

Modellizzazione della resistenza di diodi a giunzione PN per alte correnti di lavoro

L. Ciucci(*) S. Bruzzesi(*) M. Romagnoli(*) M. Alighieri(*)
B. Tomelleri(*)

5 marzo 2020

1 INTRODUZIONE

L'alta resistività intrinseca al silicio, di cui è composta la giunzione bipolare, comporta la presenza di una sua componente resistiva: questa risulta sempre meno trascurabile agli effetti del passaggio di corrente attraverso il diodo, all'aumentare della tensione ai suoi capi. Per poter modellare la componente -ohmica- di un diodo percorso da correnti alte si propone un modello semplice di resistenza parassita in serie, in grado di descriverne gli effetti, verificandone sperimentalmente la validità.

2 CENNI TEORICI

Secondo le ipotesi, un diodo reale può essere schematizzato quale un resistore ohmico ed un diodo ideale in serie. Pertanto ci aspettiamo che la corrente che attraversa tali elementi sia la medesima:

$$I = \frac{\Delta V_{\text{resistore}}}{R} = I_0 \left(e^{\frac{\Delta V_{\text{diodo}}}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (1)$$

Dunque la relazione che lega la corrente e la tensione ai capi del diodo può essere espressa secondo la legge:

$$\Delta V = \Delta V_{\text{diodo}} + \Delta V_{\text{resistore}} = \eta V_T \ln \left(\frac{I + I_0}{I_0} \right) + RI \quad (2)$$

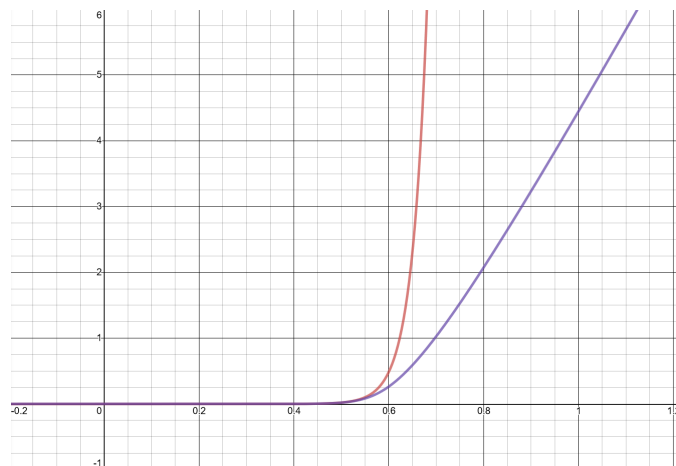


Figura 1: confronto degli andamenti: la curva di Shockley (in rosso) e la legge (2) (in viola)

*Dipartimento di Fisica E. Fermi, Università di Pisa - Pisa, Italy

3 METODO E APPARATO SPERIMENTALE

Il circuito sotto studio lavora con correnti relativamente alte. Onde evitare sostanziali aumenti di temperatura nei componenti ed eventuali danni agli stessi si imprimono correnti impulsive. La durata degli impulsi è di circa $150 \mu\text{s}$, che corrisponde ad un'energia impressa inferiore a 1 mJ (dunque ad un aumento della temperatura del semiconduttore inferiore a 0.5 K).

3.1 Apparato

L'apparato sperimentale è costituito da un circuito, realizzato su basetta sperimentale, il cui scopo è generare correnti impulsive attraverso il diodo $D1$ e la resistenza $R1$. La misura della differenza di potenziale ai capi di quest'ultima permette la stima della corrente che attraversa il diodo. Ai fini di esplorare ampie zone di lavoro del diodo, la resistenza è stata cambiata opportunamente scegliendo tra le seguenti:

$R1 \text{ nom. } [\Omega]$	$R1 \text{ mult. } [\Omega]$
$0.22 \pm 3\%$	0.226 ± 0.008
$2.2 \pm 5\%$	2.212 ± 0.008
$22 \pm 5\%$	21.86 ± 0.010
$220 \pm 5\%$	216.22 ± 0.07
$2.2k \pm 5\%$	2202.1 ± 0.4
$22k \pm 5\%$	$(21.7 \pm 0.3)10^3$
$0.22M \pm 5\%$	$(217 \pm 3)10^3$

Tabella 1: I valori delle resistenze poste in serie al diodo, riportate in valore nominale e misurate con multimetri digitali.

Nel circuito può essere individuata una parte che si occupa della carica e scarica controllata del condensatore $C1$, il cui scopo è quello di fornire una tensione che possa essere facilmente regolata e sufficientemente stabile durante un impulso. Un'altra parte del circuito si occupa di collegare a comando il condensatore alla serie $R1 - D1$ attraverso un MOS-FET.

Il circuito è alimentato da 2 tensioni fornite da un alimentatore stabilizzato switching e da un Buck Boost Converter. Un segnale fornito su $T2$ provoca la carica del condensatore mentre su $T3$ la sua scarica. Un segnale (invertito) su $T1$ innesca l'impulso di corrente sul diodo.

La tensione di $C1$ è misurata attraverso un partitore di tensione collegato ad $OUT3$ ed alla scheda di controllo, mentre la tensione ai punti $OUT1$ e $OUT2$ è letta direttamente.

Come MCU per la gestione dell'apparato è stata scelta la scheda **Teensy 3.2**[1]. Questa si occupa del controllo dei segnali e delle letture analogiche. In particolare **Teensy** permette la lettura analogica sincronizzata differenziale veloce, essendo dotato di due ADC, entrambi con una risoluzione reale di 12 bit. La lettura differenziale è fondamentale per acquisire coppie di dati per le tensioni ai capi del diodo e della resistenza.

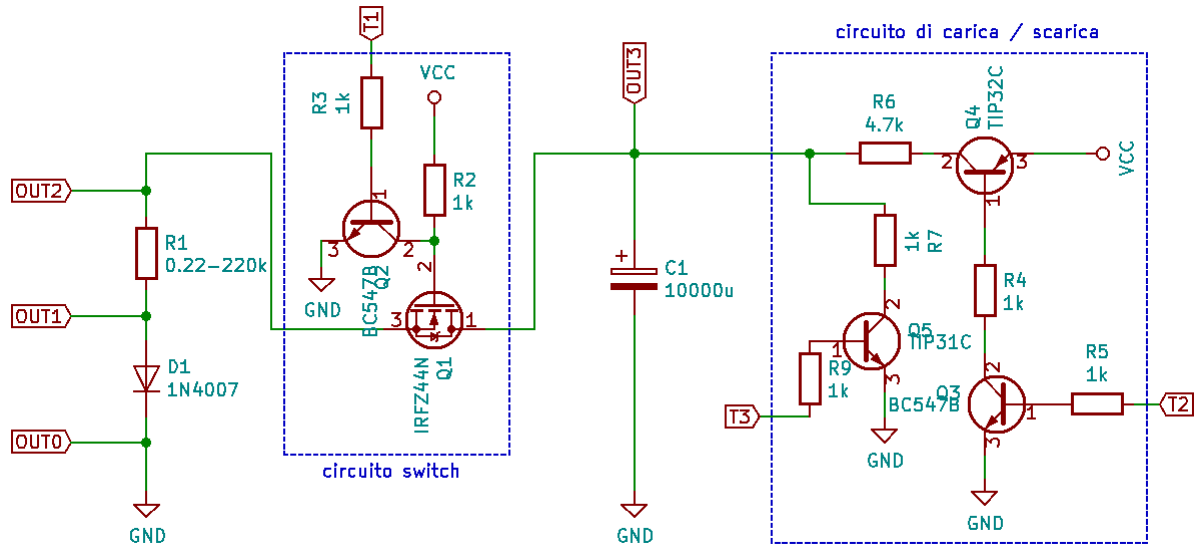


Figura 2: Circuito globale per la gestione del diodo

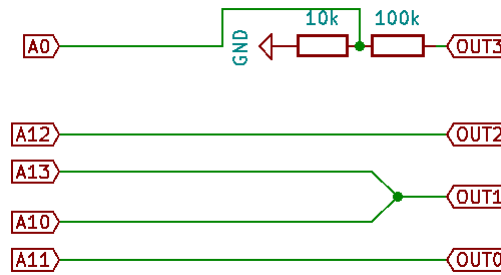


Figura 3: Schema circuitale del sistema di lettura (verso Teensy)

3.2 Calibrazione

La calibrazione dei canali ADC0 e ADC1 è stata effettuata sulla base della lettura differenziale rispettivamente fra i pin A10 e A11 e fra A12 e A13. E' stata calibrata la lettura di ciascuna delle due coppie separatamente.

I pin volti alla lettura della tensione maggiore sono stati collegati al centrale di un potenziometro, a sua volta collegato ad un generatore di potenziale con tensione in ingresso pari a 3.3V . Gli altri due pin sono stati invece collegati a massa.

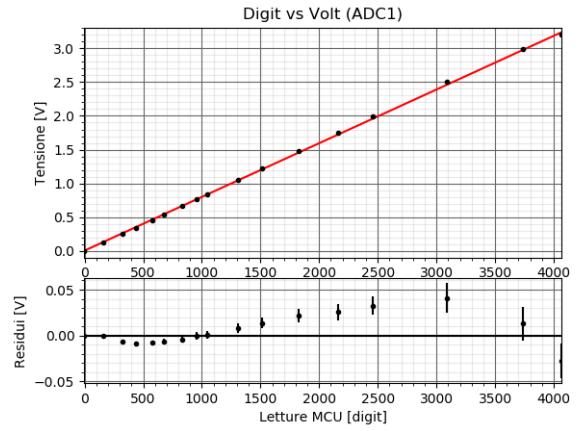
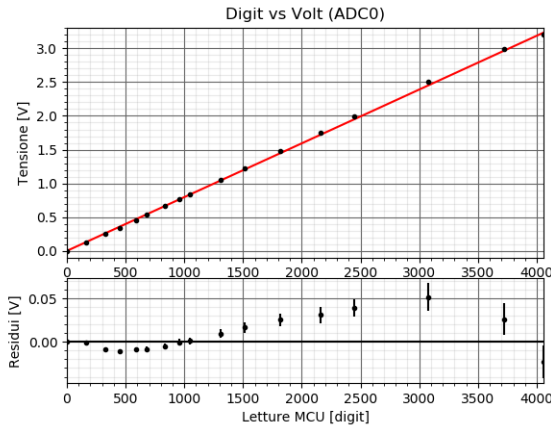
Variando la resistenza e conseguentemente la differenza di potenziale in ingresso, è stato possibile calcolare la media, la deviazione standard campione e la deviazione standard dalla media relative a ciascuna tensione per un gruppo di 10000 misure effettuate con **Teensy** (vedi [relativo programma](#)). Il centrale del potenziometro e la massa sono state, inoltre, collegate ad un multimetro digitale, così da avere il rispettivo valore in Volt per ciascuna tensione valutata in unità arbitrarie. Sono stati, quindi, associati degli errori a queste ultime misure tenendo presente le specifiche del multimetro.

Dopodiché le misure relative a ciascuna coppia di boccole sono state poste all'interno di un grafico con i dati raccolti da **Teensy** in ordinate e i valori misurati col multimetro in ascisse. Dunque è stato effettuato un fit lineare attraverso la legge:

$$y(x, m, q) = mx + q \quad (3)$$

ove m e q sono i parametri liberi. Come errori associati alle letture digitali sono state utilizzate le deviazioni standard dalla media. I fit relativi ad ADC0 ed ADC1 hanno conseguito i seguenti risultati:

ADC0	ADC1
$m_0 = 0.7968 \pm 0.0033 \text{ mV/digit}$	$m_1 = 0.7954 \pm 0.0026 \text{ mV/digit}$
$q_0 = -0.18 \pm 0.34 \text{ mV}$	$q_1 = 3.84 \pm 0.26 \text{ mV}$
$\text{Var}(m_0) = 1.1 \cdot 10^{-11} \text{ V}^2/\text{digit}^2$	$\text{Var}(m_1) = 7.0 \cdot 10^{-12} \text{ V}^2/\text{digit}^2$
$\text{Var}(q_0) = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2$	$\text{Var}(q_1) = 6.8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2$
$\text{Cov}(m_0, q_0) = -1.6 \cdot 10^{-10} \text{ V}^2/\text{digit}$	$\text{Cov}(m_1, q_1) = -6.1 \cdot 10^{-11} \text{ V}^2/\text{digit}$
$\chi^2/\text{ndof} = 145/15$	$\chi^2/\text{ndof} = 96/15$
abs_sigma = False	abs_sigma = False



I coefficienti così riscontrati ci permetteranno di fornire una buona stima dei valori centrali relativi alla misura in volt delle letture analogiche (digit). Il χ^2 risulta essere sovrastimato in quanto il MCU non ci fornisce una risposta perfettamente lineare ai segnali in ingresso. Dalle specifiche di **Teensy 3.2**, sappiamo che lo scostamento dall'andamento lineare può essere quantificato col 7% della lettura in digit. Per maggiori informazioni riguardo alle stime delle incertezze nelle conversioni si rimanda direttamente al [relativo script](#).

3.3 Acquisizione dati

Per ciascun valore scelto della resistenza $R1$ è stata eseguita una presa dati automatizzata secondo una [routine](#) programmata in **Teensy**: il condensatore viene caricato ad una tensione prefissata; una volta raggiunto il valore prestabilito viene inviato il segnale su $T1$, si avvia l'acquisizione sincronizzata e si attende un tempo $50 \mu\text{s}$ per permettere al MOS-FET di entrare in conduzione ($R2$ è stata scelta di 1k , dunque c'è un apprezzabile ritardo tra segnale e impulso) e scartare eventuali segnali spuri; a questo punto si inizia a memorizzare una serie da 100 coppie di letture -sincronizzate- (a meno di sfasamenti nell'ordine delle centinaia di nanosecondi); si ferma l'impulso e si trasmettono i dati al computer; se la tensione al punto OUT2 ha raggiunto valori maggiori di 3.3V l'acquisizione si ferma per non danneggiare **Teensy**, altrimenti si ricomincia caricando il condensatore ad una tensione più alta.

4 ANALISI DATI E RISULTATI

L'intento della presente analisi è quello di verificare che i dati raccolti siano in accordo con la legge (2). A tale riguardo, come operazione preliminare è stato necessario convertire le letture analogiche nelle

opportune coppie corrente-tensione relative al diodo. Dunque i dati sono stati convertiti in tensione secondo le calibrazioni dei relativi canali (ADC0 e ADC1). Tale operazione è stata effettuata considerando opportunamente gli errori come descritto nel paragrafo 3.2. Successivamente, le tensioni relative ai capi della resistenza R hanno permesso di stimare la rispettiva corrente di lavoro attraverso la legge di Ohm. Si è quindi effettuato un filtraggio volto all'eliminazione degli outliers e dei punti meno significativi, assumendoli quali variabili indipendenti e di natura gaussiana. Per una discussione dettagliata si rimanda all'[Appendice A: Filtraggio Dati](#). E' necessario sottolineare che, all'interno della stessa appendice, σ_x rappresenta la varianza delle letture e non gli errori associati ad esse. Successivamente, è stato effettuato un fit ai minimi degli scarti quadratici. Dunque avremo potuto pensare di adottare la legge (2) direttamente. Tuttavia ciò comporterebbe il fallimento del fit a causa dei valori negativi o nulli che si riscontrerebbero nell'argomento del logaritmo. È stata quindi utilizzata la funzione inversa come modello di fit, la quale è stata ricavata numericamente secondo il metodo delle tangenti (o di Newton). Per una trattazione approfondita, si rimanda all'[Appendice B: Metodo di fit](#).

Da un controllo visivo dei dati si osserva che nei punti raccolti con la resistenza da 220k è presente del rumore molto maggiore delle incertezze sulle misure. Questo è probabilmente dovuto all'influenza del circuito di lettura stesso sulle piccole correnti in gioco. Non potendo dunque attribuire degli errori significativi per questa serie, tali dati non sono stati utilizzati nella procedura di fit eseguita successivamente in quanto avrebbero avuto un peso sovrastimato in confronto agli altri dati, influenzando così i risultati finali.

I dati raccolti con sovrapposta la funzione di fit sono stati posti all'interno del grafico 5. I parametri stimati dal fit risultano essere:

$$\begin{aligned} R_{\text{diodo}} &= 46.112 \pm 0.007 \text{ m}\Omega \\ \eta V_T &= 47.5786 \pm 0.0033 \text{ mV} \\ I_0 &= 4.5180 \pm 0.0043 \text{ nA} \\ \text{offset} &= -2.2043 \pm 0.0073 \text{ A} \\ \chi^2/\text{ndof} &= 72207/251066 \\ \text{abs_sigma} &= \text{False} \end{aligned}$$

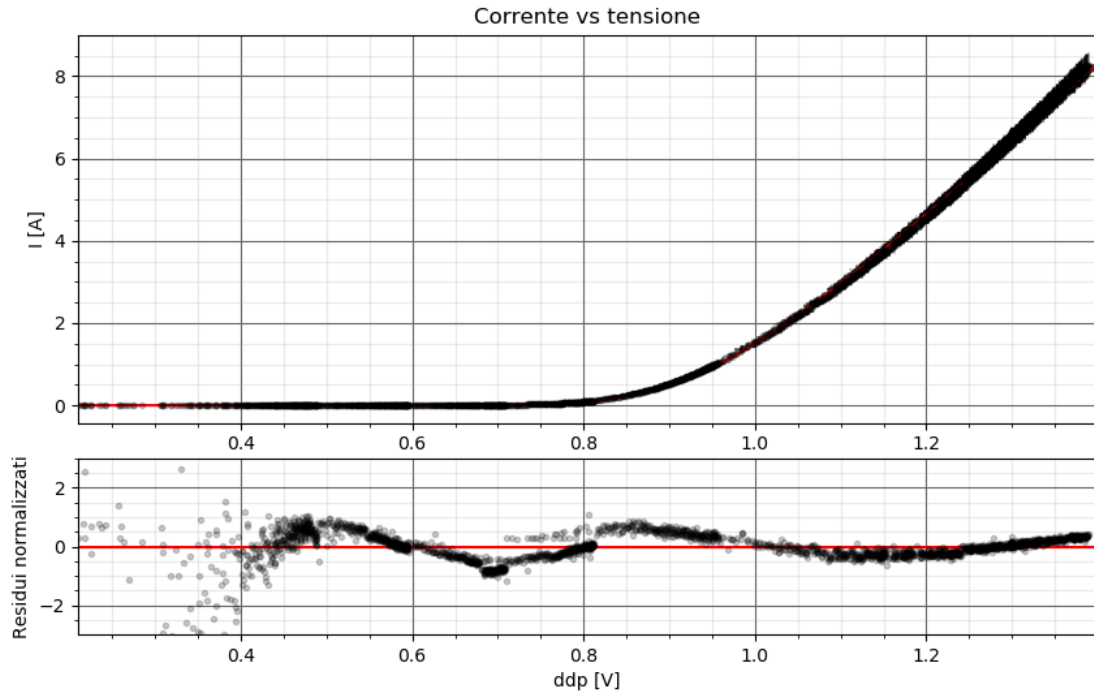


Figura 5: Dati acquisiti e funzione di best fit (2). E' stato rappresentato un punto ogni 100 per comodità di visualizzazione.

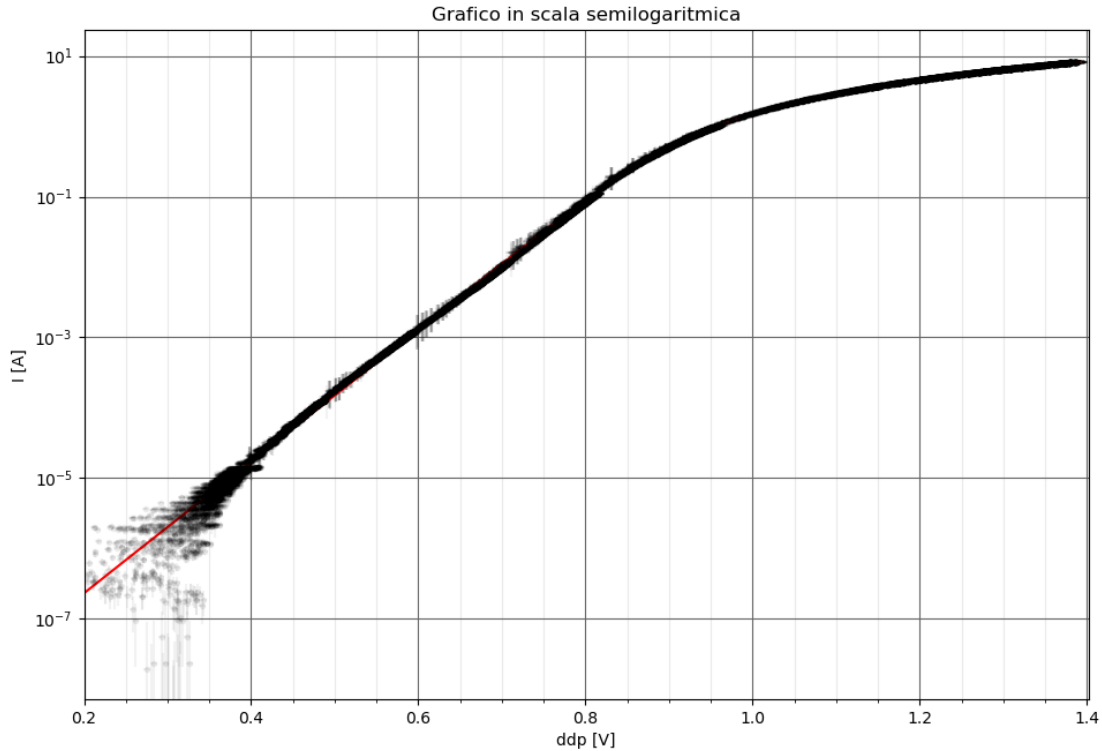


Figura 6: Dati acquisiti e funzione di best fit (2) in scala semilogaritmica. A scopo illustrativo sono stati rappresentati anche i dati della serie 220k. E' stato disegnato un punto ogni 10 per comodità di visualizzazione.

Per gli script si rimanda alla [cartella](#) , dove `run.py` esegue la corretta sequenza e `config.py` definisce i parametri fondamentali.

5 CONCLUSIONI

Sulla base dell'analisi previamente effettuata, possiamo osservare che il χ^2 risulta essere minore rispetto a quello aspettato. Ciò è parzialmente dovuto alla correlazione degli errori inerenti i dati rilevati all'interno dei due canali d'ingresso. In aggiunta, come si evince anche dalla zona di maggior concentrazione dei residui all'interno dell'omonimo grafico, il convertitore analogico-digitale del MCU è caratterizzato da una funzione di risposta non lineare. Tale fattore era stato tenuto in considerazione all'interno della calibrazione delle porte ADC0 e ADC1 mediante l'aggiunta in quadratura di un errore di natura non statistica a quelli stimati attraverso il fit lineare. Tale operazione avrebbe portato, quindi, ad un'ulteriore diminuzione del χ^2 all'interno del fit finale. Ulteriori osservazioni possono essere condotte riguardo alle evidenti analogie di carattere qualitativo fra la zona di maggior concentrazione dei punti e la funzione di best fit. In primo luogo, all'interno del grafico in scala lineare, a correnti alte i punti risultano essere disposti pressoché linearmente, in accordo con l'ipotesi sulla componente resistiva interna. Nel grafico in scala semilogaritmica, inoltre, i dati risultano possedere un andamento simile a quello caratteristico della curva di Shockley, ovvero approssimativamente rettilineo per poi appiattirsi come un logaritmo al crescere della tensione. Dunque, possiamo asserire che l'andamento dei dati sperimentali risulta essere ben descritto dalla legge (2). Pertanto potremo aspettarci che i parametri stimati dal fit siano significativi e che la modellizzazione proposta sia una buona approssimazione del diodo reale nelle condizioni di lavoro considerate.

6 APPENDICE A: FILTRAGGIO DATI

6.1 Introduzione

Durante l'esperienza si è raccolto un grande numero di dati, acquisiti in run diversi in base alla resistenza scelta, dunque a zone differenti della curva. Si è posto il problema di eliminare degli outliers in modo indipendente dal modello scelto. Inoltre le varie serie di dati si sovrappongono, dunque è necessario eliminare quei dati che, non aggiungendo informazioni utili, vanno a "sporcare" il grafico.

Il sistema di filtraggio di dati implementato nell'eseguibile si compone di 2 fasi: la prima è l'eliminazione di outliers, la seconda consiste nell'eliminazione di dati non significativi.

6.2 Procedimento

Supponiamo di avere una serie di dati (x, y) e assumiamo che siano indipendenti tra loro. Questo non sarà in generale vero, però quest'ipotesi è tanto più lecita quanto più la correlazione tra le varianze delle misure su x e y è indipendente dai valori assunti dalle x e y stesse e, più sono numerosi i dati racchiusi entro una deviazione lungo x : in questo caso, infatti, la correlazione viene inclusa nella varianza lungo y . Supponiamo inoltre che siano note a priori le $\sigma_x^2 := \text{Var}(x)$ e che la loro distribuzione di probabilità sia normale (le distribuzioni delle componenti sono approssimativamente gaussiane per il convertitore di **Teensy**, perlomeno utilizzando la risoluzione a 12 bit) secondo una matrice di covarianza diagonale nella base $\{x, y\}$. In ogni modo, i nostri dati x e y risultano indipendenti e approssimativamente normali, dunque le assunzioni risultano giustificate. Allora la densità di probabilità che un punto che abbia misurato x si trovi a tale ascissa x_i si ricava banalmente integrando lungo y a x fissata:

$$dP = \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-x_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}} dx.$$

Dunque, ripetendo più volte la stessa misura, la probabilità

$$P\left(|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon G_{x_i}.$$

dove

$$G_{x_i} := \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-x_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}}.$$

e $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0$. Scegliendo allora solo quelle misure x per cui vale $|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, queste saranno in numero tendente a:

$$N_i := N_{\text{tot}} \frac{G_{x_i}}{\sum_j G_{x_j}} = N_{\text{tot}} w_i.$$

che definisce implicitamente i pesi w_i con cui si mediano le distribuzioni di probabilità gaussiane G_{x_i} . Allora, posto:

$$G_{y_i} := \frac{1}{\sigma_{y_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\mu_y - y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2}}.$$

Per il principio di massima verosimiglianza siamo quindi interessati a massimizzare la quantità:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{N_i} G_{y_i} = \prod_{i=1}^n G_{y_i}^{N_i}.$$

Per la monotonia del logaritmo il problema equivale a massimizzare la quantità:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \ln G_{y_i}^{N_{\text{tot}} w_i} = \frac{N_{\text{tot}}}{\sum_{j=1}^n G_{x_j}} \sum_{i=1}^n G_{x_i} \ln G_{y_i}.$$

Per cui, a meno di costanti risulta:

$$\ln \mathcal{L} - \text{const.} \propto \sum_{i=1}^n -G_{x_i} \ln \sigma_y - \frac{1}{2} G_{x_i} \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \quad (4)$$

Imponendo la condizione di stazionarietà rispetto a μ_y si ottiene dunque:

$$\mu_y = \sum_{i=1}^n y_i w_i \quad (5)$$

Una volta sostituito in (4) quanto appena trovato per μ_y e imponendo la stessa condizione di stazionarietà rispetto a σ_y si ha:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2 w_i \quad (6)$$

Infine è possibile ricavare la varianza di μ_y dalla definizione di valore di aspettazione, riconducendola più volte a integrali di gaussiane di altezze e ampiezze diverse:

$$\text{Var}(\mu_y) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{y_i}{\sum_{j=1}^n w_j} \right)^2 \frac{e^{-\frac{(x-x_i)^2}{3\sigma_{x_i}^2}} + \sqrt{3} \left(e^{-\frac{(x-x_i)^2}{\sigma_{x_i}^2}} - \sqrt{2} e^{-3\frac{(x-x_i)^2}{4\sigma_{x_i}^2}} \right)}{2\sqrt{3}\pi\sigma_{x_i}^2} \quad (7)$$

Riassumendo:

Nella (5) prendiamo una media dei campionamenti intorno ad un'ascissa x in esame, pesata sulla distanza che gli x_i hanno da questa; intuitivamente lo interpretiamo come se stessimo applicando un *blur a kernel gaussiano* ai punti acquisiti. Effettivamente quello che stiamo facendo non è molto diverso da KDE monovariante, dove però scaliamo secondo il valore delle y . Lo stesso ragionamento vale per σ_y^2 , si ha una stima della varianza dei dati la variare di y , pesata sulla distanza dai valori studiati. Dunque $\mu_y \pm \sigma_y$ ci dà una descrizione della distribuzione dei nostri dati.

6.3 $\text{Var}(\mu_y)$

Mentre σ_y rappresenta la distribuzione dei dati intorno al valor medio μ_y , $\text{Var}(\mu_y)$ ci dà un'idea dell'incertezza che attribuiamo alla miglior stima di y . Questo ci è utile per determinare la convergenza della stima in funzione dei dati acquisiti. Infatti: più la densità dei dati è grande rispetto alla deviazione standard σ_x , più la stima del valore centrale risulta precisa. Graficamente la banda di confidenza è più ristretta dove si concentrano i dati, viceversa tende ad allargarsi dove i dati sono sparsi, a distanze paragonabili a σ_x . Numericamente, si vede dalla seconda somma nell'espressione (7) che la stima del valore centrale è statisticamente significativa solo quando si media su un intervallo campionato con almeno qualche punto ogni deviazione σ_x : altrimenti $\sigma_y \rightarrow 0$ indicando assenza di dati, mentre $\text{Var}(\mu_y)$ tende a $+\infty$ come $\sim e^{x^2}$ indice della stessa insufficienza di dati al fine di stabilire con precisione significativa il valore di μ_y .

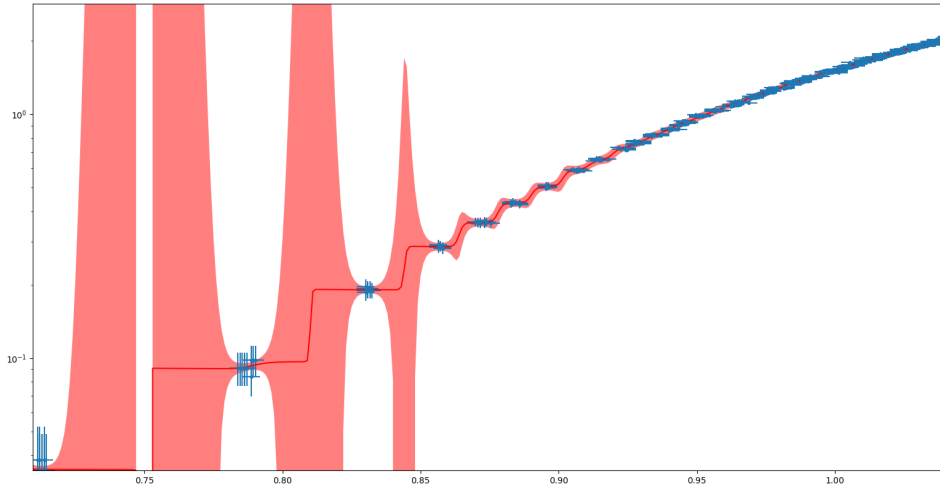


Figura 7: La media μ_y è rappresentata dalla linea rossa, mentre l'area in rosso indica il valore di $\text{Var}(\mu_y)$ al variare dei dati (in blu) lungo x .

Nel caso opposto, in cui i dati sono "densi" (in confronto alle σ_x) la seconda somma, per quanto computazionalmente intensiva, numericamente sembrerebbe piccola in confronto alla prima: in realtà non lo è, ma soprattutto questa non può essere trascurata, poiché è proprio la quantità che descrive la dipendenza dalla densità stessa, dunque la caratteristica convergenza/divergenza della precisione sulla stima centrale fornita.

6.4 Filtro outliers

La parte più semplice nel filtraggio dati consiste nello scartare tutti quei punti che distano da μ_y più di una soglia arbitraria k di deviazioni standard σ_y (nel nostro caso è stato scelto $k = 2$, non critico, trovato dopo una serie di prove). A differenza del classico metodo basato sulla distanza della curva modello di best fit, non siamo influenzati da quest'ultimo. Questo risulta particolarmente utile in simili situazioni di verifica del modello in quanto una selezione basata su un preliminare fit risulterebbe influenzata dalla scelta della funzione in questione e eliminerebbe tutti i dati che non risultano compatibili con essa.

6.5 Filtro dati non significativi

Supponiamo di avere 2 set di dati fatti con diverse resistenze, il primo (A) con una resistenza bassa, il secondo (B) con una alta: Il primo set esplorerà la regione ad alta corrente, mentre il secondo la regione di basse correnti. In generale i dati del primo si sovrapporranno anche nelle zone basse esplorate dal secondo, però senza aggiungere sostanziali informazioni rispetto a quanto farebbe il secondo. Esponiamo dunque il criterio sviluppato per ridurre l'influenza di questi punti meno significativi sulla ricerca dei parametri di best-fit e sulla rappresentazione finale dei dati.

Per capire se in un certo punto i dati di A sono significativi, calcoliamo la misura di significatività che abbiamo sviluppato in (7): $\text{Var}(\mu_y)$ di A e di B . Perciò se $\text{Var}(\mu_y)$ di A è maggiore di $q\text{Var}(\mu_y)$ di B , con q arbitrario (nell'esperienza è stato scelto $q = 3$), questo indica che i dati di A ci stanno dando "poca" informazione rispetto a quelli di B . A questo punto è sufficiente controllare tutti i punti scorrendo su tutte le combinazioni di set per eliminare i dati non significativi, che rendono meno immediata l'interpretazione il grafico. Questo è ben visibile in scala logaritmica sulle y dove i punti con grandi incertezze o varianze tendono a disperdersi rapidamente. L'algoritmo è computazionalmente intensivo e richiede una corretta gestione della memoria per evitare bolle di allocazione, dunque è stato implementato in C++ per praticità e

richiamato all'interno degli script, per dettagli si rimanda ai [sorgenti](#). Nelle figure di esempio sono mostrati i dati selezionati dall'algoritmo (in nero) ed i dati scartati (in rosso). E' infine mostrato il confronto dei grafici delle $\text{Var}(\mu_y)$ tra due set successivi.

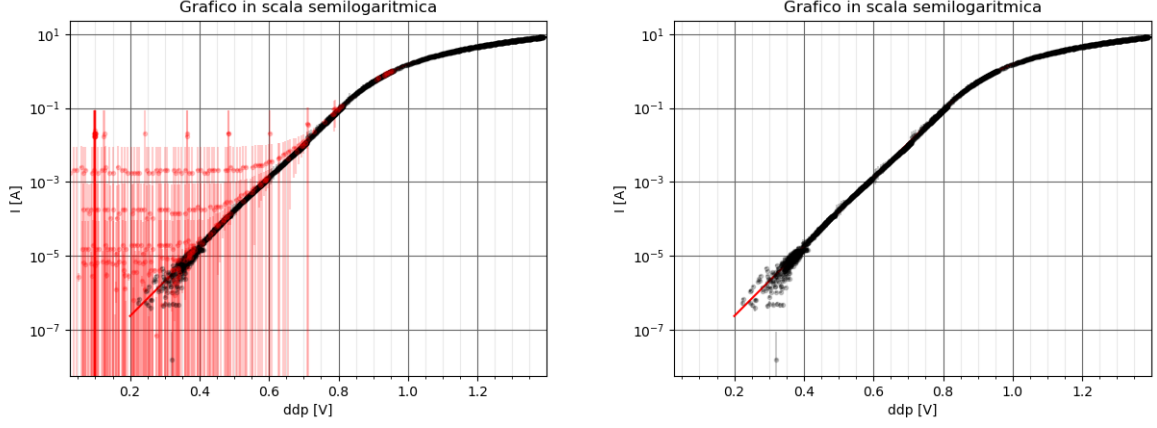


Figura 8: Grafici in scala semilogaritmica dei prima (sinistra) e dopo (destra) del filtraggio dati. I dati scartati sono stati evidenziati in rosso. Per praticità è stato rappresentato un centesimo dei dati raccolti

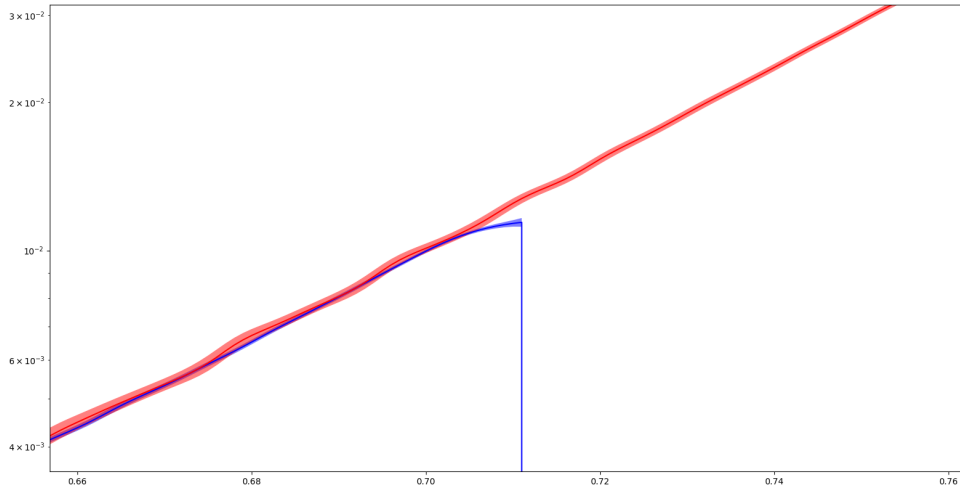


Figura 9: Confronto dei grafici delle $\text{Var}(\mu_y)$ su due set di dati consecutivi.

7 APPENDICE B: METODO DI FIT

La differenza di potenziale ΔV in funzione della corrente I che scorre all'interno del diodo può essere espressa attraverso la legge (2). Potremo, dunque, essere tentati ad adottare tale formula ai fini di un fit numerico. Tuttavia tale operazione provocherebbe il fallimento del fit a causa dei valori negativi o nulli che debitamente si riscontreranno all'interno del logaritmo. E' stato dunque necessario adottare un algoritmo alternativo, basato sul metodo di Newton[2]. Esso ci consentirà di ricostruire numericamente la funzione inversa della legge (2). Illustriamo in breve il metodo di Newton. Sia data una funzione $f(x)$ continua e derivabile entro un intervallo di definizione connesso (con $f'(x)$ limitata e diversa da 0 per

ciascuna x appartenente al dominio) ed una v tale che $f(v) = 0$. Sviluppando al prim'ordine f in un intorno di v , otterremo:

$$f(x) = f(v) + f'(v) + \frac{1}{2}f''(X) \cdot (x - v)^2 = 0 \quad (8)$$

ove X è un numero reale compreso fra v ed x . Nel caso in cui il $(x - v)^2$ risultasse prossimo a zero:

$$x \simeq v - \frac{f(v)}{f'(v)} \quad (9)$$

L'unica limitazione nell'adottare tale scrittura è che necessitiamo di v molto vicino a x incognito. Tuttavia, nel caso in cui la funzione f risultasse sufficientemente maneggevole, potremo partire da un valore generico del dominio e riscontrare con buona approssimazione la radice in un tempo finito relativamente breve. Per effettuare ciò, è necessaria la serie ricorsiva:

$$\begin{cases} x[0] = a \\ x[N+1] = x[N] - \frac{f(x[N])}{f'(x[N])} \end{cases} \quad (10)$$

ove a è un generico valore appartenente al dominio di definizione. In pratica, per ogni iterazione tale serie valuta $f(x[i])$ e cerca la retta tangente in tale punto alla funzione:

$$y = f(x[i]) + f'(x[i]) \cdot (x - x[i]) \quad (11)$$

Dopodiché cerca il punto x per il quale $y = 0$:

$$x = x[i+1] = x[i] - \frac{f(x[i])}{f'(x[i])} \quad (12)$$

E viene conseguentemente valutato il valore $f(x[i+1])$ ed il procedimento viene ripetuto per un dato numero di iterazioni.

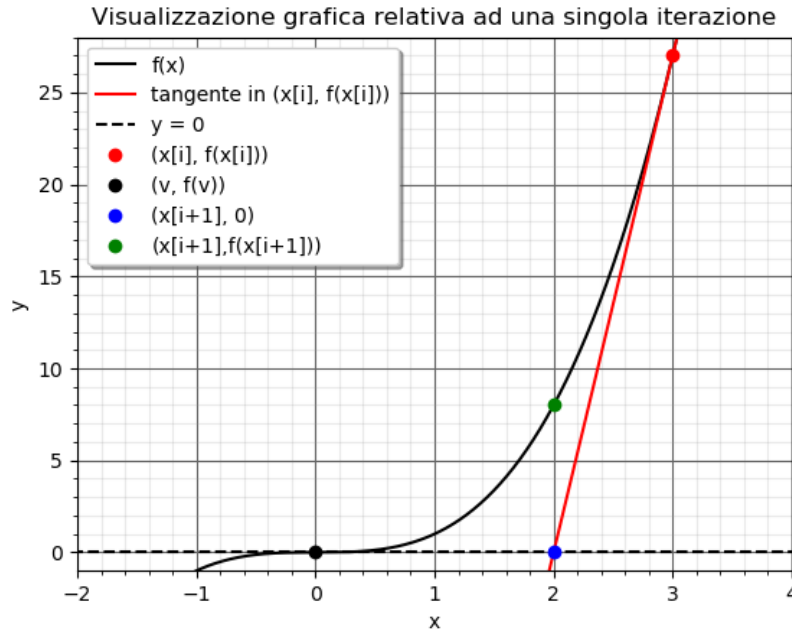


Figura 10: Visualizzazione grafica di cosa implica un'iterazione della serie ricorsiva ($f(x) = x^3$ in questo esempio)

Se la funzione è monotona e la serie converge ad un valore, tale sarà v , essendo l'unico punto fisso della serie:

$$a = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \rightarrow f(a) = 0 \wedge v = a \quad (13)$$

essendo v l'unico punto in cui si annulla la funzione per definizione. Ritornando al diodo, esso può essere interpretato quale un diodo ideale ed una resistenza in serie, collegati ad un generatore di differenza di potenziale. Quindi, per la legge delle maglie:

$$\Delta V_{\text{ingresso}} = \Delta V_{\text{diodo}} + \Delta V_{\text{resistenza}} = \Delta V_{\text{diodo}} + R \cdot I \quad (14)$$

ove I è la corrente che scorre all'interno del diodo in quel determinato istante. Notoriamente, tale scrittura si può porre nella seguente forma ai fini di definire la retta di carico del diodo:

$$\Delta V_{\text{diodo}} = \Delta V_{\text{ingresso}} - R \cdot I \quad (15)$$

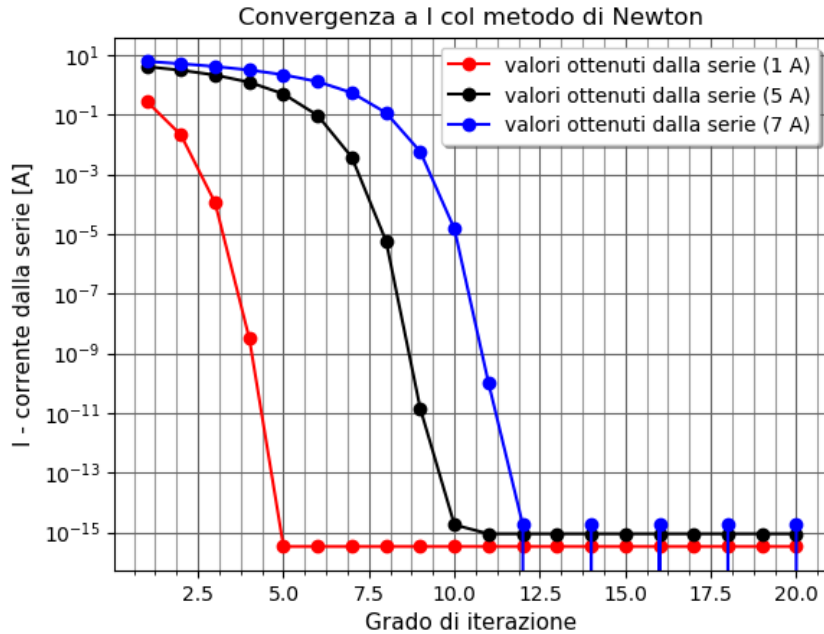
Il punto di intersezione di tale retta con l'equazione di Shockley per il diodo rappresenta il punto di lavoro (v, i) del diodo:

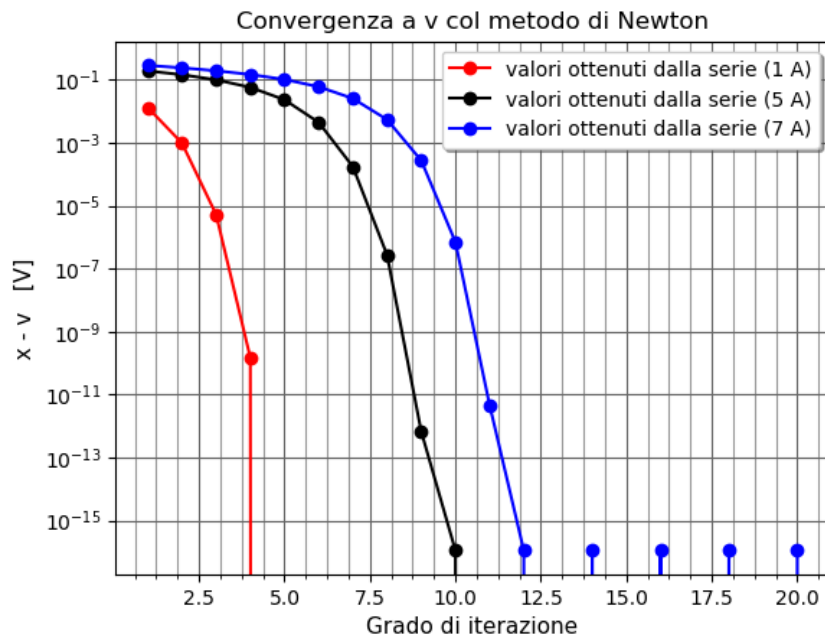
$$i = I_0 \cdot \left(e^{\frac{\Delta V_{\text{ingresso}} - R \cdot i}{\eta V_T}} - 1 \right) = I_0 \cdot \left(e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right) = \frac{\Delta V_{\text{ingresso}} - v}{R} \quad (16)$$

Tale i dovrà necessariamente corrispondere alla corrente di lavoro in virtù dell'equazione di Shockley. Dunque definendo la funzione $g(x)$ come segue:

$$g(x) = I_0 \cdot \left(e^{\frac{x}{\eta V_T}} - 1 \right) - \frac{\Delta V_{\text{ingresso}} - x}{R} \quad (17)$$

è possibile adottare il metodo di Newton al fine di riscontrare la radice v ed individuare così la corrente di lavoro. Dunque si potrà effettuare un fit della corrente in funzione della tensione ai capi del diodo reale attraverso una legge che per un determinato valore della tensione ($\Delta V_{\text{ingresso}}$) ed un dato numero di iterazioni (ne sono sufficienti poche nel nostro caso ai fini di ottenere un'approssimazione adeguata), riesce ad individuare la radice v nelle modalità previamente descritte. Attraverso la stessa, sarà quindi possibile individuare la corrente di lavoro del diodo per la suddetta $\Delta V_{\text{ingresso}}$. È immediato comprendere che fare un fit con questa legge risulta essere equivalente a fare un fit con la legge (2), con minori complicazioni computazionali. Verifichiamo graficamente che per dei generici valori della corrente i due metodi danno risultati sostanzialmente equivalenti (adottiamo i parametri stimati dal fit). I grafici relativi alla convergenza di v e di I anche a seguito di sole 20 iterazioni:





Tali grafici evidenziano che, come era da aspettarsi, la legge adottata per il fit risulta essere l'inversa numerica della legge (2). La serie, inoltre, risulta convergere molto rapidamente ai valori attesi e quindi sono effettivamente sufficienti solo 20 iterazioni per una buona precisione. All'interno della funzione di fit, è stato infine introdotto un offset quale parametro libero per ovviare errori di zero dovuti agli assorbimenti di ADC in Teensy 3.2.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] P. Stoffregen. Teensy 3.2 development board. Sherwood, Oregon, USA. [Online]. Available: <https://www.pjrc.com/teensy/teensy31.html>
- [2] C. Manzoli, "Il metodo di newton e le sue varianti per sistemi di equazioni non lineari," Master's thesis, Università di Bologna, corso di Laurea in Matematica, 2015.