Name: Luca Cordes, 444900
Name: Moritz Effen, 423755

Experimentalphysik III (WS 2023/2024)

Übung 1

Tutorium: 08 Abgabe: 17.10.2023

Aufgabe 1: Tripelspiegel
Da die Physik invariant unter Drehung und Translation des Raumes ist, kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass die drei Flächennormalen die drei Einheitsvektoren sind.

$$\vec{b} = \vec{a} - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a})$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= \vec{a} - 2\vec{e}_1(\vec{e}_1 \cdot \vec{a}) \\ &= \vec{a} - 2\vec{e}_1 a_1 \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_2 &= \vec{b}_1 - 2\vec{e}_2(\vec{e}_2 \cdot \vec{b}_1) \\ &= \vec{b}_1 - 2\vec{e}_2 a_2 \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_3 &= \vec{b}_2 - 2\vec{e}_3(\vec{e}_3 \cdot \vec{b}_2) \\ &= \vec{b}_2 - 2\vec{e}_3 a_3 \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \\ &= -\vec{a}\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Lichtkreis beim Tauchen

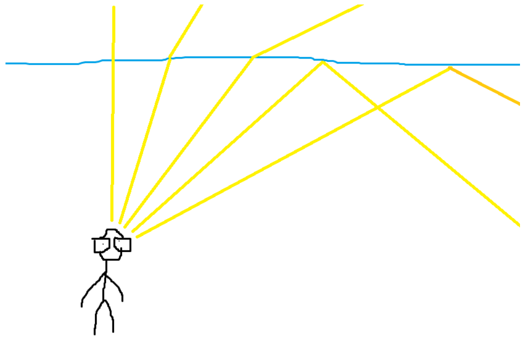

Abbildung 1: Skizze eines Tauchers unter Wasser

$$\begin{aligned}\frac{n_A}{n_B} &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ \beta &= \arcsin\left(\frac{n_A}{n_B}\sin\alpha\right) \\ &\approx \arcsin\left(\frac{1}{1.\bar{3}}\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &\approx 48.6^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \frac{r}{h} \\ r &= h\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ &\approx 10\,\mathrm{m}\cdot\tan\left(90^\circ-48.6^\circ\right) \\ &\approx 24.56\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Lüneburg-Linse

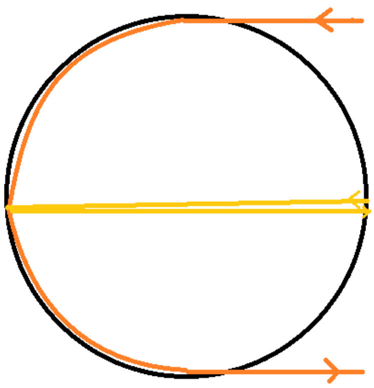

Abbildung 2: Mittlerer und äußerer Lichtweg in der Lüneburg-Linse

$$
\begin{aligned}
l_m &= \int n(\vec{s}(t)) \left| \frac{\mathrm{d}\vec{s}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \ , \ \vec{s}(t) = t \\
&= 2 \cdot \int_{-R}^{R} \sqrt{2 - \left(\frac{t}{R}\right)^2} \,\mathrm{d}t \\
\text{Subst.:} & \begin{cases} \sqrt{2}u = \frac{t}{R} \\ t = \sqrt{2}Ru \\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}R\,\mathrm{d}u \end{cases} \\
&= 2 \cdot \sqrt{2}R \int_{-1}^{1} \sqrt{2 - 2u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 4R \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - u^2}\,\mathrm{d}u \\
\text{Subst.:} & \begin{cases} u = \sin v \\ v = \arcsin u \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}v \cos v \end{cases} \\
&= 4R \int_{\arcsin -\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}} \cos v \sqrt{1 - \sin^2 v}\,\mathrm{d}v \\
&= 4R \int_{\arcsin -\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}} \cos^2 v\,\mathrm{d}v \\
&= 4R \int_{\arcsin -\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\cos(2v) + 1}{2}\,\mathrm{d}v \\
&= 2R \left(\frac{1}{2}\sin(2v) + v\right) \Bigg|_{\arcsin -\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&\approx 5.14R
\end{aligned}
$$

Außerster Lichtstrahl:

$$
\begin{aligned}
l_a &= 2R + \frac{U}{2} \\
&= 2R + \frac{2\pi R}{2} \\
&= (\pi + 2)\,R \\
&\approx 5.14R
\end{aligned}
$$

Insgesamt sind somit die beiden Lichtwege gleichlang.

Aufgabe 4: Regenbogen

$$
\begin{aligned}
\frac{n_A}{n_B} &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\
\beta &= \arcsin\left(\frac{n_A}{n_B}\sin\alpha\right)
\end{aligned}
$$

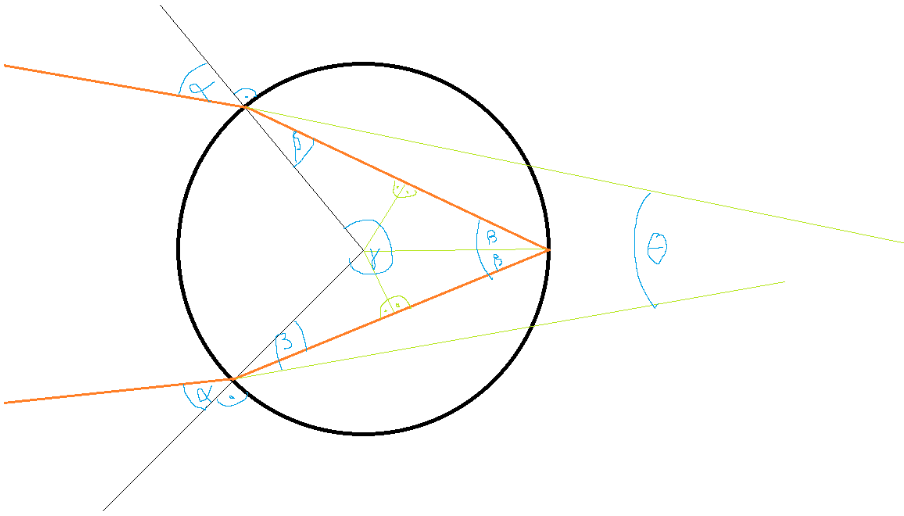

Abbildung 3: Skizze der Geometrie im Regentropfen

$$\begin{cases} \text{I.} \;\; 2\pi = 4\beta + \gamma \\ \text{II.} \; 2\pi = 2\alpha + \gamma + \theta \end{cases} \quad \Longrightarrow \; \theta = 4\beta - 2\alpha$$

$$\begin{aligned}
\theta &= 4 \arcsin\left(\frac{n_A}{n_B} \sin\alpha\right) - 2\alpha \\
0 &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} \;, \quad \text{für } \alpha_0 \\
&= \frac{4}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_A}{n_B}\sin\alpha_0\right)^2}} \frac{n_A}{n_B} \cos\alpha_0 - 2 \\
1 - \underbrace{\frac{n_A^2}{n_B^2}}_{=:c} \sin^2\alpha_0 &= \frac{4n_A^2}{n_B^2} \cos^2\alpha_0 \\
1 &= c\sin^2\alpha_0 + 4c\cos^2\alpha_0 \\
1 &= \frac{c}{2}\left(1 - \cos 2\alpha_0\right) + 2c\left(1 + \cos 2\alpha_0\right) \\
\frac{1}{c} - \frac{5}{2} &= \frac{3}{2}\cos 2\alpha_0 \\
\alpha_0 &= \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{3c} - \frac{5}{3}\right) \;, c = \frac{n_A^2}{n_B^2} \approx \frac{1^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{9}{16} \\
&\approx \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{32}{27} - \frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{13}{27}\right) \\
&\approx 1.04 = 59.4^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= 4\beta(\alpha_0) - 2\alpha_0 \\
&\approx 0.734 = 42.0^\circ
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Lichtstrahl durch Atmosphäre

Python code

```
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
import matplotlib.pyplot as plt

# Baro Formel
p0 = 101325 # Pa
rho0 = 1.292 # kg m^-3
g = 9.81 # m s^-2
H = (p0)/(rho0*g) * 1e-3 # km

# Brechungsindex Meereshöhe
n0 = 1.00029

# Höhe
h0 = 0.0 # km

# Stützstellen
L = 100.0 # km
N = 100 + 1

p = lambda h: p0 * np.exp(-h/H)
n = lambda h: (n0 - 1) / p0 * p(h) + 1

def optischeWeglaenge(H, start=0, end=0, dx=1):
    H = [start, *H, end]
    dL = np.sqrt(np.diff(H)**2 + dx**2)
    N = [n(h) for h in H[:-1]]
    l_optisch = np.sum(N * dL)
    return l_optisch

print("%.6f km" % optischeWeglaenge([0]*(N-2)))

res = minimize(optischeWeglaenge, [0]*(N-2))

print(res.message)
print("%.6f km" % res.fun)
h_stuetz = res.x

plt.plot(np.linspace(0,100,101), [0, *res.x, 0])
plt.xlabel("l in [km]")
plt.ylabel("h in [km]")
plt.grid()
plt.show()
```