

# **Metodi e modelli per le decisioni**

Prof. Cordone Roberto  
5 CFU

**Luca Cappelletti**

Lectures Notes  
Year 2017/18



Magistrale Informatica LM-18  
Università statale di Milano  
Italy  
October 6, 2017

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Dispense . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Problemi di Decisione</b>	<b>3</b>
2.0.1	Problemi complessi . . . . .	3
2.0.2	Proprietà delle preferenze . . . . .	4
2.0.3	Ipotesi funzione del valore . . . . .	5

# **Chapter 1**

## **Introduction**

### **1.1 Dispense**

Sono disponibili dispense sul sito del corso.

## Chapter 2

# Problemi di Decisione

### 2.0.1 Problemi complessi

$$P = (X, \Omega, F, f, D, \Pi)$$

Figure 2.1: Definizione formale di problema di decisione.

Queste variabili rappresentano:

1.  $X$  rappresenta l'insieme delle **alternative**, o delle **soluzioni** o anche delle **soluzioni ammissibili**.
2.  $\Omega$  rappresenta insieme degli **scenari** o **esiti**.
3.  $F$  rappresenta l'insieme degli **impatti**.
4.  $f$  rappresenta la **funzione dell'impatto**.
5.  $D$  rappresenta l'insieme dei **decisori**, tipicamente un insieme finito e di dimensione bassa. Un decisore è un'entità umana, modellata quanto possibile matematicamente.
6.  $\Pi$  insieme delle **preferenze**.

$X$  viene definito come:

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ se } x \in X \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con ogni termine  $x_i$  viene chiamato o **elemento di alternativa** o **variabile di decisione**.

$\Omega$  viene definito come:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \text{ se } \omega \in \Omega \Rightarrow \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

con ogni termine  $\omega_i$  viene chiamato o **elemento di scenario** o **variabile esogene**, cioè variabili che influiscono sulla configurazione del nostro sistema, non decise arbitrariamente ma provenienti dall'esterno.

$F$  viene definito come:

$$F \subseteq \mathbb{R}^p \text{ se } f \in F \Rightarrow f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{bmatrix}$$

Le  $f_i \in \mathbb{R}$  vengono ipotizzate ad essere intere e vengono chiamate **indicatore**, **attributo**, **criterio** o **obbiettivo**. Un **indicatore** per esempio potrebbe essere un *valore ottimo*.

La  $f$  viene definita come:

$$f(x, \omega) : X \times \Omega \rightarrow F$$

La matrice di tutte le combinazioni viene chiamata **matrice delle valutazioni**.

La  $\Pi$  viene definita come

$$\Pi : D \rightarrow 2^{F \times F}$$

, dove  $\pi_d \subseteq F \times F$ .  $F \times F$  rappresenta l'insieme delle **coppie ordinate di impatti**, mentre  $2^{F \times F}$  rappresenta l'insieme delle **relazioni binarie**.

Per esempio, ponendo  $F = \{f, f', f''\}$ , otteniamo un prodotto cartesiano:

$$F \times F = \{(f, f'), (f, f''), (f', f), (f', f''), (f'', f), (f'', f'), (f, f), (f', f'), (f'', f'')\}$$

La **preferenza** è la volontà per cui il decisore risulta disponibile a fare uno scambio.

Un esempio di preferenza è:

$$f' \leq_d f'' \Leftrightarrow (f', f'') \in \Pi_d$$

. In un ambiente ingegneristico si usa il  $\leq_d$ , minimizzando i costi, mentre in un ambiente economico si cerca di massimizzare i costi  $\geq_d$ .

**Definizione 2.0.1 (indifferenza)** Due preferenze  $f'$  e  $f''$  sono dette **indifferenti** quando:

$$f' \sim f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \leq_d f'' \\ f' \geq_d f'' \end{cases}$$

**Definizione 2.0.2 (Preferenza Stretta)** Una preferenza  $f'$  è detta **preferenza stretta** quando:

$$f' <_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \leq_d f'' \\ f' \not\geq_d f'' \end{cases}$$

**Definizione 2.0.3 (Incomparabilità)** Due preferenze  $f'$  e  $f''$  sono dette **incomparabili** quando:

$$f' \not\leq_d f'' \Leftrightarrow \begin{cases} f' \not\leq_d f'' \\ f' \not\geq_d f'' \end{cases}$$

## 2.0.2 Proprietà delle preferenze

**Proprietà riflessiva**

$$f \leq f \quad \forall f \in F$$

**Proprietà di completezza**

Un decisore può sempre concludere una decisione (ipotesi molto forte che talvolta porta a risultati impossibili):

$$f \not\leq f' \Rightarrow f' \leq f \quad \forall f, f' \in F$$

**Proprietà di anti-simmetria**

$$f \leq f' \wedge f' \leq f \Rightarrow f' = f \quad \forall f, f' \in F$$

**Proprietà Transitiva**

Solitamente i decisori non possiedono questa proprietà, anche perché è necessario modellare lo scorrere del tempo, per cui le proprietà valgono potenzialmente solo in un determinato periodo temporale.

$$f \leq f' \wedge f' \leq f'' \Rightarrow f \leq f'' \quad \forall f, f', f'' \in F$$

### 2.0.3 Ipotesi funzione del valore

Un decisore che ha in mente una funzione valore  $v$ , ha in mente una relazione di preferenza  $\Pi$  **riflessiva**, **completa**, **non necessariamente anti simmetrica** e **transitiva**. Quando una relazione possiede queste proprietà viene chiamata **ordine debole**, debole perché possono esistere dei *pari merito*. Un campo di applicazione sono i campionati sportivi.

$$\exists v : F \rightarrow \mathbb{R} : f \leq f' \Leftrightarrow v_{(f)} \geq v_{(f')}$$