I.PI I. Physikalisches Institut | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Prof. Dr. Stefan Schael
Dr. Henning Gast

Experimentalphysik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Übung 03

Aufgabe 1 *Time-of-Flight System* (4+2=6 Punkte)

Betrachten Sie ein Time-of-Flight System, das aus zwei Szintillatorpaneelen im Abstand L besteht, deren Lichtsignal jeweils von Photomultipliern detektiert wird. Jeder der beiden Szintillatoren kann den Zeitpunkt eines Teilchendurchgangs mit einer Zeitauflösung von σ_t bestimmen. Der Impuls der durchfliegenden Teilchen wird unabhängig mit einem Spektrometer gemessen und sei bekannt.

a. Leiten Sie eine Formel für den Maximalimpuls her, bis zu dem eine Trennung zwischen zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 mit einer statistischen Signifikanz von vier Standardabweichungen möglich ist. Dabei sollen Sie Terme von $\mathcal{O}(m^4/p^4)$ vernachlässigen.

b. Bis zu welchem Impuls (in GeV) ist für $L = 1\,\mathrm{m}$ und $\sigma_t = 100\,\mathrm{ps}$ eine Trennung zwischen geladenen Pionen und Kaonen mit einer Signifikanz von 4σ möglich?

Aufgabe 2 *Cherenkov-Detektor* (4+2+3=9 Punkte)

Bei einem Ring-Cherenkov-Zähler werden die in einem Medium mit Brechungsindex n abgestrahlten Cherenkov-Photonen durch eine Optik auf einen Ring abgebildet, aus dessen Radius der Cherenkov-Winkel θ_c bestimmt werden kann.

a. Bestimmen Sie die Massenauflösung σ_m des Detektors bei gegebenem Impulsbetrag $|\vec{p}|$ als Funktion der Winkelauflösung $\sigma(\theta_c)$ des Detektors.

b. Betrachten Sie zwei Teilchen mit gegebenem Impuls aber unterschiedlichen Massen m_1 und m_2. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Standardabweichungen, mit denen der Detektor zwischen den beiden Teilchen unterscheiden kann, gegeben ist durch

$$N_\sigma = \frac{\Delta m}{\sigma_m} = \frac{|m_1^2 - m_2^2|\beta^2}{2|\vec{p}|^2\sigma(\theta_c)\sqrt{n^2\beta^2 - 1}}.$$

c. Geben Sie das Impulsintervall an, in dem ein Detektor, der C_5F_{12} ($n = 1{,}0017$) als Radiator benutzt und eine Winkelauflösung von $\sigma(\theta_c) = 2\,\mathrm{mrad}$ erzielt, zwischen geladenen Pionen und Kaonen mit einer Signifikanz von 3σ trennen kann. Die auftretende Gleichung dürfen Sie nummerisch oder unter Verwendung einer geeigneten Näherung lösen.

Aufgabe 3 *Zerfall in vier Photonen* (2+2+1=5 Punkte)

In einem Detektor zerfällt ein unbekanntes Teilchen X. Die Zerfallsprodukte werden als vier Photonen identifiziert, deren (Dreier)-Impulse wie folgt gemessen werden (alle Angaben in GeV):

$$\vec{p}_0 = (0.266, 0.0879, -0.0486)$$
$$\vec{p}_1 = (0.78, -0.185, -0.0696)$$
$$\vec{p}_2 = (0.213, 0.105, 0.0791)$$
$$\vec{p}_3 = (0.153, -0.00798, 0.0391)$$

a. Um welches Teilchen handelt es sich bei X?

b. Welcher Zerfallsmodus liegt vor? Geben Sie an, in welche Teilchen das Teilchen X zerfallen ist. Untersuchen Sie, in welche der vier Photonen die Teilchen des Zwischenzustands jeweils weiter zerfallen sind.

c. Welche kinetische Energie hatte das Teilchen X vor dem Zerfall?

Aufgabe 4 *Teilchenzerfälle* (5 Punkte)

Geben Sie für jeden der folgenden Zerfallskanäle an, ob er erlaubt ist oder durch welchen Erhaltungssatz er verboten ist. Sie dürfen annehmen, dass sich die Strangeness bei einem Zerfall über die schwache Wechselwirkung um ± 1 ändern kann.

a. $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

b. $\mu^- \to e^- \gamma\gamma$

c. $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_e \nu_\mu$

d. $K^+ \to \pi^+ \pi^0 \pi^-$

e. $K^+ \to \pi^+ \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^-$

f. $\Lambda \to \pi^+ \pi^-$

g. $\Lambda \to p \pi^- \gamma$

h. $\Lambda \to p \mu^- \bar{\nu}_\mu$

i. $\Omega^- \to \Sigma^- \pi^+ \pi^-$

j. $\Sigma^+ \to p$

Loesung_TimeOfFlight

September 10, 2024

1 Musterlösung zur 3. Übung, Aufgabe 1

1.1 a)

Wir leiten zunächst einen Ausdruck für die Differenz Δt der Flugzeiten, die die beiden Teilchen der Masse m_1 bzw. m_2 zum Durchqueren der Strecke L zwischen den beiden Szintillatorpanelen benötigen. Ihre Geschwindigkeiten seien v_1 bzw. v_2:

$$\begin{aligned}\Delta t = t_1 - t_2 &= \frac{L}{v_1} - \frac{L}{v_2} = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right) \\ &= \frac{L}{c}\left(\frac{E_1}{p} - \frac{E_2}{p}\right) = \frac{L}{c}\left(\frac{\sqrt{p^2+m_1^2}}{p} - \frac{\sqrt{p^2+m_2^2}}{p}\right) \\ &= \frac{L}{c}\left(\sqrt{1+\frac{m_1^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_2^2}{p^2}}\right).\end{aligned}$$

(*1 Punkt*)

Wegen

$$\sqrt{1+\frac{m^2}{p^2}} = 1 + \frac{m^2}{2p^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{p^4}\right)$$

folgt

$$\Delta t = \frac{L}{2p^2c}(m_1^2 - m_2^2).$$

(*1 Punkt*)

Die Messgenauigkeit $\sigma(\Delta t)$ für diese Flugzeitdifferenz ist nach dem Gesetz über die Fehlerfortpflanzung gegeben durch

$$\sigma(\Delta t) = \sqrt{2}\sigma_t.$$

(*1 Punkt*)

Damit ergibt sich für die Anzahl N_σ der Standardabweichungen, mit der zwischen den beiden Teilchen unterschieden werden kann, zu

$$N_\sigma = \frac{\Delta t}{\sigma(\Delta t)} = \frac{L}{2\sqrt{2}\sigma_t p^2 c}(m_1^2 - m_2^2).$$

Für den hier gesuchten Fall von $N_\sigma = 4$ ergibt sich der Maximalimpuls zu

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{L}{8\sqrt{2}\sigma_t c}(m_1^2 - m_2^2)}.$$

(*1 Punkt*)

1.2 b)

Wir berechnen $p_{\max}$ für den Fall $L = 1\,\mathrm{m}$, $\sigma_t = 100\,\mathrm{ps}$, $m_1 = m_{K^\pm}$ und $m_2 = m_{\pi^\pm}$:

```
import numpy as np
from astropy import constants
from astropy import units as u
L = 1.0*u.m
c = constants.c
sigma_t = 100.e-12*u.s
m1 = 0.494*u.GeV
m2 = 0.1396*u.GeV
```

```
pmax = np.sqrt(L/8/np.sqrt(2)/sigma_t/c*(m1**2-m2**2))
pmax.round(2)
```

0.81 GeV

(*2 Punkte*)

Loesung_Cherenkov

September 10, 2024

1 Musterlösung zur 3. Übung, Aufgabe 2

```python
import sympy as sp
```

1.1 a)

Zunächst bestimmen wir die Massenauflösung σ_m eines Cherenkov-Detektors bei gegebenem Impuls $p \equiv |\vec{p}|$. Dazu verwenden wir

$$\beta^2 = \frac{p^2}{E^2} = \frac{p^2}{p^2 + m^2} \quad \Rightarrow \quad m = p\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}.$$

Mit Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sigma_m &= \left|\frac{\partial m}{\partial \beta}\right| \sigma_\beta = p \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\beta^2 - 1}}} \cdot \frac{2}{\beta^3}\,\sigma_\beta \\
&= \frac{p}{m/p} \cdot \frac{\sigma_\beta}{\beta^3} = \frac{p^2}{m} \cdot \frac{\sigma_\beta}{\beta^3}.
\end{aligned}$$

(*1 Punkt*)

Für einen Radiator mit Brechungsindex n ist der Cherenkov-Winkel θ_c gegeben durch

$$\beta = \frac{1}{n\cos\theta_c}.$$

(*1 Punkt*)

Damit folgt für die Geschwindigkeitsauflösung

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta &= \left|\frac{1}{n}\,\frac{-1}{\cos^2\theta_c}\,\sin\theta_c\right| \sigma(\theta_c) \\
&= \frac{1}{n}\tan\theta_c\,\frac{1}{\cos\theta_c}\,\sigma(\theta_c) \\
&= \beta\tan\theta_c\,\sigma(\theta_c).
\end{aligned}$$

(*1 Punkt*)

Dabei ist

$$\tan\theta_c = \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta_c}{\cos^2\theta_c}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{n^2\beta^2}}{\frac{1}{n^2\beta^2}}} = \sqrt{n^2\beta^2 - 1}.$$

Insgesamt folgt

$$\sigma_m = \frac{p^2}{m}\frac{1}{\beta^2}\sqrt{n^2\beta^2 - 1}\,\sigma(\theta_c).$$

(*1 Punkt*)

1.2 b)

Wenn wir die mittlere Teilchenmasse $m = (m_1 + m_2)/2$ einsetzen, ergibt sich für die Signifikanz der Trennung:

$$N_\sigma = \frac{\Delta m}{\sigma_m} = \frac{|m_1 - m_2|(m_1 + m_2)}{2p^2}\frac{\beta^2}{\sigma(\theta_c)\sqrt{n^2\beta^2 - 1}} = \frac{|m_1^2 - m_2^2|\beta^2}{2p^2\sigma(\theta_c)\sqrt{n^2\beta^2 - 1}}.$$

(*2 Punkte*)

1.3 c)

Die untere Grenze des gesuchten Intervalls ergibt sich aus der Cherenkov-Schwelle β_t des leichteren Teilchens. Denn unterhalb dieser emittiert keines der Teilchen Cherenkov-Strahlung und eine Unterscheidung ist nicht möglich. Also:

$$\beta_t = \frac{1}{n} = \frac{p_{\min}}{\sqrt{p_{\min}^2 + m_\pi^2}}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
p_{\min}^2\beta_t^2 + m_\pi^2\beta_t^2 &= p_{\min}^2 \\
p_{\min}^2(1 - \beta_t^2) &= m_\pi^2\beta_t^2 \\
p_{\min} = \frac{m_\pi}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} &= \frac{m_\pi}{\sqrt{n^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

```
# Definition der benötigen Symbole
m, m1, m2, beta, p, sigma, n = sp.symbols('m m1 m2 beta p sigma n')

# Nummerische Werte für Winkelauflösung, Massen der beteiligten Teilchen (in␣
↪GeV) und Brechungsindex
values = [[sigma, 0.002], [m1, 0.1396], [m2, 0.494], [n, 1.0017]]
```

```
pmin = m1 / n / sp.sqrt(1 - 1/n**2)
sp.pprint(pmin.subs(values).round(2))
```

```
2.39
```

(Alle Angaben sind in GeV).

(*2 Punkte*)

Die obere Grenze des gesuchten Intervalls ergibt sich direkt aus der Lösung zu Aufgabenteil b). Dazu wird zunächst β durch Impuls und (mittlere) Masse ausgedrückt: $\beta = p/E$, bzw. $\beta^2 = p^2/(p^2+m^2)$.

Dann wird die Gleichung $N_\sigma = 3$ nummerisch gelöst. Näherungsweise ($\beta^2 \approx 1$) ist

$$p_{\max} \approx \sqrt{\frac{m_K^2 - m_\pi^2}{2 \cdot 3 \cdot \sigma(\theta_c)\sqrt{n^2-1}}}.$$

Die nummerische Lösung der vollen Gleichung folgt:

```
# Anzahl an Standardabweichungen
nsigma = 3

# Mittlere Masse
m = (m1+m2) / 2
```

```
# Formel aus b)
Nsigma = sp.Abs(m1**2 - m2**2) * beta**2 / 2 / p**2 / sigma / sp.
 ↪sqrt(n**2*beta**2 - 1)
Nsigma
```

$$\frac{\beta^2 \left|m_1^2 - m_2^2\right|}{2p^2\sigma\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}$$

```
full = [[beta**2, (p**2/(p**2+(m**2)))]]
full.extend(values)
N = Nsigma.subs(full)
pmax = sp.solve(N - nsigma)
sp.pprint(pmax[1].round(2))
```

```
18.33
```

(*1 Punkt*)

Loesung_VierPhotonen

September 10, 2024

1 Musterlösung zur 3. Übung, Aufgabe 3

```
import itertools
import numpy as np
from astropy import units as u
```

```
# Definition der gemessenen Impulsvektoren der 4 Photonen
p0 = np.array([0.266, 0.0879, -0.0486])
p1 = np.array([0.78, -0.185, -0.0696])
p2 = np.array([0.213, 0.105, 0.0791])
p3 = np.array([0.153, -0.00798, 0.0391])
p = [p0, p1, p2, p3]
```

```
# Funktion zur Berechnung der invarianten Masse einer Liste von Photonimpulsen.
def m_inv(*vektoren):
    Eges = 0.  # Gesamtenergie
    pges = np.zeros(3)  # Gesamtimpuls
    for v in vektoren:
        E = np.linalg.norm(v)  # wegen m(Photon) = 0
        Eges += E
        pges += v
    return np.sqrt(Eges**2 -np.linalg.norm(pges)**2)
```

1.1 a)

Zunächst berechnen wir die invariante Masse der vier Photonen (alle Angaben in GeV):

```
m = m_inv(*p)
m.round(4)
```

```
0.4985
```

Es handelt sich also um ein K^0.

(*2 Punkte*)

1.2 b)

Um den genauen Zerfallsmodus herauszufinden, berechnen wir paarweise die invarianten Massen:

```
for x in itertools.combinations(range(len(p)), 2):
    print(x, m_inv(p[x[0]], p[x[1]]).round(4))
```

```
(0, 1) 0.2615
(0, 2) 0.1351
(0, 3) 0.1171
(1, 2) 0.347
(1, 3) 0.1352
(2, 3) 0.0973
```

Die Paare (0, 2) und (1, 3) liefern jeweils die Masse eines π^0. Damit handelt es sich um ein K_S^0, das wie folgt zerfallen ist:

$K_S^0 \to \pi^0\pi^0$.

(*1 Punkt*)

Das erste neutrale Pion ist gemäß $\pi^0 \to \gamma_0\gamma_2$ zerfallen.

Das zweite neutrale Pion ist gemäß $\pi^0 \to \gamma_1\gamma_3$ zerfallen.

(*1 Punkt*)

1.3 c)

Die kinetische Energie des Teilchens vor dem Zerfall ergibt sich durch

$E_{\text{kin}} = \sum_i E_i - m_{K^0} =$

```
Ekin = np.sum([np.linalg.norm(v) for v in p]) - 0.4976
Ekin.round(3)
```

```
1.0
```

(*1 Punkt*)

I.PI I. Physikalisches Institut | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Prof. Dr. Stefan Schael
Dr. Henning Gast

Physik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Musterlösung zu Übung 3, Aufgabe 4

a. $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$: ok

b. $\mu^- \to e^- \gamma\gamma$: Leptonzahlerhaltung verletzt

c. $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_e \nu_\mu$: Leptonzahlerhaltung verletzt

d. $K^+ \to \pi^+ \pi^0 \pi^-$: Ladungserhaltung verletzt

e. $K^+ \to \pi^+ \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^-$: Energieerhaltung verletzt

f. $\Lambda \to \pi^+ \pi^-$: Baryonzahlerhaltung verletzt

g. $\Lambda \to p \pi^- \gamma$: ok

h. $\Lambda \to p \mu^- \bar{\nu}_\mu$: ok

i. $\Omega^- \to \Sigma^- \pi^+ \pi^-$: nicht erlaubt wegen $\Delta S = \pm 2$

j. $\Sigma^+ \to p$: Impulserhaltung verletzt

(je 0,5 Punkte, am Ende auf ganzzahlige Punktzahl aufrunden)