I.PI I. Physikalisches Institut | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Prof. Dr. Stefan Schael
Dr. Henning Gast

Experimentalphysik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Übung 04

Aufgabe 1 *SU(3) Quarkmodell der Hadronen* (25 Punkte)

In den frühen 1960er Jahren war die Zahl der bekannten „Elementarteilchen“ schon auf über 100 angewachsen. Die Frage nach einer zugrunde liegenden Ordnung beantworteten Gell-Mann und Zweig im Jahre 1964 mit dem Quarkmodell der Hadronen, bei dem diejenigen Mesonen und Baryonen, die nach modernem Kenntnisstand aus u-, d- und s-Quarks zusammengesetzt sind, in Multipletts der Symmetriegruppe $SU(3)$ angeordnet werden. Damit eröffnete sich gleichzeitig ein Hinweis auf die zugrunde liegende Quarkstruktur, die zu der Zeit noch nicht bekannt war. Daraus können auch grobe Aussagen über die Massen der beteiligten Quarks und die Bindungsenergien in den Hadronen gewonnen werden.

Wir betrachten zunächst am Beispiel der Spin-$SU(2)$ das Prinzip: Bekanntlich können zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Zustände ($S = \frac{1}{2}$) zu einem Triplett ($S = 1$) und einem Singulett ($S = 0$) koppeln. Auf grafischem Wege erhält man diese Lösung wie in Abb. 1 skizziert. Die

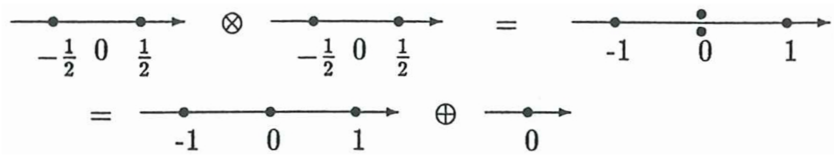


Abbildung 1: Kopplung zweier Spin $\frac{1}{2}$-Dubletts.

beiden Faktoren auf der linken Seite der Gleichung stellen jeweils ein Spin-$\frac{1}{2}$-Multiplett mit den beiden Zuständen dar, die den Einstellmöglichkeiten $S_z = \pm\frac{1}{2}$ entsprechen. Die Zustände des einen Faktors werden als Nullpunkte genommen, an die dann jeweils die Zustände des anderen Faktors „angeheftet“ werden. Bei der Zerlegung in Summanden nutzt man dann aus, dass man die Multipletts, die zu einem Spin-1 bzw. Spin-0 Zustand gehören, kennt. Man schreibt symbolisch:

$$[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1].$$

Eine experimentelle Schlüsselbeobachtung besteht nun darin, dass die starke Wechselwirkung nicht zwischen Protonen und Neutronen unterscheidet, ähnlich wie in einem elektrischen Feld die gleiche Kraft auf ein Elektron wirkt, egal ob es im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ ist. Man ordnet Protonen und Neutronen daher in Analogie zum Spin einem so genannten Isospindublett zu:

$$|p\rangle = |I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}\rangle \quad |n\rangle = |I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

Für ein Teilchen mit Baryonzahl B und Strangeness S definieren wir die Hyperladung

$$Y = B + S.$$

Dann gilt für die Ladung Q die Gell-Mann-Nishijima-Relation

$$Q = e\left(I_3 + \frac{Y}{2}\right).$$

Wir wollen nun die Struktur der $SU(3)$ näher betrachten und uns dann das Quarkmodell anschaulich plausibel machen, ohne allzu tief in die gruppentheoretische Behandlung einsteigen zu müssen.

Eine unitäre Matrix $U \in SU(3)$ mit $\det U = 1$ lässt sich allgemein schreiben als

$$U = \exp\left(i\sum_{a=1}^{8} \alpha_a \lambda_a\right),$$

wobei die λ_a ein Satz von acht linear unabhängigen, hermiteschen, spurfreien Matrizen sind, die man als *Generatoren* bezeichnet.

Wir benutzen die folgende Wahl für die Generatoren der $SU(3)$:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir definieren $F_i \equiv \frac{\lambda_i}{2}$ und damit drei Sätze von Schiebeoperatoren

$$I_\pm = F_1 \pm \mathrm{i}F_2 \quad V_\pm = F_4 \pm \mathrm{i}F_5 \quad U_\pm = F_6 \pm \mathrm{i}F_7,$$

sowie die beiden Diagonaloperatoren

$$\hat{I}_3 = F_3 \quad \text{und} \quad \hat{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8.$$

a. Begründen Sie kurz, dass es sich bei $\{\lambda_i\}_{i=1..8}$ tatsächlich um einen Satz von Generatoren der $SU(3)$ handelt. *(1 Punkt)*

b. Begründen Sie, dass gemeinsame Eigenzustände $|I_3, Y\rangle$ existieren, so dass

$$\hat{I}_3|I_3, Y\rangle = I_3|I_3, Y\rangle \qquad \text{und} \qquad \hat{Y}|I_3, Y\rangle = Y|I_3, Y\rangle.$$

(2 Punkte)

c. Untersuchen Sie die Wirkung der Schiebeoperatoren. Zeigen Sie, dass

$$V_\pm|I_3, Y\rangle \propto |I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1\rangle, \quad U_\pm|I_3, Y\rangle \propto |I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1\rangle, \quad I_\pm|I_3, Y\rangle \propto |I_3 \pm 1, Y\rangle.$$

(*4 Punkte*)

Wir identifizieren nun die Eigenzustände von I_3 und Y wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |u\rangle \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |d\rangle \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |s\rangle$$

und nennen sie up-Quark, down-Quark und strange-Quark und ordnen ihnen die Baryonzahl $B = \frac{1}{3}$ zu.

d. Berechnen Sie I_3, Y und S für die drei Quarks. (*1 Punkt*)

e. Zeichnen Sie die drei Quarkzustände in der Y-I_3-Ebene (d.h. I_3 auf der x-Achse und Y auf der y-Achse). Sie haben damit das Triplett zur fundamentalen Darstellung [3] zur Hand. Zeichnen Sie analog das Triplett zur Darstellung $[\bar{3}]$, das den Antiquarks entspricht. Die Quantenzahlen drehen dabei einfach ihr Vorzeichen um. (*3 Punkte*)

f. Stellen Sie grafisch die Wirkung der Schiebeoperatoren in dem Multiplett [3] dar. (*2 Punkte*)

g. Berechnen Sie nun die Zerlegung der Meson- und Baryon-Zustände, d.h. zerlegen Sie grafisch (wie oben am Beispiel der $SU(2)$ erklärt) die Produkte

$$[3] \otimes [\bar{3}] \quad \text{und} \quad [3] \otimes [3] \otimes [3]$$

in Summanden. Nehmen Sie Abbildung 2 zu Hilfe, die die höherdimensionalen Multipletts der $SU(3)$ zeigt, die sich im Rahmen der Gruppentheorie berechnen lassen (und die durch die Wirkung der Schiebeoperatoren intuitiv verständlich sind). (*6 Punkte*)

h. Ordnen Sie mit Hilfe des Review of Particle Physics die leichtesten Mesonen (π, K, η, η') und Baryonen (p, n, Σ, Ξ, Λ, sowie Δ, Σ^*, Ξ^* und Ω, jeweils mit verschiedenen Ladungszahlen) den richtigen Multipletts zu und zeichnen Sie diese in der Y-I_3-Ebene. (*3 Punkte*)

i. Wodurch wird die $SU(3)$-Symmetrie gebrochen? (*1 Punkt*)

j. Aus dem Quarkmodell folgt zum Beispiel die Massenbeziehung

$$\frac{m_N + m_\Xi}{2} = \frac{3m_\Lambda + m_\Sigma}{4}.$$

Dabei ist m_N die Nukleonenmasse. Leiten Sie diese Massenbeziehung her, indem Sie für die Massen von up- und down-Quark $m_u = m_d$ annehmen und annehmen, dass die Bindungsenergie W_B zwischen den Quarks bei allen diesen Zuständen identisch ist. Überprüfen Sie, wie gut die Massenbeziehung experimentell erfüllt ist. (*2 Punkte*)

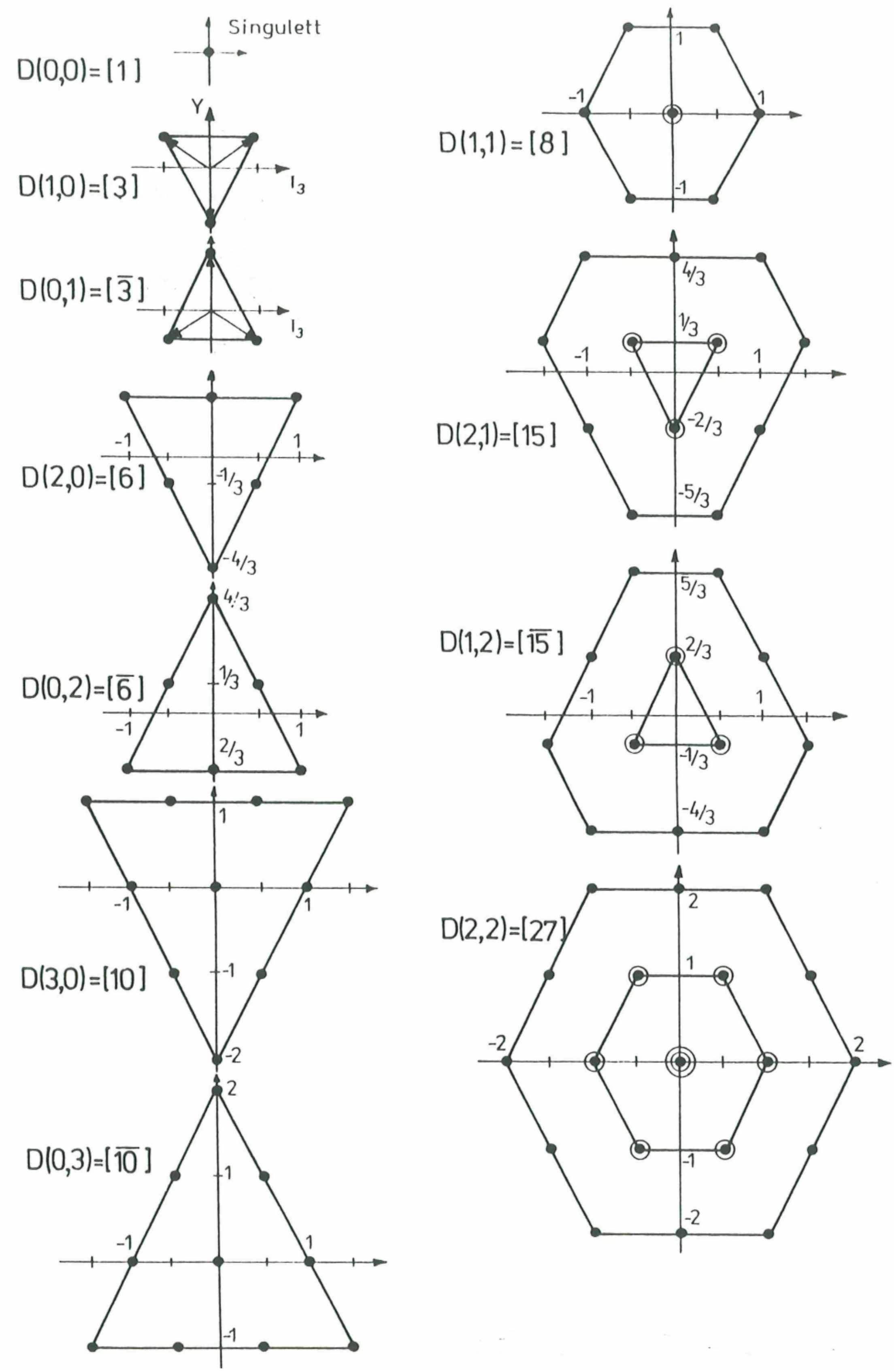


Abbildung 2: Die niedrigsten SU(3)-Multipletts.

Loesung_Quarkmodell

November 11, 2024

0.1 Musterlösung zur 4. Übung

0.2 a)

Die λ_i sind offensichtlich linear unabhängig, spurfrei und hermitesch.

(*1 Punkt*)

0.3 b)

Da $\hat{I}_3$ und $\hat{Y}$ diagonal sind, gilt sofort $[\hat{I}_3, \hat{Y}] = 0$, deshalb sind $\hat{I}_3$ und $\hat{Y}$ simultan diagonalisierbar.

(*2 Punkte*)

0.4 c)

Wir definieren zunächst die benötigten Matrizen.

```
import sympy as sp
from sympy import I
from sympy.matrices import Matrix
F1 = sp.Rational(1,2) * Matrix(3,3,[0,1,0,1,0,0,0,0,0])
F2 = sp.Rational(1,2) * Matrix(3,3,[0,-I,0,I,0,0,0,0,0])
F3 = sp.Rational(1,2) * Matrix(3,3,[1,0,0,0,-1,0,0,0,0])
F4 = sp.Rational(1,2) * Matrix(3,3,[0,0,1,0,0,0,1,0,0])
F5 = sp.Rational(1,2) * Matrix(3,3,[0,0,-I,0,0,0,I,0,0])
F6 = sp.Rational(1,2) * Matrix(3,3,[0,0,0,0,0,1,0,1,0])
F7 = sp.Rational(1,2) * Matrix(3,3,[0,0,0,0,0,-I,0,I,0])
F8 = sp.Rational(1,2) / sp.sqrt(3) * Matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,-2])
```

```
F8
```

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Nun definieren wir die daraus abgeleiteten Operatoren.

```
I3 = F3
Y = 2 / sp.sqrt(3) * F8
Iplus  = F1 + I*F2
```

```
Iminus = F1 - I*F2
Vplus  = F4 + I*F5
Vminus = F4 - I*F5
Uplus  = F6 + I*F7
Uminus = F6 - I*F7
```

```
Iplus
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Iminus
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Vplus
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Vminus
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Uplus
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Uminus
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt können wir die Kommutatoren der beteiligten Operatoren berechnen.

```
commutator = lambda A, B: A*B - B*A
```

```
commutator(I3, Vplus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
commutator(I3, Vminus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $[\hat{I}_3, V_+] = \frac{1}{2}V_+$ und $[\hat{I}_3, V_-] = -\frac{1}{2}V_-$. Oder zusammengefasst: $[\hat{I}_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm$.

```
commutator(Y, Vplus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
commutator(Y, Vminus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $[\hat{Y}, V_+] = V_+$ und $[\hat{Y}, V_-] = -V_-$. Oder zusammengefasst: $[\hat{Y}, V_\pm] = \pm V_\pm$.

```
commutator(I3, Uplus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
commutator(I3, Uminus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $[\hat{I}_3, U_+] = -\frac{1}{2}U_+$ und $[\hat{I}_3, U_-] = \frac{1}{2}U_-$. Oder zusammengefasst: $[\hat{I}_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm$.

```
commutator(Y, Uplus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
commutator(Y, Uminus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $[\hat{Y}, U_+] = U_+$ und $[\hat{Y}, U_-] = -U_-$. Oder zusammengefasst: $[\hat{Y}, U_\pm] = \pm U_\pm$.

```
commutator(I3, Iplus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
commutator(I3, Iminus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $[\hat{I}_3, I_+] = I_+$ und $[\hat{I}_3, I_-] = -I_-$. Oder zusammengefasst: $[\hat{I}_3, I_\pm] = \pm I_\pm$.

```
commutator(Y, Iplus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
commutator(Y, Iminus)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Also ist $[\hat{Y}, I_\pm] = 0$.

(*1 Punkt*)

Damit folgt

$$\hat{I}_3 V_\pm |I_3, Y\rangle = \left(\pm\frac{1}{2} V_\pm + V_\pm \hat{I}_3\right) |I_3, Y\rangle = \left(I_3 \pm \frac{1}{2}\right) V_\pm |I_3, Y\rangle,$$

d.h. $V_\pm |I_3, Y\rangle$ ist Eigenzustand von $\hat{I}_3$ zum Eigenwert $I_3 \pm \frac{1}{2}$.

Ebenso ist

$$\hat{Y} V_\pm |I_3, Y\rangle = \left(\pm V_\pm + V_\pm \hat{Y}\right) |I_3, Y\rangle = (Y \pm 1) V_\pm |I_3, Y\rangle,$$

d.h. $V_\pm |I_3, Y\rangle$ ist Eigenzustand von $\hat{Y}$ zum Eigenwert $Y \pm 1$.

Insgesamt finden wir also

$$V_\pm |I_3,\, Y\rangle \propto |I_3 \pm \frac{1}{2},\, Y \pm 1\rangle.$$

Anschaulich gesagt erhöhen bzw. erniedrigen die Schiebeoperatoren V_+ bzw. V_- den Isospin um 1/2 und die Hyperladung um 1.

Aus den oben berechneten Kommutatorrelationen folgen komplett analog die anderen Beziehungen:

$$U_\pm |I_3,\, Y\rangle \propto |I_3 \mp \frac{1}{2},\, Y \pm 1\rangle, I_\pm |I_3,\, Y\rangle \propto |I_3 \pm 1,\, Y\rangle.$$

(*3 Punkte*)

0.5 d)

```
u = Matrix([[1],[0],[0]])
d = Matrix([[0],[1],[0]])
s = Matrix([[0],[0],[1]])
```

```
u
```

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Anwendung von $\hat{I}_3$ liefert:

```
I3*u
```

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

```
I3*d
```

$$\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$$

```
I3*s
```

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Also betragen die Eigenwerte des Isospins für die einzelnen Quarks:

u: $1/2$

d: $-1/2$

s: 0

Anwendung von $\hat{Y}$ liefert:

```
Y*u
```

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\0\end{bmatrix}$$

```
Y*d
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
Y*s
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Also betragen die Eigenwerte der Hyperladung für die einzelnen Quarks:

u: 1/3

d: 1/3

s: $-2/3$

Daraus folgt für Strangeness $S = Y - B$ mit $B = 1/3$ für alle Quarks wie erwartet:

u: 0

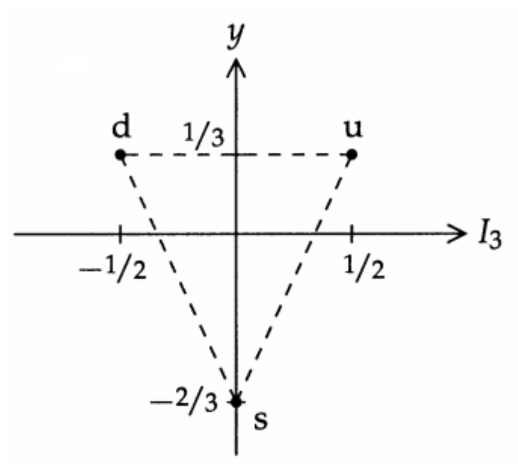
d: 0

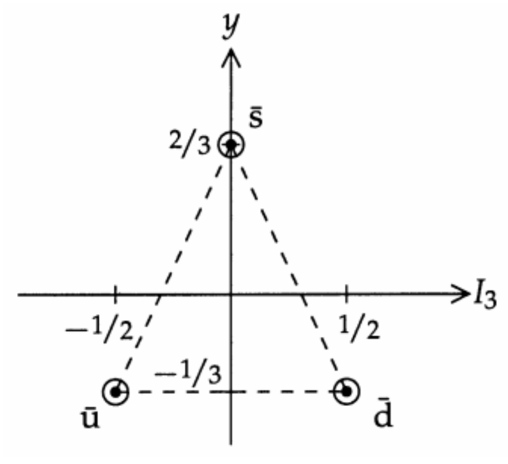
s: -1

(*1 Punkt*)

0.6 e)

Die folgende Abbildung zeigt links die Triplett-Darstellung [3] und rechts die adjungierte Darstellung [$\bar{3}$].

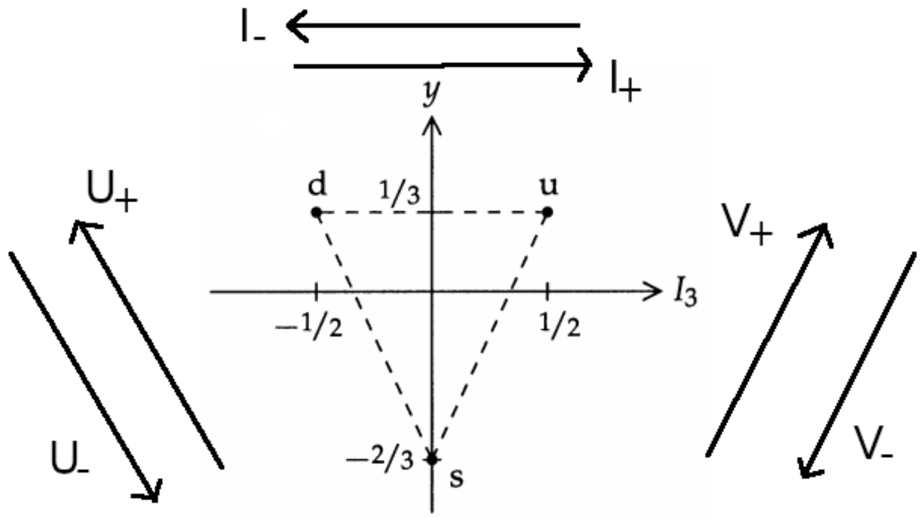




(*3 Punkte*)

0.7 f)

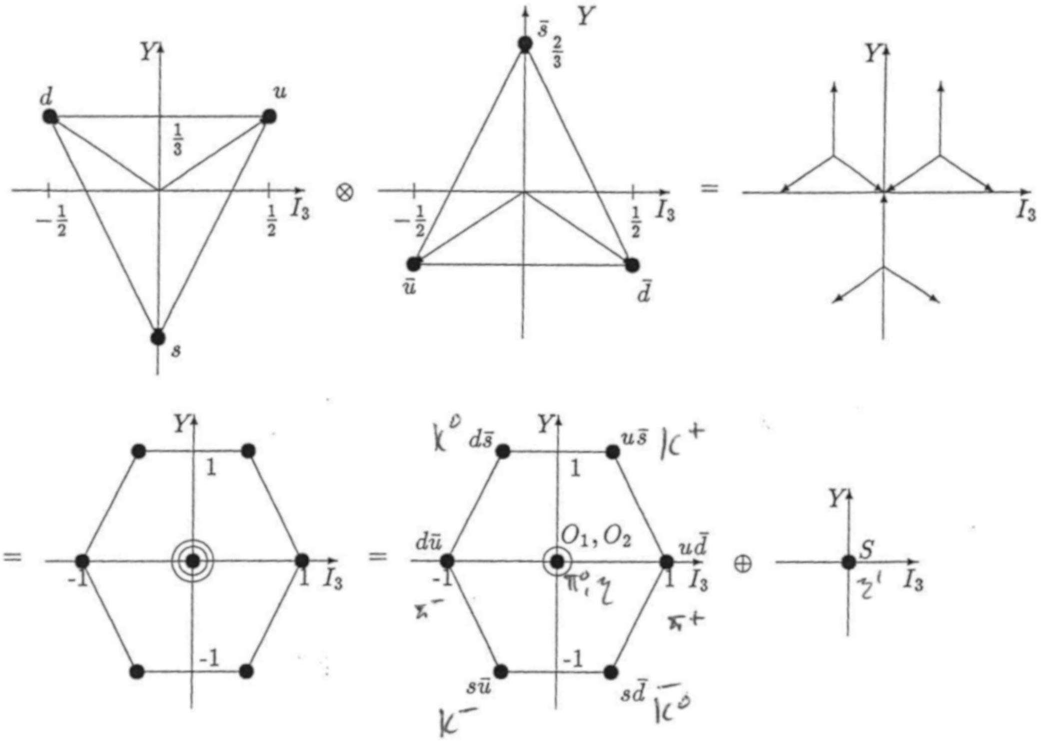
Nach dem in Aufgabenteil c) Gefundenen ist die Wirkung der Schiebeoperatoren im Multiplett [3] klar. Die Wirkung der Schiebeoperatoren macht auch anschaulich klar, warum die höherdimensionalen Darstellungen der $SU(3)$ so aussehen wie in der Abbildung 2 auf dem Übungsblatt gezeigt.



(*2 Punkte*)

0.8 g)

Nach dem im Aufgabentext Gesagten geschieht die Ausreduktion eines Produktes zweier Multipletts, indem man die Zustände des einen Faktors als Nullpunkte nimmt, an die dann jeweils die Zustände des anderen Faktors gleichsam angeheftet werden. Die Zerlegung in Summanden geschieht dann über die aus Abbildung 2 des Aufgabenblatts bekannten Darstellungen. Das Produkt $[3] \otimes [\bar{3}]$ wird danach wie folgt ausreduziert. Dieser Vorgang liefert auch direkt den Quarkinhalt der kombinierten Zustände, wobei O_1 und O_2 in der Abbildung für Linearkombinationen aus $u\bar{u}$ und $d\bar{d}$ Zuständen stehen.



Ausreduktion des Produktes $[3] \otimes [\bar{3}]$

Für die Ausreduktion der Zustände des Produkts $[3] \otimes [3] \otimes [3]$ betrachten wir die folgende Abbildung.

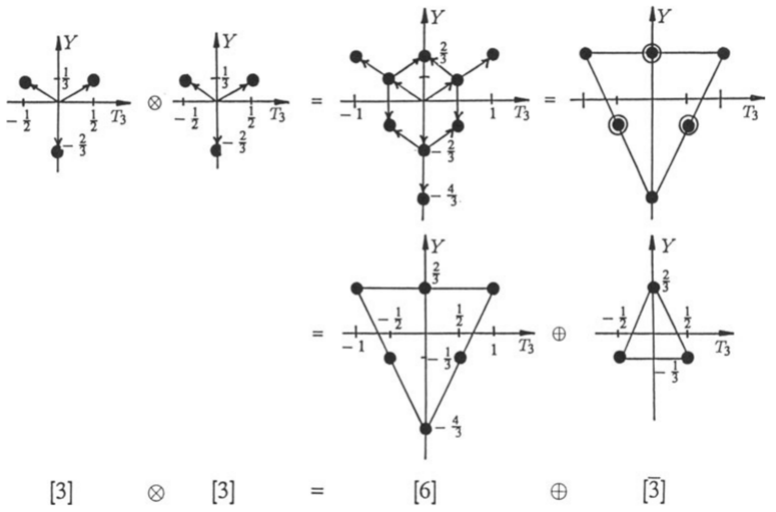


Fig. 8.8. Reduction of the direct product [3] ⊗ [3] = [6] ⊕ [$\bar{3}$]

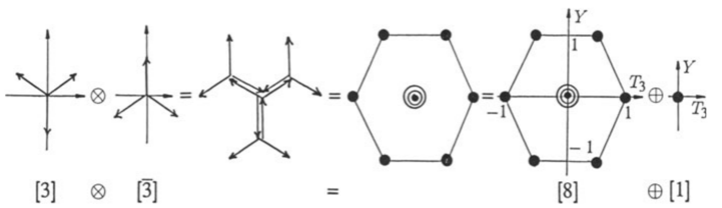


Fig. 8.9. Reduction of the product [3] ⊗ [$\bar{3}$] = [8] ⊕ [1]

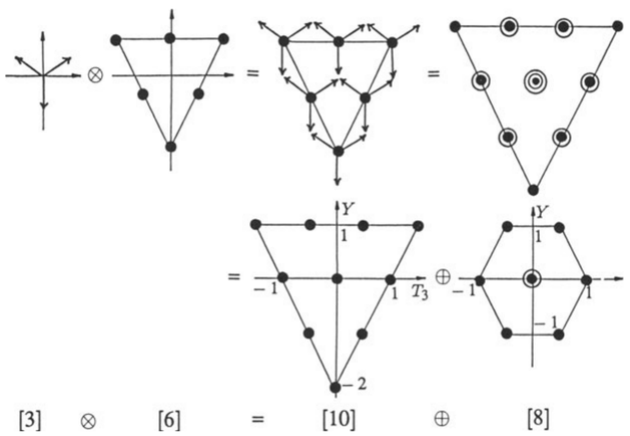


Fig. 8.10. Reduction of the product [3] ⊗ [6] = [10] ⊕ [8]

Zusammenfassend ergibt sich:

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \oplus [1]$$

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = [3] \otimes ([6] \oplus [\bar{3}]) = ([3] \otimes [6]) \oplus ([3] \otimes [\bar{3}]) = [10] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [1]$$

Für die Mesonen (Quark und Antiquark) erwarten wir also ein Oktett und ein Sigulett. Für die Baryonen (drei Quarks) erwarten wir ein Dekuplett, zwei Oktetts und ein Singulett.

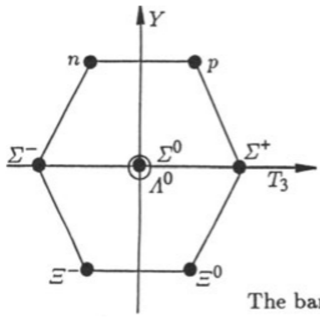
(*3x2=6 Punkte*)

0.9 h)

Die Zuordnung der leichtesten Mesonen π, K, η zu dem Oktett der Mesonen und η' zu dem Singulett ist schon oben bei Aufgabenteil **g)** gezeigt.

(*1 Punkt*)

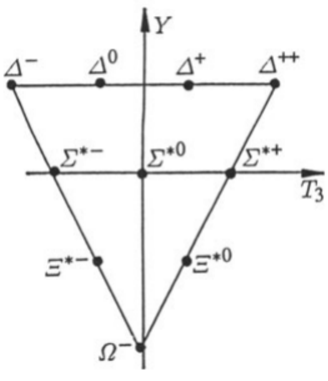
Das Oktett der leichtesten Baryonen erhält man wie folgt:



The baryon octet

(*1 Punkt*)

Das Dekuplett mit den leichtesten Zuständen sieht wie folgt aus:



The decuplet of baryon resonances

(*1 Punkt*)

Das Ω^- Teilchen war zum Zeitpunkt der Entwicklung des $SU(3)$ Quarkmodells noch unbekannt. Seine Eigenschaften konnten durch das Quarkmodell präzise vorhergesagt werden und seine Entdeckung wenige Jahre später stellte einen großen Triumph für die Theorie dar.

0.10 i)

Durch den großen Massenunterschied zwischen dem strange-Quark auf der einen und den up- und down-Quarks auf der anderen Seite wird die $SU(3)$ Symmetrie gebrochen:

$$m_s \gg m_u, m_d.$$

(*1 Punkt*)

0.11 j)

Für die Strangeness, d.h. die Anzahl der strange-Quarks finden wir für die einzelnen Baryonen, die in der Massenrelation auftreten:

particle	S
N	0
Σ	1
Λ	1
Ξ	2

Mit der Annahme $m_u = m_d \equiv m$ und identischer Bindungsenergie W_B ergibt sich für die einzelnen Massen:

$m_N = 3m - W_B$,

$m_\Sigma = 2m + m_s - W_B$,

$m_\Lambda = 2m + m_s - W_B$ und

$m_\Xi = m + 2m_s - W_B$.

Damit finden wir

$$\frac{m_N + m_\Xi}{2} = \frac{4m + 2m_s - 2W_B}{2} = 2m + m_s - W_B$$

und

$$\frac{3m_\Lambda + m_\Sigma}{4} = \frac{8m + 4m_s - 4W_B}{4} = 2m + m_s - W_B,$$

woraus sofort die gesuchte Relation folgt.

Experimentell ist (alle Massen in MeV):

$$1127 = \frac{939 + 1315}{2} \approx \frac{3 \cdot 1116 + 1193}{4} = 1135.$$

(*2 Punkte*)