frac{dE_{c_m}}{dt}$$

Figura 1.22: Come si definisce la derivata di  $E_{c_r}$ .

$$\text{Moto diretto: } \begin{cases} W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} > 0 \\ W_u - \frac{dE_{c_u}}{dt} < 0 \end{cases}$$

(a) Condizioni di moto diretto.

$$\text{Moto retrogrado: } \begin{cases} W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} < 0 \\ W_u - \frac{dE_{c_u}}{dt} > 0 \end{cases}$$

(b) Condizioni di moto retrogrado.

Figura 1.23: Analisi del tipo di moto.

$$\text{Moto diretto: } \begin{cases} W_m > 0 \\ W_u < 0 \end{cases}$$

(a) Condizioni di moto diretto a regime.

$$\text{Moto retrogrado: } \begin{cases} W_m < 0 \\ W_u > 0 \end{cases}$$

(b) Condizioni di moto retrogrado a regime.

Figura 1.24: Analisi del tipo di moto a regime.

## 1.7 Traccia generale di un esercizio di motori

### 1.7.1 Avvertenze

**Questo NON è un "algoritmo risolutivo", ma una linea guida su come questo tipo di esercizio va svolto.**

Può essere molto utile per identificare quali argomenti sia necessario conoscere e ripassare prima di poter affrontare un esercizio di questo tipo, alcuni magari ovvi, e per questo viene fornita una checklist da riempire.

Ogni esercizio è unico e questa lista non può e non intende sostituire uno studio adeguato dell'argomento, quindi non intendetela come tale.

### 1.7.2 Argomenti

- ☐ Conoscere il funzionamento di un motore modellizzato, con potenza motrice, resistente, perduta, trasmissione, etc...
- ☐ Conoscere il bilancio di potenze per motori.
- ☐ Conoscere le regole per moto diretto e retrogrado.
- ☐ Conoscere le regole per regime e transitorio.
- ☐ Conoscere le formule per attrito statico, dinamico e volvente.
- ☐ Sapere risolvere prodotti scalari.

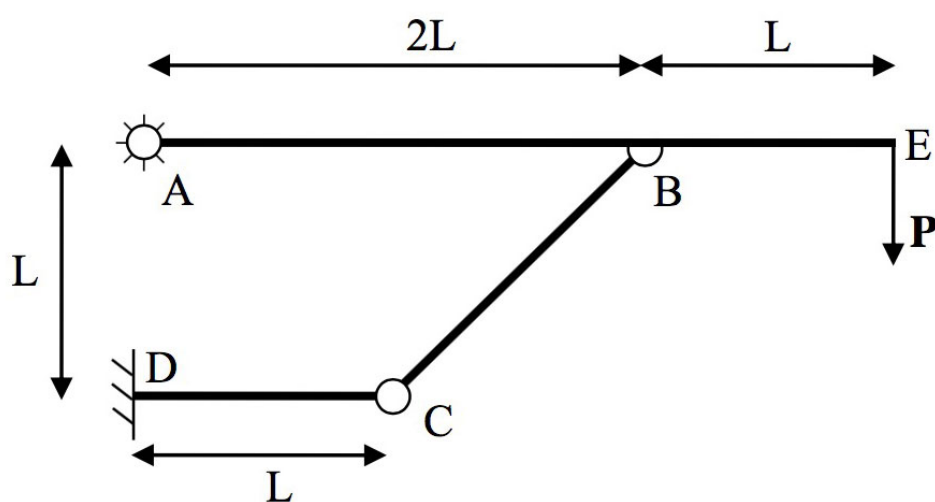
### 1.7.3 Traccia generale

1. Comprendere come si muove il sistema.
2. Individuare eventuali vettori rappresentati in direzione opposta al moto.
3. Individuare legami cinematici.
4. Calcolare potenza motrice.
5. Calcolare potenza resistente.
6. Calcolare e derivare energia cinetica totale.
7. Individuare tipo di moto, se diretto o retrogrado.
8. Calcolare la potenza perduta.
9. Usare bilancio di potenze.



## 2.1 Tema d'esame del 4/07/2014

### 2.1.1 Secondo esercizio



La struttura in figura è soggetta al solo carico verticale  $P$ . Si chiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari in  $A$  e  $D$ .
2. Le azioni interne nell'asta  $AE$ .

## 2.1.2 Soluzione secondo esercizio

### Osservazioni

1. La struttura è composta da 2 aste e 3 vincoli: un incastro, una cerniera esterna ed un pendolo (o biella).

### Analisi preliminare di isostaticità

Verifico che  $gdl_{tot} = gdv_{tot}$ :

$$gdv: \begin{cases} gdv_{cerniera_{esterna}} = 2 \\ gdv_{incastro} = 3 \\ gdv_{biella} = 1 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{aste} = 6 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 2.1: Verifica preliminare di isostaticità.

### Primo punto

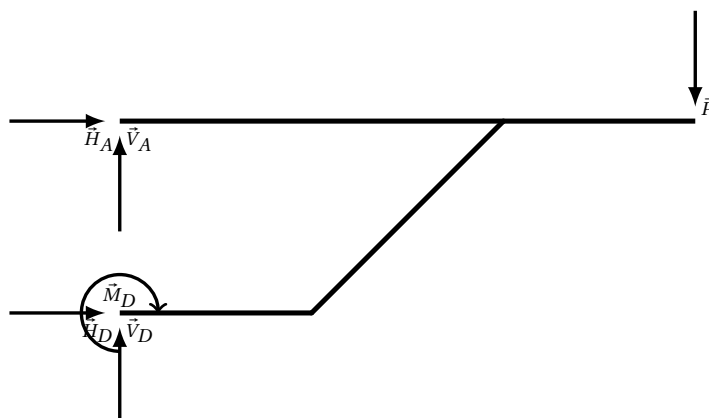


Figura 2.2: Analisi dei vincoli esterni

### Analisi dei vincoli esterni

$$\begin{cases} H_A = -H_D \\ V_A + V_D = P \\ M_D + LH_A + 3LP = 0 \end{cases}$$

**Analisi delle reazioni vincolari in DC** La biella trasmette unicamente la reazione assiale, che è inclinata di 45 deg. Le componenti cartesiane di questa reazione assiale sono quindi uguali:  $R_{C_x} = R_{C_y}$ .

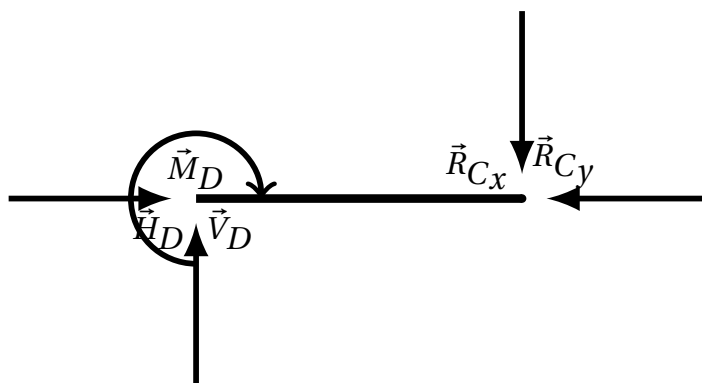


Figura 2.3: Analisi delle reazioni vincolari in DC.

$$\begin{cases} R_{Cx} = R_{Cy} \\ R_{Cx} = H_D \\ R_{Cy} = V_D \\ V_D = H_D \\ M_D = -LR_{Cy} = -LV_D \end{cases}$$

Sostituisco queste relazioni nel sistema precedente e risolvo l'ultima equazione ponendo  $H_A = -H_D = -V_D$  e  $M_D = -LV_D$ :

$$(-LV_D) + L(-V_D) + 3LP = 0$$

$$-LV_D - LV_D + 3LP = 0$$

$$V_D = \frac{3}{2}P$$

Sostituisco il valore così ottenuto nelle relazioni rimanenti ed ottengo:

$$A: \begin{cases} H_A = -\frac{3}{2}P \\ V_A = -\frac{1}{2}P \end{cases}$$

(a) Reazioni vincolari in A.

$$D: \begin{cases} H_D = \frac{3}{2}P \\ V_D = \frac{3}{2}P \\ M_D = -\frac{3L}{2}P \end{cases}$$

(b) Reazioni vincolari in B.

Figura 2.4: Riassunto soluzione primo punto.

### Secondo punto

Essendo l'asta posizionata orizzontalmente, l'asse normale e tangente corrispondono rispettivamente con ascisse ed ordinate.

$$A: \begin{cases} N = -\frac{3}{2}P \\ T = -\frac{1}{2}P \end{cases} \quad B: \begin{cases} N = \frac{3}{2}P \\ T = \frac{3}{2}P \end{cases} \quad P: \begin{cases} N = 0 \\ T = -P \end{cases}$$

**Sforzo normale baricentrico** Nel tronco di asta AB lo sforzo normale risulta positivo, poiché di **trazione**. Nel tronco di asta BE invece non avviene sforzo normale.



Figura 2.5: Sforzo normale nell'asta AE.

**Taglio** Nel tronco di asta AB le forze  $T_A$  ed  $T_B$  impongono nel tronco una rotazione **anti-oraria**, che è quindi considerata negativa, mentre nel secondo tronco BE le forze  $T_B$  e  $P$  impongono una rotazione **oraria**.

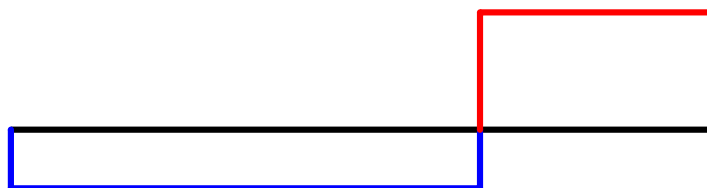


Figura 2.6: Taglio nell'asta AE.

**Momento flettente** Partendo da A, che impone un taglio  $T_A$  dall'alto verso il basso, possiamo vedere che le fibre tese risultano sul lato superiore dell'asta. Il momento imposto da  $T_A$  raggiunge il massimo nel punto B  $M_{max} = LP$ , in cui viene applicata una forza  $T_B$  indirizzata in senso opposto che porta il momento a raggiungere lo zero linearmente in E.

Percorrendo il percorso a ritroso, partendo da E, è possibile ottenere lo stesso risultato.

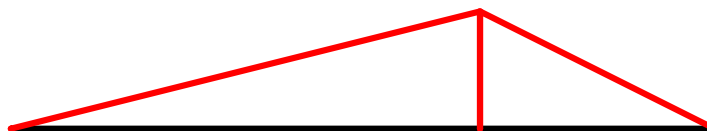
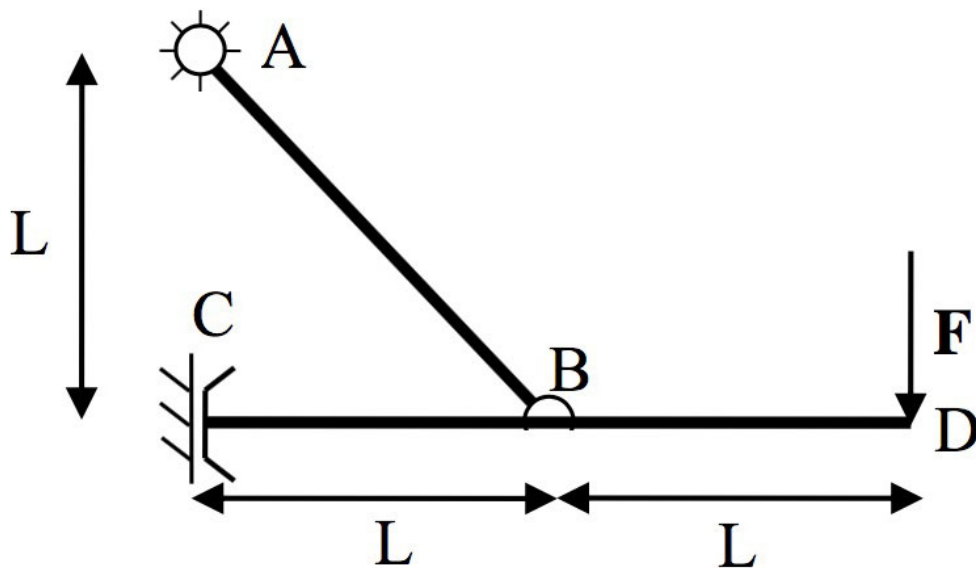


Figura 2.7: Momento flettente nell'asta AE.

## 2.2 Tema d'esame del 22/07/2014

### 2.2.1 Secondo esercizio



La struttura in figura è soggetta al solo carico verticale  $F$ .

Si chiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari in C.
2. Le azioni interne nell'asta CD.

### 2.2.2 Soluzione secondo esercizio (non verificata)

#### Osservazioni

1. La struttura è composta da un'asta e 2 vincoli: un pattino ed un pendolo (o biella).

#### Analisi preliminare di isostaticità

Verifico che  $gdl_{tot} = gdv_{tot}$ :

$$gdv: \begin{cases} gdv_{pattino} = 2 \\ gdv_{biella} = 1 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{asta} = 3 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 2.8: Verifica preliminare di isostaticità.

#### Primo punto

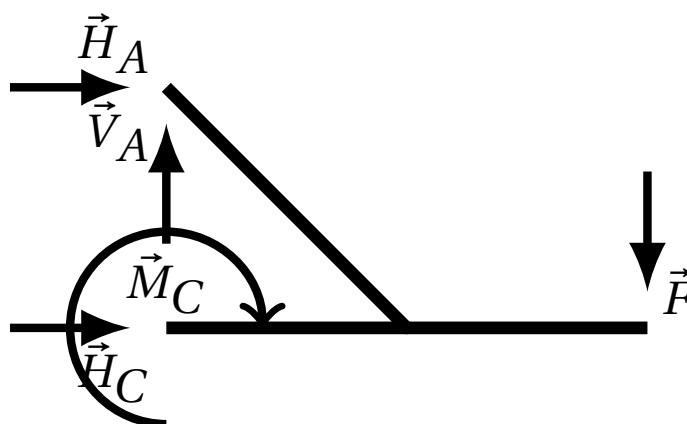


Figura 2.9: Analisi dei vincoli esterni

#### Analisi dei vincoli esterni

$$\begin{cases} H_A = -H_C \\ V_A = F \\ M_C + LH_A + 2LF = 0 \end{cases}$$

**Considerazioni sulla reazione assiale della biella** La biella trasmette unicamente la reazione assiale, che è inclinata di 45 deg dato che i due lati sono entrambi lunghi  $L$ . Le componenti cartesiane di questa reazione assiale sono quindi uguali:  $R_{C_x} = R_{C_y}$ .

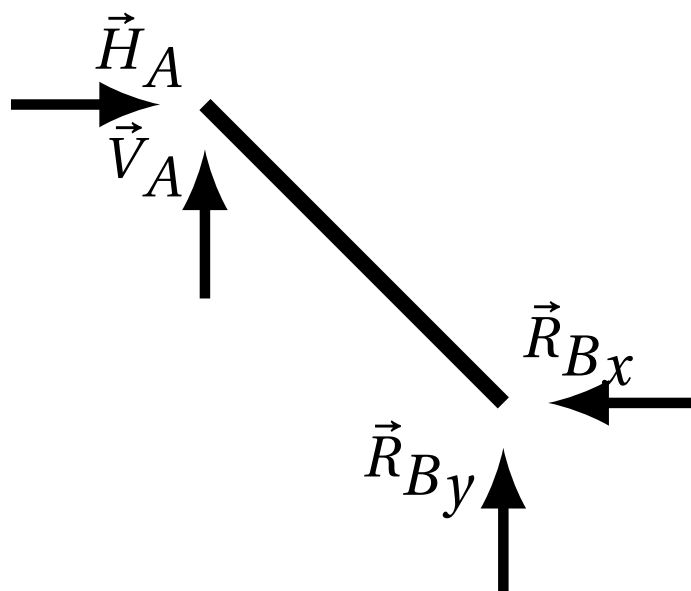


Figura 2.10: Sforzo normale nell'asta AB.

$$\begin{cases} R_{Cx} = R_{Cy} \\ R_{Cx} = H_A \\ R_{Cy} = -V_A \\ V_A = -H_A = F \end{cases}$$

Sostituisco queste relazioni nel sistema precedente e risolvo l'equazione del momento in A:

$$M_C - LF + 2LF = 0 \implies M_C = -LF$$

$$C: \begin{cases} H_C = F \\ M_C = -LF \end{cases}$$

Figura 2.11: Reazioni vincolari in C.

### Secondo punto

Essendo l'asta posizionata orizzontalmente, l'asse normale e tangente corrispondono rispettivamente con ascisse ed ordinate.

$$C: \begin{cases} N = F \\ T = 0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} N = F \\ T = F \end{cases} \quad F: \begin{cases} T = F \end{cases}$$

**Sforzo normale baricentrico** Nel tronco di asta CB lo sforzo normale risulta negativo, poiché di **contrazione**. Nel tronco di asta BD invece non avviene sforzo normale.

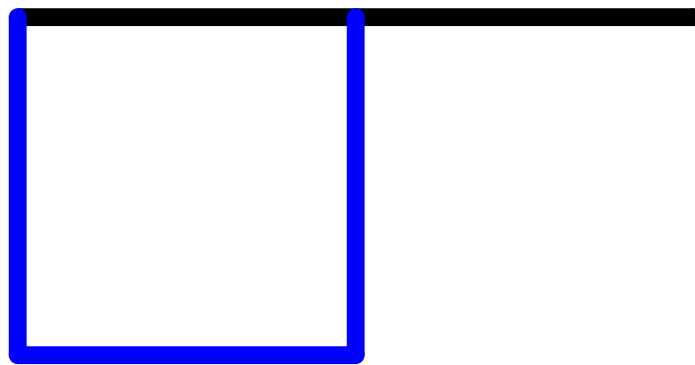


Figura 2.12: Sforzo normale nell'asta CD.

**Taglio** Nel tronco di asta CB non avviene taglio. Nel tronco BD invece, le forze  $T_A$  ed  $F$  impongono una rotazione **oraria**, e quindi è positiva.

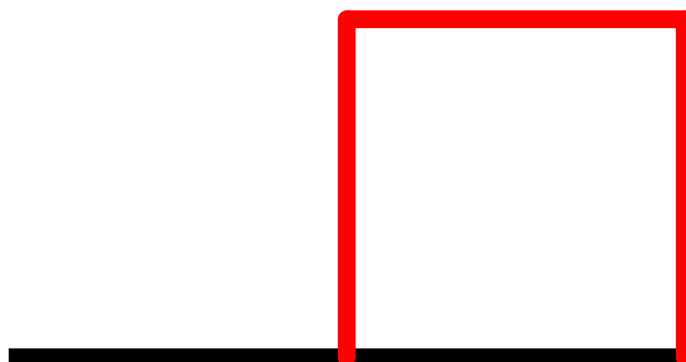


Figura 2.13: Taglio nell'asta CD.

**Momento flettente** Partendo da D, che impone un taglio  $F$  dall'alto verso il basso, possiamo vedere che le fibre tese risultano sul lato superiore dell'asta. Il momento imposto da  $F$  raggiunge il massimo nel punto B  $M_{max} = LF$ , in cui viene applicata una forza  $F$  indirizzata in senso opposto che porta il momento a raggiungere lo zero linearmente in E.

Percorrendo il percorso a ritroso, partendo da E, è possibile ottenere lo stesso risultato.

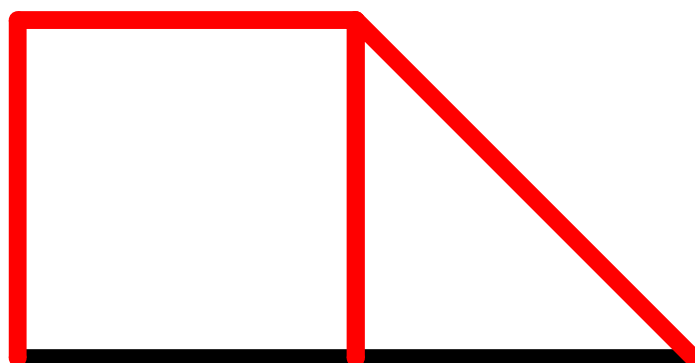
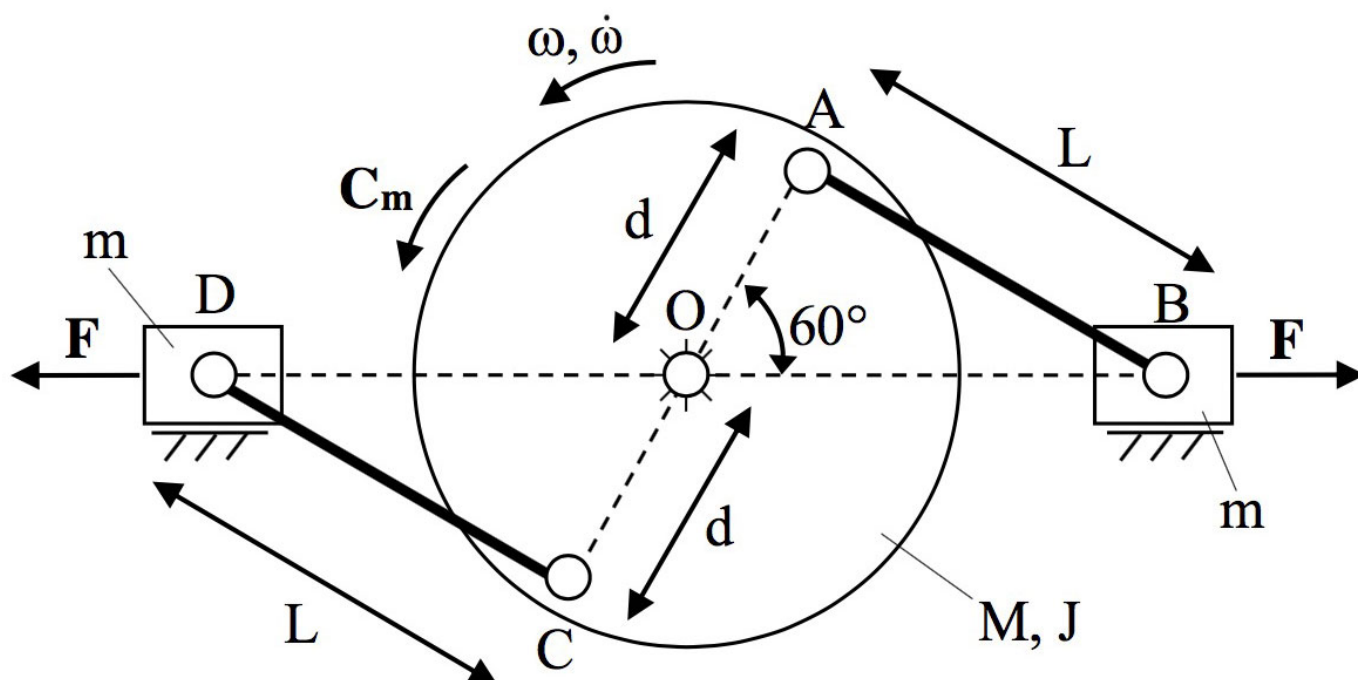


Figura 2.14: Momento flettente nell'asta CD.



## 2.3 Tema d'esame del 10/09/2014

### 2.3.1 Primo esercizio



$$d = 0.1 \text{ m} \quad L = d\sqrt{3} \quad M = 4 \text{ kg} \quad J = 0.03 \text{ kgm}^2$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad \omega = 50 \text{ rad/s} \quad \dot{\omega} = 5 \text{ rad/s}^2 \quad F = 100 \text{ N}$$

Il sistema rappresentato in figura è posto nel piano verticale. Il disco, avente massa  $M$  e momento d'inerzia  $J$  è incernierato a terra in  $O$ , mentre in  $A$  e  $C$  sono incernierate due aste di lunghezza  $L$ , con massa e momento di inerzia trascurabili. Agli estremi delle aste sono incernierati due corsei, entrambi di massa  $m$ , vincolati a scorrere lungo due guide orizzontali e ai quali sono applicate due forze  $F$  aventi lo stesso modulo e la stessa direzione, ma versi opposti. Si consideri trascurabile l'attrito tra i due corsei e le rispettive guide. Come indicato in figura, sul disco  $AB$  agisce una coppia  $C_m$ .

Nota la geometria del sistema e assegnate la velocità e l'accelerazione angolare del disco si chiede di calcolare:

1. La velocità e l'accelerazione dei  $B$  e  $D$ .
2. La coppia  $C_m$  necessaria per garantire la condizione di moto assegnata.

### 2.3.2 Soluzione primo esercizio (non verificata)

#### Osservazioni

1. In ogni dato momento,  $a_D = -a_B$  e  $v_D = -v_B$ .

#### Primo punto

**Definizione dell'equazione di chiusura** sicché il sistema risulta simmetrico lungo la bisettrice  $y = -x$  possiamo trattare uno dei due lati singolarmente, attendendo un risultato analogo sulla parte opposta, calcolabile cambiando di segno. Definisco quindi l'equazione di chiusura dell'esercizio come:

$$(O - A) + (A - B) = (O - B)$$

**Spostamento** Dopo aver definito le seguenti variabili,  $d = OA$ ,  $L = AB$ ,  $b = OB$ ,  $\alpha$  l'angolo interno in O e  $\beta$  l'angolo interno in B, vado a scrivere l'espressione dello spostamento con il metodo dei numeri complessi.

$$de^{i\alpha} + Le^{i\beta} = b$$

Scompongo cartesianamente ed ottengo:

$$\begin{cases} d \sin \alpha + L \sin \beta = 0 \\ d \cos \alpha + L \cos \beta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \arcsin\left(-\frac{d \sin \alpha}{L}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ b = d \cos \alpha + L \cos \beta = 0.2 \text{ m} \end{cases}$$

I risultati ottenuti sono in linea con la geometria illustrata, e mostrano ancor meglio, se non fosse già chiaro, che i segmenti OAB danno origine ad un triangolo rettangolo.

**Velocità** Derivo lo spostamento ed ottengo la velocità, ricordando che i termini variabili sono  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $b$ :

$$d\dot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} + L\dot{\beta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} = \dot{b}$$

Scompongo cartesianamente, ricordando che  $\dot{\alpha} = \omega$ :

$$\begin{cases} d\omega \cos(\alpha) + L\dot{\beta} \cos(\beta) = 0 \\ -d\omega \sin(\alpha) - L\dot{\beta} \sin(\beta) = \dot{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta} = -\frac{d\omega \cos(\alpha)}{L \cos(\beta)} = -16.6 \text{ rad/s} \\ \dot{b} = -d\omega \sin(\alpha) - L\dot{\beta} \sin(\beta) = -5.76 \text{ m/s} \end{cases}$$

**Accelerazione** Derivo nuovamente ed ottengo l'accelerazione, prestando attenzione che i termini variabili sono  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{b}$ ,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$ :

$$d\ddot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} - d\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} + L\ddot{\beta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} - L\dot{\beta}^2 e^{i\beta} = \ddot{b}$$

Scompongo cartesianamente, ricordando che  $\ddot{\alpha} = \dot{\omega}$ :

$$\begin{cases} d\dot{\omega} \cos \alpha - d\omega^2 \sin \alpha + L\ddot{\beta} \cos \beta - L\dot{\beta}^2 \sin \beta = 0 \\ -d\dot{\omega} \sin \alpha - d\omega^2 \cos \alpha - L\ddot{\beta} \sin \beta - L\dot{\beta}^2 \cos \beta = \ddot{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\beta} = \frac{d\omega^2 \sin \alpha + L\dot{\beta}^2 \sin \beta - d\dot{\omega} \cos \alpha}{L \cos \beta} = 1282.6 \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{b} = -d\dot{\omega} \sin \alpha - d\omega^2 \cos \alpha - L\ddot{\beta} \sin \beta - L\dot{\beta}^2 \cos \beta = -55.7 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Riassumendo,  $v_b = -v_d = -5.76 \text{ m/s}$  e  $a_b = -a_d = -55.7 \text{ m/s}^2$

**Secondo punto**

Uso l'equazione del bilancio di potenze per andare a calcolare il valore assunto di  $C_m$  nella corrente condizione di moto.

$$\sum W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

**Energia cinetica totale** Per determinare l'energia cinetica totale, vado a considerare tutte le masse in movimento rotatorio o traslatorio, in questo frangente tutte.

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v_b^2 + \frac{1}{2} m v_d^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 + m v^2$$

**Derivo energia cinetica**

$$\frac{dE_c}{dt} = J \omega \dot{\omega} + 2 m v a$$

**Potenza totale** Per determinare la potenza totale, vado a considerare tutte le forze e le coppie che vengono applicate a corpi in movimento.

Essendo sul piano verticale, vanno considerate le forze peso, ma in questo caso tutti i baricentri di corpi rotanti corrispondono con il centro geometrico e tutti i corpi sono vincolati a terra, per cui ad ogni forza peso corrisponde una forza normale uguale ed opposta.

Non sono presenti attriti di alcun genere, nè volventi, nè dinamici, nè statici.

L'unica forza da prendere in considerazione è la forza  $\vec{F}$ , che agisce sui due corsoi. Ogni corsoio, possiede una velocità con direzione uguale ed opposta alla forza che vi viene applicata, per cui tutte esse vanno a formare un angolo di  $\pi$  con il vettore  $\vec{v}$  corrispondente.

La coppia  $C_m$ , infinite, viene data dal testo come orientata nella stessa direzione di  $\omega$ .

$$\sum W_i = \vec{C}_m \cdot \vec{\omega} + \vec{F}_D \cdot \vec{v}_D + \vec{F}_B \cdot \vec{v}_B$$

Risolvero il prodotto scalare sostituendo con la formula nota:  $\vec{F} \cdot \vec{v} = |F||v| \cos \theta$  con  $\theta$  definito come l'angolo compreso tra i due vettori:

$$\sum W_i = C_m \omega \cos 0 + 2 F v \cos \pi = C_m \omega - 2 F v$$

**Uso il bilancio delle potenze**

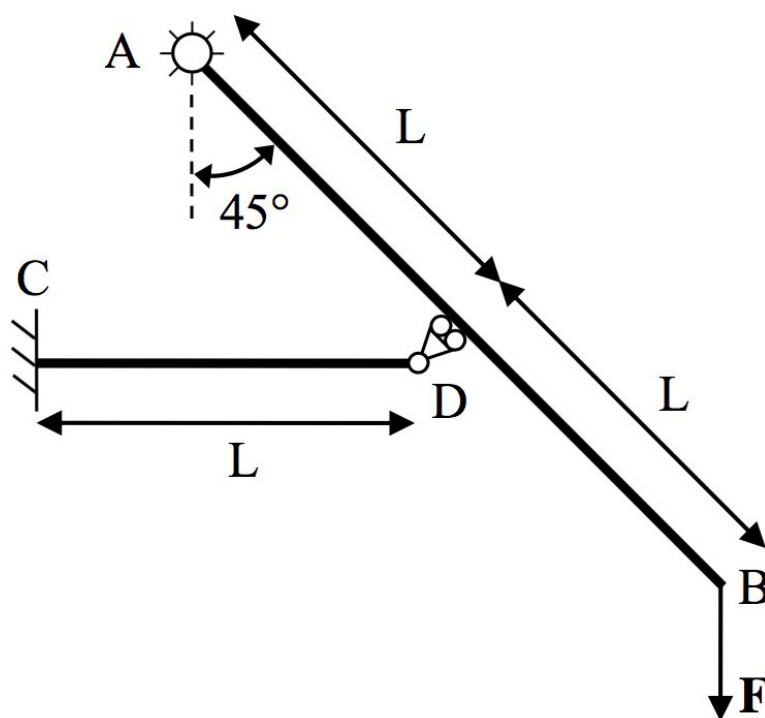
$$C_m \omega - 2 F v = J \omega \dot{\omega} + 2 m v a \quad (2.1)$$

$$C_m \omega = 2 F v + J \omega \dot{\omega} + 2 m v a \quad (2.2)$$

$$C_m = \frac{2 F v + J \omega \dot{\omega} + 2 m v a}{\omega} \quad (2.3)$$

Risolvero numericamente ed ottengo:

$$C_m = 36 \text{ Nm} \quad (2.4)$$

**2.3.3 Secondo esercizio**

La struttura in figura è soggetta al solo carico verticale  $F$ . Si chiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari in A e C.
2. Le azioni interne nella asta AB (disegnare i corrispondenti diagrammi).

### 2.3.4 Soluzione secondo esercizio (non verificata)

#### Osservazioni

1. La struttura è composta da 2 aste e 3 vincoli: un carrello, una cerniera esterna ed un incastro.
2. Il punto A **NON** si trova ad un'ascissa  $x = \frac{L}{2}$  ma  $x = L(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

#### Analisi preliminare di isostaticità

Verifico che  $gdl_{tot} = gdv_{tot}$ :

$$gdv: \begin{cases} gdv_{cerniera_{esterna}} = 2 \\ gdv_{incastro} = 3 \\ gdv_{carrello} = 1 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{aste} = 6 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 2.15: Verifica preliminare di isostaticità.

#### Vincoli esterni

Considerando il sistema come un corpo rigido, andiamo a sostituire le reazioni vincolari dei soli vincoli esterni (Figura 2.16):

$$\begin{cases} H_A = -H_C \\ V_A + V_C = F \\ M_C + L \frac{\sqrt{2}}{2} H_A - L(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) V_A + L(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) F = 0 \end{cases}$$

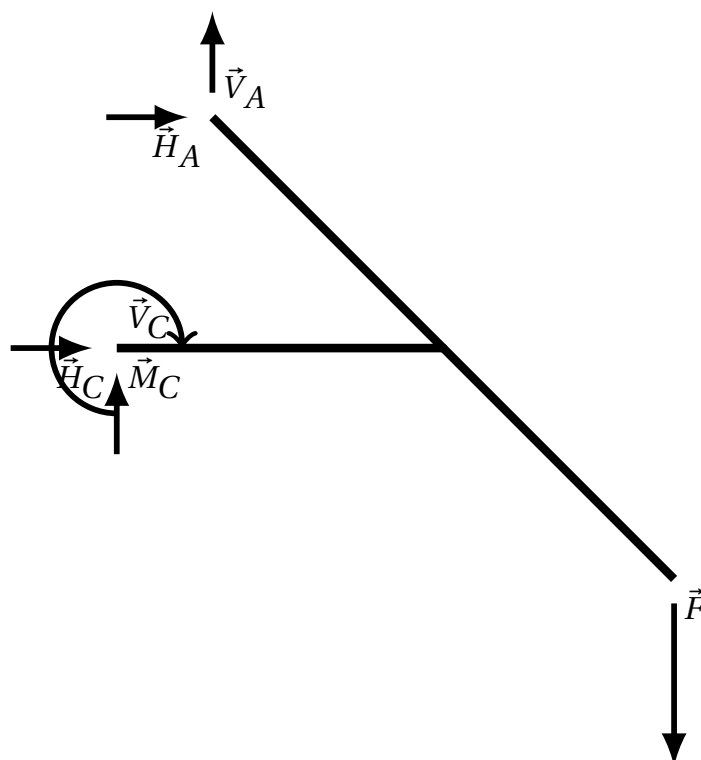


Figura 2.16: Analisi dei vincoli esterni

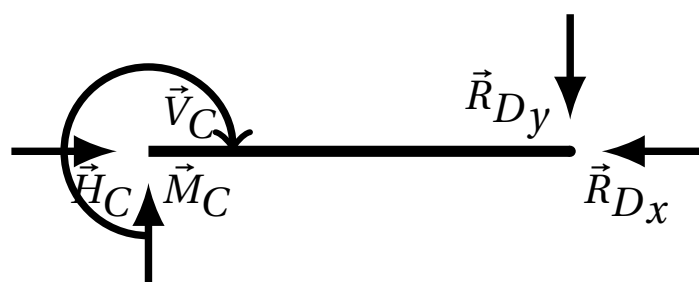
**Reazioni vincolari nell'asta CD**

Figura 2.17: Reazioni vincolari nell'asta CD

$$\begin{cases} R_{Dx} = H_C \\ R_{Dy} = V_C \\ M_C = -LR_{Dy} = -LV_C \end{cases}$$

Siccome la reazione vincolare del carrello agisce ad un angolo di 45 deg, è possibile affermare che:  $R_{Dx} = R_{Dy}$ .

Ne segue che:

$$\begin{cases} R_{Dx} = R_{Dy} \\ H_C = V_C \\ M_C = -LR_{Dy} = -LV_C \end{cases}$$

Risolvero il sistema dei vincoli esterni sostituendo:

$$M_C = -LV_C; \quad V_A = F - V_C; \quad H_A = -H_C = -V_C;$$

$$M_C + L \frac{\sqrt{2}}{2} H_A - L(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) V_A + L(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) F = 0 \quad (2.1)$$

$$-LV_C - L \frac{\sqrt{2}}{2} V_C - L(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(F - V_C) + L(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) F = 0 \quad (2.2)$$

$$-LV_C - L \frac{\sqrt{2}}{2} V_C + L(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) V_C - L(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) F + L(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) F = 0 \quad (2.3)$$

$$-\sqrt{2} V_C + \sqrt{2} F = 0 \quad (2.4)$$

$$V_C = F \quad (2.5)$$

### Ricapitolo soluzione primo punto

$$A: \begin{cases} H_A = -F \\ V_A = 0 \end{cases}$$

(a) Reazioni vincolari in A.

$$C: \begin{cases} H_C = F \\ V_C = F \\ M_C = -LF \end{cases}$$

(b) Reazioni vincolari in C.

### Secondo punto

Per meglio visualizzare le componenti di taglio e sforzo normale, ridisegno l'asta AB con i vettori secondo i versi corretti:

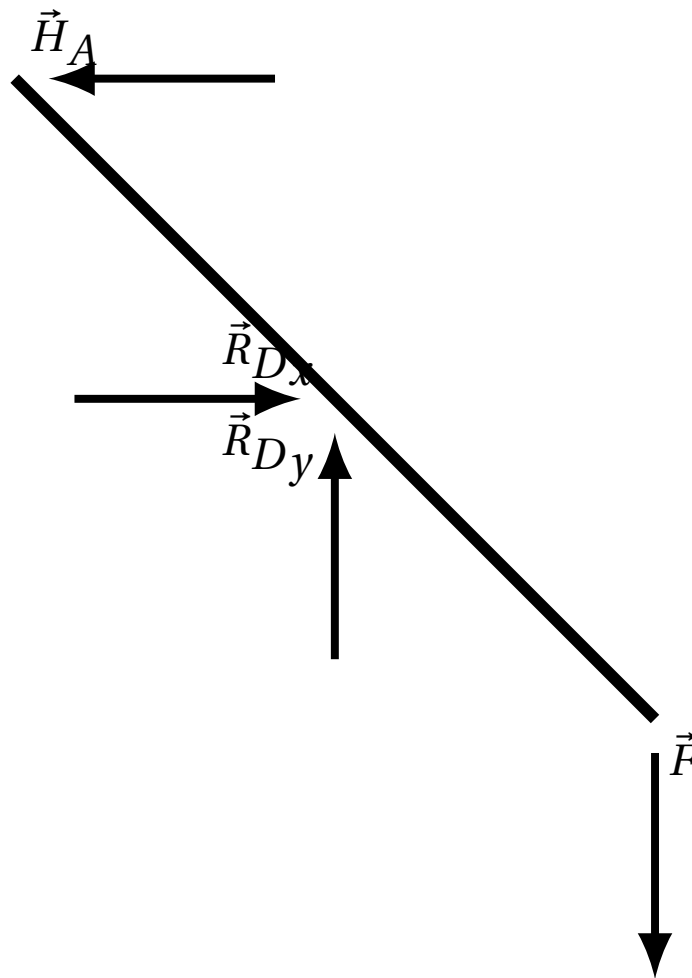


Figura 2.19: Reazioni vincolari nell'asta AB con modulo e verso corretto

La forza  $R_D$  impone solo un taglio, mentre le rimanenti impongono sia una componente di taglio che una di sforzo.

$$R_D = \sqrt{2}F$$

**Sforzo normale** Le forze  $H_A$  ed  $F$  impongono uno sforzo normale di **trazione**, quindi positivo.

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$



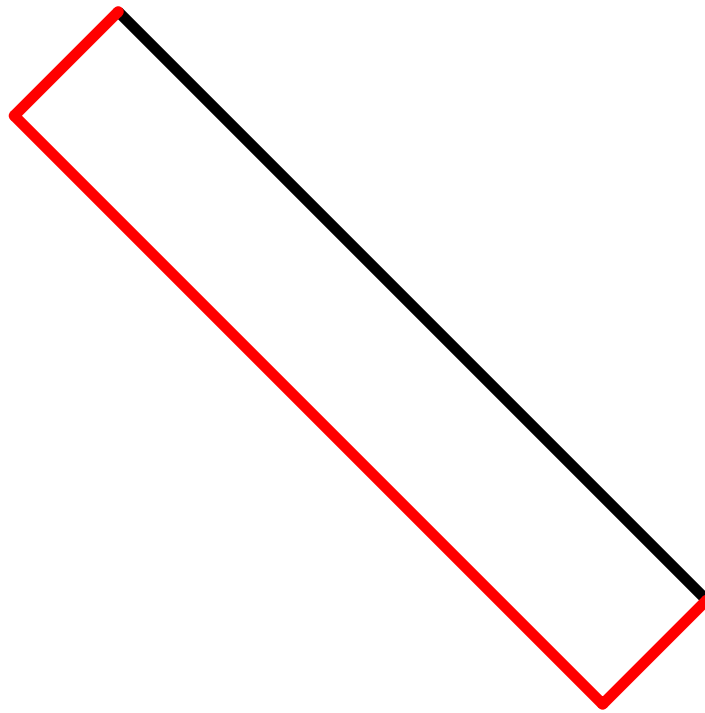


Figura 2.20: Sforzo normale nell'asta AB

**Taglio** Le forze  $H_A$  ed  $R_D$  impongono una rotazione **anti-oraria**, quindi negativa, mentre le forze  $R_D$  e  $F$  una **oraria**, quindi, sempre seguendo la convenzione, positiva.

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

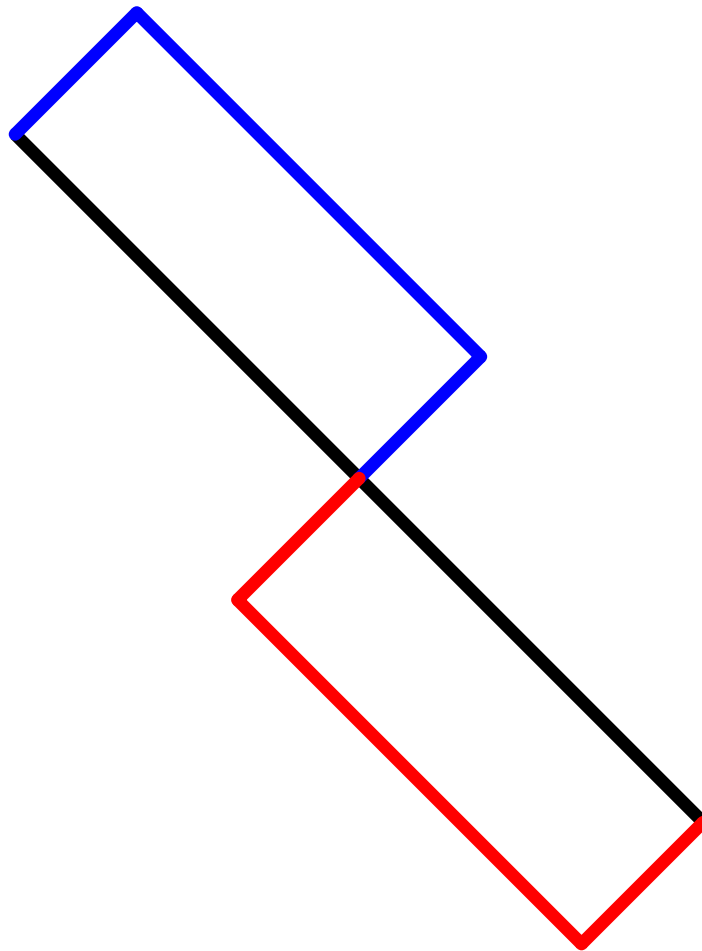


Figura 2.21: Taglio nell'asta AB

**Momento flettente** Il momento flettente raggiunge il valore massimo nel punto di taglio massimo, cioè D, in cui  $M_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}LF$ . Le fibre tese, in questo caso, si trovano sul lato di destra.

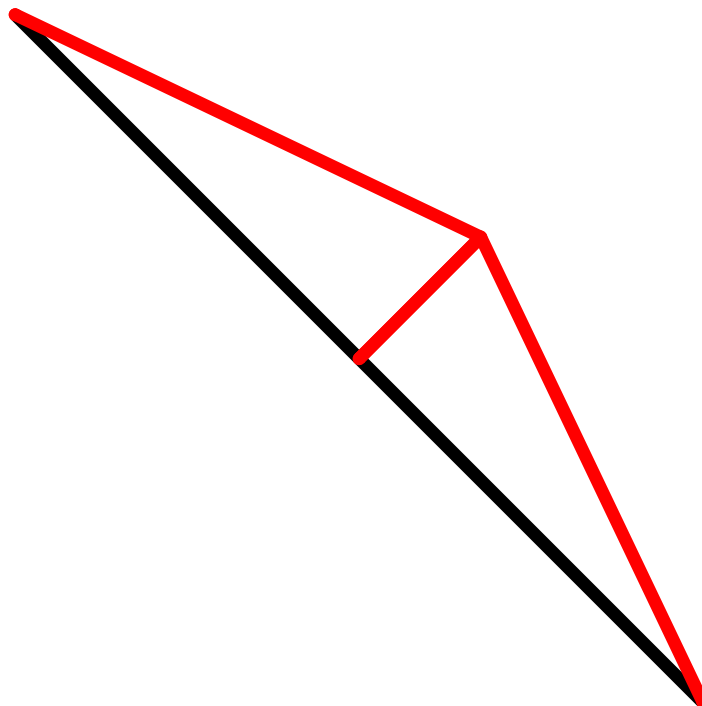
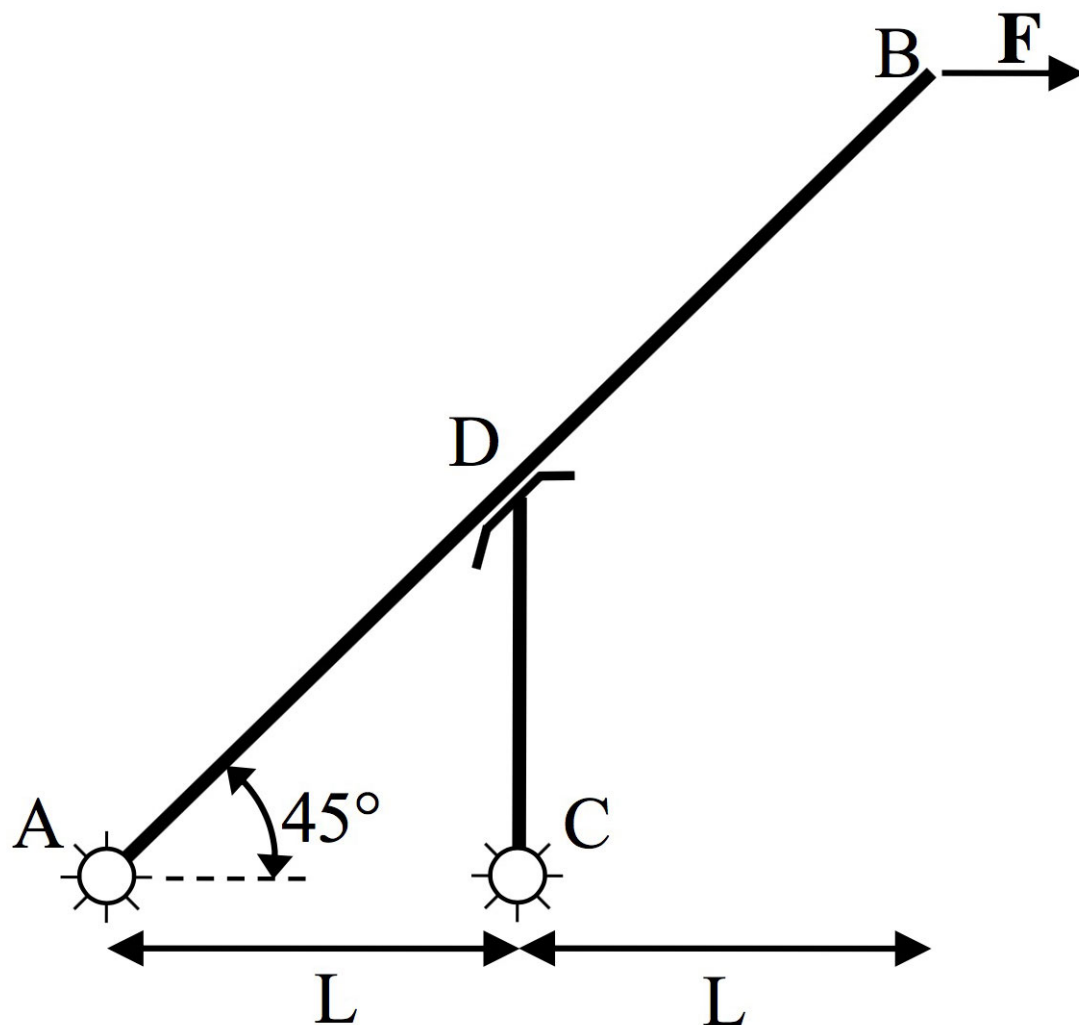


Figura 2.22: Momento flettente nell'asta AB

## 2.4 Tema d'esame del 24/09/2014

### 2.4.1 Secondo esercizio



La struttura in figura è soggetta alla sola forza orizzontale  $F$ .

Si chiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari in A e C.
2. Le azioni interne nella asta AB (disegnare i corrispondenti diagrammi).

## 2.4.2 Soluzione secondo esercizio

### Osservazioni

1. La struttura è composta da 2 corpi rigidi, le aste, e 3 vincoli doppi: due cerniere e un pattino.
2. Il pattino ha una reazione assiale che agisce tangenzialmente sull'asta, ad un angolo di 45 deg.

### Analisi preliminare di isostaticità

Verifico che  $gdl_{tot} = gdv_{tot}$ :

$$gdv: \begin{cases} gdv_{cerniera_{esterna}} = 4 \\ gdv_{pattino} = 2 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{aste} = 6 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 2.23: Verifica preliminare di isostaticità.

### Primo punto

**Vincoli esterni** Per prima cosa descriviamo con un sistema di equazioni di equilibrio statico le reazioni vincolari esterne sotto l'effetto della forza  $F$ , rappresentate in figura 2.24:

Scelgo arbitrariamente come punto in cui calcolare il momento totale  $A$ , normalmente si sceglie il punto con più forze applicate o dove è già applicato un momento (per esempio un incastro) per semplificare i calcoli.

Per definire il segno di un momento, guardo la direzione di rotazione verso cui la forza spinge il vettore di spostamento normale. Si sceglie una direzione positiva arbitrariamente, basta mantenerla per l'intera equazione, per esempio in questo esercizio scelgo positiva la direzione oraria.

1. Il vettore  $\vec{F}$  ha un vettore di spostamento normale di modulo  $2L$  e ruota in senso **orario**.
2. Il vettore  $\vec{H}_C$  ha un vettore di spostamento normale di modulo  $L$  e ruota in senso **anti-orario**.
3. Il vettore  $\vec{V}_C$  ha un vettore di spostamento unicamente tangente, per cui non impone momento.

$$\begin{cases} H_A + H_C = F \\ V_A - V_C = 0 \\ M_A = 0 = 2LF + -LV_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + H_C = F \\ V_A = 2F \\ V_C = 2F \end{cases}$$

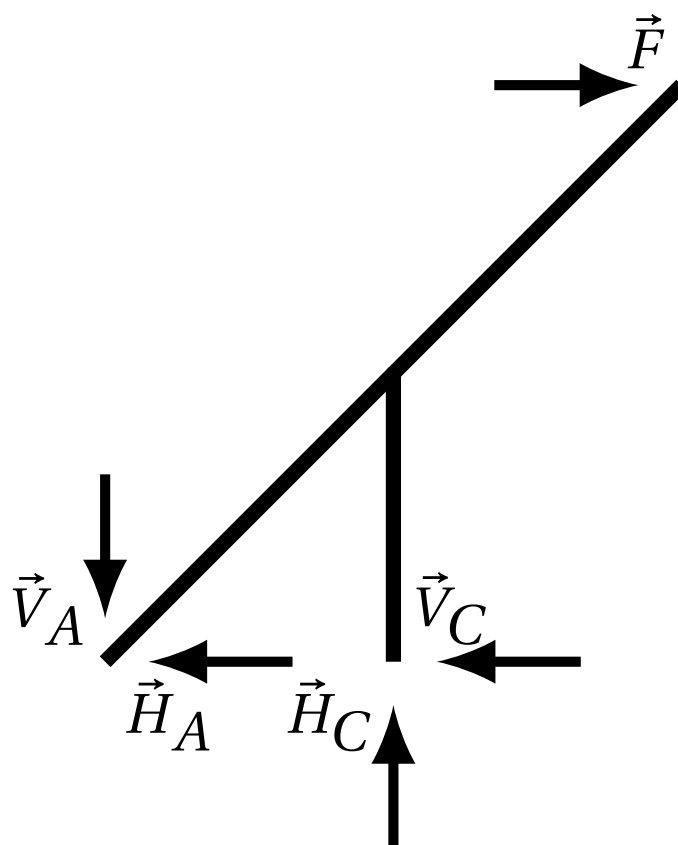


Figura 2.24: Analisi dei vincoli esterni

**Asta CD** Questa asta è posta tra un pattino ed una cerniera. Le reazioni della cerniera devono quindi coincidere con le componenti della reazione assiale del pattino.

Il pattino è posto in un modo per cui la sua reazione assiale è a 45 deg, per cui le componenti  $R_{xD} = R_{yD}$ .

**⚠ N.B.** La direzione del momento legato alla reazione del vincolo **pattino**, come negli altri vincoli del resto, è legata alla direzione della forza tangente. Se la forza tangente è orientata verso il basso (in questo caso la reazione assiale) il momento è orientato in senso **anti-orario**, altrimenti è orientato in senso **orario** quando la reazione tangente è verso l'alto.

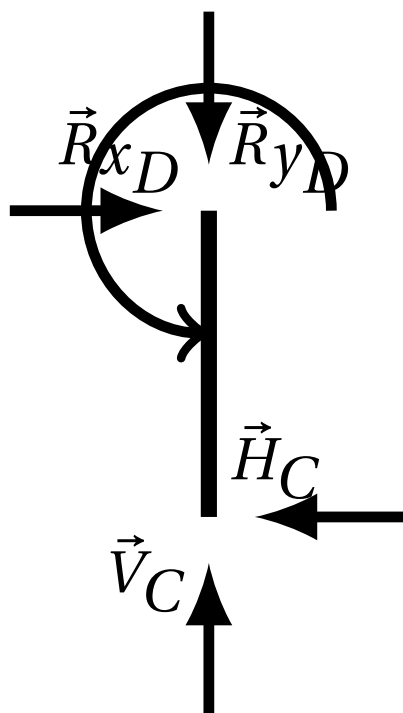


Figura 2.25: Analisi delle reazioni vincolari nell'asta CD

$$\begin{cases} H_C = R_{x_D} \\ V_C = R_{y_D} \\ M_D = LH_C \\ R_{y_D} = R_{x_D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = 2FM_D = L2F \end{cases}$$

Ora posso quindi risolvere il sistema precedente che risulta:

$$\begin{cases} H_A = -F \\ H_C = 2F \\ V_A = 2F \\ V_C = 2F \end{cases}$$

### Riassunto soluzione primo punto

Mantenendo il verso dei vettori coerente con quello in figura 2.24, le reazioni vincolari sono:

$$A: \begin{cases} H_A = -F \\ V_A = 2F \end{cases}$$

(a) Reazioni vincolari in A.

$$C: \begin{cases} V_C = 2F \\ H_C = 2F \end{cases}$$

(b) Reazioni vincolari in C.

## Secondo punto

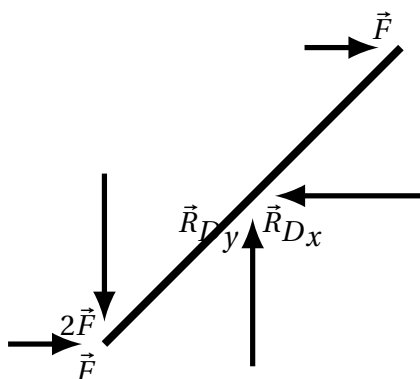


Figura 2.27: Reazioni vincolari nell'asta AB

Proiettando i vettori sugli assi normali e tangenti all'asta, ottengo:

$$A: \begin{cases} T = \sqrt{2}F + \frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{3\sqrt{2}}{2}F \\ N = \sqrt{2}F - \frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} T = \sqrt{2}F + \sqrt{2}F = 2\sqrt{2}F \\ N = \sqrt{2}F - \sqrt{2}F = 0 \end{cases}$$

$$F: \begin{cases} T = \frac{\sqrt{2}}{2}F \\ N = \frac{\sqrt{2}}{2}F \end{cases}$$

**Sforzo normale** Lo sforzo normale impone una trazione, per cui è per convenzione positivo:

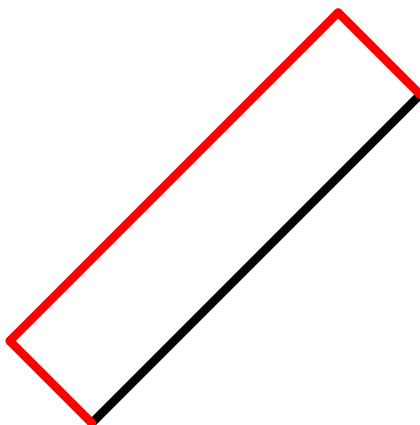


Figura 2.28: Sforzo normale nell'asta AB

**Taglio** Il taglio nella parte inferiore dell'asta impone una rotazione **anti-oraria** ed è pertanto negativo. Nella parte superiore, invece, impone una rotazione oraria e quindi è **positivo**.

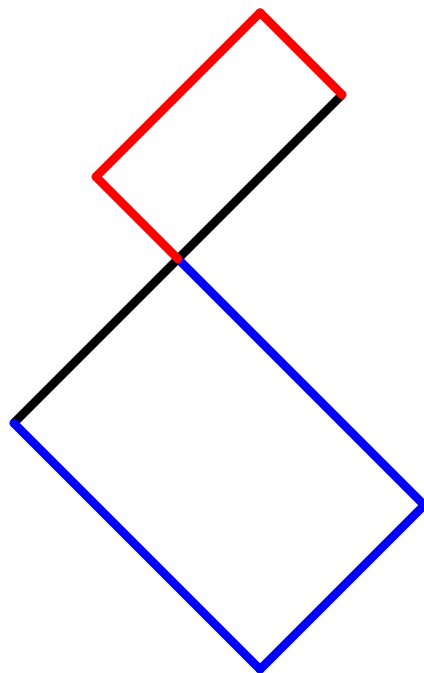


Figura 2.29: Taglio nell'asta AB

**Momento flettente** Per determinare il lato delle **fibre tese** osserviamo il vettore  $T_A$  (o analogamente  $T_F$ ). Questo vettore flette le fibre del lato destro, che quindi saranno identificate come fibre tese.

Il momento flettente, partendo dall'estremo A, aumenta linearmente raggiungendo il massimo nel punto di discontinuità D, in cui assume il valore di  $M_{A_{max}} = \frac{2}{\sqrt{2}}L \frac{3\sqrt{2}}{2}F = 3LF$ .

Procedendo invece dall'estremo B, aumenta sempre linearmente raggiungendo il massimo in D, ma qui assume il valore  $M_{B_{max}} = \frac{2}{\sqrt{2}}L \frac{\sqrt{2}}{2}F = LF$ .

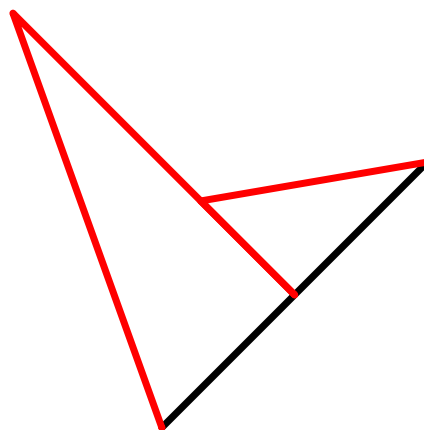
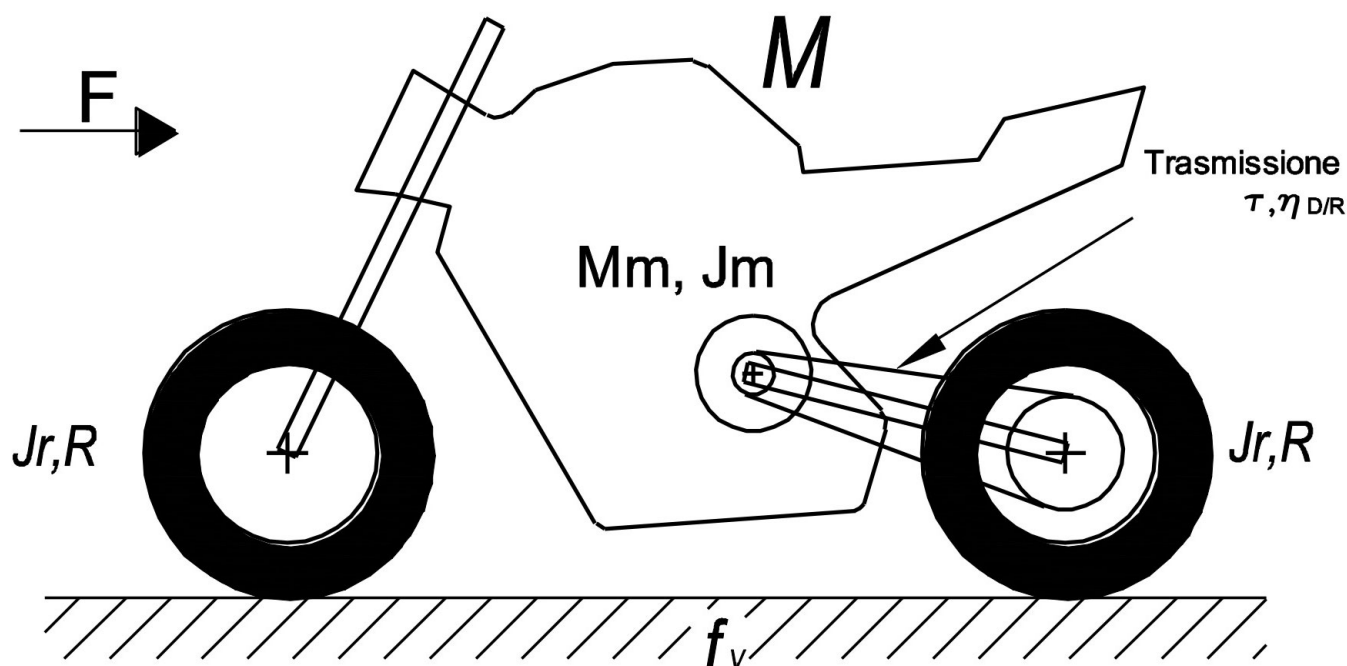


Figura 2.30: Momento flettente nell'asta AB



## 2.4.3 Terzo esercizio



$$M = 250 \text{ kg} \quad J_r = 0.6 \text{ kgm}^2 \quad R = 0.25 \text{ m} \quad J_m = 0.1 \text{ kgm}^2 \quad f_v = 0.03$$

$$k = 0.3 \text{ kg/m} \quad \tau = \frac{1}{6} \quad \mu_D = 0.9 \quad \mu_R = 0.8$$

Il veicolo rappresentato in figura, posto nel piano verticale, procede su strada piana. Il motore, avente momento d'inerzia  $J_m$  e coppia motrice  $M_m$ , è collegato alla ruota posteriore mediante una trasmissione a catena di caratteristiche note (rapporto di trasmissione  $\tau$ , rendimento in moto diretto  $\mu_D$ , rendimento in moto retrogrado  $\mu_R$ ). Al veicolo è applicata una forza aerodinamica resistente  $F = kv^2$ . Si consideri la resistenza al rotolamento nel contatto tra ruote e asfalto (coefficiente  $f_v$ ). Si trascurino le masse non esplicitamente indicate nel disegno. Si chiede di:

1. Calcolare la velocità del veicolo a regime, nota la coppia motrice  $M_m$  pari a 15 Nm.
2. Partendo dalla situazione del punto 1, calcolare l'accelerazione del veicolo a fronte di una coppia motrice  $M_m$  erogata dal motore pari a 30 Nm.

### 2.4.4 Soluzione terzo esercizio

#### Primo punto

**Legami cinematici** Data una velocità angolare motrice  $\omega_m$ , posso andare a definire la velocità con cui il veicolo si muove come:

$$v = R\omega_r = R\tau\omega_m$$

#### Potenza motrice

$$W_m = M_m\omega_m$$

**Potenza resistente** La potenza resistente è composta da tutte le forze ed attriti agenti sul sistema. In questo caso esse sono:

1. Forza peso  $F_g$  della massa  $M$  è contro bilanciata da una forza normale uguale ed opposta.
2. Forza areodinamica resistente  $F_{aria}$ , che forma un angolo di  $\pi$  con la velocità.
3. Forza di attrito volvente  $F_v$ , che forma un angolo di  $\pi$  con la velocità.

Risolvero il *prodotto scalare* tramite la formula  $|a||b|\cos\theta$  con  $\theta$  definito come l'angolo tra i due vettori, ed ottengo:

$$\begin{aligned} W_r &= \vec{F}_{aria} \cdot \vec{v} + \vec{F}_v \cdot \vec{v} \\ &= F_{aria}v \cos\pi + F_vv \cos\pi \\ &= -F_{aria}v - F_vv \end{aligned}$$

**Forza d'attrito volvente** La forza d'attrito volvente è definita come la reazione normale del piano  $\vec{N}$  moltiplicata per il coefficiente d'attrito  $f_v$ . In questo caso, la reazione normale risulta uguale, in modulo, alla forza peso.

$$F_v = F_g f_v = Mg f_v$$

**Forza areodinamica resistente** Viene definita tramite la formula fornita dal testo:

$$F_{aria} = kv^2$$

Sostituisco i termini nell'espressione della potenza resistente ed ottengo:

$$W_r = -kv^3 - Mgf_vv$$

**Identificazione del tipo di moto** Siamo in condizione di regime, per cui la variazione di energia cinetica è nulla. Per identificare il tipo di moto uso la seguente disequazione:

$$W_r > 0$$

Se essa risulta vera, il moto è **retrogrado**, altrimenti diretto:

$$-kv^3 - Mgf_vv > 0$$

Siccome tutti i coefficienti dell'equazione hanno segno negativo, l'equazione è falsa. Il moto è quindi **diretto**.

**Potenze perdute** Vista la condizione di regime e di moto diretto, uso la formula corrispondente per calcolare la potenza perduta:

$$W_p = -(1 - \mu_D)W_m$$

**Bilancio di potenze** Utilizzo il bilancio delle potenze e risolvo in funzione della velocità:

$$W_m + W_r + W_p = 0 \quad (2.1)$$

$$W_m + W_r - (1 - \mu_D) W_m = 0 \quad (2.2)$$

Semplifico la potenza motrice:

$$W_r + \mu_D W_m = 0 \quad (2.3)$$

Sostituisco le espressioni:

$$M_m \omega_m \mu_D - k v^3 - M g f_v v = 0 \quad (2.4)$$

Sostituisco il legame cinematico tra velocità e velocità angolare  $v = R \tau \omega_m$ :

$$\frac{M_m \mu_D v}{R \tau} - k v^3 - M g f_v v = 0 \quad (2.5)$$

Semplifico la velocità:

$$\frac{M_m \mu_D}{R \tau} - k v^2 - M g f_v = 0 \quad (2.6)$$

Risolvo in funzione di  $v$ :

$$v = \sqrt{\frac{\frac{M_m \mu_D}{R \tau} - M g f_v}{k}} \quad (2.7)$$

Per le condizioni di moto, la velocità deve essere positiva, per cui solo la risposta positiva può essere accettata.

$$v = 28.9 \text{ m/s} \quad (2.8)$$

## Secondo punto

Non siamo più in condizioni di regime, ma di transitorio. È dunque necessario calcolare la variazione di energia cinetica del sistema.

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_r (\tau \omega_m)^2 + \frac{1}{2} J_r (\tau \omega_m)^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} M (\tau R \omega_m)^2 + 2 \frac{1}{2} J_r (\tau \omega_m)^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

$$E_c = \omega_m^2 \left( \frac{1}{2} M \tau^2 R^2 + J_r \tau^2 + \frac{1}{2} J_m \right)$$

Derivo l'espressione ed ottengo:

$$\frac{dE_c}{dt} = \omega_m \dot{\omega}_m (M \tau^2 R^2 + 2 J_r \tau^2 + J_m)$$

**Verifico il tipo di moto** Verrebbe istintivo dire che siamo sempre in condizioni di moto diretto, ma verifico comunque il tipo di moto:

$$W_r - \frac{dE_{c_r}}{dt} > 0$$

$$-kv^3 - Mgf_v v - \omega_m \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r \tau^2) > 0$$

Nuovamente i coefficienti sono tutti negativi, e il moto non può che essere diretto.

**Potenza perduta** Siccome siamo in condizioni di transitorio, è necessario includere la variazione nel tempo dell'energia cinetica del motore <sup>1</sup> nella formula della potenza perduta:

$$W_p = -(1 - \mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt})$$

**Bilancio di potenze**

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt} \quad (2.1)$$

$$W_m + W_r - (1 - \mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_c}{dt} \quad (2.2)$$

Semplifico l'espressione:

$$W_m + W_r - (1 - \mu_D)(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt} \quad (2.3)$$

$$W_m + W_r - W_m + \frac{dE_{c_m}}{dt} + \mu_D(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt} \quad (2.4)$$

$$W_r + \mu_D(W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt}) = \frac{dE_{M_r}}{dt} \quad (2.5)$$

$$W_r + \mu_D W_m = \frac{dE_{M_r}}{dt} + \mu_D \frac{dE_{c_m}}{dt} \quad (2.6)$$

$$-kv^3 - Mgf_v v + \mu_D M_m \omega_m = \omega_m \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r \tau^2 + \mu_D J_m) \quad (2.7)$$

Sostituisco col legame cinematico  $v = R\tau\omega_m$ :

$$-kv^2 R\tau\omega_m - Mgf_v R\tau\omega_m + \mu_D M_m \omega_m = \omega_m \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r \tau^2 + \mu_D J_m) \quad (2.8)$$

Semplifico  $\omega_m$ :

$$-kv^2 R\tau - Mgf_v R\tau + \mu_D M_m = \dot{\omega}_m (M\tau^2 R^2 + 2J_r \tau^2 + \mu_D J_m) \quad (2.9)$$

$$-kv^2 R\tau - Mgf_v R\tau + \mu_D M_m = \dot{\omega}_m (\tau^2 (MR^2 + 2J_r) + \mu_D J_m) \quad (2.10)$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{\mu_D M_m - kv^2 R\tau - Mgf_v R\tau}{\tau^2 (MR^2 + 2J_r) + \mu_D J_m} \quad (2.11)$$

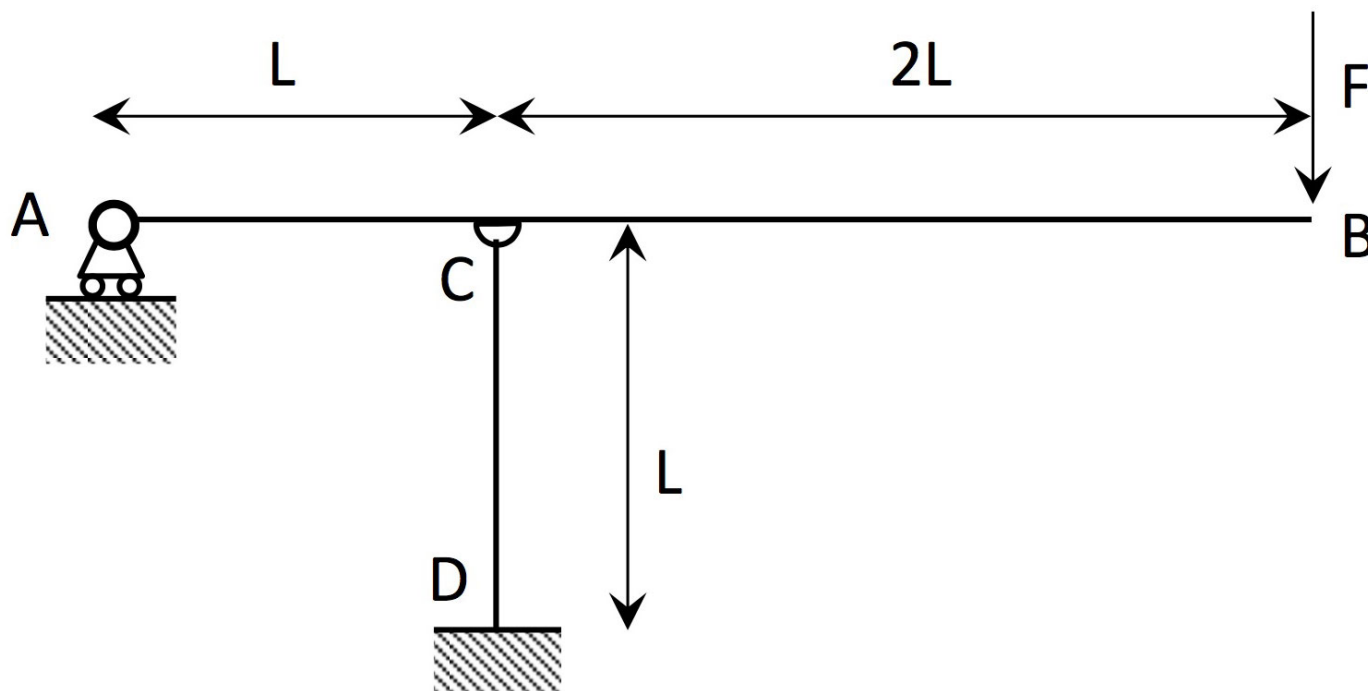
$$\dot{\omega}_m = 24.2 \text{ rad/s}^2 \quad (2.12)$$

$$a = R\tau\dot{\omega} = 1.01 \text{ m/s}^2 \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>perché siamo in condizioni di moto *diretto*, in condizioni di moto *retrogrado* si include la variazione di energia cinetica resistente.

## 2.5 Tema d'esame del 4/02/2015

### 2.5.1 Secondo esercizio



La struttura in figura è soggetta alla sola forza verticale  $F$ . Si chiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari a terra (punti A e D).
2. Le azioni interne nell'asta AB (disegnare i corrispondenti diagrammi).

### 2.5.2 Soluzione secondo esercizio (non verificata)

#### Osservazioni

1. La struttura è formata da due aste, un vincolo a incastro, un vincolo a carrello ed una cerniera interna.

#### Analisi dei vincoli

Tramite il computo dei gradi di vincolo possiamo fare una verifica preliminare di isostaticità:

$$gdv: \begin{cases} gdv_{incastro} = 3 \\ gdv_{carrello} = 1 \\ gdv_{cerniera} = 2(2 - 1) = 2 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{aste} = 6 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 2.31: Verifica preliminare di isostaticità.

Per la verifica preliminare, la struttura risulta isostatica.

#### Primo punto

**Analisi dei vincoli esterni** I vincoli ancorati a terra sono A e D:

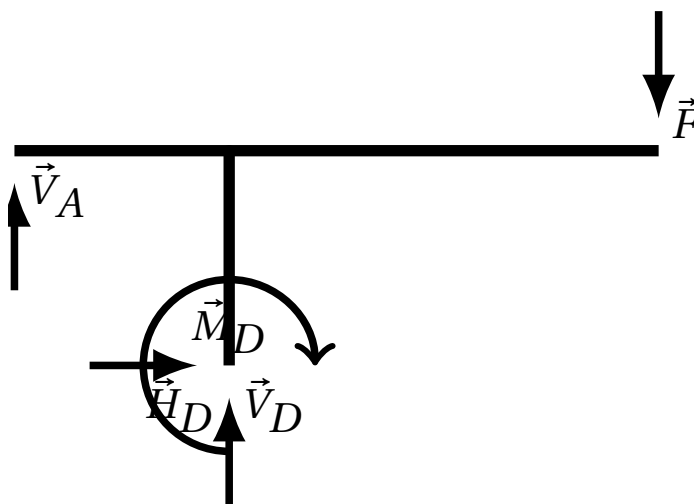


Figura 2.32: Reazioni vincolari dei vincoli esterni

$$\begin{cases} V_A + V_D = F \\ H_D = 0 \\ M_D + LV_A + 2LF = 0 \end{cases}$$

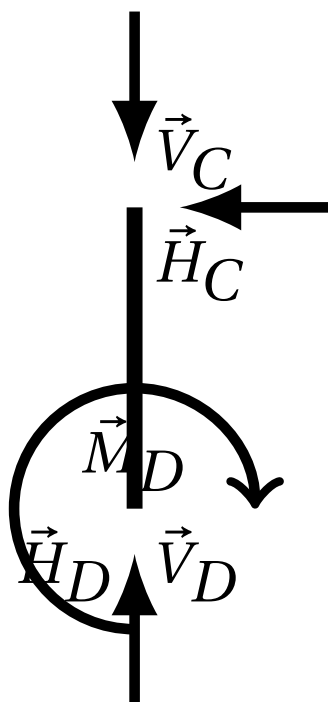


Figura 2.33: Reazioni vincolari nell'asta AB

**Analisi delle reazioni vincolari nell'asta CD**

$$\begin{cases} V_C = V_D \\ H_C = 0 \\ M_D = 0 \end{cases}$$

Sostituisco le identità ottenute nel sistema precedente ed ottengo:

$$\begin{cases} V_D = 3F \\ H_D = 0 \\ V_A = -2F \end{cases}$$

**Secondo punto**

I tre vettori possiedono unicamente componenti di taglio.



Figura 2.34: Grafico sforzo normale nell'asta AB

**Sforzo normale**

**Taglio** In questo caso, il taglio coincide con il valore dei vettori che agiscono sull'asta.

Partendo da sinistra, il vettore  $V_A$  impone una rotazione **anti-oraria** al tronco AC, mentre il vettore  $V_D$  va ad imporre una rotazione oraria con  $F$  nel tronco di destra CB.

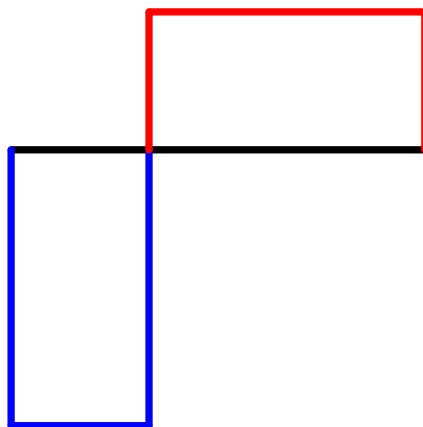


Figura 2.35: Grafico taglio nell'asta AB

**Momento flettente**

$$M_{max} = 2LF$$

Il momento aumenta linearmente fino a raggiungere il massimo nel punto C, in cui la forza  $V_D$  viene applicata, che impone un momento negativo e porta a decrescere linearmente il momento flettente sino a raggiungere 0 nell'estremo opposto. Le fibre tese risultano sul lato superiore.

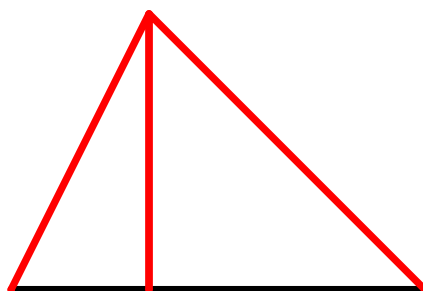
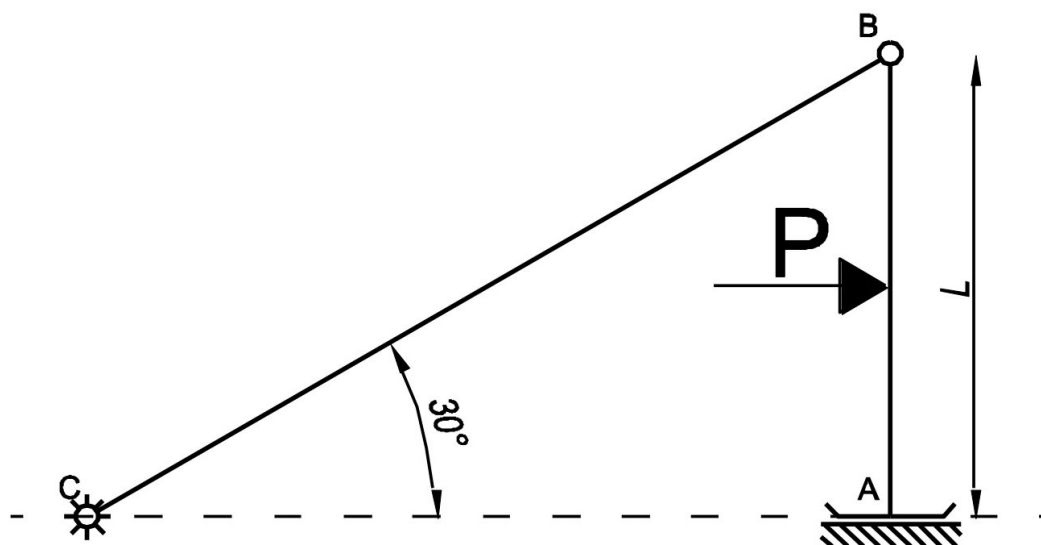


Figura 2.36: Grafico momento flettente nell'asta AB



## 2.6 Tema d'esame del 26/02/2015

### 2.6.1 Secondo esercizio



La struttura in figura è soggetta alla sola forza orizzontale  $P$ .  
Si chiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari a terra (punti A e C).
2. Le azioni interne nell'asta AB (disegnare i corrispondenti diagrammi).

## 2.6.2 Soluzione secondo esercizio

### Osservazioni

1. La struttura è composta da un'asta AC, un pattino ed una biella CB.
2. La biella agisce inclinata di 30 deg, per cui le componenti della reazione assiale saranno rispettivamente  $\frac{2}{2}$  e  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  della reazione.

### Analisi preliminare di isostaticità

Verifico che  $gdl_{tot} = gdv_{tot}$ :

$$gdv: \begin{cases} gdv_{pattino} = 2 \\ gdv_{biella} = 1 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{asta} = 3 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 2.37: Verifica preliminare di isostaticità.

### Primo punto

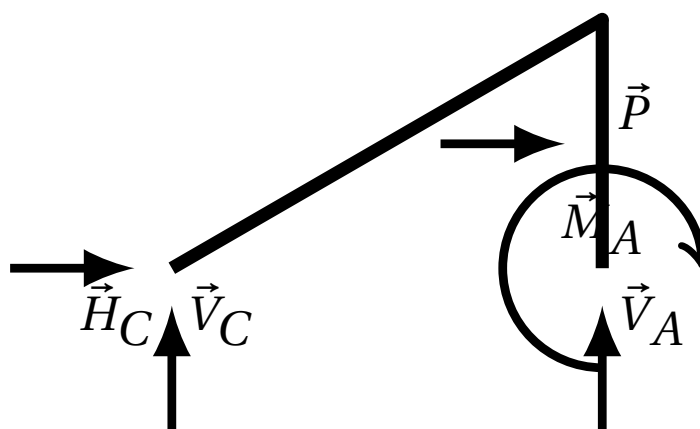


Figura 2.38: Analisi dei vincoli esterni

### Analisi dei vincoli esterni

$$\begin{cases} H_C = -P \\ V_C = -V_A \\ M_A + \frac{1}{2}LP + \sqrt{3}LV_C = 0 \end{cases}$$

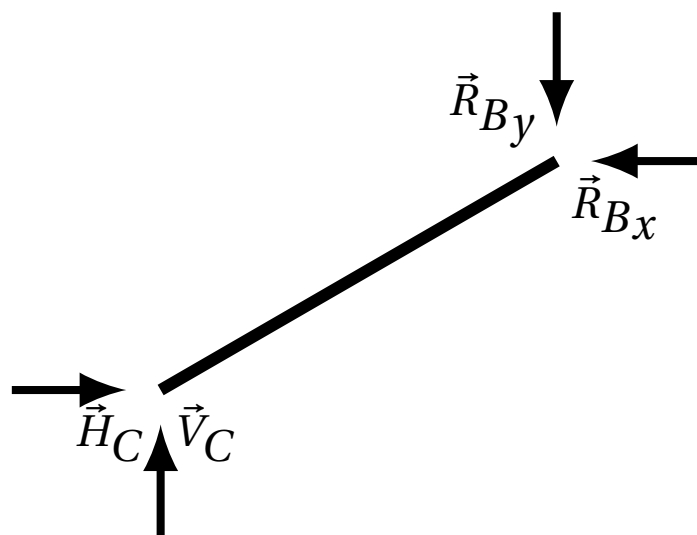


Figura 2.39: Reazioni vincolari nell'asta CB

**Analisi delle reazioni vincolari nell'asta CB**

$$\begin{cases} H_C = R_{Bx} = -P \\ V_C = R_{By} \\ M_C = 0 = \sqrt{3}LR_{By} - LR_{Bx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = R_{Bx} = -P \\ V_C = R_{By} \\ V_C = -\frac{\sqrt{3}}{3}P \end{cases}$$

Sostituisco nell'equazione di equilibrio dei momenti ed ottengo:

$$M_A + \frac{1}{2}LP - \sqrt{3}L \frac{\sqrt{3}}{3}P = 0$$

$$M_A + \frac{1}{2}LP - LP = 0$$

$$M_A = \frac{1}{2}LP$$

$$A: \begin{cases} V_A = \frac{\sqrt{3}}{3}P \\ M_A = \frac{1}{2}LP \end{cases}$$

(a) Reazioni vincolari in A.

$$C: \begin{cases} V_C = -\frac{\sqrt{3}}{3}P \\ H_C = -P \end{cases}$$

(b) Reazioni vincolari in C.

**Riassumendo****Secondo punto**

Le componenti dei vettori, dato che l'asta AB è verticale, coincidono già con le componenti di sforzo normale e taglio.

**Sforzo normale** Lo sforzo normale è di contrazione e quindi è negativo.

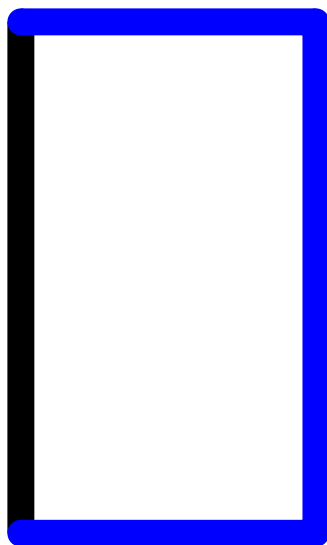


Figura 2.41: Sforzo normale nell'asta AB

**Taglio** Nella tronco superiore, le forze  $H_B$  e  $P$  originano una rotazione **anti-oraria**, e creano quindi un taglio **negativo**. Nella tronco inferiore non è presente taglio.

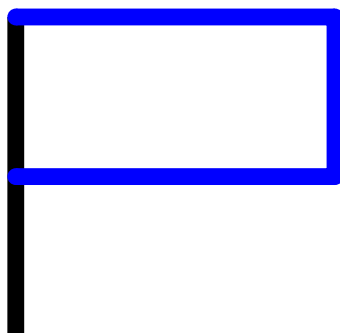


Figura 2.42: Taglio nell'asta AB

**Momento flettente** Il momento flettente raggiunge il punto massimo nel punto di applicazione della forza  $P$ , dove vale  $LP$ . Successivamente si mantiene costante sino a raggiungere il punto A.

Le fibre tese si trovano sul lato di destra.

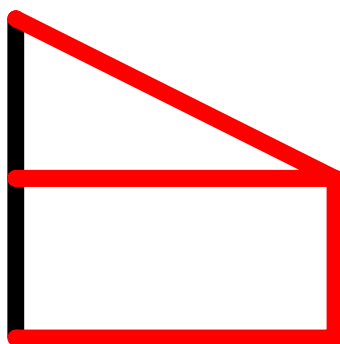
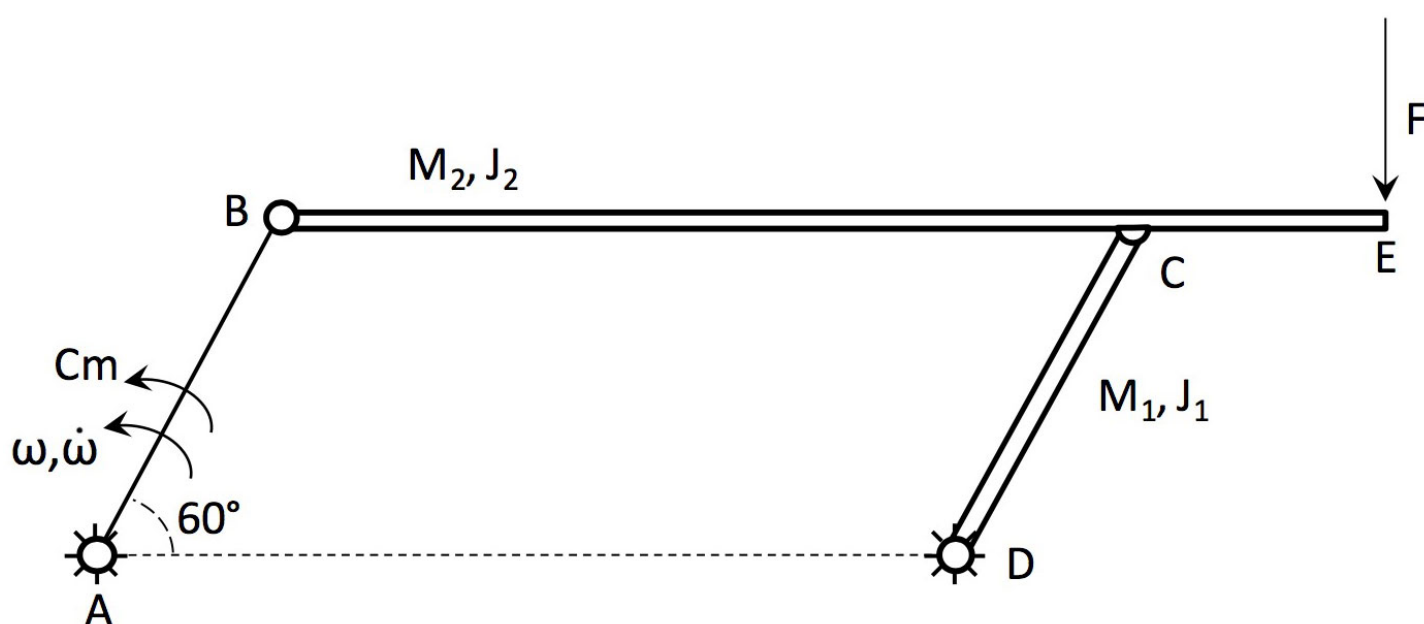


Figura 2.43: Momento flettente nell'asta AB

### 3.1 Tema d'esame del 29/06/2015

#### 3.1.1 Primo esercizio



$$J_2 = 1 \text{ Kg m}^2 \quad M_2 = 20 \text{ Kg} \quad J_1 = 2 \text{ Kg m}^2 \quad M_1 = 30 \text{ Kg} \quad BE = 1 \text{ m}$$

$$AB = CD = 0.5 \text{ m} \quad AD = BC = 0.8 \text{ m} \quad F = 500 \text{ N} \quad \omega = 5 \text{ rad/s} \quad \dot{\omega} = 0.5 \text{ rad/s}^2$$

Il sistema rappresentato in figura è posto nel piano verticale.

Lasta AB, incernierata a terra in A, è collegata attraverso una cerniera in B allasta BE che a sua volta è collegata attraverso una cerniera in C allasta CD. Quest'ultima asta è incernierata a terra in D.

Si consideri trascurabile la massa dell'asta AB, mentre l'asta omogenea CD ha massa  $M_1$  e momento d'inerzia baricentrico  $J_1$  e l'asta omogenea BE ha massa  $M_2$  e momento d'inerzia baricentrico  $J_2$ . Sull'asta AB, che si muove con velocità angolare  $\omega$  e accelerazione angolare  $\dot{\omega}$  note, agisce la coppia  $C_m$  incognita, mentre sul punto E è applicata in direzione verticale una forza  $\vec{F}$  nota.

Nota la geometria, si chiede di calcolare per la condizione di moto assegnata:

1. la velocità e l'accelerazione del punto E.
2. La coppia  $C_m$  necessaria per garantire la condizione di moto assegnata.

### 3.1.2 Soluzione primo esercizio

#### Osservazioni importanti

- È **necessario** in questi esercizi intuire come il sistema si possa muovere.
- Nessuna asta cambia lunghezza (Questo può capitare in alcune condizioni, per esempio nel caso di *glifo oscillante* o di *compressore idraulico*).
- Gli unici oggetti con massa son l'asta BE e l'asta CD.
- Il sistema è posto sul piano verticale, quindi gli oggetti dotati di massa subiscono un'accelerazione verso il basso  $g$  e ovviamente una forza peso  $F_g$  che viene posta nel centro di massa.
- Nella struttura, le due aste inferiori agiscono come un *doppio pendolo*, ognuna ha le caratteristiche di una *biella* (o *pendolo semplice*). L'asta superiore, di conseguenza, sarà sempre parallela al suolo e non avrà mai moto rotatorio ma solo traslatorio.
- L'asta BE è un corpo rigido in moto unicamente traslatorio. la velocità e l'accelerazione dovranno essere quindi uguali in qualsiasi punto (in particolare,  $v_B = v_E$  e  $a_B = a_E = a_{t_B} + a_{n_B}$ ).
- Il punto B può essere considerato un punto posto su una circonferenza di raggio AB, con conseguenti leggi per **velocità** ( $v_B = \omega r$ ), **accelerazione normale** ( $a_{n_B} = \frac{v_B^2}{r}$ ) ed **accelerazione tangente** ( $a_{t_B} = \dot{\omega} r$ ).

**Primo punto** Il calcolo di velocità ed accelerazione del punto E, in questo caso, risulta banale.

Riassumiamo i passaggi fondamentali per cui diventa immediato, già evidenziati più estensivamente nelle osservazioni sovrariportate:

1. L'asta BE è un corpo rigido in moto esclusivamente traslatorio. Ogni suo punto, quindi, possiede la medesima velocità ed accelerazione.
2. Il punto B è considerabile un punto posto su una circonferenza di raggio AB, per cui risultano applicabili le relative leggi del moto.
3. Per rispettare la condizione di moto assegnata (come la coppia  $C_m$  è direzionata) il versore  $\vec{t}$  sarà orientato a  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ , mentre il versore  $\vec{n}$  a  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{3}$ .

$$v_B = AB\omega = 2.5 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_B = 2.5\vec{t} \text{ m/s}$$

$$a_{tB} = AB\dot{\omega} = 0.25 \text{ m/s}^2$$

$$a_{nB} = \frac{v_B^2}{AB} = \frac{AB^2\omega^2}{AB} = AB\omega^2 = 12.5 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_B = 0.25\vec{t} + 12.5\vec{n} \text{ m/s}^2$$

**Secondo punto** Per calcolare la coppia  $C_m$  proseguo col **bilancio di potenze** (figura 3.2):

**Calcolo le potenze totali:**

$$\begin{aligned} \sum W_i &= (\text{Coppie}) \cdot (\text{Velocità angolari}) \\ &+ (\text{Forze peso}) \cdot (\text{Velocità baricentriche}) \\ &+ (\text{Forze}) \cdot (\text{Velocità del punto di applicazione}) \end{aligned}$$

$$\sum W_i = \vec{C}_m \cdot \vec{\omega} + \vec{F}_{gBE} \cdot \vec{v}_{gBE} + \vec{F}_{gCD} \cdot \vec{v}_{gCD} + \vec{F} \cdot \vec{v}_E$$

La velocità baricentrica  $v_{gBE}$  è parte di un corpo rigido che non compie rotazioni, per cui è uguale a quella di qualsiasi altro punto.  
 $v_{gBE} = v_B$

La velocità baricentrica  $v_{gCD}$  è calcolabile tramite la formula usuale  $v_{gCD} = r\omega$ , dove  $r$  è la distanza dal centro di rotazione, in questo caso D, al baricentro dell'asta CD, per cui  $r = \frac{CD}{2}$  e la velocità angolare  $\omega$  coincide a quella di A, per cui  $v_{gCD} = \frac{CD}{2}\omega$ .

$$\sum W_i = \vec{C}_m \cdot \vec{\omega} + M_2 \vec{g} \cdot \vec{v}_B + M_1 \vec{g} \cdot \left(\frac{CD}{2}\vec{\omega}\right) + \vec{F} \cdot \vec{v}_B$$

Risolvero il prodotto scalare, controllando direzione e verso dei vettori.

1. La coppia  $C_m$  e la velocità angolare  $\omega$  sono date come orientate con stessa direzione e verso.
2. La velocità  $v_B$ , per garantire il moto assegnato, è orientata verso l'alto con un angolo di  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ . Ovviamente la forza peso è orientata verso il basso, per cui l'angolo compreso tra i due vettori sarà pari a  $\pi - \frac{\pi}{3}$ .
3. Discorso analogo per l'asta CD.
4. Discorso analogo per l'asta BE



$$\begin{aligned}
\sum W_i &= C_m \omega + M_2 g v_B \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + M_1 g (\frac{CD}{2} \omega) \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + F v_B \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \\
&= C_m \omega - \frac{1}{2} M_2 g (AB \omega) - \frac{1}{2} M_1 g (\frac{CD}{2} \omega) - \frac{1}{2} F (AB \omega) \\
&= C_m \omega - \frac{1}{4} M_2 g \omega - \frac{1}{8} M_1 g \omega - \frac{1}{4} F \omega
\end{aligned}$$

$$E_{m_i} = \frac{1}{2} m_i v_{i_{baricentrica}}^2, \quad E_{J_i} = \frac{1}{2} J_i \omega_i^2,$$

Figura 3.1: Teorema dell'energia cinetica per le masse e per i momenti di inerzia

**Calcolo l'energia cinetica totale:**

$$\begin{aligned}
E_c &= (\text{T. dell'en. cinetica per le masse}) \\
&+ (\text{T. dell'en. cinetica per i momenti di inerzia})
\end{aligned}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_2 v_{gBE}^2 + \frac{1}{2} M_1 v_{gCD}^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_{CD}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{BC}^2$$

Alcune considerazioni sulle *velocità angolari* presenti nell'equazione:

1. Per le velocità vengono fatte le stesse considerazioni precedenti.
2.  $\omega_{BC}$  è l'accelerazione angolare dell'asta BC, ma questa non ruota affatto, il moto che compie è solamente traslatorio. Quindi  $\omega_{BC} = 0$ .
3.  $\omega_{CD}$  corrisponde a  $\omega_A$ .

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} M_2 v_B^2 + \frac{1}{2} M_1 (\frac{CD}{2} \omega)^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} M_2 (AB \omega)^2 + \frac{1}{2} M_1 (\frac{CD}{2} \omega)^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega^2 \\
&= \frac{M_2}{8} \omega^2 + \frac{M_1}{32} \omega^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

Figura 3.2: Bilancio delle potenze

**Derivo l'energia cinetica totale e applico il bilancio delle potenze:**

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{M_2}{4} \omega \dot{\omega} + \frac{M_1}{16} \omega \dot{\omega} + J_1 \omega \dot{\omega}$$

$$C_m \omega - \frac{M_2}{4} g \omega - \frac{M_1}{8} g \omega - \frac{1}{4} F \omega = \frac{M_2}{4} \omega \dot{\omega} + \frac{M_1}{16} \omega \dot{\omega} + J_1 \omega \dot{\omega}$$

Ora possiamo semplificare tutte le velocità angolari  $\omega$  contemporaneamente:

$$C_m - \frac{M_2}{4}g - \frac{M_1}{8}g - \frac{1}{4}F = \frac{M_2}{4}\dot{\omega} + \frac{M_1}{16}\dot{\omega} + J_1\dot{\omega}$$

$$C_m - 5g - \frac{15}{4}g - 125 = 5\dot{\omega} + \frac{15}{8}\dot{\omega} + 2\dot{\omega}$$

$$C_m = 5\dot{\omega} + \frac{15}{8}\dot{\omega} + 2\dot{\omega} + \frac{35}{4}g + 125$$

$$C_m = \dot{\omega}(5 + \frac{15}{8} + 2) + \frac{35}{4}g + 125$$

$$C_m = \frac{1}{2}(5 + \frac{15}{8} + 2) + \frac{35}{4}g + 125$$

Posto  $g = 9.81 m/s^2$  risolvo:

$$C_m = \frac{1}{2}(5 + \frac{15}{8} + 2) + \frac{35}{4}9.81 + 125$$

$$= 215,275 Nm$$

$$\approx 215 Nm$$

### 3.1.3 Secondo esercizio

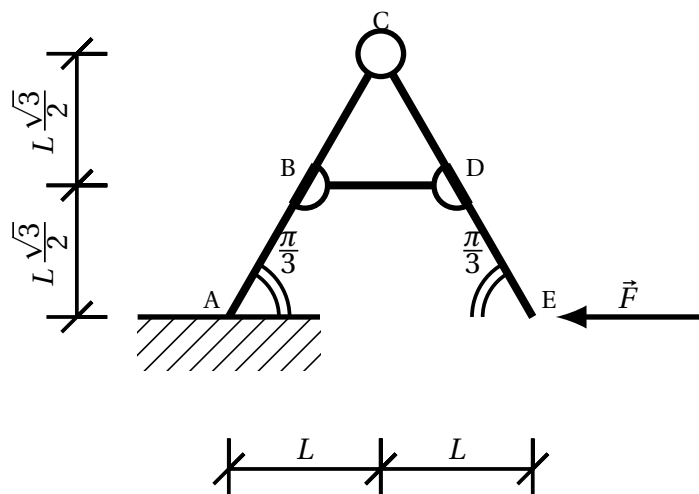


Figura 3.3: Isostatica con biella, incastro e cerniera con forza puntiforme

L'esercizio richiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari a terra (in A) e nel punto C;
2. Le azioni interne nell'asta AC.

### 3.1.4 Soluzione secondo esercizio

#### Osservazioni

Prima di iniziare l'esercizio, è importante osservare che:

- La struttura forma un triangolo equilatero.
- Possiede un unico punto A, che la vincola a terra.
- L'asta BD si comporta come una *biella* o *pendolo semplice*.
- Nella struttura sono presenti 2 corpi rigidi.
- Nella struttura sono presenti 3 vincoli, una biella, una cerniera ed un incastro.

#### Verifica preliminare di isostaticità

Noi sappiamo risolvere solamente sistemi isostatici, per cui verifichiamo la condizione di isostaticità:  $gdv_{totali} = gdl_{totali}$

$$gdv_{totali} = 3 + 3 = 6$$

Ci aspettiamo quindi che i gradi di vincolo siano pari a 6:

$$gdv_{totali} = gdv_{biella} + gdv_{cerniera} + gdv_{incastro}$$

#### Richiami sulle cerniere interne

**Definizione 3.1.1** (Cerniera interna). Una cerniera è detta interna quando non è fissata a terra ed è compresa tra un numero  $n$  di aste tale per cui:

$$n > 1$$

**Teorema 3.1.2** (Formula delle cerniere interne). Una cerniera interna compresa tra  $n$  aste impone un numero di gradi di vincolo pari a:

$$gdv_{cerniera} = 2(n - 1)$$

Per cui, sommando i gradi di vincolo di biella, cerniera ed incastro si ottiene:

$$g d v_{totali} = 1 + 2(2 - 1) + 3 = 6$$

Quindi, in base all'analisi preliminare, la struttura è *isostatica*.

**Limiti dell'analisi dei vincoli** L'analisi dei vincoli dà un risultato decisamente limitato: esistono infatti casi in cui la struttura risulta persino *iperstatica* che in base ad un'analisi dei gradi di libertà risulterebbe *labile*, cioè in grado di muoversi, e strutture che questa analisi descriverebbe *iperstatiche* che in realtà sono *labili*. Per vedere esempi di questi casi particolari, leggete la parte relativa alla statica nell'introduzione della dispensa.

In questo corso tuttavia, solo strutture *isostatiche* sono considerate, per cui non preoccupiamoci oltre.

### Primo punto

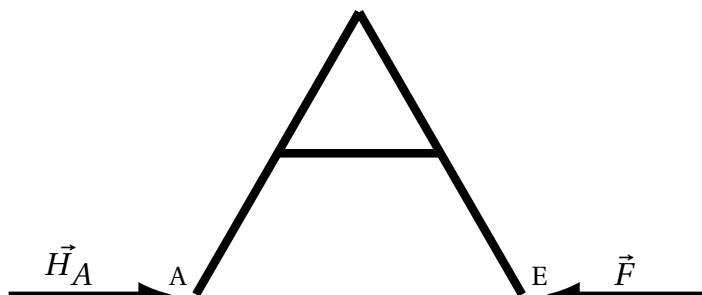


Figura 3.4: Analisi dei vincoli esterni

**Vincoli esterni** Iniziamo con l'analisi dei vincoli esterni (Figura 3.4), che in questo caso sono unicamente A. Consideriamo quindi l'intero sistema come un corpo rigido, rimuovendo tutti i dettagli che non ci interessano e sostituiamo all'incastro in A le rispettive reazioni vincolari.

Normalmente, un vincolo ad incastro presenta 3 reazioni vincolari: una verticale ( $V_A$ ), una orizzontale ( $H_A$ ) ed un momento resistente ( $M_A$ ) che si contrappone al momento imposto dalla forza esterna.

In questo caso, però, sul corpo rigido agisce una forza orientata sul piano orizzontale, senza alcuna componente verticale, per cui il vincolo a incastro non contrappone alcuna reazione verticale.

Inoltre il vettore  $\vec{r}$ , che rappresenta la distanza dal punto di applicazione della forza E al punto di applicazione del vincolo A, possiede unicamente una componente orizzontale, per cui la forza esterna non va ad applicare alcun momento sul corpo rigido, essendo i due vettori paralleli.

Procedendo con le leggi di equilibrio della statica otteniamo:

$$R_A : \begin{cases} H_A - F = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H_A = F \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$$

**Asta CE** Ora per andare a calcolare le reazioni vincolari in C, andiamo a considerare l'asta CE e ne sostituiamo i vincoli con reazioni vincolari corrispondenti (figura 3.5).

È importante ricordare che l'asta BD agisce da biella, e una biella trasmette unicamente la reazione assiale, indirizzata appunto con l'asse della biella.

Possiamo quindi notare che nulla agisce in direzione verticale sull'asta CE, per cui la C non impone una reazione verticale.

Procediamo nuovamente con la legge dell'equilibrio della statica, scegliendo (arbitrariamente<sup>1</sup>) come punto in cui calcolare l'equilibrio dei momenti il punto C, otteniamo:

<sup>1</sup>generalmente si sceglie il punto con più forze applicate, così che non debbano essere considerate per semplificare l'equazione dell'equilibrio dei momenti. In questo caso in tutti i punti vi è applicata al più una forza, per cui è indifferente. Oltre a questo motivo, se fosse presente un momento (applicato dall'esterno, o presente per via di un momento resistente) verrebbe scelto il punto in cui vi è il momento.

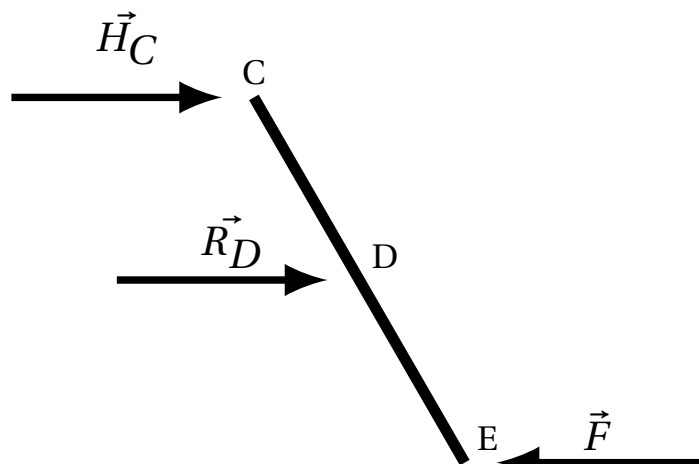
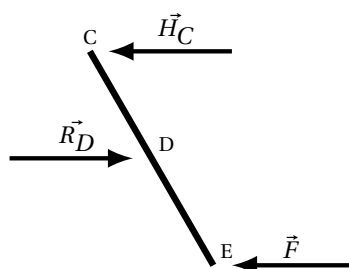
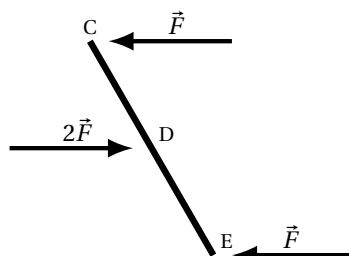


Figura 3.5: Analisi dell'asta CE



(a) Asta CE con reazioni vincolari.



(b) Asta CE con modulo della forza esterna.

Figura 3.6: Analisi corretta dell'asta CE.

$$R_C : \begin{cases} H_C + R_D - F = 0 \\ V_C = 0 \\ M_C = 0 = LR_D - 2LF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = F - R_D \\ V_C = 0 \\ R_D = 2F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = -F \\ V_C = 0 \\ R_D = 2F \end{cases}$$

Siccome  $\vec{H}_C$  è risultato negativo, ne abbiamo scelto una direzione "sbagliata". Poco male. Correggiamo quindi la figura, per avere un'immagine che meglio rifletta la realtà (figura 3.6):

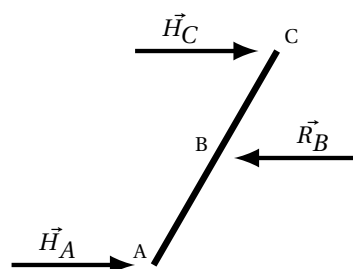
### Ricapitolo primo punto

$$R_A : \begin{cases} H_A = F \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} ; R_C : \begin{cases} H_C = F \\ V_C = 0 \\ M_C = 0 \end{cases}$$

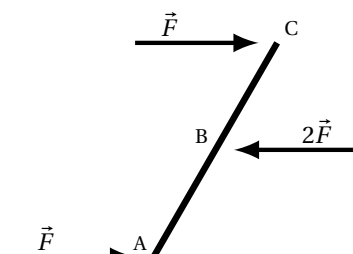
### Secondo punto

Per calcolare le azioni interne dell'asta AC, iniziamo disegnando le reazioni vincolari (e le forze e momenti applicati, se vi fossero) che la caratterizzano (figura 3.7). Riassumendo, sull'asta AC agiscono:

In B agisce la reazione assiale  $\vec{R}_D = \vec{R}_B$  (pari ed opposta a quanto vista nell'asta CE in D);

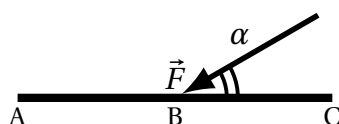


(a) Reazioni vincolari nell'asta AC.

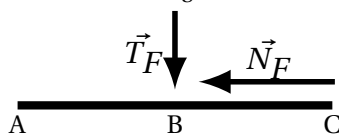


(b) Asta AC con modulo della forza esterna.

Figura 3.7: Analisi dell'asta AC.



(a) Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, inclinata.



(b) Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, separata in componenti.

Figura 3.8: Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto

In C agisce la reazione vincolare  $\vec{H}_C$ ;

In A agisce la reazione vincolare  $\vec{H}_A$ ;

**Nota sulla divisione in componenti di un vettore** Prendiamo in considerazione quattro esempi:

1. Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, inclinata.
2. Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso, inclinata.
3. Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, inclinata.
4. Asta inclinata con forza agente sul lato in basso, inclinata.

**1) Asta orizzontale con forza agente sul lato in alto, inclinata** La forza  $\vec{F}$  viene applicata nel punto B con un angolo  $\alpha < \pi$  (figura 3.8a).

Dobbiamo ricondurre questa forza nelle sue componenti di *taglio* e *sforzo normale* (figura 3.8b), per cui, usando della cara vecchia trigonometria si ottiene:

$$\vec{F}: \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = |F| \sin \alpha \end{cases}$$

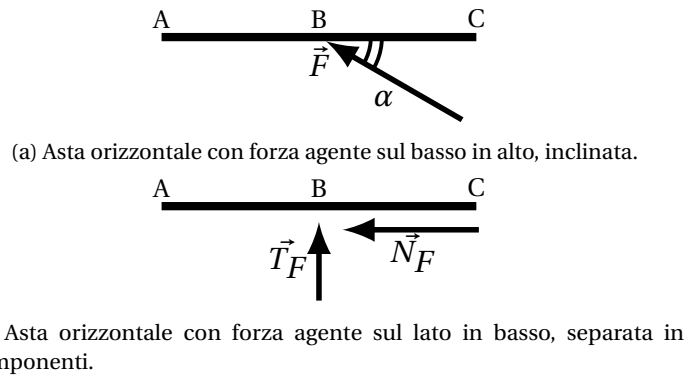


Figura 3.9: Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso

**2) Asta orizzontale con forza agente sul lato in basso, inclinata** La forza  $\vec{F}$  viene applicata nel punto B con un angolo  $\alpha < 0$  (figura 3.9a).

Dobbiamo nuovamente ricondurre questa forza nelle sue componenti di *taglio* e *sforzo normale* (figura 3.9b), per cui, usando della cara vecchia trigonometria, ricordando le regole per angoli  $> \pi$  si ottiene:

$$\vec{F} : \begin{cases} N_F = |F| \cos(2\pi - \alpha) \\ T_F = |F| \sin(2\pi - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = -|F| \sin \alpha \end{cases}$$

**3) Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, inclinata.** La forza  $\vec{F}$  viene applicata nel punto B con un angolo  $\alpha > 0$  (figura 3.10a) su di un'asta inclinata di un angolo  $\beta$ .

È necessario calcolare l'angolo  $\alpha$  con un sistema di riferimento solidale con l'asta AC, per cui ruotato di  $\beta$ .

$$\vec{F} : \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = |F| \sin \alpha \end{cases}$$

**4) Asta inclinata con forza agente sul lato in basso, inclinata.** La forza  $\vec{F}$  viene applicata nel punto B con un angolo  $\alpha < 0$  (figura 3.11a) su di un'asta inclinata di un angolo  $\beta$ .

È necessario calcolare l'angolo  $\alpha$  con un sistema di riferimento solidale con l'asta AC, per cui ruotato di  $\beta$ .

$$\vec{F} : \begin{cases} N_F = |F| \cos(2\pi - \alpha) \\ T_F = |F| \sin(2\pi - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_F = |F| \cos \alpha \\ T_F = -|F| \sin \alpha \end{cases}$$

**Divisione in componenti** Separiamo ora le singole componenti in taglio e sforzo normale.

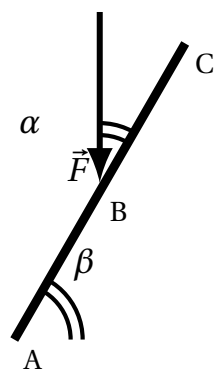
**Calcolo dello sforzo normale** Procediamo al calcolo della componente di sforzo normale di ogni forza applicata all'asta AC:

$$N : \begin{cases} \vec{N}_A = H_A \cos(\frac{\pi}{3}) \\ \vec{N}_B = R_B \cos(-\frac{\pi}{3}) \\ \vec{N}_C = H_C \cos(\frac{\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_A = \frac{1}{2} F \\ \vec{N}_B = F \\ \vec{N}_C = \frac{1}{2} F \end{cases}$$

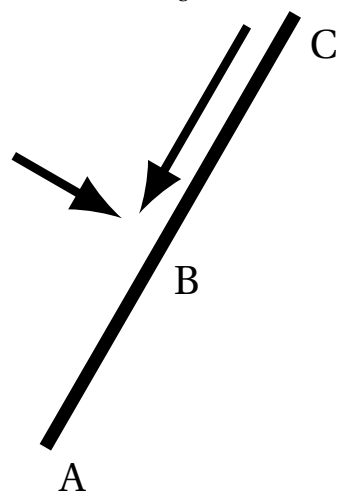
**disegniamo il grafico dello sforzo normale** Ricordando la convenzione dello sforzo normale, **positivo** quando produce *trazione* e **negativo** quando produce *contrazione*, procediamo al disegno del grafico:

Mentre si disegna un grafico di questo tipo, è importante ricordare che il grafico deve risultare, quando è verticale, di un'altezza pari al vettore che agisce in quel punto. Per esempio, nel punto B il grafico ha un'altezza complessiva pari al valore di  $N_B$ , così come è analogamente in A ed in C.

Si può iniziare a disegnare il grafico partendo da un qualsiasi estremo del corpo rigido.



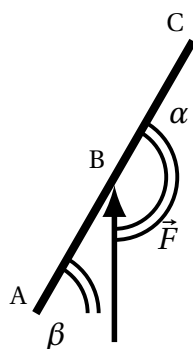
(a) Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, inclinata.



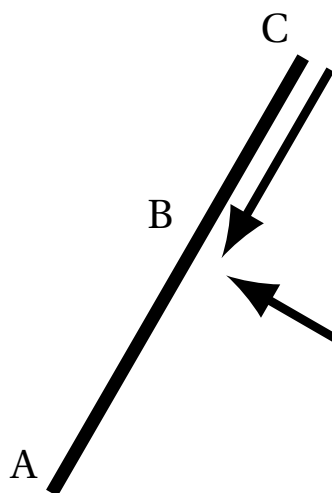
(b) Asta inclinata con forza agente sul lato in alto, separata in componenti.

Figura 3.10: Asta inclinata con forza agente sul lato in alto





(a) Asta inclinata con forza agente sul basso in basso, inclinata.



(b) Asta inclinata con forza agente sul lato in basso, separata in componenti.

Figura 3.11: Asta inclinata con forza agente sul lato in basso

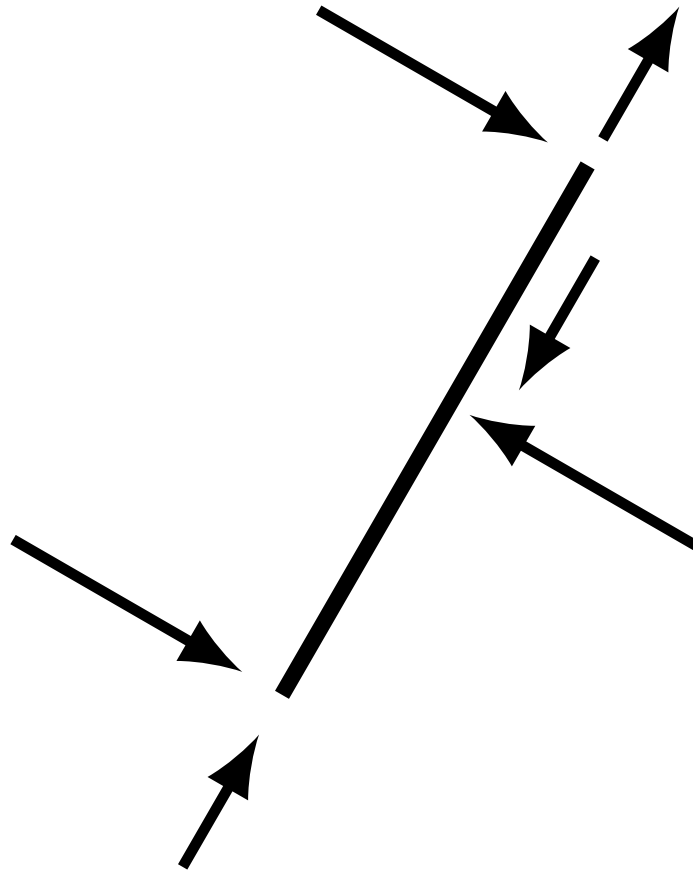


Figura 3.12: Componenti nell'asta AC

Iniziamo per esempio dall'estremo A. Spostiamoci di un  $ds$  verso l'alto e osserviamo per questo *concio elementare* se lo sforzo normale sia di trazione o contrazione. In questo caso, lo sforzo è di contrazione, per cui nella nostra convenzione definiamo il valore come negativo. Procedendo via via lungo l'asta, arriviamo al punto B, in cui è applicata una nuova forza. Qui, sommiamo i due valori dello sforzo e procediamo oltre. Da questo punto, siccome  $N_B > N_A$  lo sforzo diviene di trazione e così rimane sino alla fine dell'asta in C.

Come già detto, se si esegue la stessa operazione partendo dall'estremo C al posto che in A si *deve* ottenere lo stesso risultato.

**Calcolo del taglio** Procediamo al calcolo della componente di taglio di ogni forza applicata all'asta AC:

$$T : \begin{cases} \vec{T}_A = H_A \sin(\frac{\pi}{3}) \\ \vec{T}_B = R_B \sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \vec{T}_C = H_C \sin(\frac{\pi}{3}) \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{T}_A = \frac{\sqrt{3}}{2} F \\ \vec{T}_B = -\sqrt{3} F \\ \vec{T}_C = \frac{\sqrt{3}}{2} F \end{cases}$$

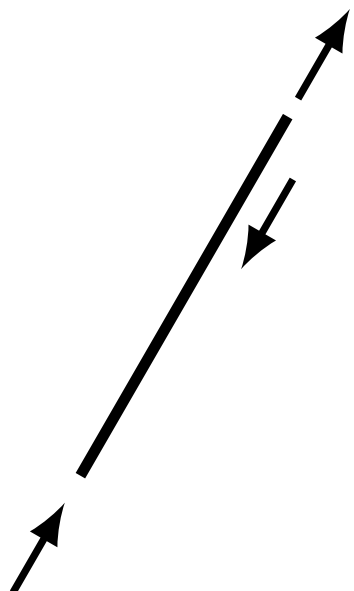
**disegniamo il grafico del taglio** Ricordando la convenzione del taglio, **positivo** quando produce *rotazione oraria* e **negativo** quando produce *rotazione anti-oraria*, procediamo al disegno del grafico:

Mentre si disegna un grafico di questo tipo, è importante ricordare che il grafico deve risultare, quando è verticale, di un'altezza pari al vettore che agisce in quel punto. Per esempio, nel punto B il grafico ha un'altezza complessiva pari al valore di  $T_B$ , così come è analogamente in A ed in C.

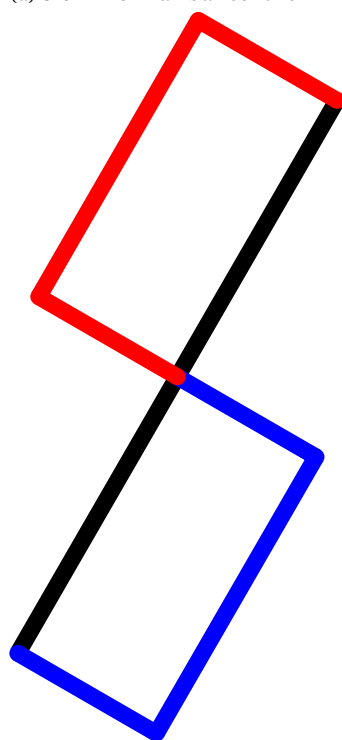
Si può iniziare a disegnare il grafico partendo da un qualsiasi estremo del corpo rigido.

Iniziamo per esempio dall'estremo A. Spostiamoci di un  $ds$  verso l'alto e osserviamo per questo *concio elementare* se il taglio produca rotazione oraria o anti-oraria. In questo caso, produce una rotazione anti-oraria. Procedendo via via lungo l'asta, arriviamo al punto B, in cui è applicata una nuova forza. Qui, sommiamo i due valori del taglio e procediamo oltre. Da questo punto, siccome  $T_B > T_A$  il taglio produce una rotazione oraria e così rimane sino alla fine dell'asta in C.

Come già detto, se si esegue la stessa operazione partendo dall'estremo C al posto che in A si *deve* ottenere lo stesso risultato.

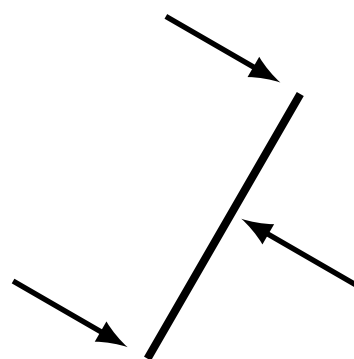


(a) Sforzi normali baricentrici in AC.

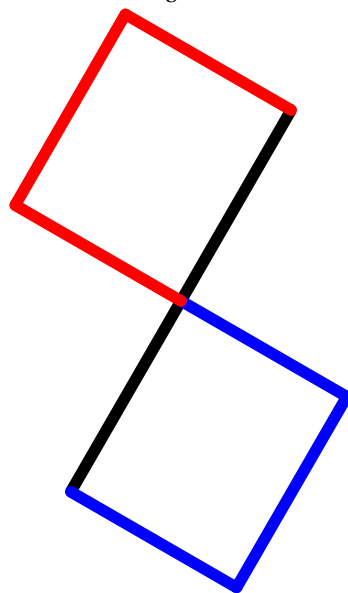


(b) Grafico dello sforzo normale.

Figura 3.13: Analisi dello sforzo normale nell'asta AC.



(a) Taglio in AC.



(b) Grafico del taglio.

Figura 3.14: Analisi del taglio nell'asta AC.

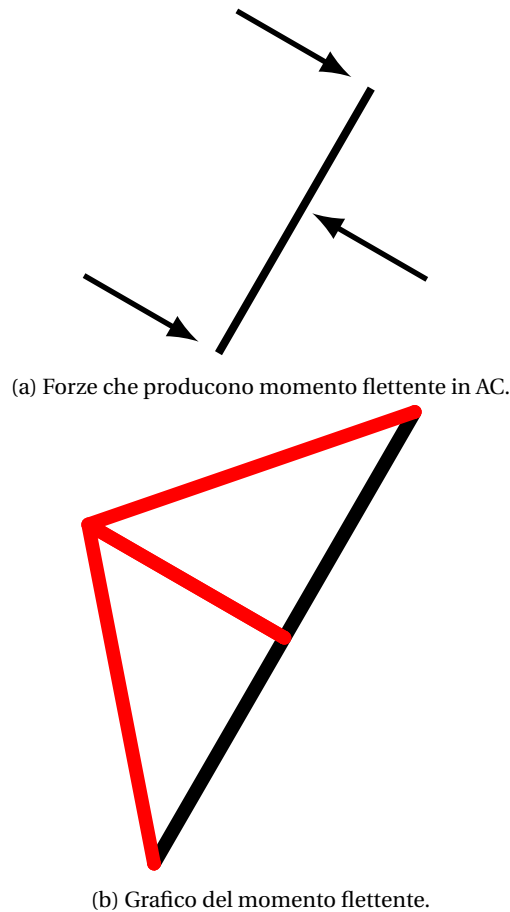


Figura 3.15: Analisi del momento flettente nell'asta AC.

**Calcolo del momento flettente** Procediamo al calcolo della componente del momento flettente. Scegliamo, per esempio, A come punto di origine del nostro calcolo del momento flettente. Un qualsiasi altro estremo dovrà dare lo stesso risultato.

La forza normale all'asta (che in questo caso è  $T_A$ ) che viene applicata in A, se per un attimo immaginiamo l'asta come duttile, *piega l'asta verso destra*. In A quindi, le fibre saranno *tese sul lato di sinistra*.

Chiamiamo  $\Delta S$  la distanza dal punto A. Il momento, in un generico punto tra A e B, sarà pari quindi a  $M = \Delta S T_A$ . Quando arriviamo in B, viene introdotta un'altra forza normale all'asta,  $T_B$ , di direzione opposta. Chiamiamo la distanza dal punto B  $\Delta k$  e procediamo. Questo porta il momento a divenire pari a  $M = \Delta S T_A - \Delta k T_B$ , e gradualmente riduce il valore del momento sino ad azzerarsi in C.

Come già detto, se si esegue la stessa operazione partendo dall'estremo C al posto che in A si *deve* ottenere lo stesso risultato.

$$M_{max} = \Delta S_{M_{max}} T_A = L T_A = L \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

**Visualizzazione della sovrapposizione degli effetti** Questo può essere un utile strumento per visualizzare l'effetto di ogni singola forza, anche se in alcune combinazioni questi effetti considerati uno per volta possono non avere una reale controparte fisica.

**Sovrapposizione degli effetti per lo sforzo normale** Disegnando l'effetto di una sola forza per volta (figura 3.16), l'effetto delle forze accoppiate due a due (figura 3.17) si capisce come l'applicazione di forze diverse in punti diversi vada a imporre uno sforzo normale differente.

**Sovrapposizione degli effetti per il taglio** Disegnando l'effetto di una sola forza per volta (figura 3.18), l'effetto delle forze accoppiate due a due (figura 3.19) si capisce come l'applicazione di forze diverse in punti diversi vada a imporre un taglio differente.

**Sovrapposizione degli effetti per il momento flettente** È possibile calcolare il momento flettente anche tramite la sovrapposizione degli effetti di tutte le varie forze che agiscono in direzione normale rispetto allo spostamento.

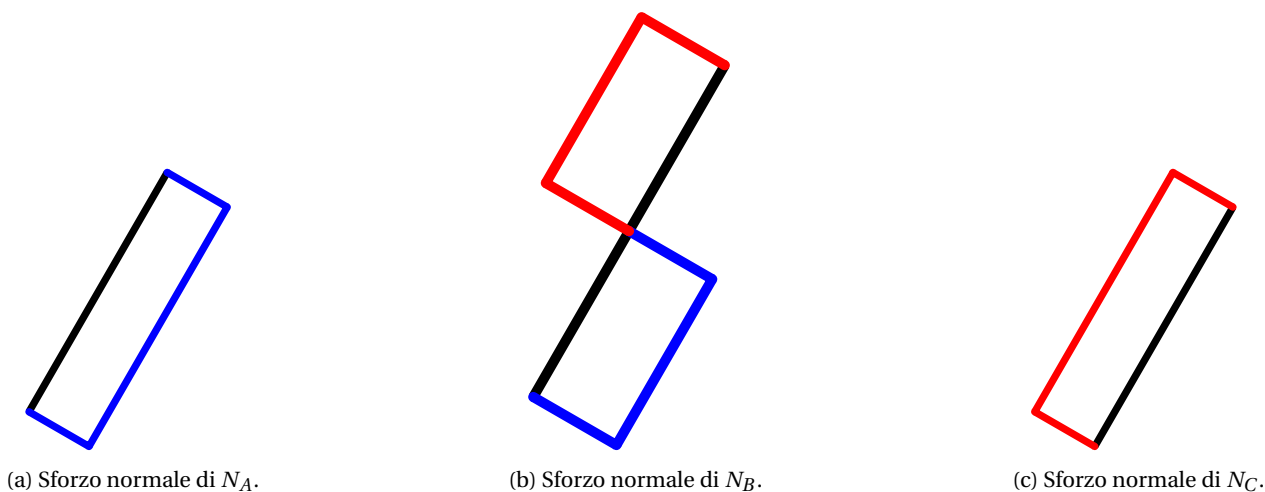


Figura 3.16: Sforzo normale delle singole forze.

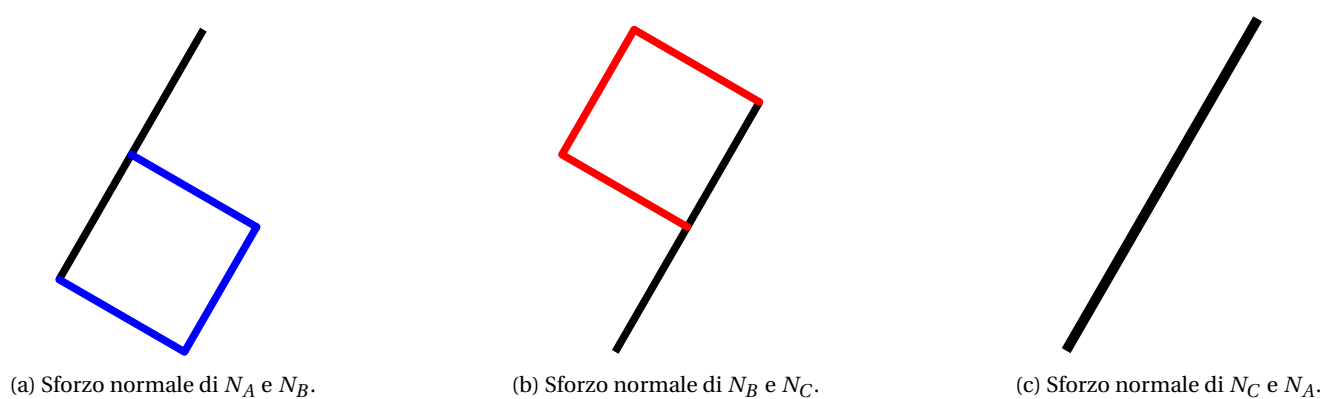


Figura 3.17: Sforzo normale di forze accoppiate due a due.

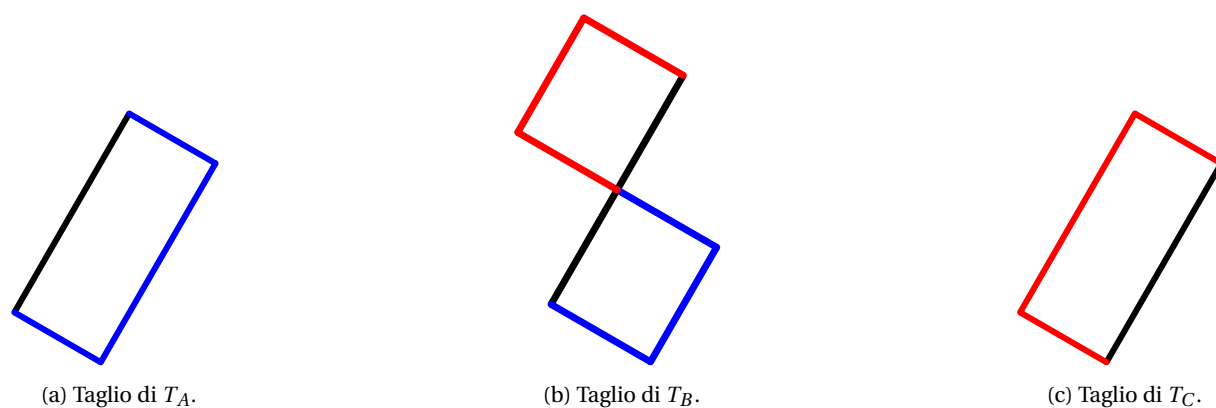


Figura 3.18: Taglio delle singole forze.

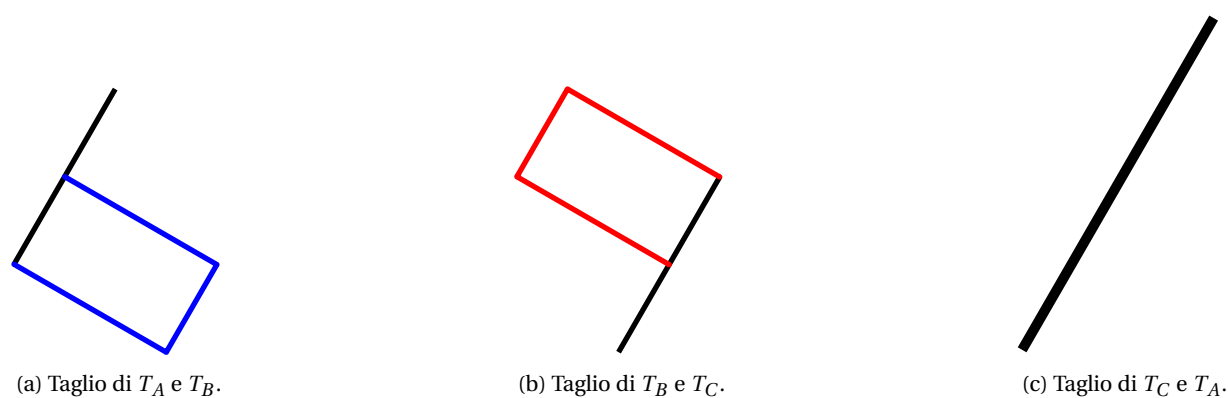


Figura 3.19: Taglio di forze accoppiate due a due.

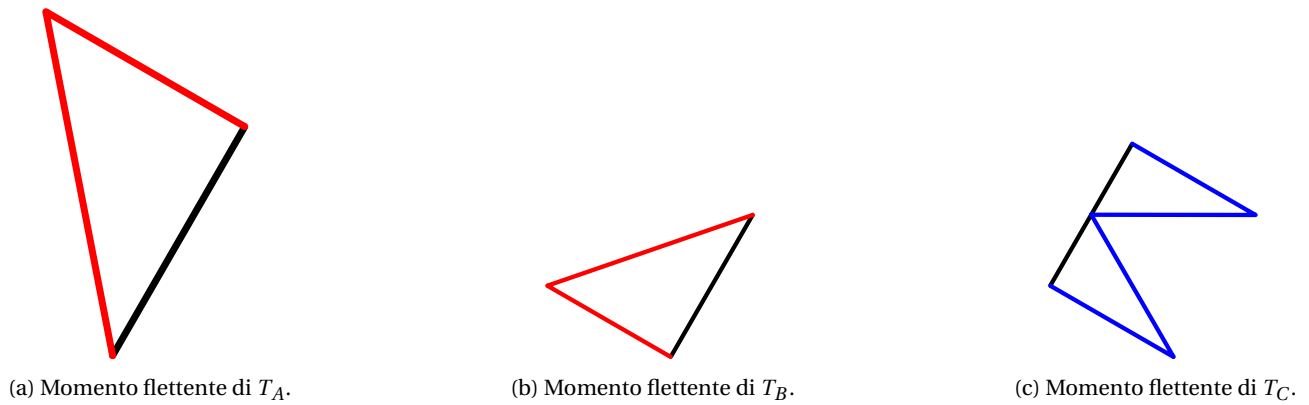


Figura 3.20: Momento flettente delle singole forze.

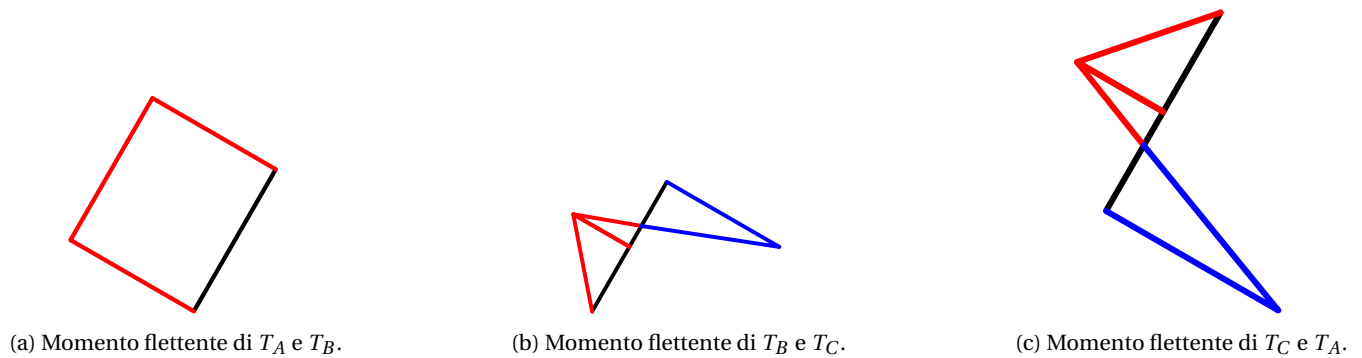
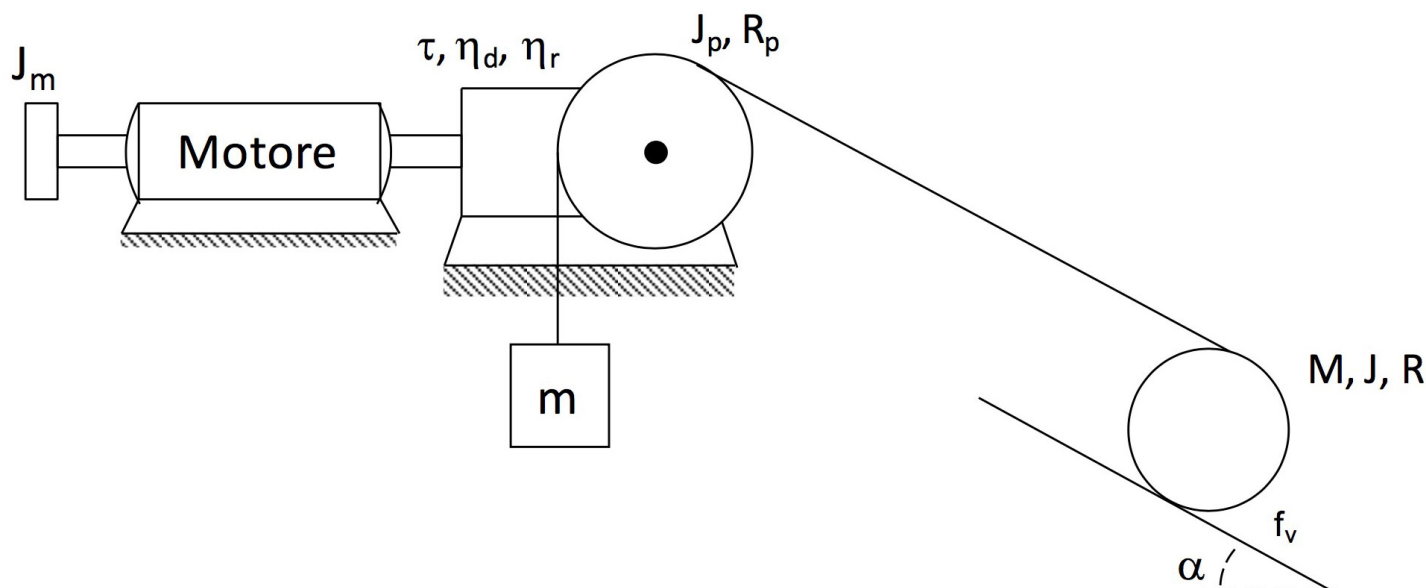


Figura 3.21: Momento flettente di forze accoppiate due a due.

A seguire, disegnando l'effetto di una sola forza per volta (figura 3.20), l'effetto delle forze accoppiate due a due (figura 3.21) si capisce come l'applicazione di forze diverse in punti diversi vada a formare dei momenti flettenti diversi.

## 3.1.5 Terzo esercizio



$$M = 100\text{kg} \quad J_m = 0.05\text{kgm}^2 \quad \mu_d = 0.9 \quad \mu_r = 0.7 \quad J = 2\text{kgm}^2 \quad m = 20\text{kg}$$

$$R = 0.5m \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \quad R_p = 0.6m \quad f_v = 0.05 \quad J_p = 5\text{kgm}^2 \quad \tau = 1/10$$

L'impianto di sollevamento in figura è posizionato nel piano verticale. Un sistema motore- trasmissione solleva, attraverso una puleggia di caratteristiche note (momento d'inerzia baricentrico  $J_p$  e raggio  $R_p$ ), un disco (di massa  $M$ , momento d'inerzia baricentrico  $J$  e raggio  $R$ ) che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$ .

Alla medesima fune, dalla parte opposta al disco, è collegato un contrappeso di massa  $m$ . Si supponga assenza di strisciamento tra la fune e la puleggia e tra la fune ed il disco.

Sono noti il momento d'inerzia del motore  $J_m$  e le caratteristiche della trasmissione (rapporto di trasmissione  $\tau$ , rendimento in moto diretto  $\mu_d$  e rendimento in moto retrogrado  $\mu_r$ ).

Si chiede di calcolare:

1. La coppia necessaria per sollevare il disco a regime.
2. L'accelerazione del disco in salita, applicando una coppia motrice doppia rispetto a quella calcolata al punto 1.



### 3.1.6 Soluzione terzo esercizio

#### Osservazioni importanti

1. In questo tipo di esercizi è **necessario** capire in che modo il sistema va a muoversi.
2. Il sistema è posto sul piano verticale, quindi andranno considerate tutte le forze peso dei vari componenti.
3. Sul disco agisce una forza di *attrito volvente*.

#### Primo punto

In condizione di regime *la variazione di energia cinetica è nulla*. Per cui vale che:

$$W_{motrice} + W_{resistente} + W_{perduta} = \frac{dE_c}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} W_R = & (\text{Forze attrito statico e dinamico}) \bullet (\text{Velocità del punto di applicazione}) \\ & + (\text{Forze attrito volvente}) \bullet (\text{Velocità del centro del cerchio}) \\ & + (\text{Forze peso}) \bullet (\text{Velocità baricentriche}) \end{aligned}$$

Figura 3.22: Potenza resistente

**Calcolo della potenza resistente** Iniziamo calcolando la potenza resistente in modo tale da poter valutare se ci troviamo in condizione di *moto diretto* o *moto retrogrado*.

Per calcolare la potenza resistente (figura 3.22) andiamo ad identificare tutte le forze peso e forze d'attrito agenti sull'impianto.

1. Forza peso agente sul contrappeso di massa  $m$ .
2. Forza peso agente sul disco di massa  $M$ .
3. Forza di attrito volvente agente sul disco con coefficiente  $f_v$ .

Ora andiamo a identificare tutte le velocità che agiscono sui corpi sovraelencati:

La velocità baricentrica del contrappeso,  $v_m$ , corrisponde con la velocità con cui la puleggia e il disco ruotano.

$$\omega_{puleggia} = \tau \omega_{motrice}$$

$$v_m = R_p \omega_{puleggia} = R_p \tau \omega_{motrice}$$

**Definizione 3.1.3** (Centro di istantanea rotazione (o CIR)). In un moto rigido piano in cui l'atto di moto è rotatorio, il centro di istantanea rotazione è quel punto della sezione del corpo che, nell'istante considerato, ha velocità nulla. Questo punto non è necessariamente parte del corpo e può essere posto sia all'interno che all'esterno di esso.

**Calcolo della velocità del disco** Identificato il CIR (*centro di istantanea rotazione*) del disco con il punto di tangenza del disco sulla parete inclinata, possiamo calcolare la velocità del centro del disco con il seguente ragionamento:

Se costruiamo una circonferenza con centro nel CIR del disco, di raggio pari al diametro del disco, cioè  $2R$ , che ruota su sè stessa ad una velocità pari a quella del disco,  $v_m$ , possiamo calcolare la *velocità angolare*  $\omega_{disco}$  semplicemente come  $\omega_{disco} = \frac{v_m}{2R}$ .

Ora, volendo calcolare la velocità del centro del disco (non della circonferenza con centro CIR) basta calcolare la velocità di un punto posto a una distanza  $R$  dal CIR:  $v_{disco} = R \omega_{disco} = \frac{v_m}{2}$ .

Alternativamente, più intuitivamente, possiamo calcolare la velocità  $v_{disco}$  ragionando sul fatto che nel punto di tangenza, dove è adiacente la corda, la velocità è  $v_m$ , mentre nel CIR è 0 e che questa si riduca linearmente. A metà di questa riduzione lineare, di

conseguenza, la velocità deve risultare essere la metà.

La velocità del disco, quindi, in funzione di  $\omega_{motrice}$  risulta essere:

$$v_{disco} = \frac{v_m}{2} = \frac{R_p \tau \omega_{motrice}}{2}$$

**Assembliamo la potenza resistente** Ora che abbiamo calcolato le varie componenti, andiamo ad assemblare la potenza resistente:

$$\begin{aligned} W_R &= m \vec{g} \cdot (R_p \tau \vec{\omega}_{motrice}) + M \vec{g} \cdot \left( \frac{R_p \tau \vec{\omega}_{motrice}}{2} \right) + M f_v \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \vec{g} \cdot \left( \frac{R_p \tau \vec{\omega}_{motrice}}{2} \right) \\ &= m \vec{g} \cdot (R_p \tau \vec{\omega}_{motrice}) + M \vec{g} \cdot \left( \frac{R_p \tau \vec{\omega}_{motrice}}{2} \right) + M f_v \cos(\alpha) \vec{g} \cdot \left( \frac{R_p \tau \vec{\omega}_{motrice}}{2} \right) \end{aligned}$$

Risolvero il prodotto scalare, tenendo a mente come le velocità siano orientate per garantire il moto descritto (disco sollevato a regime).

La velocità del contrappeso  $v_m$  è concorde con la forza peso, essendo orientata anch'essa verso il basso, l'angolo compreso tra i due vettori è quindi 0.

La velocità del disco, invece, è discorde rispetto alla forza peso ed è inclinata di  $\pi - \alpha$ . L'angolo tra i due vettori risulta quindi  $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ .

La velocità del disco è discorde rispetto alla forza di attrito volvente, ma è inclinata allo stesso modo. Anche in questo caso quindi, l'angolo compreso è 0.

$$\begin{aligned} W_R &= m g R_p \tau \omega_{motrice} + M g \frac{R_p \tau \omega_{motrice}}{2} \cos(\pi + \alpha) - f_v M g \frac{R_p \tau \omega_{motrice}}{2} \cos(\alpha) \\ &= \omega_{motrice} g R_p \tau \left( m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha)) \right) \end{aligned}$$

Controlliamo il **segno** del coefficiente della velocità angolare del motore:

$$g R_p \tau \left( m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha)) \right) \approx -4.2$$

Il coefficiente ha segno negativo, per cui procediamo sotto ipotesi di *modo diretto*.

### Calcolo della potenza motrice

$$W_{motrice} = C_{motrice} \omega_{motrice}$$

### Calcolo della potenza perduta in cond. di regime e moto diretto

$$\begin{aligned} W_{perduta} &= -(1 - \mu_{diretto}) \left( W_{motrice} - \frac{dE_{C_{motrice}}}{dt} \right) \\ &= -(1 - \mu_{diretto}) (W_{motrice} - 0) \\ &= -(1 - \mu_{diretto}) W_{motrice} \end{aligned}$$

**Calcolo della coppia motrice** Usando la formula del *bilancio delle potenze* in condizioni di *regime* otteniamo:

$$\begin{aligned} W_{motrice} + W_{resistente} + W_{perduta} &= 0 \\ W_{motrice} + W_{resistente} - (1 - \mu_{diretto}) W_{motrice} &= 0 \\ W_{resistente} + \mu_{diretto} W_{motrice} &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega_{motrice} g R_p \tau \left( m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha)) \right) + \mu_{diretto} C_{motrice} \omega_{motrice} = 0$$

$$g R_p \tau \left( m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha)) \right) + \mu_{diretto} C_{motrice} = 0$$

$$C_{motrice} = \frac{g R_p \tau \left( \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha)) - m \right)}{\mu_{diretto}}$$

$$= 4.6859515352 Nm$$

$$\approx 4.68 Nm$$

**Secondo punto****Calcoliamo la nuova coppia motrice**

$$C_{motrice_2} = 2 C_{motrice} = 9.36 Nm$$

**Calcoliamo la nuova potenza motrice**

$$W_{motrice_2} = C_{motrice_2} \omega_{motrice}$$

**Calcoliamo l'energia cinetica**

$$E_c = (\text{T. dell'en. cinetica per le masse})$$

$$+ (\text{T. dell'en. cinetica per i momenti di inerzia})$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_{disco}^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_{motrice}^2 + \frac{1}{2} J_p \omega_p^2 + \frac{1}{2} J \omega_{disco}^2$$

Sostituisco i legami cinematici ed ottengo (indicando con  $\omega_m$  la  $\omega_{motrice}$ ):

$$E_c = \frac{1}{2} m (R_p \tau \omega_m)^2 + \frac{1}{2} M \left( \frac{R_p \tau \omega_m}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_p (\tau \omega_m)^2 + \frac{1}{2} J \left( \frac{R_p \tau \omega_m}{2R} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m (R_p \tau)^2 \omega_m^2 + \frac{1}{8} M (R_p \tau)^2 \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_p \tau^2 \omega_m^2 + \frac{1}{8} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2} \omega_m^2$$

Derivo, in funzione del tempo, ed ottengo:

$$\frac{E_c}{dt} = m (R_p \tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M (R_p \tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + J_m \omega_m \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2} \omega_m \dot{\omega}_m$$

**Calcoliamo la nuova potenza perduta**

$$W_{perduta} = -(1 - \mu_{diretto}) (W_{motrice} - \frac{dE_{cmotrice}}{dt})$$

$$= -(1 - \mu_{diretto}) (W_{motrice} - J_m \omega_m \dot{\omega}_m)$$

**Uso il bilancio delle potenze per calcolare l'accelerazione**

$$W_{motrice} + W_{resistente} + W_{perduta} = \frac{E_c}{dt}$$

$$W_{motrice} + W_{resistente} - (1 - \mu_{diretto}) (W_{motrice} - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = \frac{E_c}{dt}$$

$$W_{resistente} + J_m \omega_m \dot{\omega}_m + \mu_{diretto} (W_{motrice} - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = \frac{E_c}{dt}$$

$$W_{resistente} + J_m \omega_m \dot{\omega}_m + \mu_{diretto}(W_{motrice} - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = \frac{E_c}{dt}$$

$$W_{resistente} + J_m \omega_m \dot{\omega}_m + \mu_{diretto}(W_{motrice} - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = m(R_p \tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M(R_p \tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2} \omega_m \dot{\omega}_m \quad (3.1)$$

$$\omega_m g R_p \tau (m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))) + \mu_d (C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = m(R_p \tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M(R_p \tau)^2 \omega_m \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2} \omega_m \dot{\omega}_m \quad (3.2)$$

$$g R_p \tau (m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))) + \mu_d (C_m - J_m \dot{\omega}_m) = m(R_p \tau)^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M(R_p \tau)^2 \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2} \dot{\omega}_m \quad (3.3)$$

$$g R_p \tau (m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))) + \mu_d C_m = \mu_d J_m \dot{\omega}_m + m(R_p \tau)^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} M(R_p \tau)^2 \dot{\omega}_m + J_p \tau^2 \dot{\omega}_m + \frac{1}{4} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2} \dot{\omega}_m \quad (3.4)$$

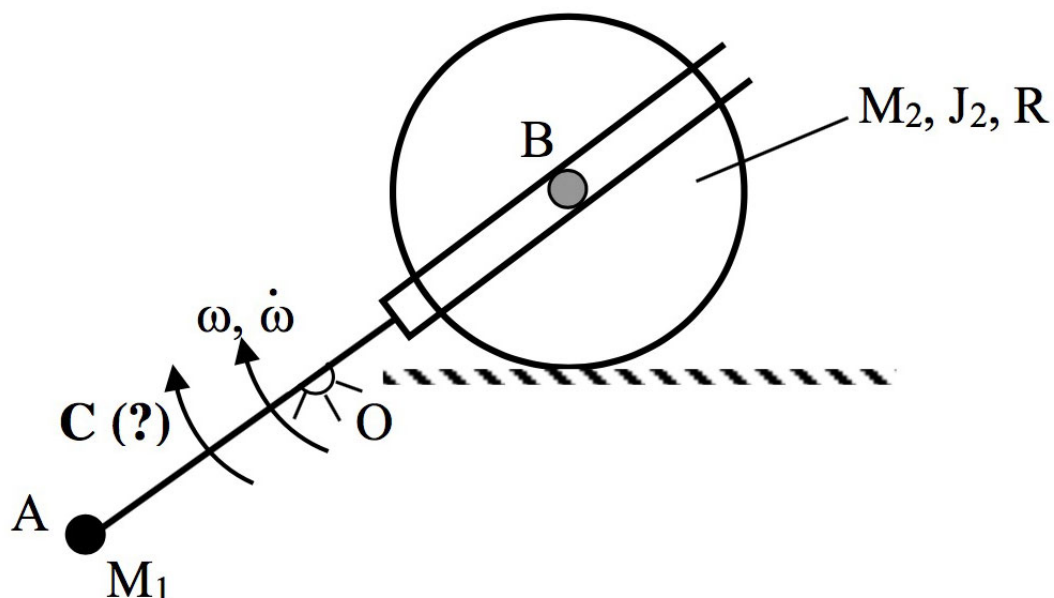
$$g R_p \tau (m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))) + \mu_d C_m = \dot{\omega}_m (\mu_d J_m + m(R_p \tau)^2 + \frac{1}{4} M(R_p \tau)^2 + J_p \tau^2 + \frac{1}{4} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2}) \quad (3.5)$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{g R_p \tau (m - \frac{M}{2} (\sin(\alpha) + f_v \cos(\alpha))) + \mu_d C_m}{\mu_d J_m + m(R_p \tau)^2 + \frac{1}{4} M(R_p \tau)^2 + J_p \tau^2 + \frac{1}{4} J \frac{(R_p \tau)^2}{R^2}} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_m &= 15.8970476911 \text{ rad/s}^2 \\ &\approx 15.9 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

## 3.2 Tema d'esame del 22/07/2015

### 3.2.1 Primo esercizio



$$M_1 = 30 \text{ kg} \quad M_2 = 20 \text{ kg} \quad J_2 = 1 \text{ kgm}^2 \quad R = 0.2 \text{ m}$$

$$OB = 0.4 \text{ m} \quad AO = 0.3 \text{ m} \quad \omega = 1 \text{ rad/s} \quad \dot{\omega} = 0.4 \text{ rad/s}^2$$

Il sistema rappresentato in figura è posto nel piano verticale.

Un piolo, rigidamente vincolato al centro B del disco, scorre all'interno del glifo incernierato in O, da considerarsi di massa e momento di inerzia trascurabili. All'estremo A del glifo è vincolata una massa puntiforme  $M_1$ . Il disco, di massa  $M_2$ , momento d'inerzia baricentrico  $J_2$  e raggio  $R$ , rotola senza strisciare lungo una guida orizzontale.

Note la velocità angolare  $\omega$  e l'accelerazione angolare  $\dot{\omega}$  del glifo si chiede di calcolare:

1. La velocità angolare e l'accelerazione angolare del disco.
2. La coppia  $C$  necessaria per garantire la condizione di moto assegnata.

### 3.2.2 Soluzione primo esercizio (non corrispondente)

#### Osservazioni importanti

1. Il segmento OB, essendo un *glifo*, ha lunghezza variabile.
2. Il CIR (*centro di istantanea rotazione*) del disco coincide con il punto di contatto sulla superficie.
3. La *velocità angolare*  $\omega$ , l'*accelerazione angolare*  $\dot{\omega}$  e la *coppia*  $C$  ruotano in **senso orario**.
4. Il punto B si trova ad una  $y_B = R = 0.2 \text{ m}$
5. Il disco non si muove verso l'alto, quindi la sua componente verticale di velocità sarà nulla. Ragionamento analogo può essere fatto per l'accelerazione.

**Primo punto** Procedo con il metodo dei numeri complessi, definendo  $b = OB$  e  $\alpha$  come l'angolo sotteso all'asta:

#### Spostamento

$$B = be^{i\alpha}$$

$$B = \begin{cases} Y_B = R = b \sin \alpha \\ X_B = b \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arcsin(\frac{R}{b}) = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ X_B = b \cos \alpha = 0.2\sqrt{3} \text{ m} \end{cases}$$

**Velocità** Derivo ed ottengo le velocità:

$$v_B = b\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + \dot{b}e^{i\alpha}$$

$$v_B = \begin{cases} v_{y_B} = 0 = b\dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{b} \sin \alpha \\ v_{x_B} = -b\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{b} \cos \alpha \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{b} = -\frac{b\dot{\alpha} \cos \alpha}{\sin \alpha} = -b\dot{\alpha} \cot \alpha \\ v_{x_B} = -b\dot{\alpha} \sin \alpha - b\dot{\alpha} \cot \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{b} = -\frac{b\dot{\alpha} \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ v_{x_B} = -b\dot{\alpha}(\sin \alpha + \cot \alpha \cos \alpha) \end{cases} = \begin{cases} \dot{b} = -\frac{b\dot{\alpha} \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ v_{x_B} = -2b\dot{\alpha} \end{cases}$$

Sostituisco  $\dot{\alpha} = -\omega = -1 \text{ rad/s}$

$$\begin{cases} \dot{b} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \text{ m/s} \\ v_{x_B} = 0.8 \text{ m/s} \end{cases}$$

Usando gli usuali vincoli cinematici del CIR, procedo a calcolare la velocità angolare del disco:

Ricordando che la velocità risulta essere il **prodotto vettoriale** di velocità angolare e raggio:

$$v_{x_B}^{\vec{}} = \vec{\omega}_{disco} \times \vec{R}$$

Chiamando  $\theta$  l'angolo compreso tra i due vettori, risolvo il **prodotto vettoriale** come:

$$v_{x_B} = \omega_{disco} R \sin \theta$$

Essendo  $\omega_{disco}$  negativo, per la direzione oraria di rotazione del disco, l'angolo che si va a formare tra i due vettore è  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ .

$$v_{x_B} = \omega_{disco} R \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\omega_{disco} R$$

Risolvendo per  $\omega_{disco}$  ottengo:

$$\omega_{disco} = -\frac{v_{x_B}}{R} = -4 \text{ rad/s}$$

**Accelerazione** Derivo una seconda volta ed ottengo l'accelerazione:

$$a_B = \dot{b}\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + b\ddot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} - b\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + \ddot{b}e^{i\alpha} + \dot{b}\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$$

Semplifico l'espressione:

$$a_B = 2\dot{b}\dot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + b\ddot{\alpha}e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} - b\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + \ddot{b}e^{i\alpha}$$

Raccolgo componente normale e tangente:

$$a_B = (2\dot{b}\dot{\alpha} + b\ddot{\alpha})e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + (\ddot{b} - b\dot{\alpha}^2)e^{i\alpha}$$

Sostituisco  $\dot{\alpha} = -\omega = -1 \text{ rad/s}$  per semplificare i calcoli:

$$a_B = (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} + (\ddot{b} - b)e^{i\alpha}$$

Separo in componenti cartesiane:

$$a_B = \begin{cases} -(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha + (\ddot{b} - b)\cos\alpha = a_{x_B} \\ (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cos\alpha + (\ddot{b} - b)\sin\alpha = a_{y_B} \end{cases}$$

La componente verticale dell'accelerazione del disco è pari a 0:

$$a_B = \begin{cases} -(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha + (\ddot{b} - b)\cos\alpha = a_{x_B} \\ (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cos\alpha + (\ddot{b} - b)\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Ricavo  $\ddot{b}$ :

$$(\ddot{b} - b)\sin\alpha = -(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cos\alpha$$

$$\ddot{b} = b - (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cot\alpha$$

Ricavo  $a_{x_B}$ :

$$-(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha + (b - (-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cot\alpha - b)\cos\alpha = a_{x_B}$$

$$-(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\sin\alpha - (2\dot{b} + b\ddot{\alpha})\cot\alpha\cos\alpha = a_{x_B}$$

$$-(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha})(\sin\alpha + \cot\alpha\cos\alpha) = a_{x_B}$$

$$-2(-2\dot{b} + b\ddot{\alpha}) = a_{x_B}$$

Sostituisco  $\ddot{\alpha} = -\dot{\omega} = -0.4 \text{ rad/s}^2$ :

$$-2(-2\dot{b} - b\dot{\omega}) = a_{x_B}$$

$$2(2\dot{b} + b\dot{\omega}) = a_{x_B}$$

$$2\left(\frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{4}{25}\right) = a_{x_B}$$

$$a_{x_B} \approx 3.1 \text{ m/s}^2$$

Utilizzando il legame cinematico dell'accelerazione angolare ottengo:

$$\omega_D = \frac{a_{x_B}}{R} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -15.5 \text{ m/s}^2$$

**Secondo punto** Per calcolare la coppia  $C$  vado ad utilizzare l'equazione del bilancio delle potenze (formula 3.23):

$$\sum_{i=0}^n W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

Figura 3.23: Bilancio delle potenze

**Energia cinetica totale:** prendo in considerazione tutte le masse in movimento ed i loro momenti d'inerzia per poter utilizzare il teorema dell'energia cinetica.

1. La massa puntiforme  $m_1$  si muove di una velocità  $v_A = AO\omega$  e non ha momento di inerzia.
2. La massa del cerchio  $M_2$  si muove con una velocità baricentrica calcolata precedentemente come  $v_B = 2OB\omega$  e possiede un momento di inerzia baricentrico noto  $J_2$ .

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} M_2 v_B^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_B^2$$

Sostituisco con i legami cinematici noti ed ottengo:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 (AO\omega)^2 + \frac{1}{2} M_2 (2OB\omega)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{2OB\omega}{R}\right)^2$$

Sostituisco nell'equazione  $AO = a$  e  $OB = b$ :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 (a\omega)^2 + \frac{1}{2} M_2 (2b\omega)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{2b\omega}{R}\right)^2$$

Raccolgo i coefficienti di  $b$  e  $\omega$ :

$$E_c = \omega^2 \frac{1}{2} m_1 a^2 + 2\omega^2 b^2 \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right)$$

Derivo l'equazione, tenendo a mente che i termini che variano nel tempo sono  $\omega$  e  $b$ :

$$\frac{E_c}{dt} = 2\omega\dot{\omega} \frac{1}{2} m_1 a^2 + 4\omega\dot{\omega} b^2 \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right) + 4\omega^2 b\dot{b} \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right)$$

$$\frac{E_c}{dt} = \omega\dot{\omega} m_1 a^2 + 4\omega\dot{\omega} b^2 \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right) + 4\omega^2 b\dot{b} \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right)$$

$$\frac{E_c}{dt} = \omega(\dot{\omega} m_1 a^2 + 4\dot{\omega} b^2 \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right) + 4\omega b\dot{b} \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right))$$

$$\frac{E_c}{dt} = \omega(\dot{\omega} m_1 a^2 + 4b \left(M_2 + J_2 \left(\frac{1}{R}\right)^2\right)(\dot{\omega} b + \omega\dot{b}))$$

**La potenza totale:** prendo in considerazione tutte le forze che agiscono sui corpi, eventuali attriti, forze peso e coppie.

1. Sul disco agisce una forza peso, contro bilanciata da una forza normale, per cui si annullano reciprocamente. Il disco non subisce l'effetto di attrito volvente o di attriti dinamici.
2. Sulla massa  $M_1$  agisce una forza peso  $F_{gA}$  che non è contro bilanciata da nessuna forza normale.
3. La coppia  $C$  da identificare.



$$\sum W_i = \vec{C} \cdot \vec{\omega} + \vec{F}_{g_A} \cdot \vec{v}_A$$

Sostituisco i legami cinematici, con  $a = OA$ :

$$\sum W_i = \vec{C} \cdot \vec{\omega} + \vec{F}_{g_A} \cdot (a\vec{\omega})$$

Risolvero il prodotto scalare:

1. La velocità  $\vec{v}_A$  ha una direzione tangente alla circonferenza di raggio  $a$  e con verso a  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ . Tra il vettore  $\vec{v}_A$  e  $\vec{F}_{g_A}$  l'angolo è di  $\pi - \alpha$ .
2. La coppia  $C$  e la velocità angolare  $\omega$  sono concordi, come da testo.

$$\sum W_i = C\omega + F_{g_A} a\omega \cos(\pi - \alpha) = C\omega - F_{g_A} a\omega \cos \alpha = \omega(C - m_1 g a \cos \alpha)$$

**Bilancio delle potenze**

$$\omega(C - m_1 g a \cos \alpha) = \omega(\dot{\omega} m_1 a^2 + 4b(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)(\dot{\omega} b + \omega \dot{b}))$$

Semplifico  $\omega$ :

$$C - m_1 g a \cos \alpha = \dot{\omega} m_1 a^2 + 4b(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)(\dot{\omega} b + \omega \dot{b})$$

Risolvero per  $C$ :

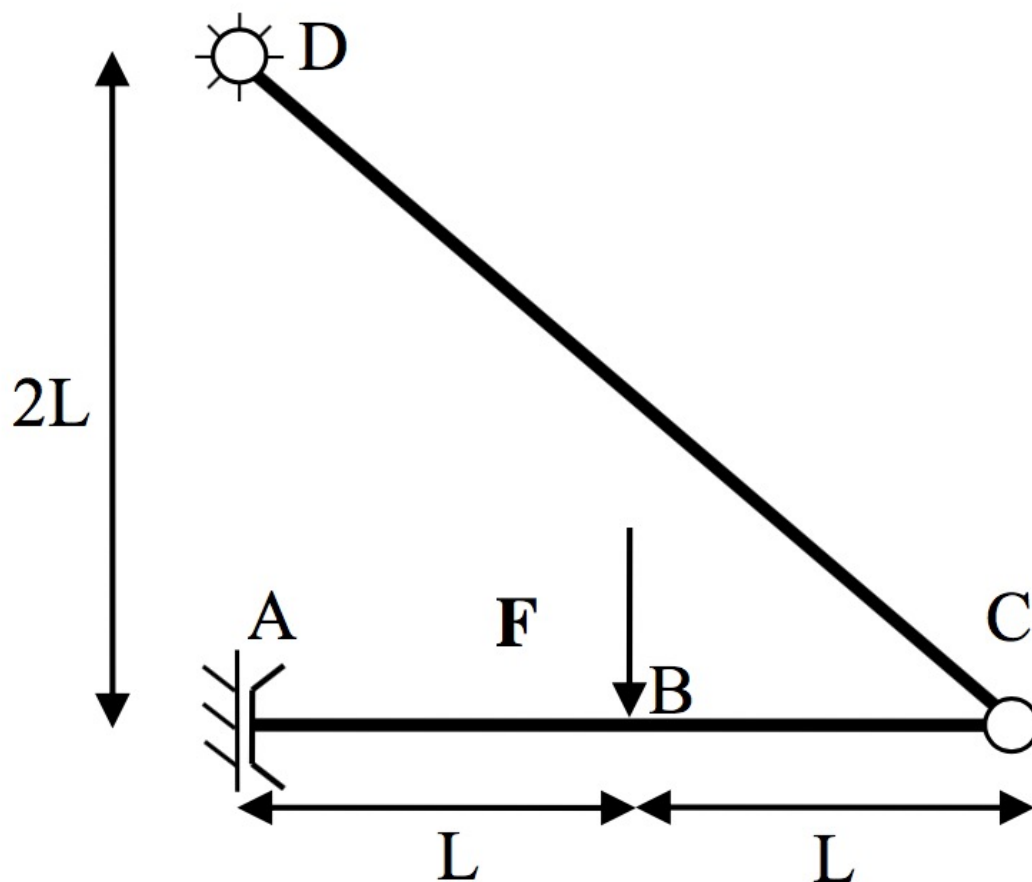
$$C = m_1 g a \cos \alpha + \dot{\omega} m_1 a^2 + 4b(M_2 + J_2(\frac{1}{R})^2)(\dot{\omega} b + \omega \dot{b})$$

Sostituisco numericamente:

$$C = 138.9 \text{ Nm} \quad (C_{riportato} = 120.2 \text{ N})$$

**Il secondo punto sembra essere errato, non riesco ad identificare l'errore.**

## 3.2.3 Secondo esercizio



Per il sistema rappresentato in figura, soggetto alla sola forza attiva  $\vec{F}$ , applicata in direzione verticale nel punto B, si chiede di calcolare:

1. Le reazioni vincolari a terra in A e D.
2. Le azioni interne nell'asta AC.

## 3.2.4 Soluzione secondo esercizio

## Osservazioni importanti

1. Il sistema è composto da un corpo rigido, l'asta AC, e due vincoli: una biella (o pendolo semplice) DC e un carrello in A.
2. Una biella trasmette unicamente la reazione assiale.
3. La biella è ad un angolo pari a  $\frac{3\pi}{4}$ , per cui le componenti orizzontali e verticali di  $R_C$  saranno uguali.

## Verifica preliminare di isostaticità

Verifico che  $gdl_{tot} = gdv_{tot}$ :

$$gdl: \begin{cases} gdl_{biella} = 1 \\ gdl_{carrello} = 2 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{asta} = 3 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 3.24: Verifica preliminare di isostaticità.

### Primo punto

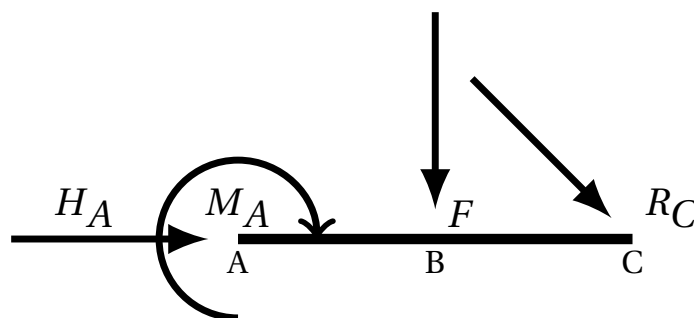


Figura 3.25: Reazioni vincolari nell'asta AC

$$\begin{cases} H_A + R_{xC} = 0 \\ F + R_{yC} = 0 \\ M_A - LF - 2LR_{yC} = 0 \\ R_{xC} = R_{yC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -R_{xC} \\ F = -R_{yC} \\ M_A = LF - 2LF = -LF \\ R_{xC} = R_{yC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = F \\ M_A = -LF \\ R_{yC} = -F \\ R_{xC} = -F \end{cases}$$

Alcune reazioni vincolari risultano negative, per cui è stato scelto la direzione inversa rispetto a quella reale. Per cui correggiamo il grafico:

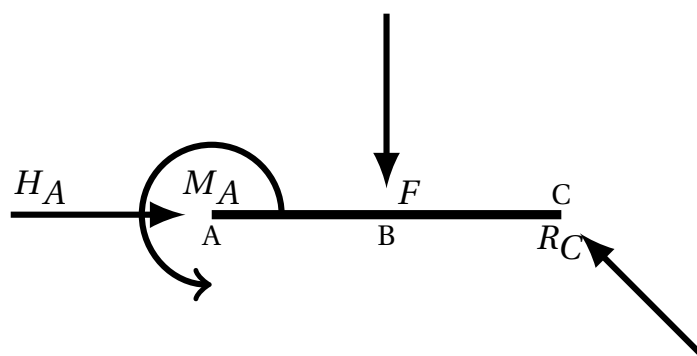


Figura 3.26: Reazioni vincolari nell'asta AC corrette

Le reazioni vincoli in A e in D risultano quindi, col grafico corretto:

$$A: \begin{cases} H_A = F \\ M_A = LF \end{cases}$$

(a) Reazioni vincolari in A.

$$D: \begin{cases} R_{xD} = F \\ R_{yD} = F \end{cases}$$

(b) Reazioni vincolari in D.

Figura 3.27: Reazioni vincolari richieste dal primo punto.

### Secondo punto



Figura 3.28: Sforzo normale nell'asta AC

**Sforzo normale** Lo sforzo normale nell'asta AC è di **compressione**, per cui per convenzione è negativo.



Figura 3.29: Grafico sforzo normale nell'asta AC

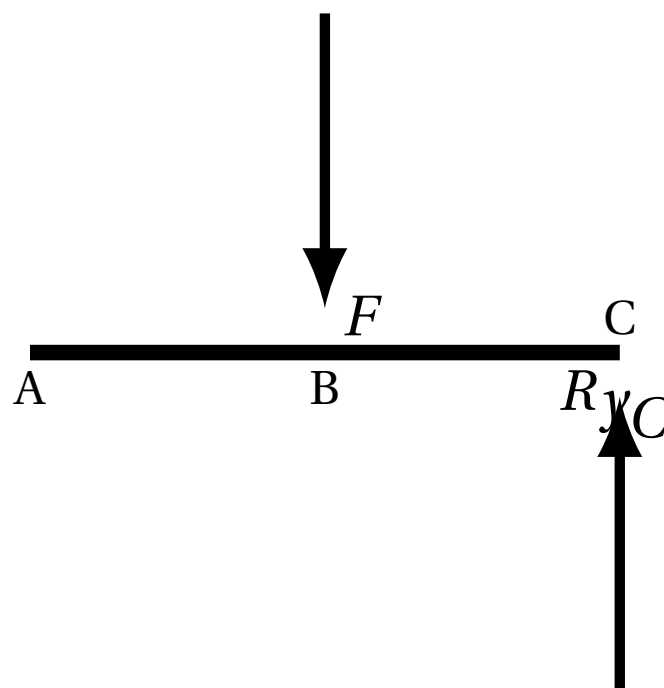


Figura 3.30: Taglio nell'asta AC

**Taglio** Il taglio nell'asta AC impone una rotazione **anti-oraria**, per cui per convenzione è negativo.

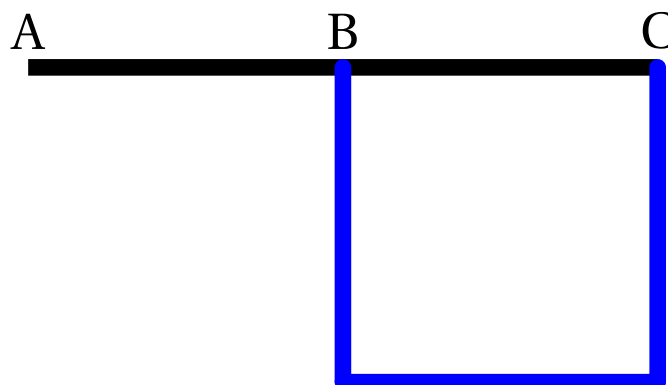


Figura 3.31: Grafico taglio nell'asta AC

**Momento flettente** Le fibre tese sono nella parte inferiore del grafico.

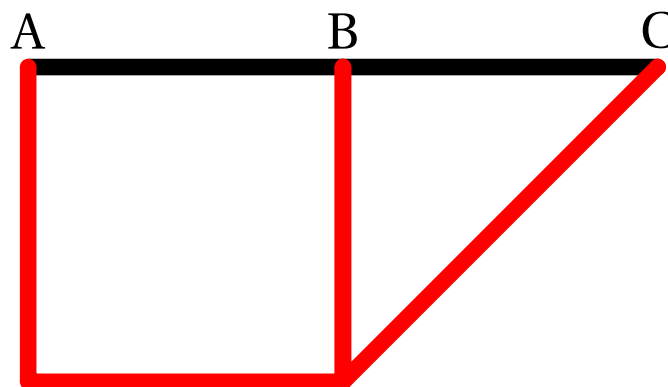
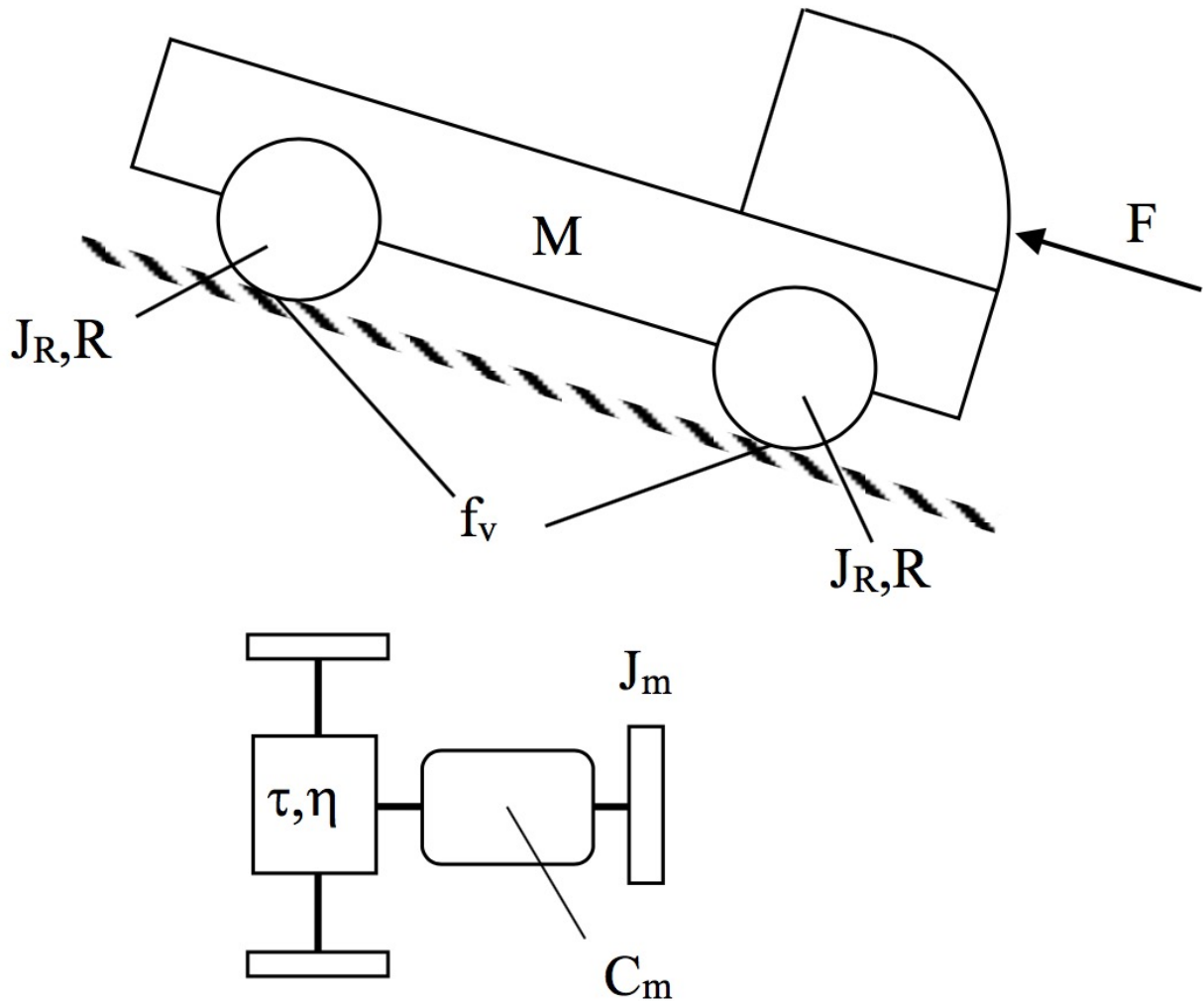


Figura 3.32: Grafico del momento flettente nell'asta AC

## 3.2.5 Terzo esercizio



$$M = 1800 \text{ kg} \quad \mu_d = 0.9 \quad J_R = 3 \text{ kgm}^2 \quad \mu_r = 0.8 \quad J_m = 0.8 \text{ kgm}^2$$

$$f_v = 0.05 \quad R = 0.4 \text{ m} \quad F = 250 \text{ N} \quad \tau = \frac{1}{4} \quad \alpha = 5 \text{ deg}$$

Il veicolo rappresentato in figura è posto nel piano verticale ed avanza in discesa lungo un piano inclinato di  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale. Il veicolo è movimentato tramite un motore longitudinale avente momento d'inerzia  $J_m$  e in grado di generare una coppia motrice  $C_m$ .

Al motore è collegata una trasmissione, di cui sono noti il rapporto di trasmissione  $\tau$ , il rendimento in moto diretto  $\mu_d$  e il rendimento in moto retrogrado  $\mu_r$ .

Si consideri pari a  $M$  la massa totale del veicolo (comprensiva anche della massa delle ruote), pari a  $R$  il raggio delle ruote, pari a  $J_R$  il momento d'inerzia di ciascuna coppia di ruote (anteriori e posteriori) e pari a  $f_v$  il coefficiente di attrito volvente delle ruote stesse.

Sul veicolo agisce una forza aerodinamica  $F$ , di cui è noto il valore per la velocità di avanzamento assegnata.

Si chiede di calcolare:

1. La coppia motrice  $C_m$  considerando il veicolo a regime.
2. La coppia motrice necessaria affinché il veicolo abbia un'accelerazione pari a  $0.5 \text{ m/s}^2$ .

### 3.2.6 Soluzione terzo esercizio

#### Primo punto

#### Calcolo della potenza motrice

$$W_m = C m * \omega_m$$

**Calcolo della potenza resistente** Calcolo per prima cosa la potenza resistente per poter identificare il tipo di moto.

Prendo quindi in considerazioni l'effetto di *forze peso*, *attriti* e *forze applicate*.

$$W_{resistente} = M\vec{g} \cdot \vec{v} + \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{F}_v \cdot \vec{v}$$

La velocità del veicolo è inclinata a  $-\alpha$  gradi. Risolvo il **prodotto scalare** ed ottengo:

1. La forza peso è inclinata verso il basso e forma un angolo di  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  con il vettore velocità.
2. La forza  $F$  e la forza  $F_v$  sono orientate in senso opposto rispetto alla velocità, per cui formano un angolo di  $\pi$ .

$$\begin{aligned} W_{resistente} &= Mgv \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + Fv \cos \pi + F_v v \cos \pi \\ W_{resistente} &= Mgv \sin(\alpha) - Fv - F_v v \end{aligned}$$

Calcolo la forza d'attrito volvente  $F_v$ :

$$F_v = f_v(N_{ant_{dx}} + N_{ant_{sx}} + N_{pos_{dx}} + N_{pos_{sx}})$$

La sommatoria delle forze normali è pari alla componente normale della forza peso del veicolo.

$$F_{gy} = N_{ant_{dx}} + N_{ant_{sx}} + N_{pos_{dx}} + N_{pos_{sx}}$$

La componente normale della forza peso risulta pari a:

$$F_{gy} = F_g \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = F_g \cos \alpha$$

$$F_v = f_v F_{gy} = f_v F_g \cos \alpha = f_v M g \cos \alpha$$

$$W_{resistente} = Mgv \sin(\alpha) - Fv - v f_v M g \cos \alpha$$

Definisco la velocità  $v$  con cui il veicolo si muove sfruttando il legame cinematico con la velocità angolare  $\omega_r$  della ruota, che a sua volta è legata con un parametro  $\tau$  alla velocità angolare motrice  $\omega_m$ .

$$v = R\omega_r = R\tau\omega_m$$

Raccolgo la velocità e sostituisco:

$$W_{resistente} = R\tau\omega_m(Mg \sin(\alpha) - F - f_v M g \cos \alpha)$$

Semplifico e raccolgo il coefficiente della forza peso:

$$W_{resistente} = R\tau\omega_m(Mg(\sin\alpha - f_v \cos\alpha) - F)$$

Calcolo il valore del coefficiente:

$$Mg(\sin\alpha - f_v \cos\alpha) - F \approx 409 N > 0$$

Il coefficiente ha segno positivo, e siccome son in condizioni di regime è dimostrazione sufficiente per dire che il moto risulta **retrogrado**.

**Calcolo della potenza perduta** poiché siamo in condizioni di **moto retrogrado**, usiamo la formula potenza resistente e  $\mu_r$  per calcolare la potenza perduta. Ricordando che siamo in condizioni di regime, la variazione di energia cinetica sarà pari a 0.

$$W_p = -(1 - \mu_r)(W_r - \frac{dEc}{dt})$$

$$W_p = -(1 - \mu_r)W_r$$

**Bilancio delle potenze** Per calcolare la coppia motrice  $C_m$  vado ad usare la formula del **bilancio delle potenze** ricordando che siamo in condizioni di regime.

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dEc}{dt}$$

$$W_m + W_r + W_p = 0$$

$$C_m\omega_m + W_r - (1 - \mu_r)W_r = 0 \quad (3.1)$$

$$C_m\omega_m + \mu_r W_r = 0 \quad (3.2)$$

$$C_m\omega_m + \mu_r R\tau\omega_m(Mg(\sin\alpha - f_v \cos\alpha) - F) = 0 \quad (3.3)$$

$$C_m + \mu_r R\tau(Mg(\sin\alpha - f_v \cos\alpha) - F) = 0 \quad (3.4)$$

$$C_m = -\mu_r R\tau(Mg(\sin\alpha - f_v \cos\alpha) - F) \quad (3.5)$$

$$C_m = -32.75 Nm (C_{m_{riportato}} = 32.8 Nm) \quad (3.6)$$

## Secondo punto

Si tratta di calcolare una  $C_m$  tale per cui la  $a = \dot{\omega}_m \tau R = 0.5 m/s^2$



**Calcolo energia cinetica totale** considero le masse in moto e i momenti di inerzia di masse in rotazione.

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + J_R (\tau \omega_m)^2$$

Sostituisco il legame cinematico della velocità,  $v = R \tau \omega_m$ :

$$E_c = \frac{1}{2} M (R \tau \omega_m)^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + J_R (\tau \omega_m)^2$$

Semplifico l'espressione:

$$E_c = \omega_m^2 \left( \frac{1}{2} M R^2 \tau^2 + \frac{1}{2} J_m + J_R \tau^2 \right)$$

Derivo:

$$\frac{dE_c}{dt} = \omega_m \dot{\omega}_m (M R^2 \tau^2 + J_m + 2 J_R \tau^2)$$

**Tipo del moto** Verifico il tipo del moto tramite la disequazione:

$$W_r - \frac{dE_{c_r}}{dt} > 0$$

Se essa vale, allora il moto risulta retrogrado, altrimenti diretto.

$$R \tau \omega_m (M g (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F) - \omega_m \dot{\omega}_m (M R^2 \tau^2 + 2 J_R \tau^2) > 0$$

Semplifico velocità angolare:

$$R \tau (M g (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F) - \dot{\omega}_m (M R^2 \tau^2 + 2 J_R \tau^2) > 0$$

Sfruttando il legame cinematico dell'accelerazione angolare, sostituisco con l'accelerazione fornita,  $a = \dot{\omega}_m \tau R \longleftrightarrow \dot{\omega} = \frac{a}{\tau R}$ :

$$R \tau (M g (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F) - \frac{a}{\tau R} (M R^2 \tau^2 + 2 J_R \tau^2) > 0$$

Semplifico nuovamente i termini in comune:

$$R (M g (\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F) - \frac{a}{R} (M R^2 + 2 J_R) > 0$$

Sostituisco numericamente ed ottengo:

$$-203.7 > 0$$

La disequazione risulta falsa, quindi il moto è **diretto**.

**Calcolo potenza perduta in moto diretto**

$$W_p = -(1 - \mu_d) \left( W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} \right) = -(1 - \mu_d) (W_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m)$$

**Applico il bilancio delle potenze**

$$W_m + W_r + W_p = \omega_m \dot{\omega} (MR^2 \tau^2 + J_m + 2J_R \tau^2)$$

$$W_m + W_r - (1 - \mu_d)(W_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = \omega_m \dot{\omega} (MR^2 \tau^2 + J_m + 2J_R \tau^2)$$

$$W_r + \mu_d(W_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = \omega_m \dot{\omega} (MR^2 \tau^2 + J_m + 2J_R \tau^2)$$

$$R\tau \omega_m (Mg(\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F) + \mu_d(C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m) = \omega_m \dot{\omega} (MR^2 \tau^2 + J_m + 2J_R \tau^2)$$

Semplifico per  $\omega_m$ :

$$R\tau (Mg(\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F) + \mu_d(C_m - J_m \dot{\omega}_m) = \dot{\omega} (MR^2 \tau^2 + J_m + 2J_R \tau^2)$$

Risolvero per  $C_m$ :

$$R\tau (Mg(\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F) + \mu_d C_m - \mu_d J_m \dot{\omega}_m = \dot{\omega} (MR^2 \tau^2 + J_m + 2J_R \tau^2)$$

$$C_m = \frac{\dot{\omega} (MR^2 \tau^2 + J_m + 2J_R \tau^2) + \mu_d J_m \dot{\omega}_m - R\tau (Mg(\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F)}{\mu_d}$$

Semplifico quanto possibile l'espressione:

$$C_m = \frac{\dot{\omega} (\tau^2 (MR^2 + J_m + 2J_R) + \mu_d J_m) - R\tau (Mg(\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F)}{\mu_d}$$

Sostituisco  $\dot{\omega}_m = \frac{a}{\tau R}$ :

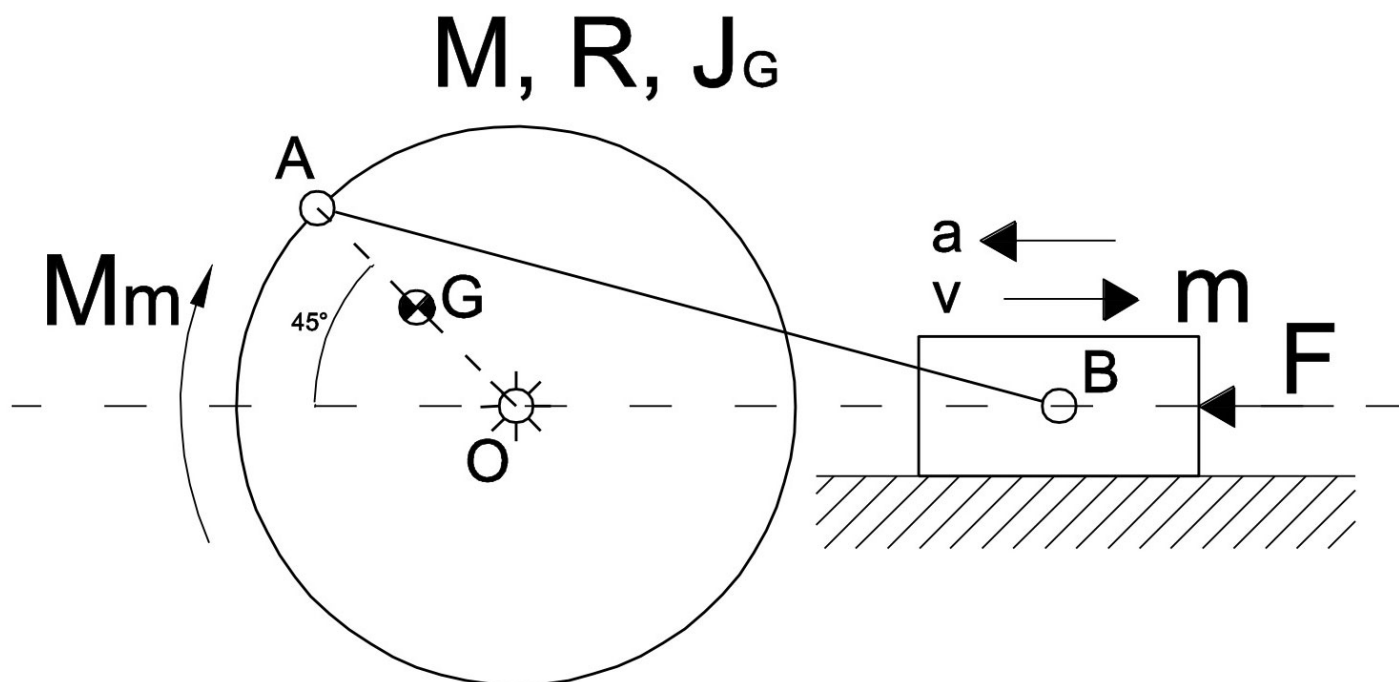
$$C_m = \frac{\frac{a}{\tau R} (\tau^2 (MR^2 + J_m + 2J_R) + \mu_d J_m) - R\tau (Mg(\sin \alpha - f_v \cos \alpha) - F)}{\mu_d}$$

Infine sostituisco numericamente:

$$C_m = 60.86 Nm \quad (C_{m_{riportato}} = 60.6 Nm)$$

### 3.3 Tema d'esame del 01/09/2015

#### 3.3.1 Primo esercizio



$$R = 0.2 \, m \quad AB = 0.55 \, m \quad OG = 0.1 \, m \quad M = 1 \, Kg \quad J_G = 0.03 \, Kg m^2$$

$$m = 30 \, kg \quad F = 1000 \, N \quad v = 5 \, m/s \quad a = 3 \, m/s^2 \quad \alpha = 45 \, \text{deg}$$

Il sistema articolato rappresentato in figura è posto nel piano verticale. Il disco di caratteristiche note è incernierato a terra in O e ha baricentro in G. Il corsoio, di massa  $m$  e dimensioni trascurabili, si muove su una guida orizzontale liscia. Una asta di massa trascurabile collega il punto A sulla circonferenza del disco al corsoio. Una forza  $F$  nota è applicata sul corsoio. Assegnate la velocità  $v$  e l'accelerazione  $a$  del corsoio (con i versi indicati in figura) si chiede di calcolare:

1. La velocità e l'accelerazione angolare del disco (modulo e verso).
2. La coppia  $M_m$  da applicare al disco per garantire il moto assegnato.

### 3.3.2 Soluzione primo esercizio

#### Osservazioni importanti

1. Il baricentro del disco non coincide col centro geometrico. Questo generalmente comporta che la velocità del baricentro risulterà differente da quella del centro geometrico se il corpo ruota, come in questo caso. Questo porterà ad avere una componente di energia cinetica legata al moto traslatorio del baricentro, e non solo della rotazione momento d'inerzia baricentrico.
2. Velocità ed accelerazione del punto B hanno verso discorde.
3. Il CIR del disco è il punto O, che è vincolato a terra.
4. La direzione della velocità del punto B, che è verso le ascisse positive, suggerisce una rotazione oraria del disco. Questo implica un valore negativo per la velocità angolare.
5. La direzione dell'accelerazione del punto B, che è verso le ascisse negative, suggerisce un'accelerazione anti-oraria del disco. Questo implica un valore positivo per l'accelerazione angolare.
6. La dimensione del segmento OB è variabile.

#### Primo punto

Inizio scegliendo un'equazione di chiusura:  $(O - A) + (A - B) = (O - B)$

Risolverò con il metodo dei numeri complessi.

Inizio definendo, per quanto riguarda i segmenti,  $a = OA$ ,  $b = AB$  e  $c = OB$  e per quanto riguarda gli angoli chiamo  $\alpha$  l'angolo che determina la direzione di  $a$  e  $\beta$  l'angolo che determina la direzione di  $b$ .

Inizialmente,  $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ .

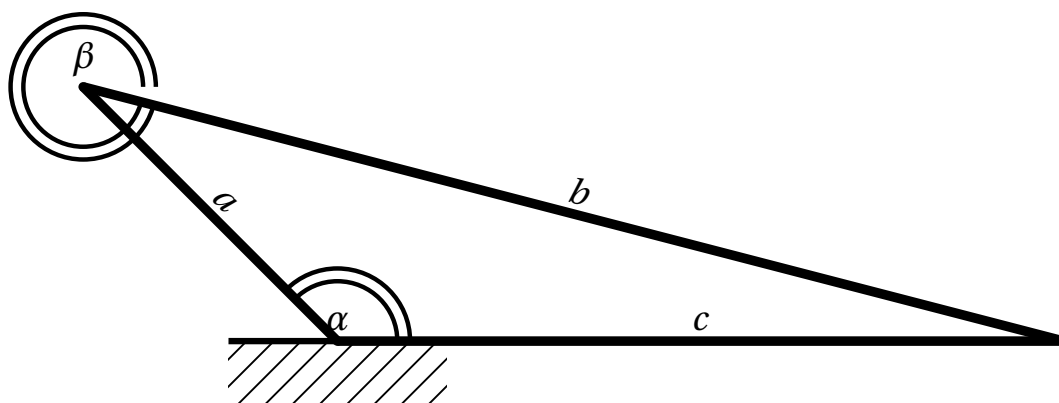


Figura 3.33: Grafico semplificato

#### Spostamento

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = c$$

Scompongo in componenti cartesiane e calcolo il valore di  $c$  e di  $\beta$ .

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta = c \\ a \sin \alpha + b \sin \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a \cos \alpha + b \cos \beta \\ \beta = \arcsin\left(-\frac{a \sin \alpha}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0.39m \\ \beta = -0.26 rad \end{cases}$$

I risultati ottenuti sono plausibili, sia dimensionalmente che nell'insieme dell'esercizio.

**Velocità** Derivo ed ottengo la velocità, ricordando che i termini che variano nel tempo sono  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $c$ .

$$a\dot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} + b\dot{\beta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} = \dot{c}$$

Scompongo in componenti cartesiane ed ottengo il valore di  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$ :

$$\begin{cases} a\dot{\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + b\dot{\beta}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = 0 \\ a\dot{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + b\dot{\beta}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \dot{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\dot{\alpha}\cos(\alpha) + b\dot{\beta}\cos(\beta) = 0 \\ -a\dot{\alpha}\sin(\alpha) - b\dot{\beta}\sin(\beta) = \dot{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{b\dot{\beta}\cos(\beta)}{a\cos(\alpha)} \\ a\frac{b\dot{\beta}\cos(\beta)}{a\cos(\alpha)}\sin(\alpha) - b\dot{\beta}\sin(\beta) = \dot{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{b\dot{\beta}\cos(\beta)}{a\cos(\alpha)} \\ \frac{b\dot{\beta}\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\sin(\alpha) - b\dot{\beta}\sin(\beta) = \dot{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{b\dot{\beta}\cos(\beta)}{a\cos(\alpha)} \\ \dot{\beta}b(\cos(\beta)\tan(\alpha) - \sin(\beta)) = \dot{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{b\dot{\beta}\cos(\beta)}{a\cos(\alpha)} \\ \dot{\beta} = \frac{\dot{c}}{b(\cos(\beta)\tan(\alpha) - \sin(\beta))} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -48.2 \text{ rad/s}^2 \\ \dot{\beta} = -12.8 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

I risultati ottenuti risultano plausibili, sia dimensionalmente che relativamente al moto del sistema in analisi.

**Accelerazione** Derivo nuovamente ed ottengo l'accelerazione, ricordando che i termini che variano nel tempo sono ora  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{c}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ .

$$a\ddot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + b\ddot{\beta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta} = \ddot{c}$$

Scompongo in componenti cartesiane e risolvo per ottenere  $\ddot{\alpha}$  e  $\ddot{\beta}$ :

$$\begin{cases} a\ddot{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha + b\ddot{\beta}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \ddot{c} \\ a\ddot{\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + b\ddot{\beta}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) - b\dot{\beta}^2\sin\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \ddot{c} \\ a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\frac{a\dot{\alpha}^2\sin\alpha - b\dot{\beta}^2\cos\beta + b\dot{\beta}^2\sin\beta}{a\cos\alpha}\sin\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \ddot{c} \\ \ddot{\alpha} = \frac{a\dot{\alpha}^2\sin\alpha - b\dot{\beta}^2\cos\beta + b\dot{\beta}^2\sin\beta}{a\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-a\dot{\alpha}^2\sin\alpha + b\dot{\beta}^2\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta)\tan\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \ddot{c} \\ \ddot{\alpha} = \frac{a\dot{\alpha}^2\sin\alpha - b\dot{\beta}^2\cos\beta + b\dot{\beta}^2\sin\beta}{a\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\dot{\beta}(\cos\beta\tan\alpha - \sin\beta) = \ddot{c} + b\dot{\beta}^2\cos\beta + a\dot{\alpha}^2\cos\alpha + b\dot{\beta}^2\sin\beta\tan\alpha + a\dot{\alpha}^2\sin\alpha\tan\alpha \\ \ddot{\alpha} = \frac{a\dot{\alpha}^2\sin\alpha - b\dot{\beta}^2\cos\beta + b\dot{\beta}^2\sin\beta}{a\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\beta} = \frac{\ddot{c} + b\dot{\beta}^2\cos\beta + a\dot{\alpha}^2\cos\alpha + b\dot{\beta}^2\sin\beta\tan\alpha + a\dot{\alpha}^2\sin\alpha\tan\alpha}{b(\cos\beta\tan\alpha - \sin\beta)} \\ \ddot{\alpha} = \frac{a\dot{\alpha}^2\sin\alpha - b\dot{\beta}^2\cos\beta + b\dot{\beta}^2\sin\beta}{a\cos\alpha} \end{cases}$$

Notando che  $\ddot{c} = -a$  procedo con la sostituzione numerica:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} = 1408.8 \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{\alpha} = 3135.7 \text{ rad/s}^2 \quad (\ddot{\alpha}_{\text{riportato}} = 3131 \text{ rad/s}^2) \end{cases}$$

### Secondo punto

Per calcolare la coppia  $M_m$  vado ad utilizzare il **bilancio delle potenze**.

**Calcolo energia cinetica totale** Per calcolare l'energica cinetica totale identifico le masse in moto rotatorio o traslatorio, che in questo caso son sia il disco  $M$  che il corsoio  $m$ .

**⚠ N.B.** Il baricentro *non* coincide con il centro di rotazione del disco, per cui ha moto sia *rotatorio* che *traslatorio*. Per questo motivo, fornisce due componenti al bilancio dell'energia cinetica.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\alpha}^2$$

Derivo questa espressione ed ottengo:

$$\frac{dE_c}{dt} = mv(-a) + Mv_Ga_G + J_G\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$$

Sostituisco tramite i legami cinematici  $v_G$  e  $a_G$ :

$$\frac{dE_c}{dt} = M(-\dot{\alpha})(-\ddot{\alpha})OG^2 + J_G\dot{\alpha}\ddot{\alpha} - mva$$

$$\frac{dE_c}{dt} = M\dot{\alpha}\ddot{\alpha}OG^2 + J_G\dot{\alpha}\ddot{\alpha} - mva$$

**Calcolo la potenza totale** Per calcolare la potenza totale, identifico le forze peso, le coppie, le forze degli attriti (statico, dinamico, volvente) e le forze applicate al sistema.

1. La forza peso applicata su B è controbilanciata da una forza normale del piano su cui giace il corsoio.
2. La forza peso agente su G, il baricentro del disco, non è controbilanciata. Il punto G si muove con una velocità  $v_G = -\dot{\omega}OG$ , che forma un angolo di  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  con la forza peso.
3. La forza F agente su B ha direzione pari e verso opposto rispetto alla velocità  $v$ , forma quindi un angolo di  $\pi$  con questo vettore.
4. La coppia  $M_m$  ha verso opposto rispetto a  $\dot{\alpha}$ , per cui forma con questo vettore un angolo di  $\pi$ .

$$\sum W_i = \vec{M}_m \bullet \dot{\alpha} + \vec{F}_g \bullet \vec{v}_G + \vec{F} \bullet \vec{v}$$

Risolvero il **prodotto scalare**:

$$\sum W_i = M_m\dot{\alpha} \cos \pi + F_g v_G \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + Fv \cos \pi$$

$$\sum W_i = -M_m\dot{\alpha} - F_g v_G \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - Fv$$

**Uso il bilancio delle potenze**

$$-M_m \dot{\alpha} - F_g v_G \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - Fv = M \dot{\alpha} \ddot{\alpha} OG^2 + J_G \dot{\alpha} \ddot{\alpha} - mva \quad (3.1)$$

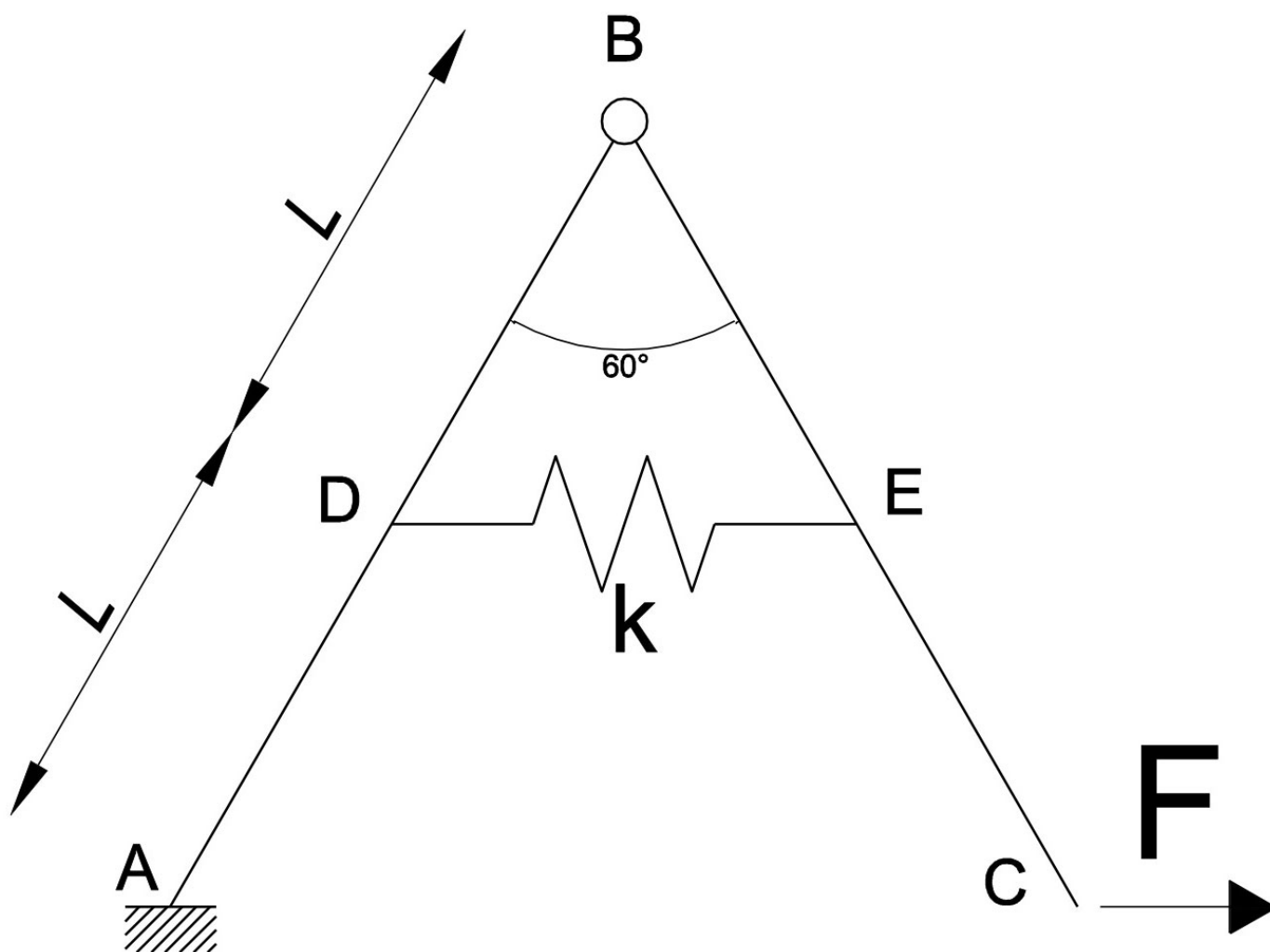
$$-M_m \dot{\alpha} = M \dot{\alpha} \ddot{\alpha} OG^2 + J_G \dot{\alpha} \ddot{\alpha} - mva + F_g v_G \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Fv \quad (3.2)$$

$$M_m = - \frac{M \dot{\alpha} \ddot{\alpha} OG^2 + J_G \dot{\alpha} \ddot{\alpha} - mva + F_g v_G \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Fv}{\dot{\alpha}} \quad (3.3)$$

$$M_m = - \frac{M \dot{\alpha} \ddot{\alpha} OG^2 + J_G \dot{\alpha} \ddot{\alpha} - mva + Mg(-OG\dot{\alpha}) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Fv}{\dot{\alpha}} \quad (3.4)$$

$$M_m = -30.26 Nm \quad (M_{m_{riportato}} = -30.1 Nm) \quad (3.5)$$

## 3.3.3 Secondo esercizio



Nel sistema rappresentato in figura una molla di rigidezza incognita collega i punti medi delle due aste AB e BC. Una forza  $F$ , nota, è applicata in direzione orizzontale nel punto C. Si chiede di:

1. Calcolare la rigidezza  $k$  della molla affinché il sistema in figura sia nella posizione di equilibrio (si consideri pari  $\frac{L}{2}$  la lunghezza  $L_0$  della molla indeformata);
2. Disegnare i diagrammi delle azioni interne nell'asta AB.



### 3.3.4 Soluzione secondo esercizio

#### Osservazioni

1. La struttura è formata da due aste, un vincolo a incastro, un vincolo a cerniera e la molla, che si comporta come una biella trasmettendo l'azione assiale.
2. La struttura è identificabile come un triangolo equilatero, per l'angolo a  $\frac{\pi}{3}$  in B.

#### Analisi dei vincoli

Tramite il computo dei gradi di vincolo possiamo fare una verifica preliminare di isostaticità:

$$gdl: \begin{cases} gdl_{molla} = 1 \\ gdl_{incastro} = 3 \\ gdl_{cerniera} = 2(2 - 1) = 2 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{aste} = 6 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 3.34: Verifica preliminare di isostaticità.

Per la verifica preliminare, la struttura risulta isostatica.

#### Primo punto

**Analisi dei vincoli esterni** L'unico vincolo a terra è l'incastro nel punto A:

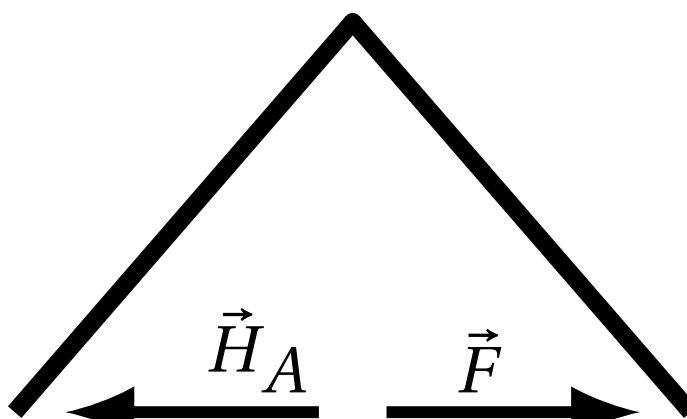


Figura 3.35: Reazioni vincolari dei vincoli esterni

$$\begin{cases} F - H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H_A = F \\ V_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$$

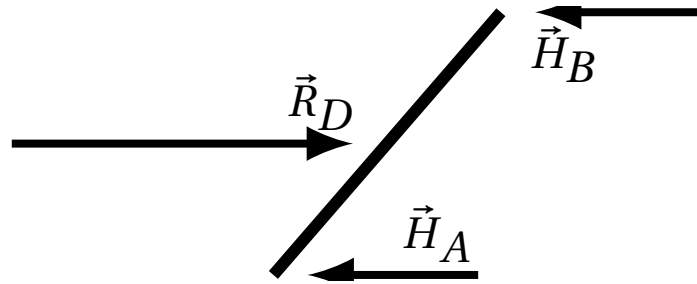


Figura 3.36: Reazioni vincolari nell'asta AB

**Analisi delle reazioni vincolari nell'asta AB**

$$\begin{cases} H_A + R_D + H_B = 0 \\ LR_{tD} - 2LH_{tB} = 0 \\ R_{tD} = R_D * \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ H_{tB} = H_B * \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F + R_D + H_B = 0 \\ LR_{tD} - 2LH_{tB} = 0 \\ R_{tD} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R_D \\ H_{tB} = \frac{\sqrt{3}}{2}H_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F + R_D + H_B = 0 \\ R_{tD} = 2H_{tB} \\ R_D = -\frac{2}{\sqrt{3}}R_{tD} = -2H_B \\ H_B = \frac{2}{\sqrt{3}}H_{tB} = \frac{R_{tD}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F - 2H_B + H_B = 0 \\ R_{tD} = 2H_{tB} \\ R_D = -\frac{2}{\sqrt{3}}R_{tD} = -2H_B \\ H_B = \frac{2}{\sqrt{3}}H_{tB} = \frac{R_{tD}}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B = F \\ R_{tD} = 2H_{tB} \\ R_D = -2F \\ H_B = 2H_{tB} = R_{tD} \end{cases}$$

Sapendo che la formula della forza elastica è:

$$F_{el} = -k\Delta L$$

Figura 3.37: Formula forza elastica

E che la lunghezza corrente della molla è di  $L$ , possiamo calcolare il delta come  $\Delta L = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$

$$-2F = -k\Delta L \quad (3.1)$$

$$2f = k\frac{L}{2} \quad (3.2)$$

$$k = \frac{4F}{L} \quad (3.3)$$

**punto**

Separo le componenti dei 3 vettori, in *sforzo normale* e *taglio*:

**Sforzo normale**

$$N = \frac{F}{2}$$

Nella parte inferiore la scomposizione dei vettori  $H_A$  e  $R_D$  danno luogo ad una trazione, per cui lo sforzo è positivo, mentre nella parte superiore si ha una contrazione, per cui lo sforzo è negativo.

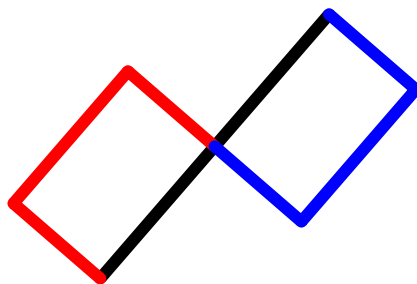


Figura 3.38: Grafico sforzo normale nell'asta AB

**Taglio**

$$T = \frac{\sqrt{3}F}{2}$$

Nella parte inferiore la scomposizione dei vettori  $H_A$  e  $R_D$  danno luogo ad una rotazione oraria, per cui il taglio è positivo, mentre nella parte superiore si ha una rotazione antioraria, per cui il taglio è negativo.

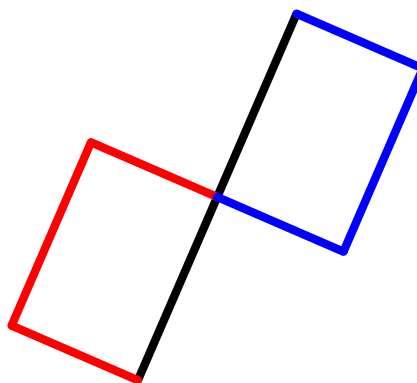


Figura 3.39: Grafico taglio nell'asta AB

**Momento flettente**

$$M_{max} = L \frac{\sqrt{3}F}{2}$$

Il momento aumenta linearmente fino a raggiungere il massimo nel punto D, in cui la forza  $R_D$  viene applicata, che impone un momento negativo e porta a decrescere linearmente il momento flettente sino a raggiungere 0 nell'estremo opposto.

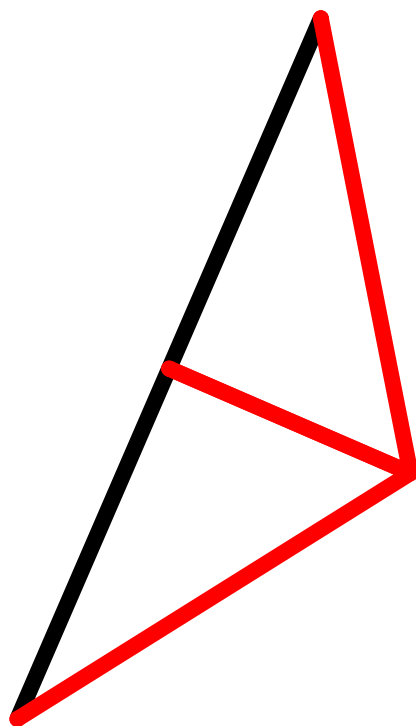
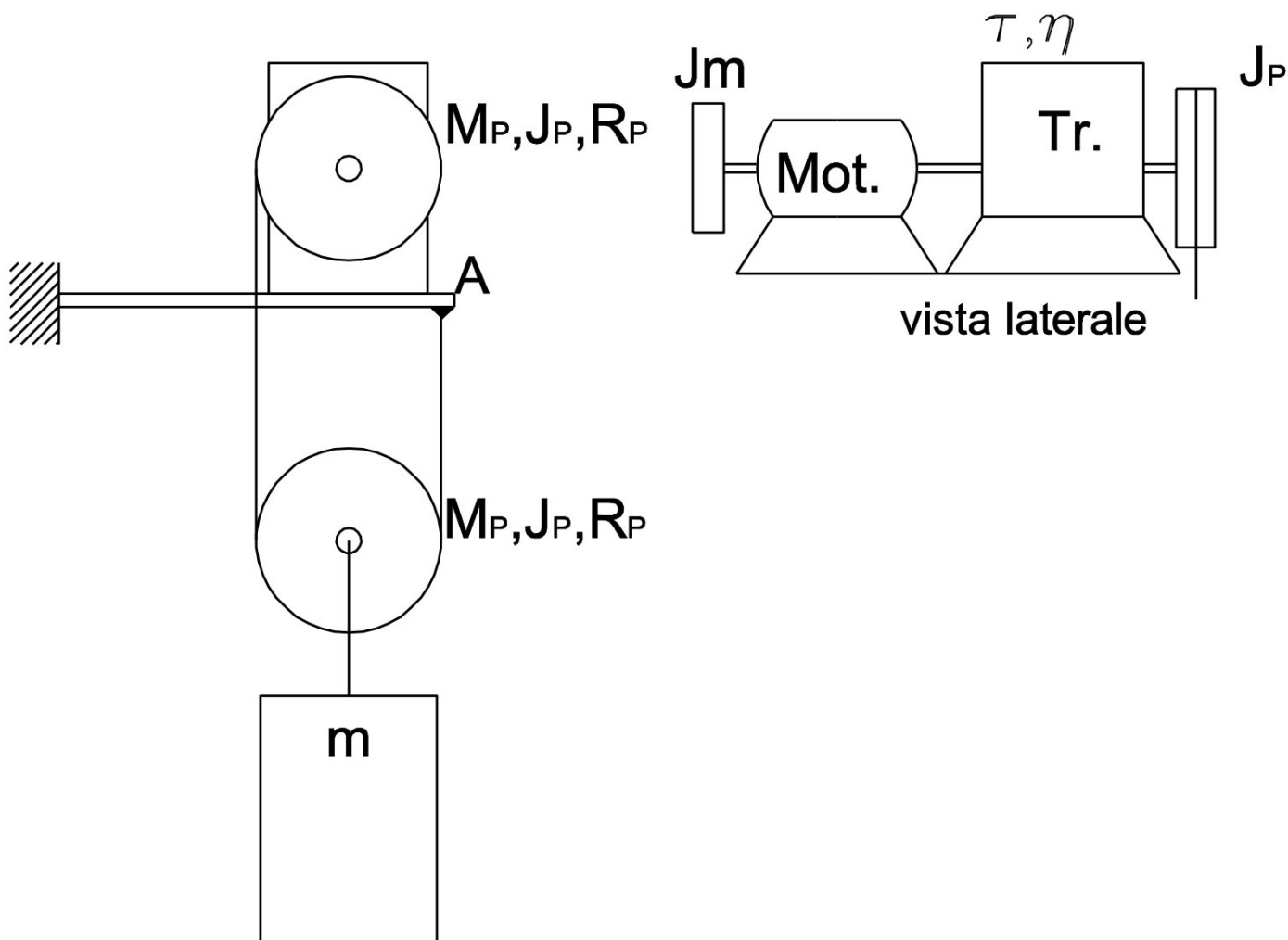


Figura 3.40: Grafico momento flettente nell'asta AB

## 3.3.5 Terzo esercizio



$$m = 120 \text{ Kg} \quad J_P = 0.2 \text{ Kg m}^2 \quad R_P = 0.15 \text{ m} \quad M_P = 20 \text{ Kg} \quad J_m = 0.1 \text{ Kg m}^2$$

$$\tau = 1/50 \quad \mu_D = 0.9 \quad \mu_R = 0.7 \quad C_{m0} = 12 \text{ Nm} \quad A = 0.02 \text{ Nm/(rad/s)}$$

$$C_m = C_{m0} - A\omega_m$$

Il sistema rappresentato in figura, posto nel piano verticale, rappresenta un impianto di sollevamento. Un motore, avente momento d'inerzia  $J_m$  e curva caratteristica della coppia motrice assegnata, è collegato per mezzo di una trasmissione (rapporto di trasmissione  $\tau$ , rendimento in moto diretto  $\mu_D$ , rendimento in moto retrogrado  $\mu_R$ ) ad una puleggia avente massa  $M_P$ , momento d'inerzia  $J_P$  e raggio  $R_P$ . La puleggia, a sua volta, movimenta una seconda puleggia mobile identica alla prima tramite una fune inestensibile che si avvolge sulla prima puleggia ed è collegata a terra nelledstremo in A. Al centro della seconda puleggia è, infine, collegato un carico avente massa  $m$ .

Si chiede di calcolare:

1. La coppia motrice e la potenza erogate dal motore nel caso di sollevamento a velocità costante del carico  $m$ .
2. La coppia motrice nel caso di moto in discesa del carico  $m$  con decelerazione  $a_m$  nota pari a  $0.05 \text{ m/s}^2$ .

### 3.3.6 Soluzione terzo esercizio

#### Osservazioni

1. La velocità nel primo punto è costante. Questo implica che ci troviamo in **condizioni di regime**.

#### Primo punto

#### Calcolo della potenza motrice

$$W_m = C_m \omega_m$$

**Calcolo della potenza resistente** Per calcolare la potenza resistente  $W_r$  considero tutte le forze agenti sul sistema: forze peso, attriti (statici, dinamici e volventi) e forze esterne in generale, che vengano applicate ad una massa in moto.

1. La forza peso agente sulla massa della puleggia superiore è contro bilanciata da una forza normale. Essa agisce sul baricentro della puleggia, che è implicitamente indicato come coincidente con il centro della stessa, per cui non vi è nè moto traslatorio nè rotatorio.
2. La forza peso agente sulla massa della puleggia inferiore, a differenza di quella superiore, contribuisce alla potenza resistente poiché il centro della massa si muove verticalmente. Siamo nel caso di un sollevamento, per cui la forza peso forma un angolo di  $\pi$  con la velocità.
3. Discorso analogo può essere fatto per la massa  $m$ , che può essere sommata alla massa  $M_P$  per quanto riguarda il contributo della forza peso.

$$W_r = \vec{F}_{g_{m+M_P}} \cdot \vec{v}$$

Risolvero il prodotto scalare:

$$W_r = F_{g_{m+M_P}} v \cos \pi = -F_{g_{m+M_P}} v$$

Definisco la forza peso:

$$F_{g_{m+M_P}} = (M_P + m)g$$

Determino il legame cinematico della velocità, considerato come CIR il punto della corda aderente alla puleggia inferiore:

$$v_{\text{sollevamentotangente}} = R_P \omega_P = R_P \tau \omega_m$$

$$v = v_{\text{sollevamento}} = \frac{R_P}{2R_P} v_{\text{sollevamentotangente}} = \frac{1}{2} v_{\text{sollevamentotangente}} = \frac{1}{2} R_P \tau \omega_m$$

Sostituendo entrambe le formule così ottenute, ottengo:

$$W_r = -\frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau \omega_m$$

**Identificazione del tipo di moto** Per identificare il tipo di moto con cui il sistema di sollevamento si muove, siccome siamo in condizioni di regime, è sufficiente controllare il segno della potenza resistente:

$$W_r > 0$$

Se la disequazione risultasse vera, allora siamo in condizioni di **moto retrogrado**, altrimenti **diretto**.

$$-\frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau \omega_m > 0$$

Nessuno dei termini ha segno negativo, per cui l'equazione è certamente falsa.

Siamo quindi in condizioni di **moto diretto**.

**Calcolo della potenza perduta** Essendo in condizioni di moto diretto e regime, utilizzo la formula corrispondente:

$$W_p = -(1 - \mu_D) W_m$$

**Bilancio delle potenze** Usando la formula del bilancio delle potenze calcolo il valore della velocità angolare  $\omega_m$ :

$$W_m + W_r + W_p = 0$$

$$W_m + W_r - (1 - \mu_D) W_m = 0$$

$$W_r + \mu_D W_m = 0$$

$$\mu_D C_m \omega_m - \frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau \omega_m = 0$$

$$\mu_D C_m - \frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau = 0$$

Sostituisco con la formula fornita ed ottengo:

$$\mu_D (C_{m0} - A \omega_m) - \frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau = 0$$

$$\mu_D A \omega_m = \mu_D C_{m0} - \frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau$$

$$\omega_m = \frac{\mu_D C_{m0} - \frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau}{\mu_D A}$$

Sostituisco numericamente ed ottengo:

$$\omega_m = 485.55 \text{ rad/s}$$

Sostituisco il valore ottenuto nella formula della coppia motrice ed ottengo:

$$C_m = 2.289 \text{ Nm}$$

Sostituisco nella formula della potenza motrice ed ottengo:


$$W_m = 1111.4 \text{ W}$$

## Secondo punto

Esiste una decelerazione  $a_m$ , per cui certamente non siamo più in condizioni di regime ma di **transitorio**.

La posizione del CIR della puleggia inferiore cambia poiché siamo in caso di moto in discesa. Esso si trova nel punto di tangenza sinistro, tra corda e puleggia.

**Identifico legame cinematico per accelerazione** Per utilizzare il dato fornito per l'accelerazione  $a_m$ , cerco un legame cinematico tra essa ed  $\dot{\omega}_m$ :

 **N.B.** L'accelerazione data nel testo ha segno negativo rispetto alla direzione del moto, essendo una decelerazione.

$$a_m = \frac{1}{2} R_P \dot{\omega}_m \tau \Rightarrow \dot{\omega}_m = \frac{2a_m}{R_P \tau} = -33.3 \text{ rad/s}^2$$

**Calcolo energia cinetica totale** Per calcolare l'energia cinetica totale considero i momenti di inerzia baricentrici di tutti i corpi rotanti e le masse di tutti gli oggetti in moto traslatorio.

Identificando il legame cinematico della velocità della massa  $m$ ,  $v$ , ottengo l'energia cinetica:

$$v = \frac{1}{2} R_P \omega_m \tau$$

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + J_P (\omega_m \tau)^2 + \frac{1}{2} (M_P + m) v^2 \\ &= \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + J_P (\omega_m \tau)^2 + \frac{1}{2} (M_P + m) \left( \frac{1}{2} R_P \omega_m \tau \right)^2 \end{aligned}$$


Raccolgo i coefficienti in comune:

$$E_c = \omega_m^2 \left( \frac{1}{2} J_m + \tau^2 \left( J_P + \frac{1}{8} (M_P + m) R_P^2 \right) \right)$$

Derivo l'espressione dell'energia cinetica ed ottengo:

$$\frac{dE_c}{dt} = \omega_m \dot{\omega}_m \left( J_m + \tau^2 \left( 2J_P + \frac{1}{4} (M_P + m) R_P^2 \right) \right)$$

**Identifico il tipo del moto** Essendo in condizioni di transitorio, va considerata anche l'energia cinetica nella disequazione. Se questa risulta vera, siamo in condizioni di **moto retrogrado, diretto** altrimenti.

 **N.B.** La direzione del moto è cambiata, il vettore velocità ora è concorde con la forza peso e quindi cambia il segno del prodotto scalare con essa. La potenza resistente, quindi, cambia di segno.

$$W_r = \frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau \omega_m$$

$$W_r - \frac{dE_{cr}}{dt} > 0$$

$$\frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau \omega_m - \omega_m \dot{\omega}_m \left( \tau^2 \left( 2J_P + \frac{1}{4} (M_P + m) R_P^2 \right) \right) > 0$$

$$\frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau - \dot{\omega}_m \left( \tau^2 \left( 2J_P + \frac{1}{4} (M_P + m) R_P^2 \right) \right) > 0$$

$$2.07 > 0$$

L'equazione è vera, per cui il moto è **retrogrado**.

**Calcolo la potenza perduta** Siamo in condizioni di moto retrogrado e transitorio, per cui la formula della potenza perduta da utilizzare è la seguente:

$$\begin{aligned} W_p &= -(1 - \mu_r) \left( W_r - \frac{dE_{cr}}{dt} \right) \\ &= -(1 - \mu_r) \left( \frac{1}{2} (M_P + m) g R_P \tau \omega_m - \omega_m \dot{\omega}_m \left( \tau^2 \left( 2J_P + \frac{1}{4} (M_P + m) R_P^2 \right) \right) \right) \end{aligned}$$



**Bilancio delle potenze** Utilizzo il bilancio delle potenze e risolvo per  $C_m$ :

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt} \quad (3.1)$$

$$W_m + W_r - (1 - \mu_r)(W_r - \frac{dE_{c_r}}{dt}) = \frac{dE_c}{dt} \quad (3.2)$$

Semplifico la potenza resistente:

$$W_m + \mu_r(W_r - \frac{dE_{c_r}}{dt}) = \frac{dE_c}{dt} \quad (3.3)$$

Separo le componenti dell'energia cinetica:

$$W_m + \mu_r(W_r - \frac{dE_{c_r}}{dt}) = \frac{dE_{c_r}}{dt} + \frac{dE_{c_m}}{dt} \quad (3.4)$$

Sposto a secondo membro l'energia cinetica:

$$W_m + \mu_r W_r = \frac{dE_{c_r}}{dt} + \frac{dE_{c_m}}{dt} + \mu_r \frac{dE_{c_r}}{dt} \quad (3.5)$$

Raccolgo a secondo membro:

$$W_m + \mu_r W_r = \frac{dE_{c_r}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt}(1 + \mu_r) \quad (3.6)$$

Sostituisco i termini con le relative espressioni:

$$C_m \omega_m + \mu_r \frac{1}{2}(M_P + m)gR_P \tau \omega_m = \omega_m \dot{\omega}_m J_m + \omega_m \dot{\omega}_m (\tau^2(2J_P + \frac{1}{4}(M_P + m)R_P^2))(1 + \mu_r) \quad (3.7)$$

Semplifico la velocità angolare  $\omega_m$ :

$$C_m + \mu_r \frac{1}{2}(M_P + m)gR_P \tau = \dot{\omega}_m J_m + \dot{\omega}_m (\tau^2(2J_P + \frac{1}{4}(M_P + m)R_P^2))(1 + \mu_r) \quad (3.8)$$

Raccolgo a secondo membro i coefficienti di  $\dot{\omega}_m$ :

$$C_m + \mu_r \frac{1}{2}(M_P + m)gR_P \tau = \dot{\omega}_m (J_m + \tau^2(2J_P + \frac{1}{4}(M_P + m)R_P^2))(1 + \mu_r) \quad (3.9)$$

Risolvo per  $C_m$ :

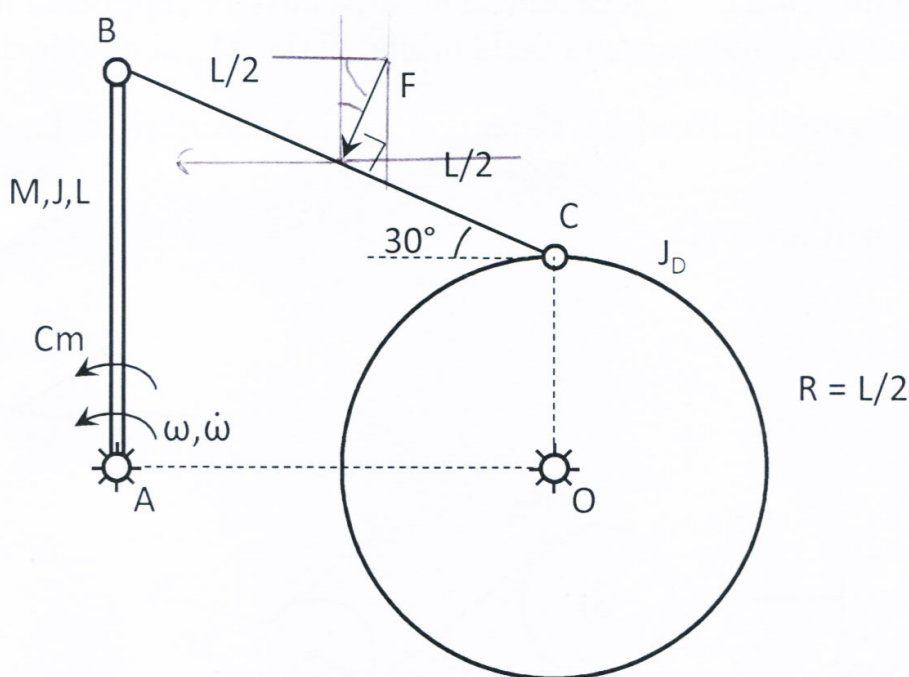
$$C_m = \dot{\omega}_m (J_m + \tau^2(2J_P + \frac{1}{4}(M_P + m)R_P^2))(1 + \mu_r) - \mu_r \frac{1}{2}(M_P + m)gR_P \tau \quad (3.10)$$

Sostituisco numericamente ed ottengo:

$$C_m = -4.76 Nm$$

## 4.1 Tema d'esame del 11/09/2017

### 4.1.1 Primo esercizio



$$L = 0.5 \text{ m} \quad M = 10 \text{ Kg} \quad J = 0.2 \text{ kgm}^2 \quad J_D = 0.5 \text{ kgm}^2 \quad F = 100 \text{ N} \quad \omega = 1 \text{ rad/s} \quad \dot{\omega} = 3 \text{ rad/s}^2$$

Il sistema rappresentato in figura è posto nel piano verticale. L'asta omogenea **AB**, avente massa **M**, momento d'inerzia **J** e lunghezza **L**, è incernierata a terra in **A**, mentre in **B** è incernierata ad un'altra asta **BC**, avente lunghezza **L** e massa trascurabile.

L'asta **BC** è incernierata nel punto **C** ad un disco (avente momento d'inerzia  $J_D$  e raggio  $R = \frac{L}{2}$ ), a sua volta incernierato a terra nel proprio baricentro **O**. Come indicato in figura, sull'asta **AB** agisce una coppia  $C_m$ , mentre sul punto medio dell'asta **BC** agisce una forza **F** nota e diretta come in figura.

Nota la geometria del sistema e assegnate la velocità e accelerazione angolare dell'asta **AB**, si chiede di calcolare:

1. La velocità e accelerazione angolare del disco.
2. La coppia  $C_m$  necessaria per garantire la condizione di moto assegnata.

### 4.1.2 Risoluzione primo esercizio (non verificata)

#### Primo punto

**Equazione di chiusura** Identifico come equazione di chiusura il quadrilatero  $(A_B) + (B - C) = (A - O) + (O - C)$  ed assegno le seguenti variabili:

$$a = BA = 0.5 \text{ m} \quad b = BC = 0.5 \text{ m} \quad c = CO = 0.25 \text{ m} \quad d = AO = 0.5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$$

Inoltre, definisco  $\alpha$  l'angolo che descrive l'orientamento di AB,  $\beta$  di BC e  $\gamma$  di OC. I valori iniziali che questi angoli assumono sono i seguenti:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \beta = -\frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

#### Spostamento

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = d + ce^{i\gamma}$$

#### Velocità

$$a\dot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} + b\dot{\beta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} = c\dot{\gamma}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}$$

Separo in componenti cartesiane:

$$\begin{cases} a\dot{\alpha} \cos \alpha + b\dot{\beta} \cos \beta = c\dot{\gamma} \cos \gamma \\ -a\dot{\alpha} \sin \alpha - b\dot{\beta} \sin \beta = -c\dot{\gamma} \sin \gamma \end{cases}$$

È possibile semplificare il sistema notando che, nell'istante considerato,  $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{cases} b\dot{\beta} \cos \beta = 0 \\ -a\dot{\alpha} - b\dot{\beta} \sin \beta = -c\dot{\gamma} \end{cases}$$

Nella prima relazione,  $b \neq 0$  e  $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ , per cui  $\dot{\beta} = 0 \text{ rad/s}$ .

$$\begin{cases} \dot{\beta} = 0 \text{ rad/s} \\ \dot{\gamma} = \frac{a}{c} \dot{\alpha} = 2 \text{ rad/s} \end{cases}$$

#### Accelerazione

$$a\ddot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + b\ddot{\beta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta} = c\ddot{\gamma}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)} - c\dot{\gamma}^2e^{i\gamma}$$

Sostituisco  $\dot{\beta} = 0$  per semplificare l'espressione:

$$a\ddot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + b\ddot{\beta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} = c\ddot{\gamma}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)} - c\dot{\gamma}^2e^{i\gamma}$$

Separo in componenti cartesiane:

$$\begin{cases} a\ddot{\alpha} \cos \alpha - a\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + b\ddot{\beta} \cos \beta = c\ddot{\gamma} \cos \gamma - c\dot{\gamma}^2 \sin \gamma \\ -a\ddot{\alpha} \sin \alpha - a\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - b\ddot{\beta} \sin \beta = -c\ddot{\gamma} \sin \gamma - c\dot{\gamma}^2 \cos \gamma \end{cases}$$

È possibile nuovamente semplificare il sistema notando che, nell'istante considerato,  $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha}^2 + b\ddot{\beta}\cos\beta = -c\dot{\gamma}^2 \\ -a\ddot{\alpha} - b\ddot{\beta}\sin\beta = -c\ddot{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\beta} = \frac{a\dot{\alpha}^2 - c\dot{\gamma}^2}{b\cos\beta} = -1.33 \text{ rad/s}^2 \\ -a\ddot{\alpha} - (a\dot{\alpha}^2 - c\dot{\gamma}^2)\tan\beta = -c\ddot{\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\beta} = \frac{a\dot{\alpha}^2 - c\dot{\gamma}^2}{b\cos\beta} = -1.33 \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{\gamma} = \frac{a\ddot{\alpha} + (a\dot{\alpha}^2 - c\dot{\gamma}^2)\tan\beta}{c} = 7.15 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

**Secondo punto**

Uso il bilancio delle potenze per calcolare la coppia.

**Energia cinetica**

$$E_c = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}J_D\dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2}Mv_g^2$$

Sostituisco con il legame  $v_g = \omega \frac{L}{2}$ .

$$E_c = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}J_D\dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2}M\left(\omega \frac{L}{2}\right)^2$$

Derivo l'espressione ed ottengo:

$$\frac{E_c}{dt} = J\omega\dot{\omega} + J_D\dot{\gamma}\ddot{\gamma} + M\omega\dot{\omega}\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

**Potenza totale**

$$\sum W_i = \vec{F}_g \cdot \vec{v}_{gAB} + \vec{F} \cdot \vec{v}_{gBC} + \vec{C}_m \cdot \dot{\omega}$$

1. La forza di gravità  $F_g$  forma un angolo di  $\frac{\pi}{2}$  con la velocità  $v_{gAB}$ , per cui non contribuisce alla potenza totale.
2. La forza  $F$  forma un angolo di  $\frac{\pi}{3}$  con la forza  $v_{gBC}$ , che siccome  $\dot{\beta} = 0$  la velocità del baricentro coincide con quella degli estremi.

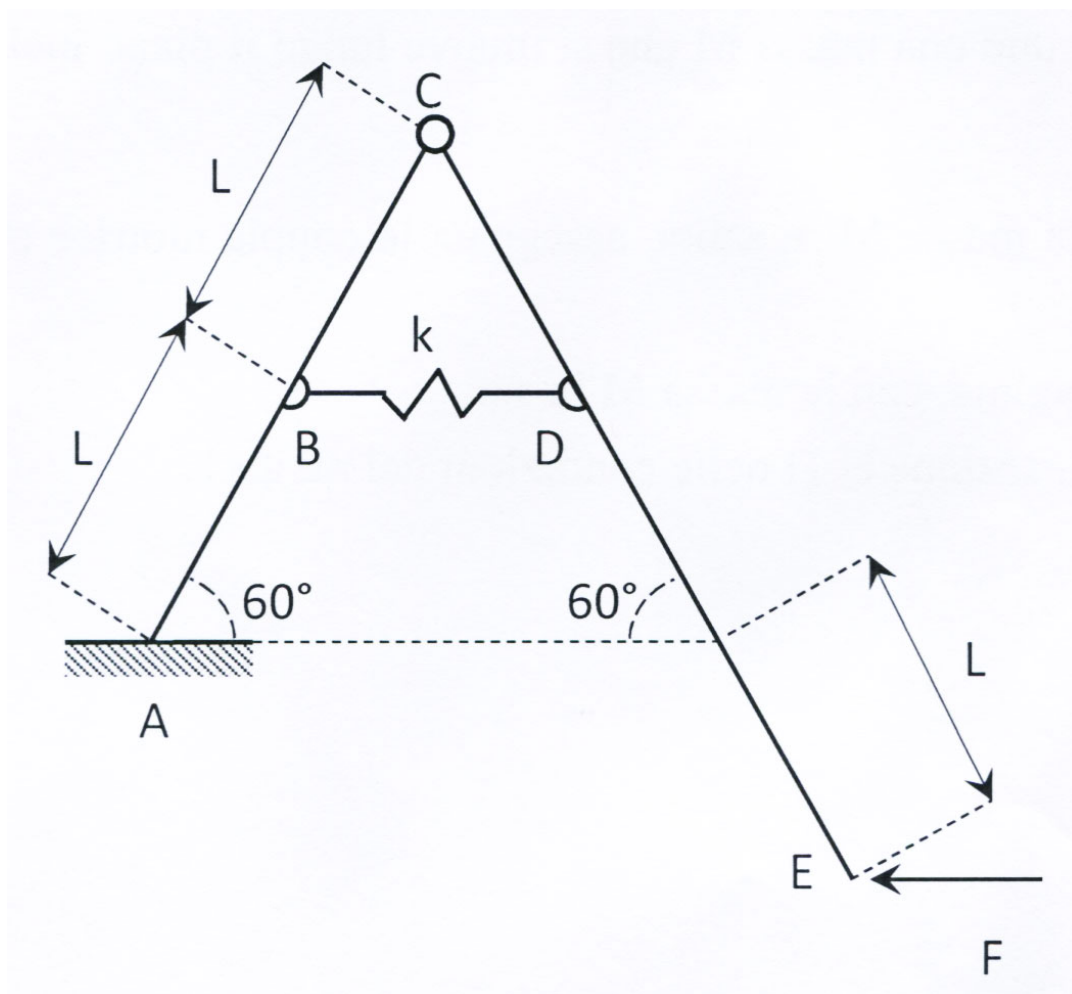
$$\sum W_i = F v_{gBC} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}F\omega \frac{L}{2} = \frac{1}{4}F\omega L + C_m\omega$$

**Bilancio di potenze**

$$\frac{1}{4}F\omega L + C_m\omega = J\omega\dot{\omega} + J_D\dot{\gamma}\ddot{\gamma} + M\omega\dot{\omega}\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$C_m = J\dot{\omega} + \frac{J_D\dot{\gamma}\ddot{\gamma}}{\omega} + M\dot{\omega}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}FL = -2.875 \text{ Nm}$$

## 4.1.3 Secondo esercizio



Il sistema rappresentato in figura è soggetto alla sola forza attiva  $F$ , applicata in direzione orizzontale nel punto  $E$ . Nota la lunghezza indeformata della molla, pari a  $2L$ , si chiede di calcolare:

1. La rigidezza  $k$  della molla affinché il sistema si trovi in equilibrio nella posizione rappresentata in figura.
2. Le azioni interne nell'asta  $AC$ .

#### 4.1.4 Soluzione secondo esercizio (non verificata)

##### Osservazioni

1. La struttura è composta da 2 aste e 3 vincoli: un incastro, una cerniera interna ed una molla.

##### Analisi preliminare di isostaticità

Verifico che  $gdl_{tot} = gdv_{tot}$ :

$$gdv: \begin{cases} gdv_{cerniera_{interna}} = 2(2-1) = 2 \\ gdv_{incastro} = 3 \\ gdv_{molla} = 1 \end{cases}$$

(a) Gradi di vincolo del sistema.

$$gdl: \begin{cases} gdl_{aste} = 6 \end{cases}$$

(b) Gradi di libertà del sistema.

Figura 4.1: Verifica preliminare di isostaticità.

##### Primo punto

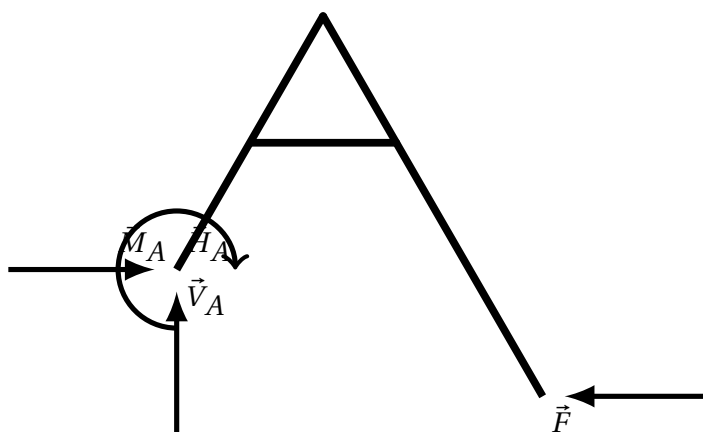


Figura 4.2: Analisi dei vincoli esterni

##### Analisi dei vincoli esterni

$$\begin{cases} V_A = 0 \\ H_A = F \\ M_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}LF \end{cases}$$

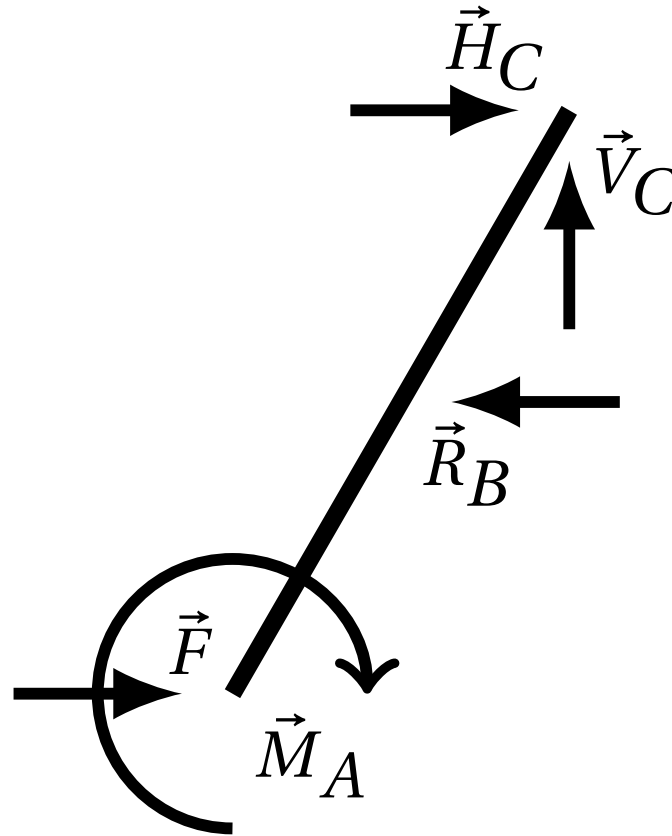


Figura 4.3: Reazioni vincolari nell'asta AC

**Analisi delle reazioni vincolari nell'asta AC**

$$\begin{cases} V_C = 0 \\ H_A + F = R_B \\ M_A + \sqrt{3}LH_C - \frac{\sqrt{3}}{2}LR_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_C = 0 \\ H_A = R_B - F \\ M_A + \sqrt{3}L(R_B - F) - \frac{\sqrt{3}}{2}LR_B = 0 \end{cases}$$

Sostituisco  $M_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}LF$  nella relazione del momento ed ottengo:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}LF + \sqrt{3}L(R_B - F) - \frac{\sqrt{3}}{2}LR_B = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}LF + \sqrt{3}LR_B - \sqrt{3}LF - \frac{\sqrt{3}}{2}LR_B = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}F + \sqrt{3}R_B - \sqrt{3}F - \frac{\sqrt{3}}{2}R_B = 0$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}R_B = 0$$

$$R_B = 3F$$



$$A: \begin{cases} V_A = 0 \\ H_A = F \\ M_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}LF \end{cases}$$

(a) Reazioni vincolari in A.

$$C: \begin{cases} V_C = 0 \\ H_C = 2F \end{cases}$$

(b) Reazioni vincolari in C.

**Riassumendo** La forza elastica si calcola come:

$$F_{el} = k(L_o - L)$$

Quindi si ottiene che:

$$R_B = 3F = k(2L - L) \Rightarrow k = \frac{3F}{L}$$

**Secondo punto**

Scompongo i vettori nelle componenti di taglio e sforzo.

$$A: \begin{cases} T = \frac{\sqrt{3}F}{2} \\ N = \frac{F}{2} \end{cases} \quad C: \begin{cases} T = \sqrt{3}F \\ N = F \end{cases} \quad B: \begin{cases} T = \frac{3\sqrt{3}F}{2} \\ N = \frac{3F}{2} \end{cases}$$

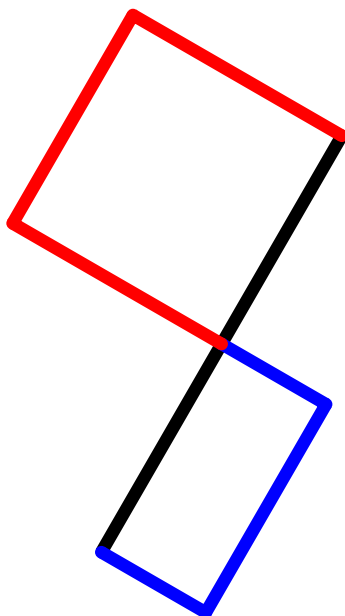
**Sforzo normale** Nella parte inferiore lo sforzo è di contrazione e quindi è negativo, nella parte superiore, invece, è di trazione, e quindi positivo.

Figura 4.5: Sforzo normale nell'asta AC

**Taglio** Nella parte inferiore il taglio impone al tronco una rotazione anti-oraria e quindi è negativo, nella parte superiore, invece, impone una rotazione oraria, e quindi è positivo.

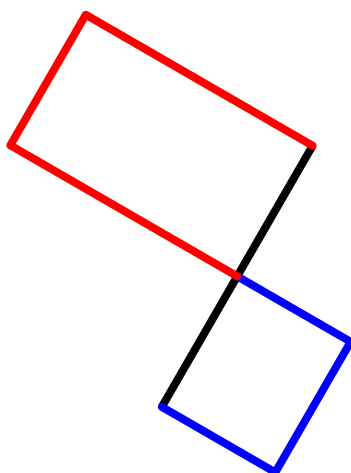


Figura 4.6: Taglio nell'asta AC

**Momento flettente** Il momento flettente raggiunge il punto massimo in B, dove vi è una discontinuità. È possibile realizzare anche grafici che ignorano questa discontinuità e terminano con momento negativo nell'estremità opposta, ma non risultano simmetrici intorno al punto B (procedendo dai lati opposti si ottengono risultati distinti).

Le fibre tese si trovano sul lato di sinistra.

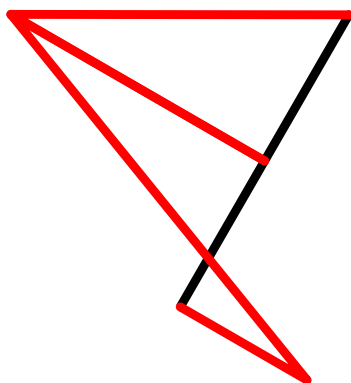
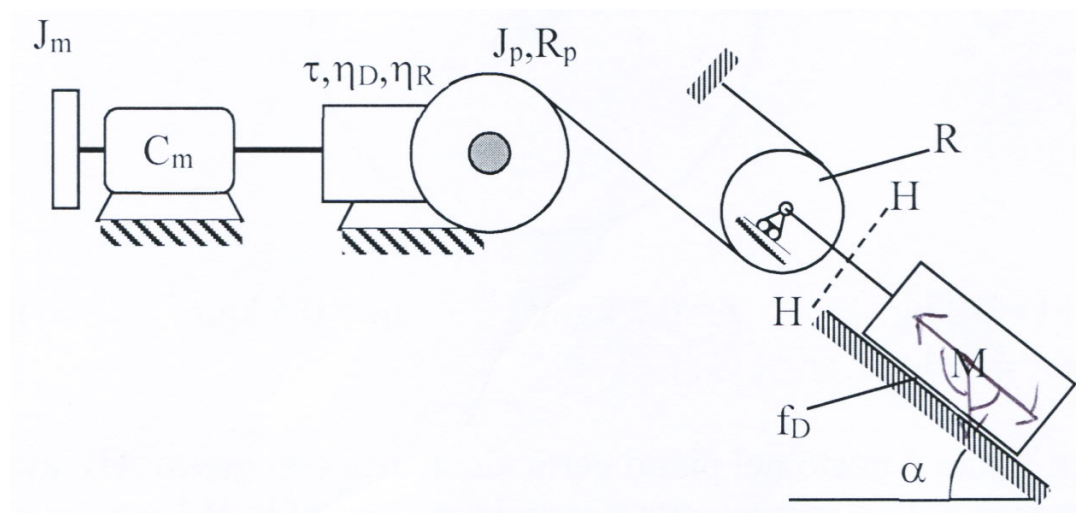


Figura 4.7: Momento flettente nell'asta AC

## 4.1.5 Terzo esercizio



$$M = 200 \text{ Kg} \quad J_m = 0.04 \text{ kg m}^2 \quad J_p = 3 \text{ kg m}^2 \quad R_p = 0.25 \text{ m} \quad R = 0.2 \text{ m}$$

$$\tau = \frac{1}{25} \quad \mu_D = 0.9 \quad \mu_R = 0.8 \quad f_D = 0.2 \quad \alpha = 30 \text{ deg}$$

L'impianto di sollevamento in figura è posto nel piano verticale ed è azionato attraverso un gruppo motore-riduttore di caratteristiche note: rapporto di riduzione  $\tau$  e rendimento  $\mu_D$  (per condizione di moto diretto) e  $\mu_R$  (per condizioni di moto retrogrado). All'albero di uscita della trasmissione è collegata la puleggia di raggio  $R_p$  e momento di inerzia  $J_p$  su cui si avvolge la fune inestensibile. All'altra estremità, la fune si avvolge su un disco di raggio  $R$  (di massa e momento di inerzia trascurabili), il cui centro è vincolato a muoversi in direzione parallela al piano inclinato in figura, ed è infine vincolata a terra. Al centro del disco è collegata attraverso una seconda fune una massa  $M$  che si muove lungo il piano inclinato, con un coefficiente di attrito radente  $f_D$ .

Si chiede di calcolare:

1. L'accelerazione con la massa  $M$  in salita, assegnata la coppia motrice erogata dal motore, pari a  $C_m = 20 \text{ Nm}$ .
2. La coppia motrice a regime, con la massa  $M$  in salita.
3. Il tiro della fune nella sezione H-H nelle condizioni del punto 1.

### 4.1.6 Soluzione terzo esercizio (non verificata)

#### Primo punto

**Legami cinematici** Per prima cosa identifico i legami cinematici che legano accelerazione e velocità della massa  $M$  a velocità ed accelerazione angolari del motore.

La massa  $M$  è connessa al centro del disco di raggio  $R$ , e quest'ultimo individua il proprio CIR nel punto di tangenza con la corda inestensibile, che si muove alla velocità con cui la puleggia ruota.

$$v_p = \tau \omega_m R_p$$

$$v_m = v_D = \frac{\tau \omega_m R_p}{2}$$

È possibile fare un discorso analogo per le accelerazioni:

$$a_p = \tau \dot{\omega}_m R_p$$

$$a_m = a_D = \frac{\tau \dot{\omega}_m R_p}{2}$$

#### Potenza motrice

$$W_m = C_m \omega_m$$

#### Energia cinetica

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} M v_m^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_p (\omega_m \tau)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \left( \frac{\tau \omega_m R_p}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_p (\omega_m \tau)^2 \\ &= \omega_m^2 \left( \frac{1}{2} M \left( \frac{\tau R_p}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} J_m + \frac{1}{2} J_p (\tau)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega_m^2 \left( M \left( \frac{\tau R_p}{2} \right)^2 + J_m + J_p (\tau)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega_m^2 \left( \tau^2 \left( \frac{1}{4} M R_p^2 + J_p \right) + J_m \right) \end{aligned}$$

Derivo l'espressione così ottenuta ed ottengo:

$$\frac{dE_c}{dt} = \omega_m \dot{\omega}_m \left( \tau^2 \left( \frac{1}{4} M R_p^2 + J_p \right) + J_m \right)$$

#### Tipo di moto

$$\begin{aligned} W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} &> 0 \\ C_m \omega_m - J_m \omega_m \dot{\omega}_m &> 0 \\ C_m - J_m \dot{\omega}_m &> 0 \\ 20 - 0.04 \dot{\omega}_m &> 0 \\ \dot{\omega}_m &< 500 \end{aligned}$$

Procedo assumendo il tipo di moto **diretto**, andando a verificare poi se esso rispetta la disequazione.

**Potenza resistente**

$$\begin{aligned}
W_r &= \vec{F}_g \cdot \vec{v}_m + \vec{F}_d \cdot \vec{v}_m \\
&= F_g v_m \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + F_d v_m \cos \pi \\
&= -\frac{1}{2} F_g v_m - F_d v_m
\end{aligned}$$

La forza d'attrito dinamico è definita come:

$$F_d = F_g f_s \cos \alpha = F_g f_s \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} F_g f_s$$

$$\begin{aligned}
W_r &= -\frac{1}{2} F_g v_m (1 - f_s \sqrt{3}) \\
&= -\frac{1}{2} M g v_m (1 - f_s \sqrt{3}) \\
&= -\frac{1}{2} M g \frac{\omega_m \tau R_p}{2} (1 - f_s \sqrt{3}) \\
&= -\frac{1}{4} M g \omega_m \tau R_p (1 - f_s \sqrt{3})
\end{aligned}$$

**Potenza perduta** Essendo in condizioni di transitorio e ipotesi di moto diretto uso la formula seguente:

$$W_p = -(1 - \mu_D) \left( W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} \right)$$

**Bilancio di potenze**

$$\begin{aligned}
W_m + W_r + W_p &= \frac{dE_c}{dt} \\
W_m + W_r - (1 - \mu_D) \left( W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} \right) &= \frac{dE_{c_m}}{dt} + \frac{dE_{c_r}}{dt} \\
W_r + \mu_D \left( W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} \right) &= \frac{dE_{c_r}}{dt} \\
W_r + \mu_D W_m &= \frac{dE_{c_r}}{dt} + \mu_D \frac{dE_{c_m}}{dt} \\
\mu_D C_m \omega_m - \frac{1}{4} M g \omega_m \tau R_p (1 - f_s \sqrt{3}) &= \omega_m \dot{\omega}_m \left( \tau^2 \left( \frac{1}{4} M R_p^2 + J_p \right) + \mu_D J_m \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_m &= \frac{\mu_D C_m - \frac{1}{4} M g \tau R_p (1 - f_s \sqrt{3})}{\tau^2 \left( \frac{1}{4} M R_p^2 + J_p \right) + \mu_D J_m} = 323 \text{ rad/s}^2 \\
a &= \frac{\tau R_p \dot{\omega}_m}{2} = 1.615 \text{ m/s}^2
\end{aligned}$$

**Verifico ipotesi di moto diretto**

$$\dot{\omega}_m = 323 < 500$$

L'ipotesi è valida.

**Secondo punto**

Essendo in condizioni di regime, non è più necessario considerare la variazione di energia cinetica. Il segno del coefficiente della potenza resistente, essendo in salita, è strettamente negativo, per cui il moto si mantiene diretto.

$$W_m + W_r + W_p = 0$$

$$W_m + W_r - (1 - \mu_D) W_m = 0$$

$$W_r + \mu_D W_m = 0$$

$$\mu_D C_m \omega_m = \frac{1}{4} M g \omega_m \tau R_p (1 - f_s \sqrt{3})$$

$$\mu_D C_m = \frac{1}{4} M g \tau R_p (1 - f_s \sqrt{3})$$

$$C_m = \frac{M g \tau R_p (1 - f_s \sqrt{3})}{4 \mu_D} = 3.56 \text{ Nm}$$

**Terzo punto**

Procedo con il bilancio di forze.



**N.B.** La forza di inerzia  $Ma$  ha un verso **opposto** all'accelerazione.

$$-Ma = F_g \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} F_g f_s - F_t$$

$$-Ma = \frac{\sqrt{3}}{2} F_g + \frac{\sqrt{3}}{2} F_g f_s - F_t$$

$$F_t = M\left(\frac{\sqrt{3}}{2} g(1 + f_s) + a\right) = 2361 \text{ N}$$



## Formulario

Qui sono elencate alcune formule che risultano utili in generale nello studio e nella risoluzione della materia. Sebbene dovrebbero essere cose note, ripresento queste piccole formule perchè sono necessarie per lo svolgimento di esercizi.

### A.1 Formule per la cinematica

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin \theta$$

(a) Legame cinematico tra  $\vec{v}$  e  $\vec{\omega}$

$$\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\omega} r \sin \theta$$

(b) Legame cinematico tra  $\vec{a}_t$  e  $\vec{\omega}$

Figura A.1: Legami cinematici

$$a_n = \omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r}$$

Figura A.2: Accelerazione centripeta

#### A.1.1 Brevissimo formulario per le derivate

$$\frac{d \sin \alpha}{d t} = \cos \alpha$$

(a) Derivata di seno.

$$\frac{d \cos \alpha}{d t} = -\sin \alpha$$

(b) Derivata di coseno.

$$\frac{d(a(t)b(t)c(t))}{dt} = \dot{a}(t)b(t)c(t) + a(t)\dot{b}(t)c(t) + a(t)b(t)\dot{c}(t)$$

Figura A.4: Derivata di prodotto.

$$\frac{a(b(t))}{dt} = \dot{b}(t)\dot{a}(b(t))$$

Figura A.5: Derivata di funzione composta.

### A.1.2 Brevissimo formulario per numeri complessi

$$ie^{i\alpha} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

(a) Traslazione dell'esponente in exp. complessa.

$$\frac{d(e^{i\alpha})}{dt} = i\dot{\alpha}e^{i\alpha} = \dot{\alpha}e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

(b) Derivare exp. complessa.

## A.2 Formule per la statica

$$F_{el} = k(l_o - l)$$

Figura A.7: Forza elastica

$$gdv_{cerniera} = 2(n_{aste} - 1)$$

Figura A.8: Gradi di vincolo di cerniera interna

## A.3 Formule per motori

$$W_m + W_r + W_p = \frac{dE_c}{dt}$$

(a) Bilancio di potenze

$$\dot{\omega}_m = 0 \quad \frac{dE_c}{dt} = 0$$

(b) Condizione di regime



$$W_m = C_m \bullet \omega_m$$

(a) Potenza motrice

$$W_r = \sum (\text{Forze applicate su corpi in moto}) \\ \bullet (\text{velocità baricentriche dei corpi})$$

(b) Potenza resistente o utilizzatore

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_{c_r}}{dt} + \frac{dE_{c_m}}{dt}$$

(a) Variazione di energia cinetica

$$\frac{dE_{c_m}}{dt} = \omega_m \dot{\omega}_m J_m$$

(b) Variazione di energia cinetica motrice

$$W_p = -(1 - \mu_D) \left( W_m - \frac{dE_{c_m}}{dt} \right)$$

(a) Potenza perduta per moto diretto

$$W_p = -(1 - \mu_R) \left( W_r - \frac{dE_{c_r}}{dt} \right)$$

(b) Potenza perduta per moto retrogrado