

A dark blue vertical bar is on the left. A blue arrow points right from the bar, containing the date.

21/02/2022

La perspective isométrique dans un espace vectoriel

Dossier expliquant en détail l'activité

Several thin, curved lines in dark blue and light grey originate from the bottom left and curve upwards and to the right.

CECCARELLI Luca, CLEMENT Romain, GOUDEZEUNE Antonin, TRIGLIA Yanis

Table des matières

Explication des choix réalisées	2
Prérequis pour réaliser l'activité / Rappels de cours :	2
Explication des choix faits :	2
Rappels de cours :	2
Travail Pratique :	2
Déroulement détaillé du Travail Pratique :	4
Introduction :	4
Rappels de cours :	6
Travail Pratique – Partie 1 sur feuille :	6
Travail Pratique – Partie 2 sur ordinateur :	7
Annexes :	9
Fiche Pédagogique :	9
Feuille de TP :	9
Programme :	9
Feuille de TP corrigé :	9
Bibliographie	10

Explication des choix réalisées

Prérequis pour réaliser l'activité / Rappels de cours :

Repère Orthonormé : Le repère Orthonormé, est un repère qui possède des axes perpendiculaires, ces deux axes posséderont des graduations identiques. Ce Repère permet donc de pouvoir placer des points dans l'espace.

Pivot de Gauss : Un algorithme qui permet de résoudre un système linéaire à p équations et n inconnues.

Vecteurs et comment les calculer : Dans le plan muni du repère (O, I, J) on considère les points $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(x_b - x_a, y_b - y_a)$

Perspective isométrique : est une perspective qui contient trois axes de l'espace avec la même importance.

Fonction réciproque : La fonction réciproque de $f()$ est la fonction notée $f^{-1}()$ telle que : $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

Explication des choix faits :

Rappels de cours :

Repère Orthonormé : Il est nécessaire de connaître ce qu'est un repère orthonormé car ils vont travailler tout du long du TP dans ce type de repère.

Pivot de Gauss : Savoir utiliser le pivot de Gauss car ils vont devoir s'en servir lors de ce TP, pour pouvoir calculer la matrice de conversion

Vecteurs et comment les calculer : Il sera nécessaire de savoir calculer les coordonnées d'un vecteur pour le TP proposé

Perspective isométrique : Il est nécessaire pour le TP de savoir ce qu'est une perspective isométrique car c'est ce que doit retrouver l'étudiant après la conversion.

Fonction réciproque : la fonction inverse servira pour faire la conversion d'un, ou plusieurs points, de la perspective isométrique vers la perspective normale, sur un plan cartésien.

Travail Pratique :

Il nous a semblé que préparer un TP en demi-groupe était plus pertinent qu'un TD car le sujet est assez ambigu et le professeur en charge du TP peut ainsi mieux suivre les élèves s'ils ont d'éventuelles difficultés.

Nous avons choisi de réaliser ce TP car nous voulions mesurer l'utilité des mathématiques dans le milieu des jeux vidéo.

Le sujet porte principalement sur le point de vue isométrique, donc pour expliquer ce concept il était fondamental de traiter le thème des vecteurs dans l'espace, et de se savoir repérer dans un repère

orthonormé. Donc, le calcul des vecteurs et leur compréhension est à la racine de ce TP, et ce sont des outils indispensables pour pouvoir comprendre et maîtriser au mieux le sujet, et la suite du TP.

Par la suite nous avons choisi de faire calculer aux élèves la matrice de conversion des points, pour passer d'une perspective normale sur un plan orthonormé, à une perspective isométrique. Pour calculer cette matrice de conversion les élèves vont devoir utiliser l'algorithme du « Pivot de Gauss », qui est selon nous le moyen le plus abordable et compréhensible pour résoudre un système avec deux équations, et deux inconnues, tout en comprenant le sujet.

Par la suite de la première partie du TP, une fois que tous les outils nécessaires ont été calculés, on demande aux élèves d'appliquer ce qu'ils viennent d'apprendre, en essayant toujours d'être le plus transparents possibles. Pour faire cela on a réalisé sur un plan orthonormé sur « GeoGebra », des vecteurs d'une base par perspective isométrique. Et après leur avoir donné les vecteurs formant la base, on va demander aux élèves d'effectuer la conversion de certains points données d'une base à l'autre, et de les placer sur le graphique donné, pour vérifier qu'ils aient compris le raisonnement à la racine d'une conversion pour passer d'une perspective à une autre, d'où l'importance de savoir se repérer sur un repère orthonormé. A travers cet exercice on pourra également vérifier si le Pivot de Gauss a été réalisé correctement.

A la fin de la première partie, on demande également aux élèves de trouver une fonction de conversion pour passer de la perspective normale sur le plan cartésien, à celle en perspective isométrique, en utilisant la matrice de conversion trouvée précédemment. Et par la suite on demande de trouver la fonction inverse, qui va servir de passer de la perspective isométrique, à une la perspective normale sur un plan cartésien, qui sera utilisé davantage dans la deuxième partie du TP pour automatiser les calculs de conversions.

Dans la deuxième partie du TP on s'est principalement concentré sur le côté informatique, pour permettre de faire une vulgarisation du sujet, à travers une application informatique. En effet la partie du TP réalisé sur les ordinateurs va essentiellement consister dans la traduction des outils trouvés dans la première partie, sous une forme de calcul autre, et automatisé. Cette partie sert encore une fois à vérifier la compréhension du sujet de la part des élèves, car ils vont devoir comprendre ce qu'ils ont fait précédemment, pour pouvoir le traduire sous forme informatique. Et comme pour l'exercice où ils placent des points convertis dans le plan, dans cette partie les élèves vont devoir trouver une façon d'assembler les différents outils qu'ils ont trouvés, pour pouvoir réaliser une figure, et l'afficher à l'aide d'une fonction développée par nous.

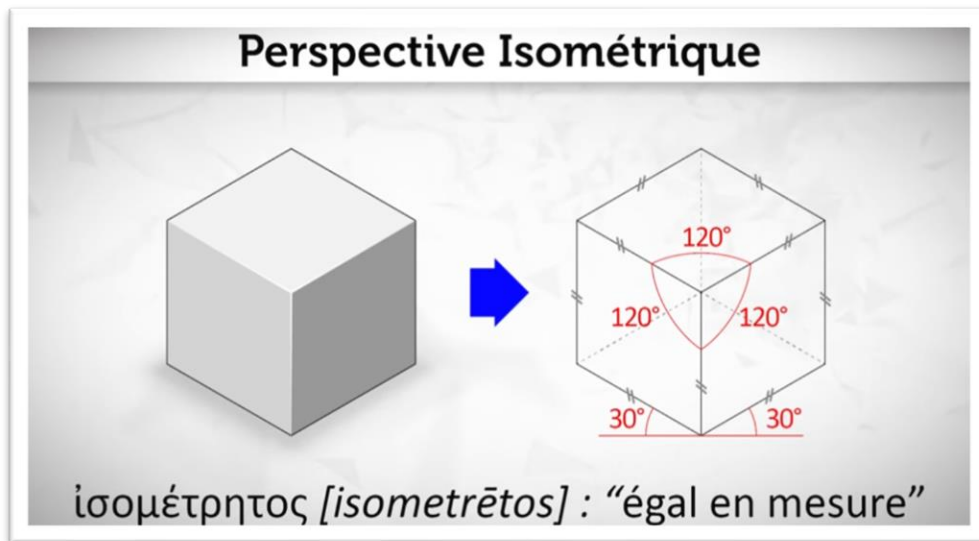
Pour la réalisation de la partie du TP sur ordinateur, on a choisi le langage de programmation : « Python », car c'est un langage simple et intuitif à la compréhension et prise en main, pour que les élèves puissent se concentrer davantage sur le raisonnement et la logique du TP, plutôt que sur la recherche des outils informatiques fournis par le langage. Ce choix a également été fait car Python est le langage le plus utilisé pour la représentation et modélisation de données, en particulier dans le domaine du « Data Analyst ». La modélisation de données est facilitée par les différentes bibliothèques réalisées avec le langage, comme : « Matplotlib », qu'on a également utilisé pour réaliser notre fonction d'affichage de figure en fin de TP.

En conclusion le but de ce TP sera de faire comprendre et prendre confiance aux élèves l'utilité des mathématiques dans les jeux vidéo, et comment elles sont omniprésentes, même quand on ne s'en rend pas compte. En plus, on leur aura donné les étapes et le processus nécessaires pour la réalisation d'outils de conversion et davantage leur compréhension, lors de la réalisation d'un jeu vidéo.

Déroulement détaillé du Travail Pratique :

Introduction :

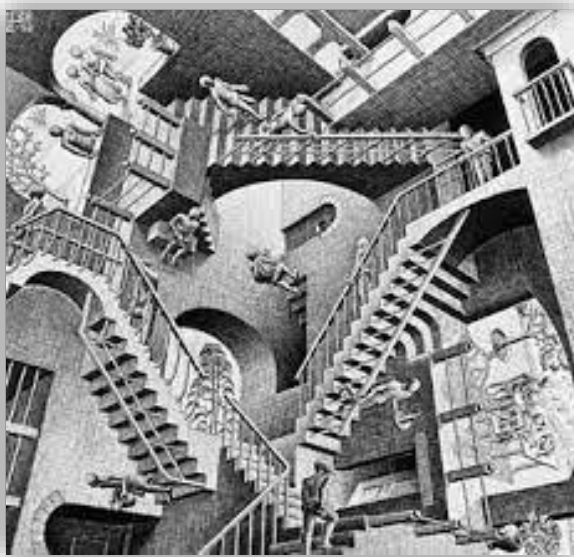
La perspective est l'ensemble de techniques utilisées pour la représentation en trois dimensions d'un objet, ou d'une scène, sur une surface plane¹. Une des possibles perspectives est : la perspective isométrique, qui est une méthode de représentation dans laquelle les trois directions de l'espace sont représentées avec la même importance².



3

La perspective isométrique est utile dans divers domaines comme : le dessin industriel, dans l'architecture, dans l'art, mais surtout dans les jeux vidéo.

Vous connaissez sûrement les fameux tableaux d'Escher, qui sont un très bon exemple de perspective isométrique :



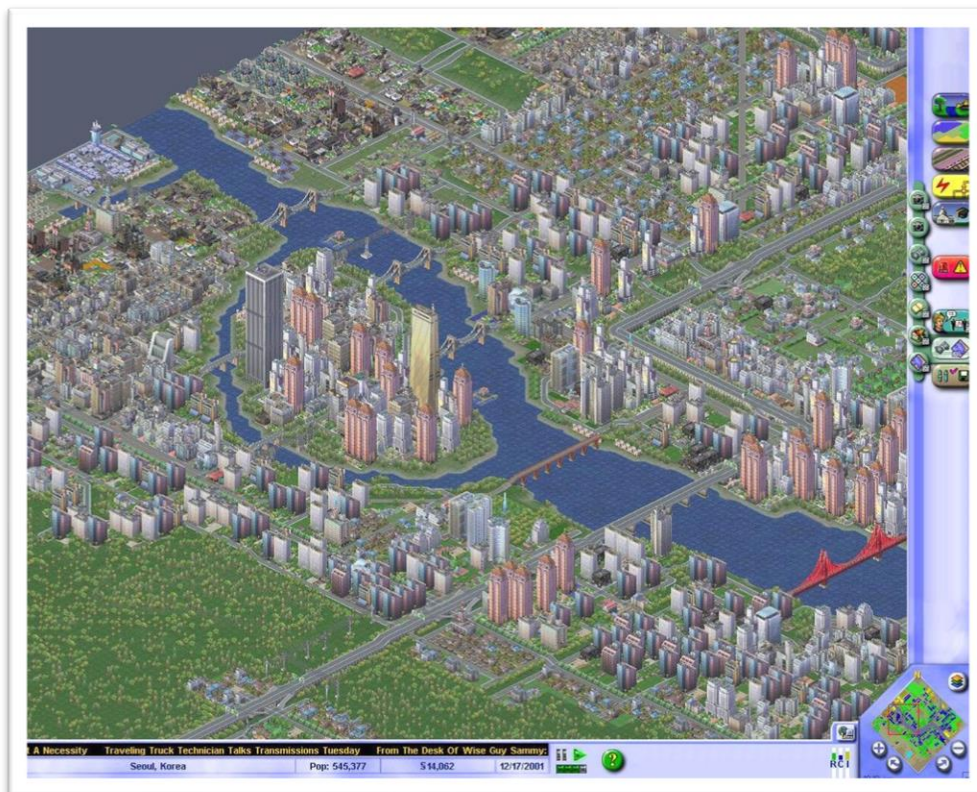
Dans ces cadres on peut remarques le respect de l'importance des dimensions des objets en trois dimensions, représentées sur un plan en deux dimensions.

Maintenait on verra l'application de ce principe dans les jeux vidéo :



(Ici on a une image extraite du jeux vidéo : Resident Evil (1996), extrait vidéo pour visualiser les déplacements : [vidéo](#))

Comme vous pouvez le remarquer grâce à cette image, le jeu Resident Evil, réalisé en 1996 était en perspective isométrique, ce qui avait révolutionné les jeux vidéo de l'époque, car c'était un des premiers jeux réalisés avec une "fausse 3D". Donc ici vous pouvez déjà voir l'utilité de la perspective isométrique, car elle permet de réaliser un jeu qui peut sembler en 3 dimensions, sans par occurrence l'être, car la caméra ne bougeait pas, et on 'était donc sur un plan fixe pour chaque salle. Mais il fallait quand même être en mesure de calculer les déplacements du personnage et des ennemies sur ce plan, et cela as été possible grâce à des conversions pour passer d'un déplacement sur un plan cartésien, que vous connaissais tous, à des déplacements dans une perspective isométrique.



(Ici on a une image extraite du jeu vidéo : SimCity)

Cette perspective est notamment utilisée dans les jeux de gestion, comme dans l'exemple ci-dessus avec la série des jeux "SimCity", qui ont tous été développées en suivant le principe de la perspective isométrique. En effet dans ce type de jeux les calculs mathématiques sont essentiels lors de la génération d'une carte, mais également le placement de bâtiment, et le déplacement de la caméra.

Rappels de cours :

Avant de réaliser le TP il est impératif de vérifier que les élèves aient les connaissances nécessaires pour le réaliser.

En effet pour permettre aux élèves de comprendre et assimiler au mieux l'activité il est préférable qu'ils aient compris différents thèmes qui ont déjà été traités en mathématique comme : la maîtrise d'un repère orthonormé, savoir utiliser l'algorithme du Pivot de Gauss, savoir calculer et dessiner des vecteurs dans un repère orthonormé, et savoir calculer une fonction réciproque.

Les points essentiels pour la réalisation du TP se trouvent sous forme de rappels sur la feuille, mais il est possible de s'arrêter sur certains points si les élèves le souhaitent.

Travail Pratique – Partie 1 sur feuille :

Pour réaliser la première partie de ce TP sur les vecteurs dans l'espace il faut déjà que vous possédiez plusieurs bases dans différentes compétences premièrement il faut savoir ce qu'est la notion d'un vecteur sur un plan (orthogonal ou orthonormé) il faut ainsi savoir se représenter différents éléments dans l'espace et savoir les convertir d'une perspective à une autre sur un plan cartésien, et pour cela il faudra encore avoir un certain bagage nécessaire dans les systèmes linéaire et les sous espaces vectoriels avec l'utilisation de matrices, et notamment maîtriser l'algorithme du pivot de Gauss, cela permettra

justement de passer d'une base à l'autre grâce à la matrice de conversion trouvée en utilisant le Pivot de Gauss, et de la fonction inverse trouvée à partir de la matrice de conversion. Donc vous voici toute les compétences à maîtriser pour élaborer la première partie du TP :

Pour la première question il faudra Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs et dans la perspective en fonction de la base **B** en s'aidant d'un graphique qui est fourni dans le TP. Cela va donc permettre aux élèves d'utiliser leurs compétences, et savoir récupérer des données qui sont sur un graphique afin de les exploiter dans la suite du TP.

Pour la deuxième question à l'aide de l'algorithme du pivot de gauss il faudra déterminer la matrice de conversion qui permet de transformer les coordonnées d'une perspective d'une base **B** vers une base **B'**. Et donc cela va leur permettre de déterminer des coordonnées de point vers une autre base il devront donc pour cela selon leur coordonnée dans la base i et j (Coordonnées cartésiennes) ils devront utiliser un vecteur w qui leur permettra de remplacer les coordonnées i et j d'une perspective vers une autre et encore une fois cette question va leur servir à effectuer la suite du TP pour la question 3

Pour la troisième question du TP le but sera de grâce à la matrice de conversion trouvée justement dans la question précédente, convertir les points : $A(1,1)$ et $B(2,2)$, de la perspective **B** vers la perspective **B'** et pour cela il devront donc récupérer les coordonnées de la matrice qui sont établies dans la question deux pour ensuite grâce à cette matrice utiliser la méthode du pivot de gauss qui consiste donc d'établir grâce à un pivot un système triangulaire ensuite il faut éliminer l'inconnue pivot dans toutes les équations différentes de l'équation pivot (donc échelonner l'équation) jusqu'à obtenir un système équivalent et obtenir la fonction inverse sur x' et y' et il nous suffira juste de compléter nos fonctions avec les coordonnées correspondantes pour passer d'une perspective à une autre c'est-à-dire les coordonnées correspondent bien sûr au vecteur i et j trouvées dans la question 1.

Donc la raison pour laquelle nous avons fait la première partie de cette façon était que ça permettait donc à partir d'un graphique et des outils de connaissance arriver à passer d'une perspective à une autre on a essayé de disposer de ce TP de manière évolutive c'est-à-dire que chaque étape permet de passer à une autre c'est-à-dire qu'ils devront bien réfléchir à chaque question pour passer à la suite. Nous s'avons fait exprès de rendre ce premier exercice pas très compliqué pour avoir une introduction à la partie un peu plus longue sur machine et puis aussi car cet exercice s'appuie sur des bases que doit maîtriser un élève de premières années dans la matière de mathématiques fondamentales.

On peut associer avec ce TP le jeu vidéo car par exemple sur des jeux FPS (jeux de tirs à la première personne) il y a très souvent un viseur en plein milieu de l'écran qui permet donc de fixer un point précis et ce viseur se matérialise sous forme de croix qui se déplace en même temps que le joueur tout en restant centré on peut donc relier ça à notre TP en se disant que le viseur est un repère et que chaque déplacement effectué par le personnage correspond à un changement de base.

Travail Pratique – Partie 2 sur ordinateur :

Une fois la première partie de ce TP finalisée, vous allez pouvoir entamer la deuxième partie du TP, cette partie s'effectuera sur machine. Cette partie consistera à travailler sur un programme informatique qui permet de convertir les coordonnées d'un point données en perspective cartésienne en perspective isométrique et inversement pour pouvoir afficher des figures. Tout le long de cette partie du TP, vous utiliserez le langage informatique " Python " il est donc nécessaire de connaître les bases de ce langage pour effectuer correctement cette deuxième partie du TP. Nous avons choisi d'utiliser le langage de programmation Python car c'est un langage qui facilite l'affichage graphique des différentes figures. On a

également choisi ce langage de programmation qui facilite la compréhension ce que permet d'amoindrir la difficulté de la partie informatique pur de ce TP et surtout ce langage informatique permet de mettre en avant beaucoup plus la partie mathématique du raisonnement plus que la partie informatique et programmation pur et réduit les problèmes que peuvent être générés directement par la partie programmation de l'exercice.

L'objectif final de cette partie du TP est de vérifier, à travers la pratique, si la personne effectuant le TP a bien compris ce qu'ils sont en train d'effectuer, voir s'ils sont capables de résoudre un problème avec tous les éléments que le TP lui fournit. En quelque sorte on donne à l'étudiant des briques et on vérifie s'il est capable de réaliser une maison avec les briques fournies.

Donc tout d'abord vous commencerez par écrire le corps de la fonction `convertCard2Iso(point)` pour pouvoir convertir la vue en perspective cartésienne en vue isométrique, une fois effectuée, testez votre fonction avec les coordonnées trouvées dans la première partie du TP

À la suite de ça, il faudra écrire le corps de la fonction `convertIso2Card(point)` en utilisant le même principe que la fonction précédente mais cette fois vous devrez convertir une vue isométrique en vue cartésienne, en utilisant également les coordonnées de la première partie du TP

Et pour finir, vous allez utiliser les fonctions que vous venez d'écrire pour convertir les points donnés dans l'énoncé qui sont : $\{ (0,0) , (0.5,0) , (1,0.5) , (1,1) , (0.5,1) , (0,0.5) , (0.5,0.5) \}$, et utiliser les résultats de vos conversions dans la fonction `drawFigure(points)` qui vous sera fournie. Cette fonction permettra de finalement afficher un cube.

Annexes :

Fiche Pédagogique :

Fiche contenant le déroulement du TP en résumé, sa durée, et le matériel nécessaire pour le réaliser

Feuille de TP :

Feuille de TP à imprimer et donner aux élèves.

En première partie on va pouvoir retrouver : les rappels de cours et concepts nécessaires pour la réalisation et compréhension du sujet.

En deuxième partie on va retrouver les consignes du TP, et les graphiques nécessaires à sa réalisation.

Programme :

Programme développé en partie par nous, et qui sera donné sous deux versions : une complète qui peut servir de corrigé, et une à compléter pour les élèves, en suivant les consignes données sur la feuille de TP.

Feuille de TP corrigé :

Feuille avec la correction du TP, pour faciliter le travail de l'enseignant, pour qu'il puisse se concentrer davantage sur les élèves, et les aider à comprendre le sujet.

Et qui pourra également être imprimé et rendu aux élèves, ou suivi et exposé lors de l'avancement de la classe dans le TP.

Bibliographie

1. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_\(repr%C3%A9sentation\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_(repr%C3%A9sentation))
2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_isom%C3%A9trique
3. <https://www.youtube.com/watch?v=CGimU2rKvVk>