

# Modellizzazione della resistenza di diodi a giunzione PN per alte correnti di lavoro

L. Ciucci(\*)      S. Bruzzesi(\*)      M. Romagnoli(\*)      M. Alighieri(\*)  
B. Tomelleri(\*)

14 marzo 2020

**Riassunto:** — Si è studiato il comportamento di un diodo in silicio PN, ricostruendone sperimentalmente la curva caratteristica  $V - I$ , al fine di mettere in risalto la sua componente resistiva. A questo scopo è stata esplorata un'ampia zona della curva, in particolar modo per alti valori di  $I$ , dove questa caratteristica è maggiormente apprezzabile. Proponiamo dunque un'estensione della legge di Shockley, tramite l'aggiunta di un termine resistivo, in grado di descrivere l'elemento -ohmico- della giunzione. La nuova curva caratteristica prevede un andamento sempre più lineare di  $I$  al crescere di  $V$  e questo risulta in accordo con l'andamento dei dati sperimentali.

PACS 01.40.-d – Education.

PACS 01.50.Pa – Laboratory experiments and apparatus.

## 1 INTRODUZIONE

La limitata conducibilità intrinseca al silicio, di cui è composta la giunzione bipolare, comporta la presenza di una sua componente resistiva: per effetti termico-dissipativi questa ha un effetto sempre meno trascurabile, all'aumentare della tensione ai suoi capi, sul passaggio di corrente attraverso il diodo. Per poter descrivere la parte resistiva di un diodo percorso da correnti di alta intensità si propone un modello semplice, di resistenza parassita in serie, verificandone l'accordo con i risultati sperimentali su un'ampia regione di punti di lavoro.

## 2 CENNI TEORICI

Secondo le nostre ipotesi, un diodo reale può essere schematizzato come un resistore ohmico ed un diodo ideale in serie. Pertanto ci aspettiamo che la corrente che attraversa questi elementi del circuito sia la stessa:

$$I = \frac{\Delta V_{\text{resistore}}}{R} = I_0 \left( e^{\frac{\Delta V_{\text{diodo}}}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (1)$$

Dunque la relazione che lega la corrente alla tensione ai capi del diodo può essere espressa secondo la legge:

$$\Delta V = \Delta V_{\text{diodo}} + \Delta V_{\text{resistore}} = \eta V_T \ln \left( \frac{I + I_0}{I_0} \right) + RI \quad (2)$$

## 3 METODO E APPARATO SPERIMENTALE

Onde evitare sostanziali aumenti di temperatura, oltre ad eventuali danni a questi stessi, si imprimono correnti impulsive sul circuito. La durata degli impulsi è inferiore ai 200  $\mu\text{s}$ , che corrisponde ad un'energia impressa inferiore a 1 mJ (dunque ad un aumento della temperatura del semiconduttore inferiore a 0.5 K).

---

\*Dipartimento di Fisica E. Fermi, Università di Pisa - Pisa, Italy



Figura 1: confronto degli andamenti: la curva di Shockley (in rosso) e la legge (2) (in viola)

### 3.1 Apparato

L'apparato sperimentale è costituito da un circuito, realizzato su basetta sperimentale (*breadboard*), il cui scopo è generare le correnti impulsive appena descritte attraverso il diodo  $D1$  e la resistenza  $R1$ . La misura della differenza di potenziale agli estremi della  $R_1$  permette di stimare la corrente che circola sul diodo. Per poter esplorare una larga banda di correnti di lavoro si è variata opportunamente la resistenza in serie al diodo, scegliendo tra le seguenti:

$R1$ nom. [ $\Omega$ ]	$R1$ mult. [ $\Omega$ ]
$0.22 \pm 3\%$	$0.226 \pm 0.008$
$2.2 \pm 5\%$	$2.212 \pm 0.008$
$22 \pm 5\%$	$21.86 \pm 0.010$
$220 \pm 5\%$	$216.22 \pm 0.07$
$2.2 \text{ k} \pm 5\%$	$2202.1 \pm 0.4$
$22 \text{ k} \pm 5\%$	$(21.7 \pm 0.3)10^3$
$0.22 \text{ M} \pm 5\%$	$(217 \pm 3)10^3$

Tabella 1: I valori delle resistenze poste in serie al diodo, riportate in valore nominale e misurate con multimetro digitale.

Per una descrizione del metodo di misurazione delle resistenze si rimanda a [Appendice A: Misurazione delle resistenze  \$R1\$](#) . D'altra parte, per fornire una tensione regolabile e sufficientemente stabile durante un impulso, nel circuito si impiega il condensatore  $C1$ , la cui tensione, carica e scarica sono controllate dalla maglia destra del circuito. Nel circuito si distingue inoltre la maglia che si occupa di collegare, sotto istruzione di un microcontrollore, il condensatore alla serie  $R1 - D1$  attraverso un MOS-FET.

Il circuito è alimentato da 2 tensioni continue, fornite da un alimentatore stabilizzato switching e da un Buck Boost Converter. Un segnale fornito su  $T2$  provoca la carica del condensatore mentre su  $T3$  la sua scarica. Un segnale (invertito) su  $T1$  innesca l'impulso di corrente sul diodo.

La tensione di  $C1$  è misurata attraverso un partitore di tensione collegato ad  $OUT3$  ed alla scheda di controllo, mentre la d.d.p. tra i punti  $OUT1$  e  $OUT2$  è misurata direttamente.

Come MCU per la gestione dell'apparato si è scelta la scheda **Teensy 3.2**[1]. Questa si occupa del controllo dei segnali e delle letture analogiche. In particolare **Teensy** permette la lettura analogica sincronizzata differenziale veloce, essendo dotato di due ADC, entrambi con una risoluzione reale di 12 bit. La lettura differenziale è fondamentale per acquisire coppie di dati per le tensioni ai capi del diodo e della resistenza.

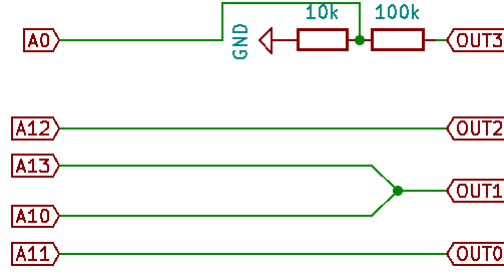


Figura 2: Schema circuitale del sistema di lettura (verso Teensy)

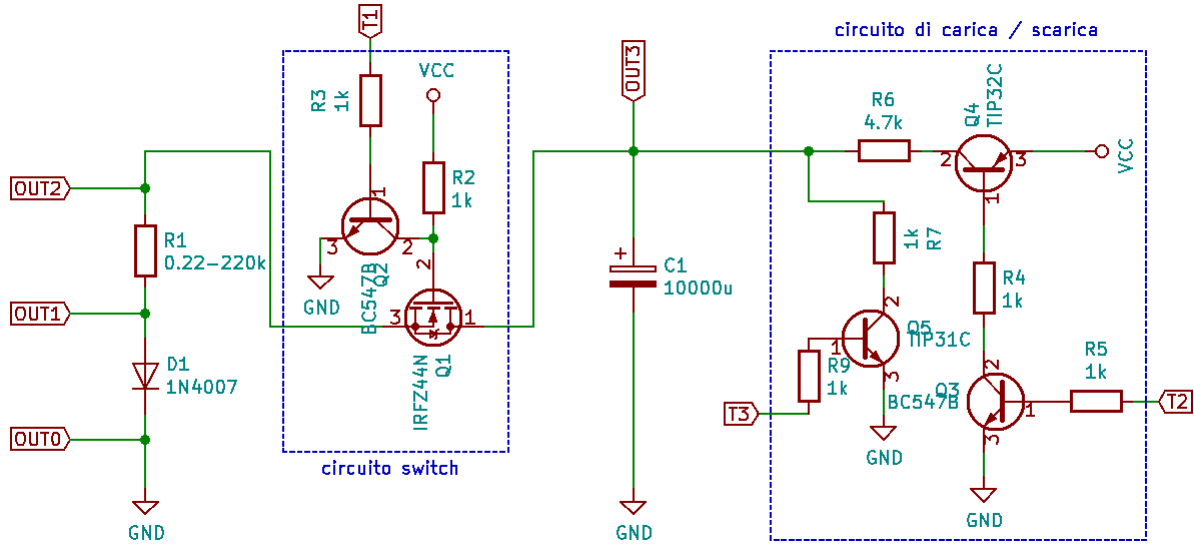


Figura 3: Circuito globale per la gestione del diodo

### 3.2 Calibrazione

La calibrazione dei canali ADC0 e ADC1 è stata effettuata basandosi sulle letture differenziali, rispettivamente fra i pin A10 e A11; fra A12 e A13. E' stata calibrata la lettura di ciascuna delle due coppie separatamente.

I pin volti alla lettura della tensione maggiore sono stati collegati al centrale di un potenziometro, a sua volta collegato ad un generatore di potenziale con tensione in ingresso pari a 3.3V . Gli altri due pin sono stati invece collegati a massa.

Variando la resistenza e, conseguentemente, la differenza di potenziale in ingresso, è stato possibile calcolare media, deviazione standard campione e deviazione standard della media relative a ciascuna tensione per un gruppo di 10000 misure effettuate con Teensy (si veda il [relativo sketch](#)). Il centrale del potenziometro e la massa sono state, inoltre, collegate ad un multimetro digitale, in modo da poter associare la tensione misurata in Volt alla corrispondente lettura digitalizzata dal MCU. Abbiamo assunto come incertezze sulle misure i valori dichiarati nelle specifiche del multimetro, mentre come errori sulle letture digitali abbiamo preso le deviazioni standard dalla media.

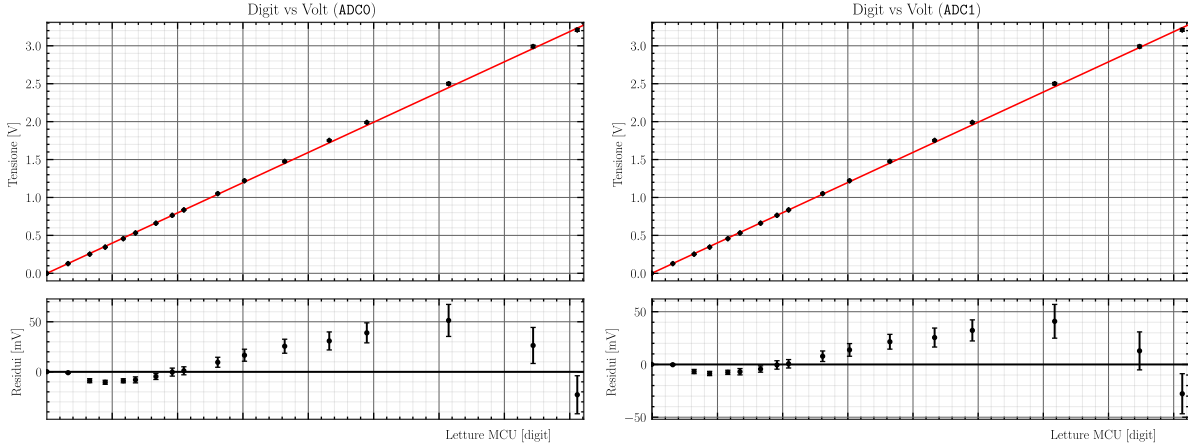
Dopodiché le misure relative a ciascuna coppia di boccole sono state poste all'interno di un grafico con i dati raccolti da Teensy sulle ascisse e i valori misurati col multimetro sulle ordinate. Dunque si è effettuato un fit lineare attraverso la legge:

$$y(x; m, q) = mx + q \quad (3)$$

lasciando liberi entrambi i parametri  $m$  e  $q$ . Riportiamo sotto i parametri di best-fit relativi ad ADC0 ed ADC1 e le rispettive covarianze:

$$\begin{aligned}
 &\text{ADC0} \\
 &m_0 = 0.7968 \pm 0.0033 \text{ mV/digit} \\
 &q_0 = -0.18 \pm 0.34 \text{ mV} \\
 &\text{Corr}(m_0, q_0) = -0.15 \\
 &\chi^2/\text{ndof} = 145/15 \\
 &\text{abs\_sigma} = \text{False}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{ADC1} \\
 &m_1 = 0.7954 \pm 0.0026 \text{ mV/digit} \\
 &q_1 = 3.84 \pm 0.26 \text{ mV} \\
 &\text{Corr}(m_1, q_1) = -0.09 \\
 &\chi^2/\text{ndof} = 96/15 \\
 &\text{abs\_sigma} = \text{False}
 \end{aligned}$$



I coefficienti così ricavati ci permetteranno di fornire una buona stima dei valori centrali relativi alla misura in Volt delle letture analogiche (digit). Il  $\chi^2$  risulta essere sovrastimato in quanto il MCU non ci fornisce una risposta perfettamente lineare ai segnali in ingresso. Dalle specifiche di **Teensy 3.2**, sappiamo che lo scostamento dall'andamento lineare può essere quantificato col 7% della lettura in digit. Per maggiori informazioni riguardo alle stime delle incertezze nelle conversioni si rimanda direttamente al [relativo script](#).

### 3.3 Acquisizione dati

Per ciascun valore scelto della resistenza  $R1$  si è acquisita una presa dati automatizzata tramite una [routine](#) programmata in **Teensy**: il condensatore viene caricato ad una tensione prefissata; quando il MCU misura questo valore prestabilito, invia il segnale su  $T1$  che avvia l'acquisizione sincronizzata e si attende un tempo  $50 \mu\text{s}$  per permettere al MOS-FET di entrare in conduzione ( $R2$  è stata scelta di  $1\text{k}$ , dunque c'è un apprezzabile ritardo tra segnale e impulso) e di scartare eventuali segnali spuri. A questo punto si inizia a memorizzare una serie da 100 coppie di letture -sincronizzate- (a meno di sfasamenti nell'ordine delle centinaia di nanosecondi), si ferma l'impulso e si trasmettono i dati al computer. Se la tensione al punto  $OUT2$  ha raggiunto valori maggiori di  $3.3\text{V}$  l'acquisizione si ferma per non danneggiare **Teensy**, altrimenti si ricomincia caricando il condensatore ad una tensione più alta.

## 4 ANALISI DATI E RISULTATI

Per poter condurre un'analisi sui dati raccolti è stato innanzitutto necessario convertire le letture digitalizzate nelle corrispondenti grandezze fisiche, le coppie tensione-corrente relative al diodo. Inizialmente si sono convertite le acquisizioni e le incertezze associate in d.d.p. tramite i fattori di conversione per entrambi gli ADC, determinati come descritto nel paragrafo 3.2. Dunque, dalla caduta di tensione ai capi della resistenza  $R1$  possiamo determinare la corrente di lavoro del diodo grazie alla legge di Ohm. Si è quindi effettuato un filtraggio volto all'eliminazione degli outliers e dei punti meno significativi, assumendoli quali variabili indipendenti e di natura gaussiana. Per una discussione dettagliata si rimanda

all'[Appendice B: Filtraggio Dati](#). E' opportuno sottolineare che, all'interno della stessa appendice,  $\sigma_x^2$  rappresenta la varianza delle letture e non le incertezze ad esse associate.

Successivamente, è stato effettuato un fit ai minimi degli scarti quadratici. Per il procedimento avremmo potuto pensare di adottare come modello la legge (2) direttamente, tuttavia ciò comporterebbe il fallimento del fit a causa dei valori negativi o nulli che può assumere l'argomento del logaritmo. Si è scelto quindi di utilizzare la funzione inversa come modello per il fit, la quale è stata implementata numericamente secondo il metodo delle tangenti (o di Newton). Per una trattazione approfondita, si rimanda all'[Appendice C: Metodo di fit](#).

Risulta evidente, osservando i punti campionati con la resistenza da  $R1 = 220 \text{ k}\Omega$ , la presenza di un rumore di natura non statistica molto maggiore delle incertezze sulle misure. Questo si deve probabilmente all'influenza del circuito di lettura stesso sulle piccole correnti in gioco, che avevamo supposto trascurabile nel nostro modello. Non potendo dunque attribuire degli errori significativi per questa presa dati, essa non è stata considerata nella procedura di fit eseguita successivamente, in quanto i relativi punti avrebbero avuto un peso sovrastimato in confronto agli altri, introducendo così un bias nei risultati finali.

Si riportano i valori ottimali dei parametri stimati dal fit e le relative covarianze:

$$\begin{aligned}
 R_{\text{diodo}} &= 46.112 \pm 0.007 \text{ m}\Omega & \sigma_{I_0, \eta V_T} &= 0.97 \\
 \eta V_T &= 47.579 \pm 0.003 \text{ mV} & \sigma_{I_0, R_d} &= -0.62 \\
 I_0 &= 4.518 \pm 0.004 \text{ nA} & \sigma_{I_0, \text{ofst}} &= -0.49 \\
 \text{offset} &= -2.204 \pm 0.007 \text{ }\mu\text{A} & \sigma_{\eta V_T, R_d} &= -0.70 \\
 \chi^2/\text{ndof} &= 72207/251066 & \sigma_{\eta V_T, \text{ofst}} &= -0.43 \\
 \text{abs\_sigma} &= \text{False} & \sigma_{R_d, \text{ofst}} &= 0.22
 \end{aligned}$$

Infine si mostrano i dati acquisiti con sovrapposta la funzione di best-fit nei grafici 5, in scala lineare, e 6 in scala semilogaritmica.

Per gli script si rimanda alla [cartella](#), dove `run.py` esegue la corretta sequenza e `config.py` definisce i parametri fondamentali.

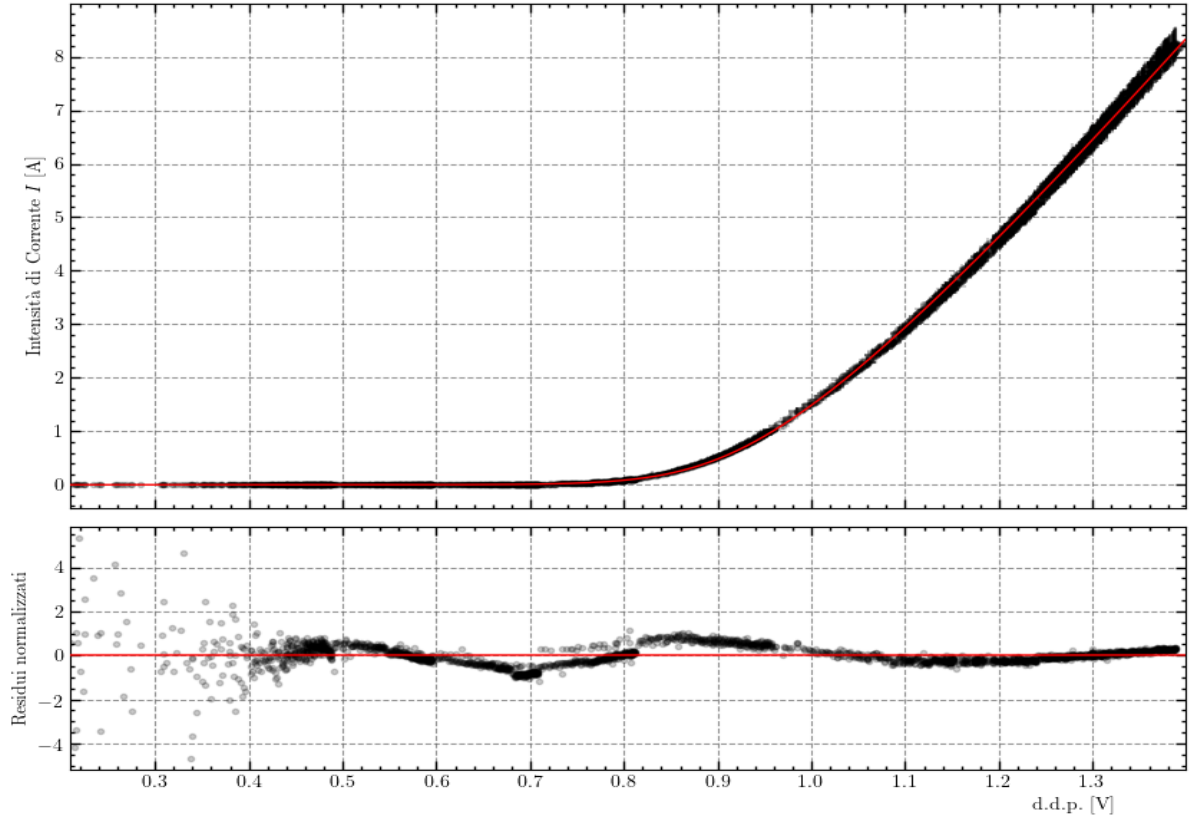


Figura 5: Dati acquisiti e funzione di best-fit (2). E' stato rappresentato un punto ogni 100 per comodità di visualizzazione.

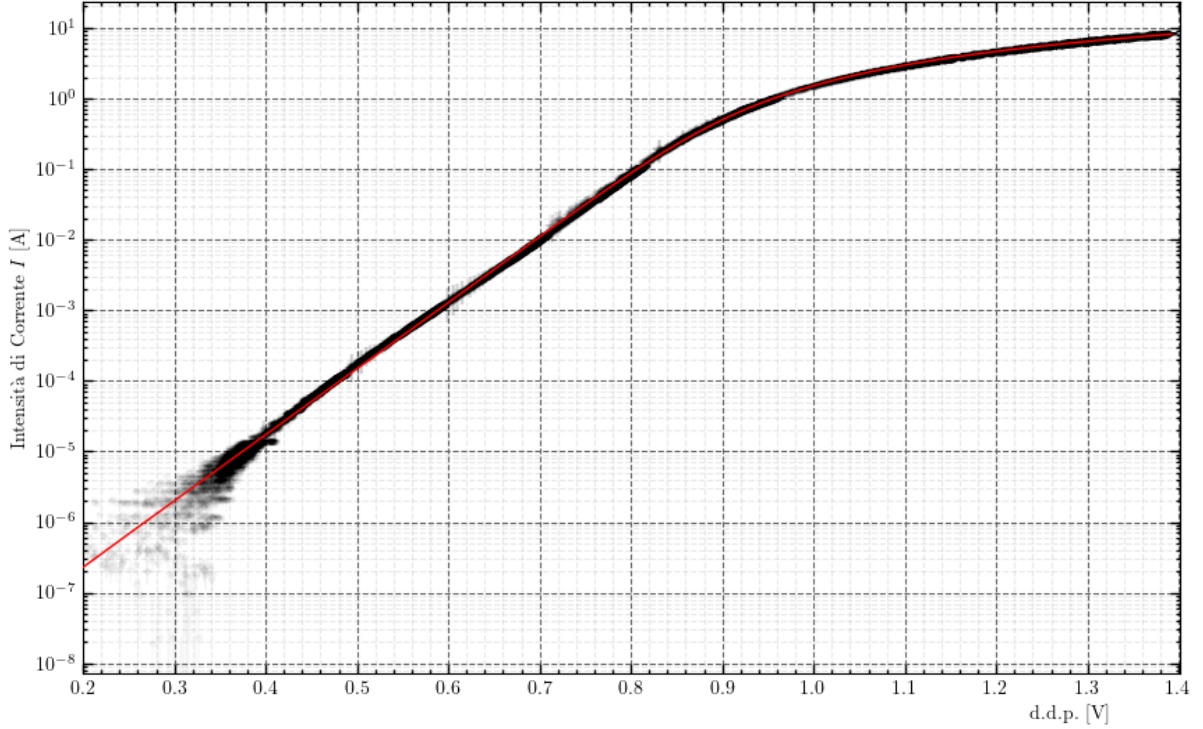


Figura 6: Dati acquisiti e funzione di best fit (2) in scala semilogaritmica. A scopo illustrativo sono stati rappresentati anche i dati della serie 220k. E' stato disegnato un punto ogni 10 per comodità di visualizzazione.

## 5 CONCLUSIONI

Per prima cosa osserviamo dall'analisi appena effettuata, che il  $\chi^2$  risulta minore rispetto al suo valore atteso. Ciò è parzialmente dovuto alla correlazione degli errori sulle misure eseguite dai due canali d'ingresso. In aggiunta, come si può notare dalla zona di maggior concentrazione dei punti nel grafico dei residui, il convertitore analogico-digitale del MCU è caratterizzato da una funzione di risposta non lineare. Questo fattore era stato tenuto in considerazione all'interno della calibrazione delle porte ADC0 e ADC1 mediante l'aggiunta in quadratura di un errore di natura non statistica a quelli stimati attraverso il fit lineare. Tale operazione ha portato, quindi, ad un'ulteriore diminuzione del  $\chi^2$  all'interno del fit finale. Ulteriori osservazioni possono essere condotte riguardo alle evidenti analogie di carattere qualitativo fra la zona di maggior concentrazione dei campionamenti e la funzione di best fit. In primo luogo: all'interno del grafico in scala lineare, a correnti alte, i punti risultano essere disposti pressoché linearmente, in accordo con l'ipotesi di una componente resistiva interna al diodo. Analogamente, nel grafico in scala semilogaritmica, i dati assumono un andamento simile a quello caratteristico della curva di Shockley, ovvero approssimativamente rettilineo, per poi appiattirsi come un logaritmo al crescere della tensione. Dunque, possiamo concludere che il fit con il modello (2) è un buon fit e, entro i limiti sperimentali, questo risulta in buon accordo con il comportamento di un diodo reale, per cui non abbiamo motivo di rigettarlo. Pertanto potremo aspettarci che i parametri stimati dal fit siano significativi e che la modellizzazione proposta sia una buona approssimazione del diodo reale nelle condizioni di lavoro considerate. Questa modellizzazione, fra l'altro, può risultare utile nelle simulazioni numeriche di circuiti con diodi in regimi impulsati su alte correnti, specialmente ove sia richiesto un dettaglio sulle cadute di tensione sui singoli componenti. Sebbene questo studio sia concentrato su un unico diodo 1N4007, il metodo proposto può essere esteso per qualunque altro tipo di diodo, eventualmente sostituendo il condensatore con un opportuno circuito stabilizzatore di corrente o di tensione.

## 6 CONCLUSIONE PROPOSTA DA SERENA E LUCA

Sulla base dell'analisi precedentemente effettuata, possiamo osservare che il  $\chi^2$  risulta essere minore rispetto al suo valore atteso. Ciò è parzialmente dovuto alla correlazione degli errori inerenti ai dati rilevati all'interno dei due canali d'ingresso. In aggiunta, come si deduce anche dalla zona di maggior concentrazione dei residui all'interno dell'omonimo grafico, il convertitore analogico-digitale del MCU è caratterizzato da una funzione di risposta non lineare. Questo fattore era stato tenuto in considerazione all'interno della calibrazione delle porte ADC0 e ADC1 mediante l'aggiunta in quadratura di un errore di natura non statistica a quelli stimati attraverso il fit lineare. Tale operazione ha portato, quindi, ad un'ulteriore diminuzione del  $\chi^2$  all'interno del fit finale. Ulteriori osservazioni possono essere condotte riguardo alle evidenti analogie di carattere qualitativo fra la zona di maggior concentrazione dei campionamenti e la funzione di best fit. In primo luogo, all'interno del grafico in scala lineare, a correnti alte, i punti risultano essere disposti pressochè linearmente, in accordo con l'ipotesi di una componente resistiva interna al diodo. Analogamente, nel grafico in scala semilogaritmica, i dati assumono un andamento simile a quello caratteristico della curva di Shockley, ovvero approssimativamente rettilineo, per poi appiattirsi come un logaritmo al crescere della tensione. Dunque, possiamo affermare che l'andamento dei dati sperimentali risulta essere in buon accordo con la legge (2), per cui non abbiamo motivo di rigettarlo. Pertanto potremo aspettarci che i parametri stimati dal fit siano significativi e che la modellizzazione proposta sia una buona approssimazione del diodo reale nelle condizioni di lavoro considerate. Questa modellizzazione, fra l'altro, può risultare utile nelle simulazioni numeriche di circuiti con diodi in regimi impulsati su alte correnti, dove sia richiesto un dettaglio sulle cadute di tensione sui singoli componenti. Sebbene questo studio sia concentrato su un unico diodo 1N4007, il metodo proposto può essere esteso per qualunque altro tipo di diodo, eventualmente sostituendo il condensatore con un opportuno circuito stabilizzatore di corrente o di tensione.

7 APPENDICE A: MISURAZIONE DELLE RESISTENZE  $R1$ 

All'interno delle misurazioni delle resistenze, sono stati adottati dei resistori contrassegnati da valori nominali che spaziano da  $0.22 \Omega$  a  $220 k\Omega$ . Dunque il multimetro digitale non possiede una sensibilità sufficiente ai fini della stima delle resistenze più basse.

In primo luogo, queste ultime sono state misurate attraverso un metodo basato sull'uso di un alimentatore regolabile DC ( $\Delta V_{\max} = 30V$ ;  $I_{\max} = 5A$ ). La strategia consiste nel fare scorrere una corrente continua entro un resistore. La stessa deve essere scelta ponendo attenzione che la potenza dissipata ( $P = R \cdot I^2$ ) non superi la potenza nominale del resistore onde evitare danneggiamenti del componente per effetto termico. Nel contempo, la corrente <sup>1</sup> e la differenza di potenziale ai capi del resistore vengono misurati attraverso due multimetri digitali. Dunque attraverso la legge di Ohm è stato possibile la stima delle resistenze in esame, riportate nella tabella sottostante con i relativi errori:

$R1$ nom. [ $\Omega$ ]	$R1$ [ $\Omega$ ]
$0.22 \pm 3\%$	$0.22 \pm 0.01$
$2.2 \pm 5\%$	$2.19 \pm 0.03$
$22 \pm 5\%$	$21.6 \pm 0.2$
$220 \pm 5\%$	$210.6 \pm 0.8$
$2.2 k \pm 5\%$	$2140 \pm 23$

Tabella 2: I valori delle resistenze poste in serie al diodo, riportate in valore nominale e misurate con il primo metodo.

Successivamente, è stato adottato un approccio differente. Ai fini di effettuare le medesime misure, è stato adottato il metodo della misura a quattro terminali (4T), attraverso un ohmetro specifico. Ai valori misurati sono stati sottratte le letture effettuate in assenza del resistore. In tal modo, sono stati

<sup>1</sup> La corrente è stata misurata col multimetro, nonostante il fatto che l'abbiamo scelta a priori, ai fini di ottenere una maggiore precisione

cancellati gli errori dovuti alle resistenze intrinseche dei fili. Nella presente tabella sono riportati i risultati conseguiti:

$R1$ nom. $[\Omega]$	$R1$ $[\Omega]$
$0.22 \pm 3\%$	$0.226 \pm 0.008$
$2.2 \pm 5\%$	$2.212 \pm 0.008$
$22 \pm 5\%$	$21.86 \pm 0.010$
$220 \pm 5\%$	$216.22 \pm 0.07$
$2.2 \text{ k} \pm 5\%$	$2202.1 \pm 0.4$

Tabella 3: I valori delle resistenze poste in serie al diodo, riportate in valore nominale e misurate con la seconda strategia.

Entrambi i metodi forniscono stime valide delle resistenze adottate. Dunque all'interno delle analisi successive, sono state adottate le misure conseguite a seguito della seconda strategia, caratterizzate da maggiore precisione.

Le resistenze da  $22 \text{ k}\Omega$  e  $220 \text{ k}\Omega$  sono state invece misurate con l'uso diretto di un multimetro digitale.

## 8 APPENDICE B: FILTRAGGIO DATI

### 8.1 Introduzione

All'interno dell'acquisizione, sono stati raccolti un numero ingente di dati, suddivisibili in base alla resistenza adottata e dunque facenti riferimento a zone differenti della curva. A seguito della calibrazione, ci si è quindi posto il problema di effettuare l'eliminazione degli outliers in modo indipendente dalla scelta del modello per il fit. Le serie effettuate variando la resistenza, inoltre, si sovrappongono in alcune zone del grafico. Dunque è stato necessario eliminare i dati che, non aggiungendo informazioni utili, andavano a "sporcare" il grafico. Il sistema di filtraggio di dati implementato nell'eseguibile si compone di 2 fasi: la prima consiste nell'eliminazione degli outliers, la seconda dei dati non significativi.

### 8.2 Procedimento

Supponiamo di avere una serie di dati  $(x, y)$  e assumiamo che siano indipendenti tra loro. Quest'ipotesi non è vera in generale, ma è tanto più lecita quanto più la correlazione tra le varianze delle misure su  $x$  e  $y$  è indipendente dai valori assunti dalle  $x$  e  $y$  stesse e quanto più sono numerosi i dati racchiusi entro una deviazione standard lungo  $x$  per ciascun elemento: in questo caso, infatti, la correlazione viene inclusa nella varianza lungo  $y$ . Supponiamo inoltre che siano note a priori le  $\sigma_x^2 := \text{Var}(x)$  e che la loro distribuzione di probabilità sia normale (le distribuzioni delle componenti sono approssimativamente gaussiane per il convertitore di **Teensy**, perlomeno utilizzando la risoluzione a 12 bit) secondo una matrice di covarianza diagonale nella base  $\{x, y\}$ . In ogni modo, i nostri dati  $x$  e  $y$  risultano indipendenti e approssimativamente normali. Dunque le assunzioni risultano giustificate. Conseguentemente la densità di probabilità che un punto misurato in  $x$  si trovi a tale ascissa  $x_i$ , si ricava integrando lungo  $y$  a  $x$  fissata:

$$dP = \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-x_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}} dx.$$

Dunque, ripetendo più volte la stessa misura, si otterrà la probabilità:

$$P\left(|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon G_{x_i}.$$

dove

$$G_{x_i} := \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-x_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}}.$$



e  $\varepsilon > 0$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Scegliendo allora solo quelle misure  $x$  per cui vale  $|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , queste saranno in numero tendente a:

$$N_i := N_{\text{tot}} \frac{G_{x_i}}{\sum_j G_{x_j}} = N_{\text{tot}} w_i.$$

che definisce implicitamente i pesi  $w_i$  con cui si mediano le distribuzioni di probabilità gaussiane  $G_{x_i}$ . Allora, posto:

$$G_{y_i} := \frac{1}{\sigma_{y_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\mu_y - y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2}}.$$

Per il principio di massima verosimiglianza siamo quindi interessati a massimizzare la quantità:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{N_i} G_{y_i} = \prod_{i=1}^n G_{y_i}^{N_i}.$$

Per la monotonia del logaritmo il problema equivale a massimizzare:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \ln G_{y_i}^{N_{\text{tot}} w_i} = \frac{N_{\text{tot}}}{\sum_{j=1}^n G_{x_j}} \sum_{i=1}^n G_{x_i} \ln G_{y_i}.$$

Per cui, a meno di costanti risulta:

$$\ln \mathcal{L} - \text{const.} \propto \sum_{i=1}^n -G_{x_i} \ln \sigma_y - \frac{1}{2} G_{x_i} \left( \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \quad (4)$$

Imponendo la condizione di stazionarietà rispetto a  $\mu_y$  si ottiene dunque:

$$\mu_y = \sum_{i=1}^n y_i w_i \quad (5)$$

Una volta sostituito in (4) quanto appena trovato per  $\mu_y$  e imponendo la stessa condizione di stazionarietà rispetto a  $\sigma_y$  si ha:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2 w_i \quad (6)$$

Infine è possibile ricavare la varianza di  $\mu_y$  dalla definizione di valore di aspettazione, riconducendola più volte a integrali di gaussiane di altezze e ampiezze diverse:

$$\text{Var}(\mu_y) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_y^2 + \left( \frac{y_i}{\sum_{j=1}^n w_j} \right)^2 \frac{e^{-\frac{(x-x_i)^2}{3\sigma_{x_i}^2}} + \sqrt{3} \left( e^{-\frac{(x-x_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}} - \sqrt{2} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{4\sigma_{x_i}^2}} \right)}{2\sqrt{3}\pi\sigma_{x_i}^2} \quad (7)$$

Riassumendo:

Nella (5) prendiamo una media dei campionamenti intorno ad un'ascissa  $x$  in esame, pesata sulla distanza che gli  $x_i$  hanno da questa; intuitivamente lo interpretiamo come se stessimo applicando un *blur a kernel gaussiano* ai punti acquisiti. Effettivamente quello che stiamo facendo non è molto diverso da KDE monovariante, dove però scaliamo secondo il valore delle  $y$ . Lo stesso ragionamento vale per  $\sigma_y^2$ , si ha una stima della varianza dei dati la variare di  $y$ , pesata sulla distanza dai valori studiati. Dunque  $\mu_y \pm \sigma_y$  ci dà una descrizione della distribuzione dei nostri dati.

### 8.3 $\text{Var}(\mu_y)$

Mentre  $\sigma_y$  rappresenta la distribuzione dei dati intorno al valor medio  $\mu_y$ ,  $\text{Var}(\mu_y)$  ci indica l'incertezza sulla miglior stima di  $y$ . Questo è utile per determinare la convergenza della stima in funzione dei dati acquisiti. Infatti tanto più è elevata la densità dei dati, rispetto alla deviazione standard  $\sigma_x$ , tanto più la stima del valore centrale risulta precisa. Graficamente la banda di confidenza è più ristretta dove si concentrano i dati. Viceversa, la stessa tende ad allargarsi dove i dati sono sparsi, i.e. a distanze

paragonabili a  $\sigma_x$ . Numericamente, si vede dalla seconda somma nell'espressione (7) che la stima del valore centrale è statisticamente significativa solo quando si media su un intervallo campionato con almeno qualche punto ogni deviazione  $\sigma_x$ : altrimenti  $\sigma_y \rightarrow 0$  indicando così assenza di dati, mentre  $\text{Var}(\mu_y)$  tende a  $+\infty$  come  $\sim e^{x^2}$ , indice della stessa insufficienza di dati al fine di stabilire con precisione significativa il valore di  $\mu_y$ . Nel caso opposto, in cui i dati sono "densi" (in confronto alle  $\sigma_x$ ) la seconda somma, per

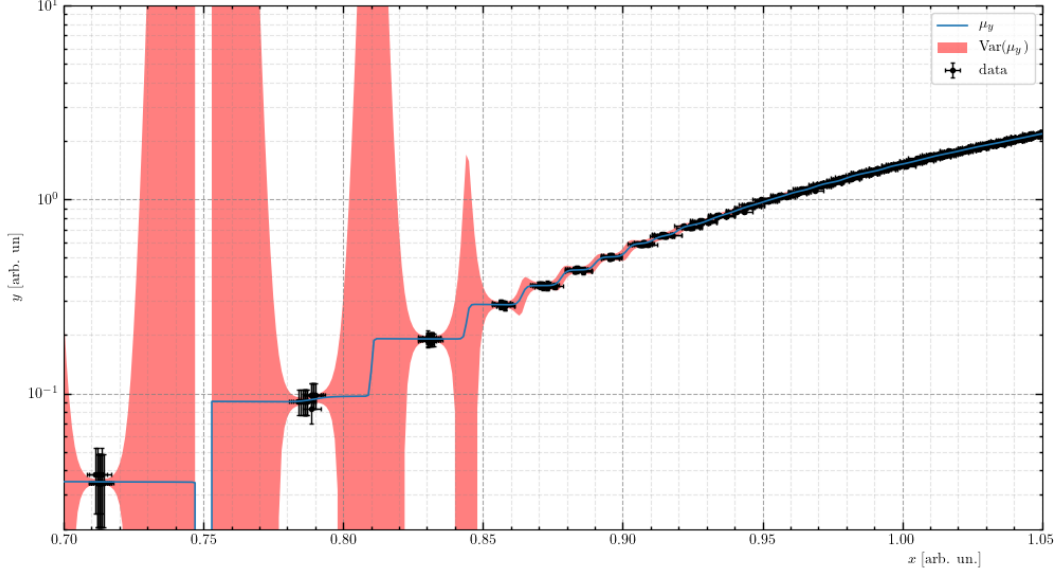


Figura 7: La media  $\mu_y$  è rappresentata dalla linea blu, mentre l'area in rosso indica il valore di  $\text{Var}(\mu_y)$  al variare dei dati (in nero) lungo  $x$ .

quanto computazionalmente intensiva, numericamente sembrerebbe piccola in confronto alla prima: in realtà non lo è, ma soprattutto questa non può essere trascurata, poiché è proprio la quantità che descrive la dipendenza dalla densità stessa e dunque la caratteristica convergenza/divergenza della precisione sulla stima centrale fornita.

#### 8.4 Filtro outliers

La parte più semplice nel filtraggio dati consiste nello scartare tutti quei punti che distano da  $\mu_y$  più di una soglia arbitraria  $k$  di deviazioni standard  $\sigma_y$  (nel nostro caso è stato scelto  $k = 2$ , non critico, trovato dopo una serie di prove). A differenza del classico metodo basato sulla distanza dalla curva/modello di best fit, per il nostro criterio essa è ininfluente. Questo risulta particolarmente utile in simili situazioni di verifica del modello in quanto una selezione basata su un preliminare fit risulterebbe influenzata dalla scelta della funzione in questione e eliminerebbe tutti i dati che non risultano compatibili con essa.

#### 8.5 Filtro dati non significativi

Supponiamo di avere 2 set di dati fatti con diverse resistenze, il primo ( $A$ ) con una resistenza bassa, il secondo ( $B$ ) con una alta: Il primo set esplorerà la regione ad alta corrente, mentre il secondo la regione di basse correnti. In generale i dati del primo si sovrapporranno anche nelle zone basse esplorate dal secondo, però senza aggiungere sostanziali informazioni rispetto a quanto farebbe il secondo. Esponiamo dunque il criterio sviluppato per ridurre l'influenza di questi punti meno significativi sulla ricerca dei parametri di best-fit e sulla rappresentazione finale dei dati.

Per capire se in un certo punto i dati di  $A$  sono significativi, calcoliamo la misura di significatività che abbiamo sviluppato in (7):  $\text{Var}(\mu_y)$  di  $A$  e di  $B$ . Perciò se  $\text{Var}(\mu_y)$  di  $A$  è maggiore di  $q\text{Var}(\mu_y)$  di  $B$ , con  $q$  arbitrario (nell'esperienza è stato scelto  $q = 3$ ), questo indica che i dati di  $A$  ci stanno dando "poca" informazione rispetto a quelli di  $B$ . A questo punto è sufficiente controllare tutti i punti scorrendo su tutte le combinazioni di set per eliminare i dati non significativi, che rendono meno immediata l'interpretazione

del grafico. Questo è ben visibile in scala logaritmica sulle  $y$ , dove i punti con grandi incertezze o varianze tendono a disperdersi rapidamente. L'algoritmo è computazionalmente intensivo e richiede una corretta gestione della memoria per evitare bolle di allocazione. Dunque è stato implementato in C++ per praticità e richiamato all'interno degli script (per dettagli si rimanda ai [sorgenti](#)). Nelle figure di esempio sono mostrati i dati selezionati dall'algoritmo (in nero) ed i dati scartati (in arancio).

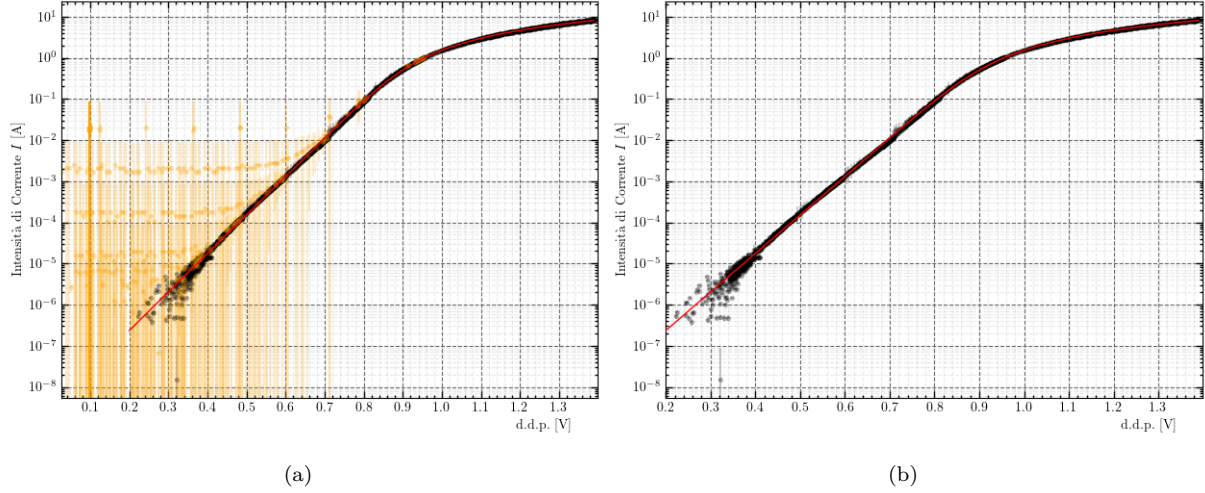


Figura 8: Grafici in scala semilogaritmica prima (8a) e dopo (8b) del filtraggio dati. I dati scartati sono stati evidenziati in arancio. Per praticità è stato rappresentato un centesimo dei dati raccolti

È infine mostrato il confronto dei grafici delle  $\text{Var}(\mu_y)$  tra due set successivi.

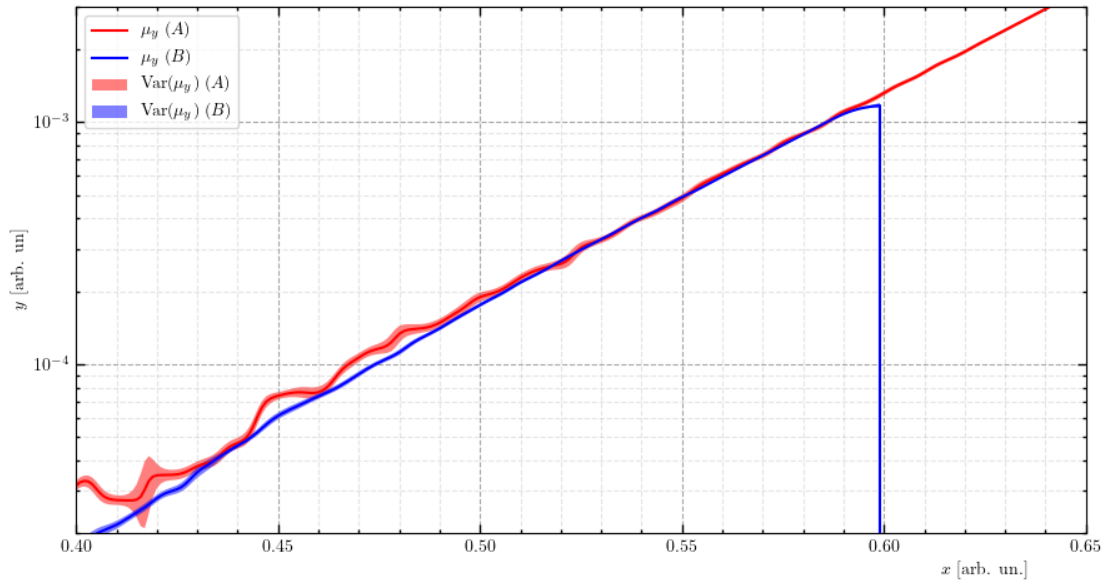


Figura 9: Confronto dei grafici delle  $\text{Var}(\mu_y)$  su due set di dati consecutivi.

## 9 APPENDICE C: METODO DI FIT

La differenza di potenziale  $\Delta V$  in funzione della corrente  $I$  che scorre all'interno del diodo può essere espressa attraverso la legge (2). Potremo, dunque, essere tentati ad adottare tale formula ai fini di un fit numerico. Tuttavia tale operazione provocherebbe il fallimento del fit a causa dei valori negativi o nulli che debitamente si riscontreranno all'interno del logaritmo. E' stato dunque necessario adottare un algoritmo alternativo, basato sul metodo di Newton[2]. Esso ci consentirà di ricostruire numericamente la

funzione inversa della legge (2). Illustriamo in breve il metodo di Newton. Sia data una funzione  $f(x)$  continua e di classe  $C^2$  entro un intervallo di definizione connesso (con  $f'(x)$  limitata e diversa da 0 per ciascuna  $x$  appartenente al dominio) ed una  $v$  tale che  $f(v) = 0$ . Sviluppando al prim'ordine  $f$  in un intorno di  $v$ , otterremo:

$$f(x) = f(v) + f'(v) + \frac{1}{2}f''(X) \cdot (x - v)^2 = 0 \quad (8)$$

ove  $X$  è un numero reale compreso fra  $v$  ed  $x$ . Nel caso in cui il  $(x - v)^2$  risultasse prossimo a zero:

$$x \simeq v - \frac{f(v)}{f'(v)} \quad (9)$$

L'unica limitazione nell'adottare tale scrittura è che necessitiamo di  $v$  molto vicino a  $x$  incognito. Tuttavia, nel caso in cui la funzione  $f$  risultasse sufficientemente maneggevole, potremo partire da un valore generico del dominio e riscontrare con buona approssimazione la radice in un tempo finito relativamente breve. Per effettuare ciò, è necessaria la serie ricorsiva:

$$\begin{cases} x[0] = a \\ x[N+1] = x[N] - \frac{f(x[N])}{f'(x[N])} \end{cases} \quad (10)$$

ove  $a$  è un generico valore appartenente al dominio di definizione. In pratica, per ogni iterazione tale serie valuta  $f(x[i])$  e cerca la retta tangente in tale punto alla funzione:

$$y = f(x[i]) + f'(x[i]) \cdot (x - x[i]) \quad (11)$$

Dopodiché cerca il punto  $x$  per il quale  $y = 0$ :

$$x = x[i+1] = x[i] - \frac{f(x[i])}{f'(x[i])} \quad (12)$$

E viene conseguentemente valutato il valore  $f(x[i+1])$  ed il procedimento viene ripetuto per un dato numero di iterazioni. Se la funzione è monotona e la serie converge ad un valore, tale sarà  $v$ , essendo

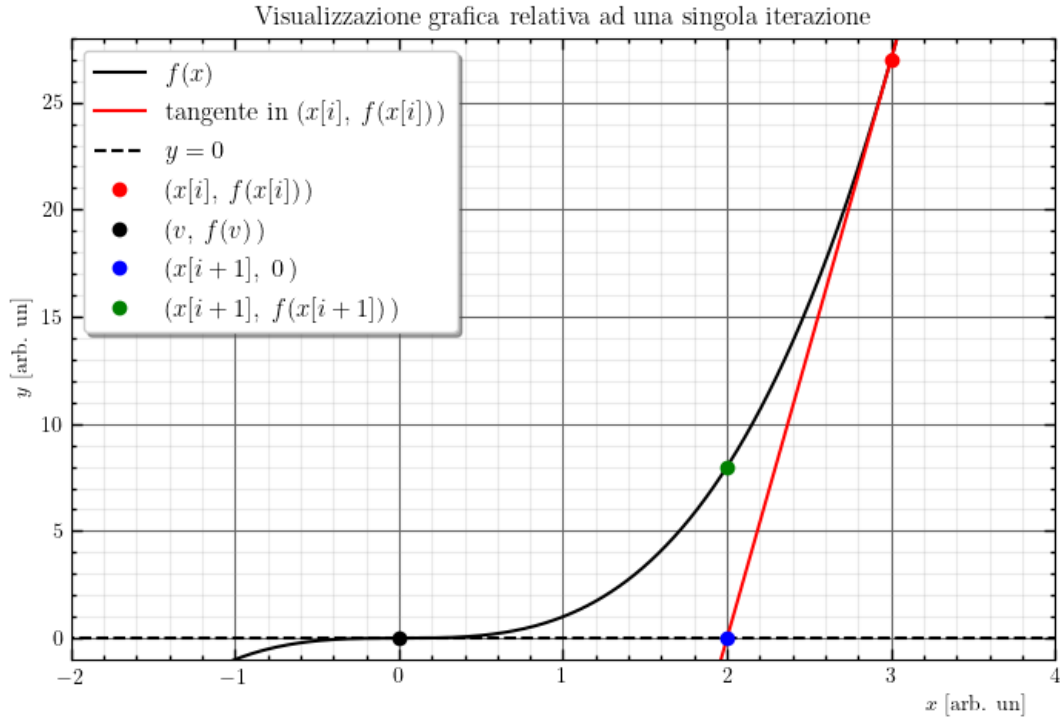


Figura 10: Visualizzazione grafica di cosa implica un'iterazione della serie ricorsiva ( $f(x) = x^3$  in questo esempio)

l'unico punto fisso della serie:

$$a = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \rightarrow f(a) = 0 \wedge v = a \quad (13)$$

essendo  $v$  l'unico punto in cui si annulla la funzione per definizione. Ritornando al diodo, esso può essere interpretato quale un diodo ideale ed una resistenza in serie, collegati ad un generatore di differenza di potenziale. Quindi, per la legge delle maglie:

$$\Delta V_{\text{ingresso}} = \Delta V_{\text{diodo}} + \Delta V_{\text{resistenza}} = \Delta V_{\text{diodo}} + R \cdot I \quad (14)$$

ove  $I$  è la corrente che scorre all'interno del diodo in quel determinato istante. Notoriamente, tale scrittura si può porre nella seguente forma ai fini di definire la retta di carico del diodo:

$$\Delta V_{\text{diodo}} = \Delta V_{\text{ingresso}} - R \cdot I \quad (15)$$

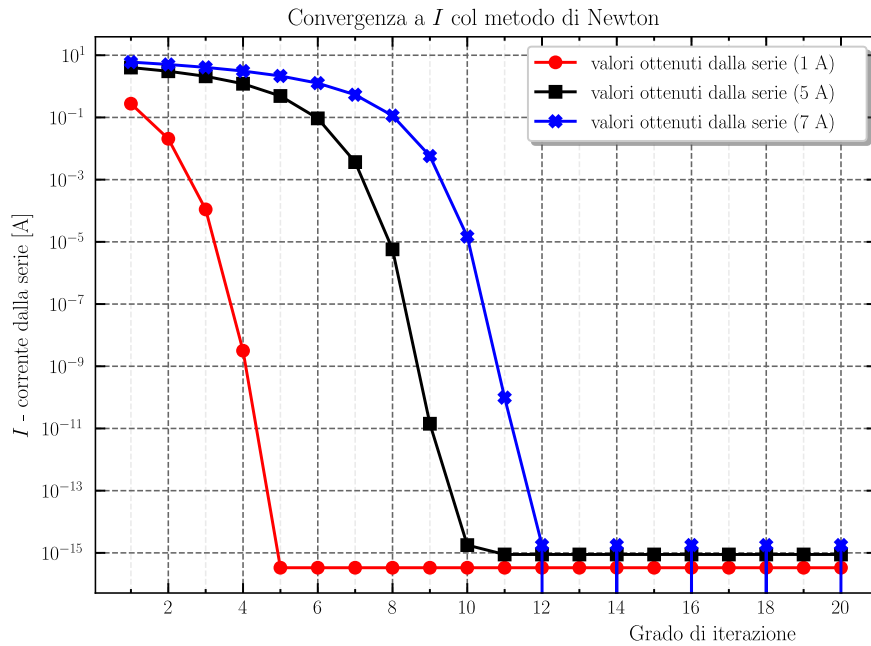
Il punto di intersezione di tale retta con l'equazione di Shockley per il diodo rappresenta il punto di lavoro  $(v, i)$  del diodo:

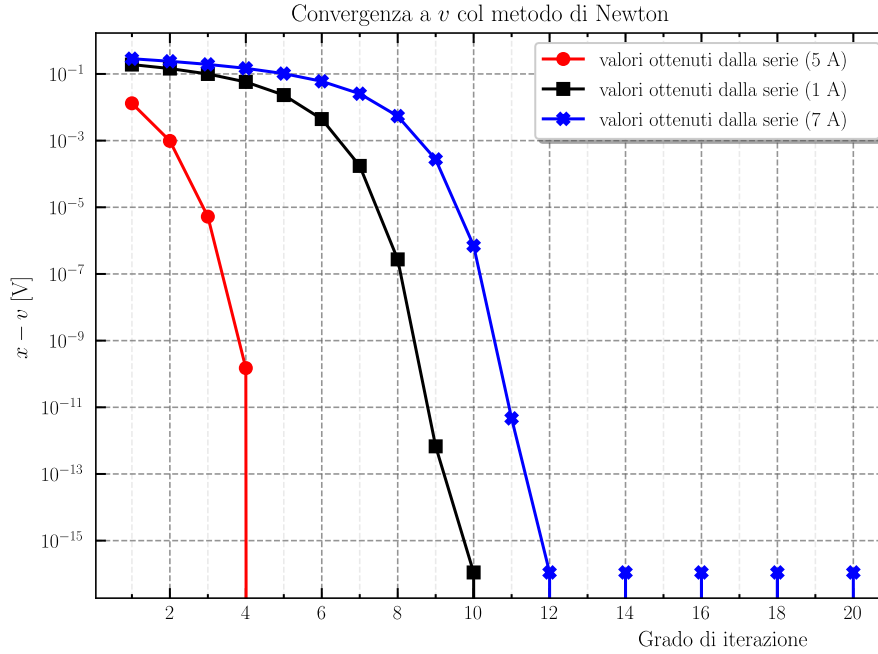
$$i = I_0 \cdot \left( e^{\frac{\Delta V_{\text{ingresso}} - R \cdot i}{\eta V_T}} - 1 \right) = I_0 \cdot \left( e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right) = \frac{\Delta V_{\text{ingresso}} - v}{R} \quad (16)$$

Tale  $i$  dovrà necessariamente corrispondere alla corrente di lavoro in virtù dell'equazione di Shockley. Dunque definendo la funzione  $g(x)$  come segue:

$$g(x) = I_0 \cdot \left( e^{\frac{x}{\eta V_T}} - 1 \right) - \frac{\Delta V_{\text{ingresso}} - x}{R} \quad (17)$$

è possibile adottare il metodo di Newton al fine di riscontrare la radice  $v$  ed individuare così la corrente di lavoro. Dunque si potrà effettuare un fit della corrente in funzione della tensione ai capi del diodo reale attraverso una legge che per un determinato valore della tensione ( $\Delta V_{\text{ingresso}}$ ) ed un dato numero di iterazioni (ne sono sufficienti poche nel nostro caso ai fini di ottenere un'approssimazione adeguata), riesce ad individuare la radice  $v$  nelle modalità previamente descritte. Attraverso la stessa, sarà quindi possibile individuare la corrente di lavoro del diodo per la suddetta  $\Delta V_{\text{ingresso}}$ . È immediato comprendere che fare un fit con questa legge risulta essere equivalente a fare un fit con la legge (2), con minori complicazioni computazionali. Verifichiamo graficamente che per dei generici valori della corrente i due metodi danno risultati sostanzialmente equivalenti (adottiamo i parametri stimati dal fit). I grafici relativi alla convergenza di  $I$  e di  $v$  anche a seguito di sole 20 iterazioni:





Tali grafici evidenziano che, come era da aspettarsi, la legge adottata per il fit risulta essere l'inversa numerica della legge (2). La serie, inoltre, risulta convergere molto rapidamente ai valori attesi e quindi sono effettivamente sufficienti solo 20 iterazioni per una buona precisione. All'interno della funzione di fit, è stato infine introdotto un offset quale parametro libero per ovviare errori di zero dovuti agli assorbimenti di ADC in Teensy 3.2.

#### *Nota sull'implementazione*

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive covarianze si è implementato in Python un algoritmo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione `curve_fit` della libreria `Scipy`[3]. Per tutti i fit su campionamenti digitali di `Teensy` si è imposto `abs_sigma = False`, in quanto la sorgente principale d'incertezza sulle misure risulta non statistica/non determinata.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] o. Paul Stoffregen. Teensy 3.2 development board. Sherwood, Oregon, USA. [Online]. Available: <https://www.pjrc.com/teensy/teensy31.html>
- [2] C. Manzoli, "Il metodo di newton e le sue varianti per sistemi di equazioni non lineari," Master's thesis, Università di Bologna, corso di Laurea in Matematica, 2015.
- [3] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. Jarrod Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. Carey, Í. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. Vand erPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and S. . . Contributors, "SciPy 1.0—Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python," *arXiv e-prints*, p. arXiv:1907.10121, Jul 2019.