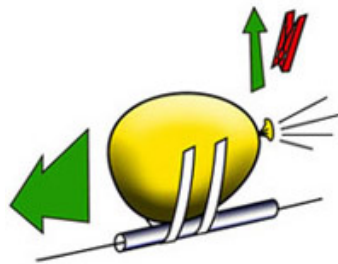


## Experimentalphysik I, RWTH, WS 2022/2023, T.Hebbeker

October 30, 2022

**SKRIPT-TEIL 4**Nachdenken/Nachlesen:

Perpetuum-Mobile

Kleines Experiment: Luftballon (Rakete)2.4. Erhaltungssätze

Erhaltungssätze spielen eine fundamentale Rolle in der Physik. Die im Folgenden vorgestellten gelten für Systeme ohne Wechselwirkung mit der Umgebung (d.h. es wirken keine **äußeren** Kräfte) und ohne Materieaustausch mit der Umgebung, man spricht dann von einem **abgeschlossenen** System.

Wir betrachten im Folgenden nur **Inertialsysteme**, denn in beschleunigten Systemen gelten die Erhaltungssätze im allgemeinen nicht. Beispiel: einzelner, zunächst ruhender Massenpunkt: Aus Sicht eines beschleunigten Bezugssystems wird er immer schneller, also ist die Energie nicht erhalten.

In den Theorievorlesungen wird gezeigt, dass es eine enge Verbindung zwischen **Symmetrien** und **Erhaltungssätzen** gibt; die Impulserhaltung etwa ist eine Folge der Symmetrie der physikalischen Gesetze bei Veränderung des Ortes: Experimente laufen überall gleich ab! (Feynman: 'a thing is symmetrical if one can subject it to a certain operation and it appears exactly the same after the operation').

2.4.1. Massenerhaltung

**Die Gesamtmasse eines abgeschlossenen Systems ist zeitlich konstant:**

$$M = \sum m_i = \text{const} \quad (1)$$

Dies folgt nicht aus den Newtonschen Axiomen, sondern es handelt sich um ein zusätzliches, empirisch=experimentell gefundenes Gesetz.

### 2.4.2. Impulserhaltung

Aus den Newtonschen Axiomen folgt der wichtige Impulserhaltungssatz:  
**In einem abgeschlossenen System von Massenpunkten ist die Summe der Impulse der einzelnen Objekte zeitlich konstant:**

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \text{const} \quad (2)$$

Beweis für ein System aus 2 Massenpunkten: Kräfte zwischen zwei Körpern 1 und 2:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

nach 3. Axiom (actio = reactio). Mit 2. Axiom, da keine weiteren (äußeren) Kräfte auftreten:

$$\vec{0} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 \equiv \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

Also, durch Integration:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$$

Impulserhaltung gilt (in einem abgeschlossenen Inertialsystem) *immer*, unabhängig von der Art der Kräfte, und auch dann, wenn die kinetische Energie nicht erhalten ist!

**FILM:** Selbstmord im Schaukelstuhl (Film 'Harald and Maude')!  
 Impulssatz ist im Film ganz offensichtlich verletzt!

Aus dem Impulserhaltungssatz folgt in der nichtrelativistischen Mechanik der Schwerpunktsatz:

Einschub: Der Schwerpunkt  $\vec{R}$  eines Systems von Massenpunkten der Massen  $m_i$  und Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  ist definiert durch

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad \text{mit} \quad M = \sum m_i \quad (3)$$

Im allgemeinen sind die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  zeitabhängig. Man bildet also den Mittelwert der mit den Massen  $m_i$  gewichteten Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  und normalisiert auf die Gesamtmasse  $M$ . siehe Abb. 1.

Wählt man das Bezugssystem so, dass  $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$  (und, der Einfachheit halber, das Koordinatensystem so, dass  $\vec{R} = \vec{0}$ ), so spricht man vom Schwerpunktsystem.

*BEISPIEL:* Abb. 2. Hier nehmen wir an, dass der Schwerpunkt den Nullpunkt des Koordinatensystems bildet, also  $\vec{R} = \vec{0}$ . Die Abstände  $d_i$  vom Schwerpunkt erfüllen also die Gleichung  $d_1 m_1 = d_2 m_2$ .

Unterstützt man einen Körper (hier: Hantel mit dünnem Verbindungsstab) im Schwerpunkt, bewegt er sich nicht im Gravitationsfeld der Erde (s. Übung).

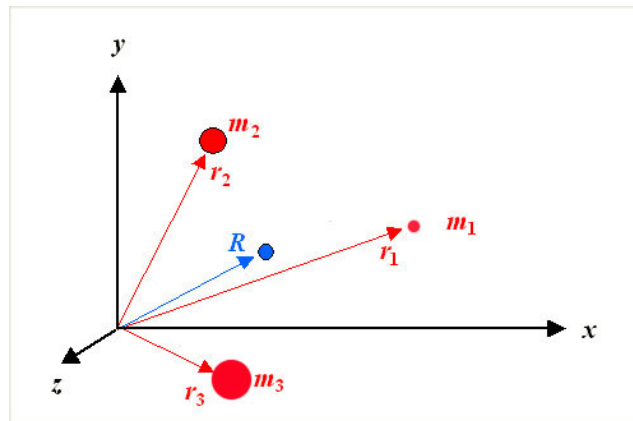


Abbildung 1: Schwerpunkt von Massenpunkten [Uni Kiel]

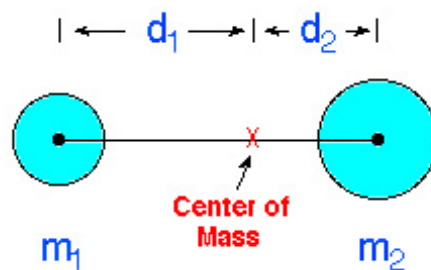


Abbildung 2: Schwerpunkt zweier Massen(punkte) [csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/centermass1.gif]  
<http://astronomy.nmsu.edu/aklypin/WebSite/images/centermass1.gif>

Der **Schwerpunktsatz** lautet: In einem abgeschlossenen System von Massenpunkten bewegt sich der Schwerpunkt mit konstanter Geschwindigkeit (Annahme:  $m_i = \text{const}$ ):

$$\vec{V} \equiv \dot{\vec{R}} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} = \vec{\text{const}} \quad \text{wobei} \quad \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i \quad (4)$$

Beweis:

$$\vec{V} = \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} = \vec{\text{const}} \quad (5)$$

da der Gesamtimpuls erhalten ist.

Im Schwerpunktsystem gilt (in einem abgeschlossenen System) sogar  $\vec{V} = \vec{0}$ .

Man beachte: Diese Definition des Schwerpunktsystems setzt implizit den Schwerpunktsatz voraus, denn sonst, bei zeitlich variabler Geschwindigkeit  $\vec{V}(t)$ , würde sie keinen Sinn machen!

#### **VERSUCH 2.2.4:** Werfer auf "Skateboard"

Der Impuls des Wurfgeschosses wird durch den des Skateboards kompensiert.

#### **VERSUCH Me-17:** Zwei Skateboards

Zwei Personen sind mit Seil verbunden, einer oder beide zieht ... Bewegung so, dass Schwerpunkt sich nicht verschiebt.

#### **VERSUCH Me-42:** Ballonantrieb

Rückstoß durch ausströmende Luft: die Impulse von Ballon+Auto einerseits und Gas andererseits sind entgegengesetzt gleich.

#### **VERSUCH 2.2.6 (siehe oben):** Luftkissenbahn mit 2 Massen, dazwischen gespannte Feder.

Durchbrennen des Fadens ... bringt Schwerpunkt nicht aus der Ruhe.

#### **VERSUCH Me-19:** Pendelwagen

Die Impulse von Pendel und Wagen kompensieren sich, der Schwerpunkt bewegt sich nicht.

### 2.4.3. Arbeit und Energie

Im Fall der Gravitationskraft oder der elektrostatischen Coulombkraft ist die Kraft eine Funktion des *Ortes*:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \quad (6)$$

Dieses **Kraftfeld** füllt den gesamten Raum aus. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass das Kraftfeld nicht zeitabhängig ist.

Die zur *langsamen* Verschiebung (d.h. praktisch ohne Beschleunigung) eines Massenpunktes im statischen (=zeitunabhängigen) Kraftfeld um eine kleine Strecke  $dx$

von außen aufzuwendende Arbeit  $dW$  ist (hier betrachten wir der Einfachheit halber zunächst eine Bewegung entlang der x-Achse)

$$dW = -F_x \cdot dx \quad (7)$$

Dabei ist  $F_x$  die Kraftkomponente *des Feldes* entlang der Wegstrecke  $x$ , also die Projektion auf die x-Richtung;  $F_x$  kann positiv oder negativ sein. Dann ist  $dW$  die *am System* (hier gleich Massenpunkt plus Kraftfeld) geleistete Arbeit, dem System wird Energie zugeführt (entnommen), falls  $dW > 0$  ( $dW < 0$ ), mehr dazu siehe unten.

Achtung Vorzeichen:  $F_x$  (bzw. im allgemeinen Fall  $\vec{F}$ ) bezeichnet dabei die Kraft des Feldes, also die sich der erzwungenen Bewegung entgegenstellende Kraft; diese ist der vom 'Arbeitenden' ausgeübten Kraft  $F_x^a$  bzw.  $\vec{F}^a$  betragsmäßig gleich aber entgegengesetzt (3. Newtonsches Axiom, actio = reactio):

$$dW = -F_x \cdot dx = +F_x^a \cdot dx \quad (8)$$

*BEISPIEL: Hand hebt Stein hoch: Die x-Achse weist vertikal nach oben.  $\vec{F} \equiv \vec{F}_G$  ist die nach unten gerichtete Kraft des Gravitationsfeldes, also  $F_x$  negativ. Die von der Hand auf den Stein ausgeübte Kraft  $\vec{F}^a \equiv \vec{F}_{Hand} = -\vec{F}_G$  ist nach oben gerichtet, somit  $F_x^a$  positiv. Daher ist die beim Anheben verrichtete Arbeit ( $dx > 0$ ) positiv.*

Integriert man zwischen  $x_A$  und  $x_B$ , erhält man die gesamte Arbeit bei Verschiebung zwischen den Punkten A und B:

$$W_{AB} = - \int_{x_A}^{x_B} F_x(x) \cdot dx \quad (9)$$

Verallgemeinerung auf drei Raum-Dimensionen:

$$dW = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (10)$$

Das in (10) und (12) auftretende Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{F}$  und  $d\vec{r}$  folgt der allgemeinen Definition des Skalarproduktes:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha \quad (11)$$

Geometrische Interpretation: Abb. 4. Insbesondere gilt  $\vec{A}^2 = |\vec{A}|^2$ . Die Kraft  $\vec{F}$  wird auf das Wegelement  $d\vec{r}$  projiziert, d.h. nur die Kraftkomponente in Richtung von  $d\vec{r}$  trägt zum Integral bei, siehe Abb. 3.

Die Gesamtarbeit bekommt man durch Integration entlang der Bahnkurve K von Punkt A nach B, Abb. 3:

$$W_{AB}^K = - \int_{K(A,B)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (12)$$

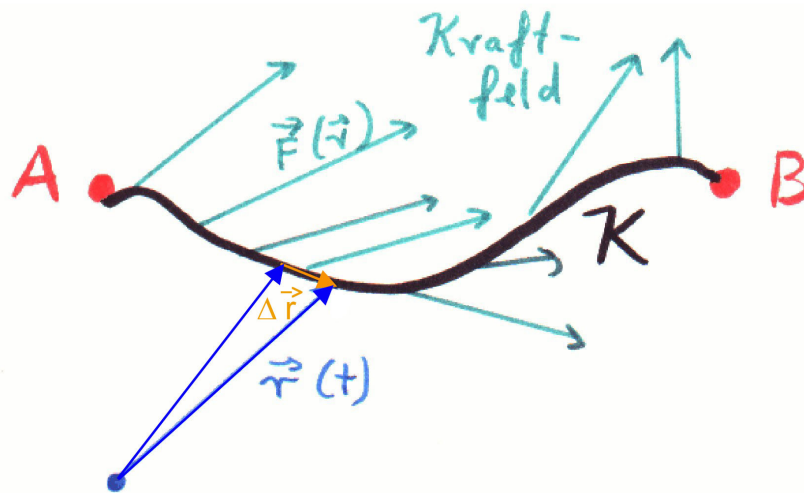
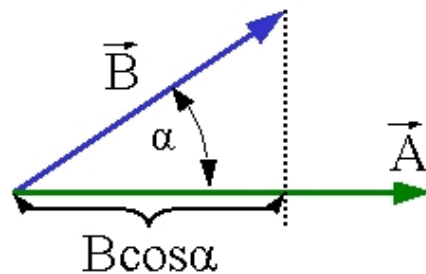


Abbildung 3: Kraft und Arbeit [T.H.]

(wobei  $W$  = 'work'). Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall hängt hier das Integral (= Kurvenintegral = Linienintegral = Wegintegral) im Allgemeinen von der Bahnkurve  $K$ , nicht nur von den Endpunkten  $A$  und  $B$  ab! Das Linienintegral kann genähert werden durch die Summe der kleinen Beiträge  $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  längs der Bahnkurve <sup>1</sup>.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$$

Abbildung 4: Skalarprodukt [www.staff.amu.edu.pl/~romangoc/graphics/M6/M6-fig1-work-constant-force.gif]

Verläuft die Bahnkurve senkrecht zur Kraft, ist die Arbeit null (Skalarprodukt verschwindet).

**BEISPIEL:**

Die (infinitesimal langsame) Verschiebung eines Pucks auf glattem Eis (Bewe-

<sup>1</sup>Man beachte: in der Literatur wird das Kurvenintegral (12) auch mit anderen Notationen eingeführt - man muss sich an die unterschiedlichen Schreibweisen gewöhnen.

gung senkrecht zum Gravitationsfeld der Erde) erfordert keine Arbeit - solange man die geringe Reibung vernachlässigen kann.

### VERSUCH: Puck auf Luftkissentisch

Falls das Integral unabhängig vom Weg  $K$  ist, spricht man von einem **konservativen Kraftfeld**  $\vec{F}(\vec{r})$ . Bei solchen wird insgesamt keine Arbeit verrichtet wenn man zum Ausgangspunkt zurückkommt (Endpunkt = Anfangspunkt). Im anderen Fall spricht man von **dissipativen** Kräften. Es geht im Allgemeinen Energie 'verloren' (in Form von Reibungswärme o.ä.) wenn man zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Wichtig: Statische elektrische und Gravitationsfelder sind konservativ; diese Eigenschaft kann man beweisen ( $\rightarrow$  Theorie) für jedes Kraftfeld von der Form

$$\vec{F} \sim \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad . \quad (13)$$

Reibung ist dagegen eine dissipative Kraft.

#### BEISPIEL:

Die gegen die Reibungskraft beim Verschieben eines Holzklotzes auf einer ebenen Unterlage aufzuwendende Arbeit ist größer im Fall des längeren Weges  $K_2$  als für die Kurve  $K_1$ , siehe Abb. 5.

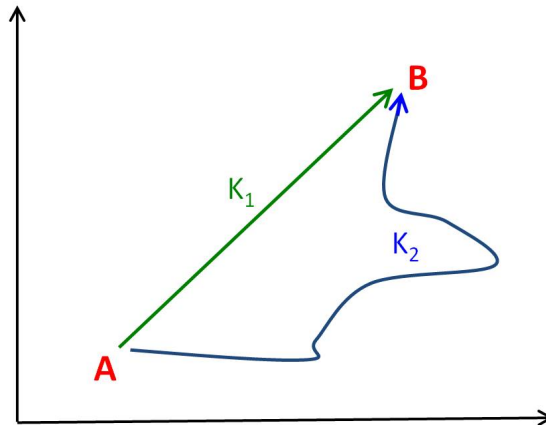


Abbildung 5: Arbeit und Reibung [T.H.]

Übrigens: auch bei einer 1-dimensionalen Bewegung kann man zwischen konservativen und dissipativen Kräften unterscheiden: Wenn man von einem Punkt ausgehend eine (langsame) Bewegung erzwingt, die wieder am Ausgangspunkt endet (im 1-dim. Fall ist das eine Hin- und Herbewegung), bedeutet das nur bei konservativen Kräften, dass die 'Netto'-Arbeit, also die Gesamtarbeit null ist.

Wird an einem Massenpunkt Arbeit verrichtet, so führt man ihm **Energie** zu <sup>2</sup>

$$\Delta E = W_{AB} \quad (14)$$

<sup>2</sup>Wir schreiben statt  $E$  hier  $\Delta E$ , da es ja nur um eine Energieänderung geht, der Massenpunkt kann zuvor schon eine von null verschiedene Energie haben.

Einheit der Arbeit und der Energie:

$$[W] = [E] = \text{N m} = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{J} = \text{Joule}$$

(zu Ehren von James Prescott Joule)

### 2.4.3.1. Kinetische Energie

Bisher haben wir den Fall betrachtet, dass der Körper langsam (also ohne beschleunigt zu werden) in einem Kraftfeld bewegt wird. Jetzt nehmen wir letzteres als nicht vorhanden an ( $\vec{F} = \vec{0}$ ). Wir lassen auf den Körper der konstanten Masse  $m$  entlang der geraden Verbindungslinie zweier Punkte A und B eine beschleunigende Kraft  $\vec{F}_B$  (entspricht  $\vec{F}^a$  in (8)!) wirken, die ihn in Bewegung versetzt. Jetzt gilt (Vorzeichen!)

$$dW = \vec{F}_B \cdot d\vec{r} \quad (15)$$

da ja  $\vec{F}_B$  die von außen angewandte Kraft ist, die nach dem 2. Newtonschen Axiom eine Impulsänderung des Körpers bewirkt:

$$\vec{F}_B = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (16)$$

Der Körper erhält bei dem Beschleunigungsvorgang die kinetische Energie

$$\begin{aligned} \Delta E_{kin} &= W_{AB}^K = \int_{K(A,B)} \vec{F}_B \cdot d\vec{r} = \int_{A,B} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_{A,B} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\ &= m \int_{A,B} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt = m \int_{A,B} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m (\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2) \end{aligned} \quad (17)$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass bei Beschleunigung einer Geraden, entlang derer sich das Teilchen bewegt,  $\vec{v} \parallel d\vec{v}$  gilt. Dabei bezeichnen  $\vec{v}_A$  und  $\vec{v}_B$  die Geschwindigkeitsvektoren am Anfang und am Ende des Beschleunigungsvorgangs. Die kinetische Energie hängt also nur von der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ab und nicht von der Form der Kurve K. Allgemein ist die kinetische Energie eines Körpers bei der Geschwindigkeit  $\vec{v}$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (18)$$

*BEISPIEL: Freier Fall.*

Hebt man einen Körper vom Erdboden ( $h_A = 0$ ) auf die Höhe  $h_B \equiv h = 1 \text{ m}$  senkrecht an, wird ihm die (potentielle, s.u.!) Energie

$$\Delta E = W_{AB} = W_{h_A h_B} = - \int_{h_A}^{h_B} (-mg) \cdot dz = - \int_0^h (-mg) \cdot dz = m g h \quad (19)$$



zugeführt. Dabei steht  $\vec{z}$  senkrecht auf der Erde und zeigt nach oben. Falls der Körper nun auf die Erde zurückfällt, nimmt die potentielle Energie wieder ab, und am Auftreffpunkt ist nur kinetische Energie vorhanden, aufgrund der Endgeschwindigkeit  $v$  beim Aufprall. Diese kann man leicht aufgrund der wirkenden Gravitationskraft berechnen, bei dieser Bewegung ist ja die (Erdbeschleunigung) konstant, siehe Kapitel 2.1.:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (20)$$

Daraus ergibt sich die kinetische Energie zu

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = m g h \quad (21)$$

Die potentielle Energie  $\Delta E$  wird also vollständig in kinetische Energie umgewandelt! Das ist ein Beispiel für den Energieerhaltungssatz der Mechanik, den wir im folgenden noch genauer kennenlernen werden.

#### 2.4.3.2. Potentielle Energie

Für *konservative* Kräfte kann man die potentielle Energie (-Differenz) definieren durch

$$E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A) = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (22)$$

Die potentielle Energie  $E_{pot}$  ist also eng verwandt mit der Arbeit  $W$ , vgl. (12), (14) und (22):

$$E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A) = \Delta E_{pot} = W_{AB} \quad (23)$$

Für nicht konservative Kraftfelder macht diese Definition keinen Sinn, denn die rechte Seite (22) hängt zusätzlich zu Anfangs- und Endpunkt ( $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ ) vom Weg  $K$  ab. Definiert man einen *festen* Referenzort  $\vec{r}_A$ , auf den man die potentielle Energie bezieht, so kann man jedem Raumpunkt  $\vec{r} \equiv \vec{r}_B$  die potentielle Energie

$$\vec{r} \rightarrow \tilde{E}_{pot}(\vec{r}) \equiv E_{pot}(\vec{r}) - E_{pot}(\vec{r}_A) \quad (24)$$

zuordnen. Daraus folgt sofort  $\tilde{E}_{pot}(\vec{r}_A) = 0$ . Man spricht hier von einem skalaren Feld, da es durch nur eine Größe gegeben ist, im Gegensatz zu den drei Komponenten eines Vektorfeldes.

Man beachte, dass nur Energiedifferenzen relevant sind, da die Kraft proportional zur Ableitung der Energie nach den Ortskoordinaten ist, siehe unten. Im Gegensatz zur Kraft hat die Energie keine absolute Bedeutung. So kann man im obigen Beispiel des freien Falls den Referenzpunkt auf  $h_A = 0$  setzen (d.h. dass  $\tilde{E}_{pot}(h_A) = 0$ ), natürlich könnte man auch  $h_A = -1$  m oder  $h_A = 20$  m wählen. Der Referenzpunkt

fällt im Allgemeinen nicht mit dem Koordinatenursprung zusammen. Die potentielle Energie  $\tilde{E}_{pot}$  in der Höhe  $h$  wäre dann also entsprechend um einen festen Wert verschoben, die Differenz der potentiellen Energien für zwei unterschiedliche Höhen bleibt aber natürlich unverändert. Der Einfachheit lässt man die Tilde weg und wir schreiben im Folgenden einfach  $E_{pot}(\vec{r})$  statt  $\tilde{E}_{pot}(\vec{r})$  - aber natürlich müssen wir uns immer der Abhängigkeit vom gewählten Referenzpunkt bewusst sein!

**BEISPIEL:**

Um einen auf dem Boden liegenden Stein der Masse  $0.1 \text{ kg}$  auf die Höhe  $h = 1 \text{ m}$  anzuheben, muss man die Arbeit  $m g h \approx 1 \text{ J}$  aufwenden. Der Stein besitzt dann die potentielle Energie  $1 \text{ J}$  relativ zum Erdboden.

Die Kraft des Feldes kann man nun umgekehrt aus der potentiellen Energie berechnen, durch Umkehren von (22). Im Eindimensionalen:

$$F_x(x) = -\frac{d E_{pot}(x)}{d x} \quad (25)$$

und allgemein:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_{pot}(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} dE_{pot}(\vec{r})/dx \\ dE_{pot}(\vec{r})/dy \\ dE_{pot}(\vec{r})/dz \end{pmatrix} \quad (26)$$

$\vec{\nabla} E_{pot} \equiv \text{grad } E_{pot} \equiv d/d\vec{r} E_{pot}$  ist der **Gradient** des skalaren Feldes  $E_{pot}$ , er gibt Betrag und Richtung des steilsten Anstiegs an, siehe Abb. 6 (Gravitationsfeld eines Massenpunktes). Die Kraft ist der negative Gradient, zeigt also auf die das Feld

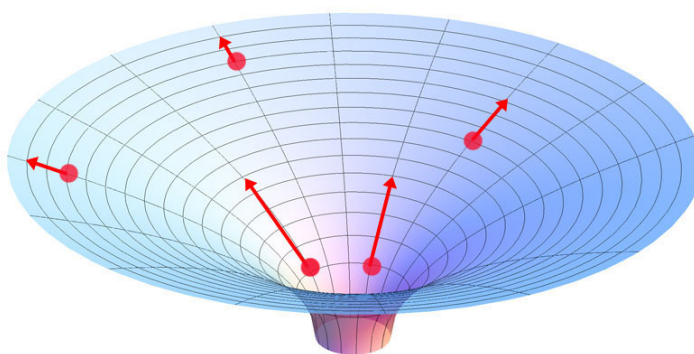


Abbildung 6: Illustration im 2-dimensionalen Raum: Potential/potentielle Energie, repräsentiert durch Äquipotentiallinien, und Gradient (rote Pfeile) des Gravitationsfeldes eines Massenpunktes [scienceblogs.de]

erzeugende Gravitations-Quelle. Die Kraft ist vom Bezugspunkt  $\vec{r}_A$  der potentiellen Energie **un**abhängig, da ein konstanter zu  $E_{pot}$  beitragender Wert bei der Gradientenbildung herausfällt.

**VERSUCH Me-117:** Visualisierung Gravitationsfeld: Plane mit Kugel in Mitte.

Die Kreislinien in Abb. 6 verbinden Orte gleicher potentieller Energie: wir sprechen von Äquipotentiallinien.

*BEISPIEL: Elastische Schraubenfeder oder Gummiband, siehe Abb. 7: Die Rück-*

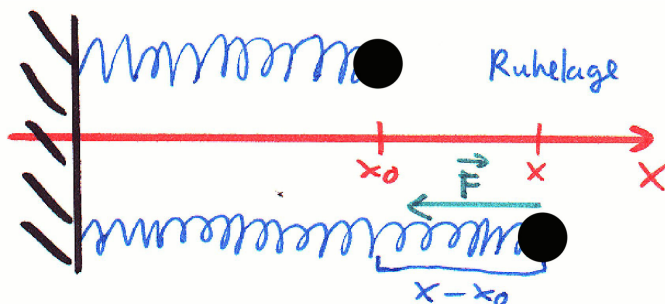


Abbildung 7: Schraubenfeder [T.H.]

stellkraft  $\vec{F}$  ist proportional<sup>3</sup> zur Auslenkung  $x - x_0$  aus der Ruhelage  $x_0$ :

$$\vec{F}(x) = -D \cdot (x - x_0) \vec{e}_x$$

Man spricht vom 'Hookeschen' Gesetz.  $D$  ist die Federkonstante. Dieses eindimensionale Feld ist konservativ, da wir hier Reibungskräfte explizit ausschließen wollen!

Bezüglich des Punktes  $x_0$  (Ruhelage) - d.h. wir setzen  $E_{pot}(x_0) \equiv 0$ <sup>4</sup> - ist die potentielle Energie<sup>5</sup>

$$E_{pot}(x) = - \int_{x_0}^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = D \cdot \int_{x_0}^x (\tilde{x} - x_0) d\tilde{x} = \frac{1}{2} D (x - x_0)^2$$

Wichtig: Das skalare Feld  $E_{pot}(\vec{r})$  enthält die gleiche Information wie das dreikomponentige Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r})$ ! Deshalb ist es oft einfacher, Berechnungen mit Hilfe der potentiellen und kinetischen Energie durchzuführen, ohne explizit die Kräfte auszurechnen. Beispiele folgen.

Jetzt berechnen wir die potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Punktquelle der Masse  $m_1$ , Abb. 8. Genauer wir bestimmen die Differenz der potentiellen Energien wenn sich ein Massenpunkt langsam entlang der Kurve K von A nach B bewegen.

<sup>3</sup>bei kleinen Auslenkungen

<sup>4</sup>das dürfen wir, denn die potentielle Energie ist ja nur bis auf eine Konstante definiert

<sup>5</sup>Man beachte, dass wir hier die Integrationsvariable nicht  $x$  sondern  $\tilde{x}$  genannt haben, damit es keine Verwechslung mit der oberen Integrationsgrenze  $x$  gibt!

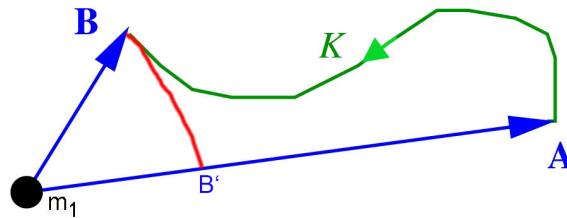


Abbildung 8: Potentielle Energie [T.H.]

$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}}(\vec{r}_B) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_A) &= - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = G m_1 m_2 \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} \\
 &= -G m_1 m_2 \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)
 \end{aligned} \quad (27)$$

Der letzte Schritt dieser Rechnung ist einfach, wenn die Punkte A und B auf einer radial vom Massenpunkt  $m_1$  nach außen weisenden Linie liegen, weil dann  $\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = dr$ , siehe Punkt A und Hilfspunkt  $B'$  (im gleichen Abstand von  $m_1$  wie Punkt B, also  $r_B = r_{B'}$ ) in Abb. 8. Bei der Bewegung entlang des Kreisbogens von  $B'$  nach B wird aber keine Arbeit verrichtet, da  $\vec{F} \perp d\vec{r}$ , das entsprechende Wegintegral ist null. Da das Gravitationsfeld konservativ ist, ist das Wegintegral von A nach B entlang der Kurve K gleich dem von A über  $B'$  nach B. Deswegen gilt (27) ganz allgemein. Die Energiedifferenz hängt also nur vom Betrag der Vektoren  $\vec{r}_A, \vec{r}_B$  ab, nicht von den Richtungen. Legt man den einen Bezugspunkt ins Unendliche<sup>6</sup>, (also  $A \rightarrow \infty, r_A = \infty, E_{\text{pot}}(\infty) = 0$ ), so folgt weiter:

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}_B) = -G \frac{m_1 m_2}{r_B} \quad (28)$$

#### BEISPIEL: Rakete

Ignoriert man alle anderen Himmelskörper sowie die Erdrotation, kann man berechnen, welche Arbeit man aufwenden muss, um eine Rakete der Masse  $m_R = 250 \text{ t}$  von der Erdoberfläche sehr weit zu entfernen:

$$E_{\text{pot}}(\infty) - E_{\text{pot}}(r_E) = G \frac{m_R M_E}{r_E} = 1.6 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

Das entspricht in etwa der Energie die ein Auto auf einer Strecke von  $10^7 \text{ km}$  verbraucht!

#### 2.4.4. Leistung

Eine andere wichtige physikalische Größe ist die durch

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (29)$$

<sup>6</sup> Das ist praktisch, da die Formeln einfach werden. Man kann den Bezugspunkt *nicht* als Ort von  $m_1$  (= Ursprung des Koordinatensystems) wählen, da die potentielle Energie für  $r \rightarrow 0$  unendlich groß wird.

definierte Leistung ( $P = \text{Power}$ ), also 'Arbeit pro Zeit'. Einheit:

$$[P] = \text{J/s} = \text{kg m}^2/\text{s}^3 = \text{W} = \text{Watt} \quad (30)$$

nach James Watt.

Es folgt mit der Kettenregel:

$$P \equiv \frac{dW}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{\nabla} W \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v} \quad (31)$$

*BEISPIEL:*

Bewegt man einen  $m = 1 \text{ kg}$  schweren Stein mit der Geschwindigkeit  $v = 1 \text{ m/s}$  im Erdfeld hoch (entlang  $z$ -Richtung), vollbringt man eine konstante Leistung von

$$P = -(-mg \cdot \vec{e}_z)(v \cdot \vec{e}_z) = mgv \approx 10 \text{ W}$$

#### 2.4.5. Feldstärke und Potential

Wir haben schon das Kraftfeld kennengelernt; die Kraft hängt von beiden beteiligten Teilchen ab, siehe z.B. Newtonsches Gravitationsgesetz, in das  $m_1$  und  $m_2$  eingeht. Eine von dem Probeteilchen unabhängige Größe, die nur vom erzeugenden Feld abhängt, ist die Feldstärke  $\vec{E}$ . Im Fall der Gravitation (Felderzeugende Masse  $m_1$ , Probeteilchen mit Masse  $m_2$ ):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_2(\vec{r})}{m_2} = -G \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (32)$$

Hier ist die (Gravitations-)Feldstärke  $\vec{E}$  gleich der Beschleunigung  $\vec{a}$ , die das Probeteilchen erfährt, am Erdboden also  $g$ .

Die Kraftlinien sind gleich den Feldlinien (siehe Kapitel 2.3.). Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke.

*BEISPIEL: Plattenkondensator*

Im Vorgriff auf das 2. Semester zeigt Abb. 9 das homogene elektrische Feld  $\vec{E} = \vec{F}/q$  eines Kondensators, wobei  $\vec{F}$  die elektrische Kraft auf ein Probeteilchen der elektrischen Ladung  $q$  ist.

So wie wir die Feldstärke  $\vec{E}$  eingeführt haben, definiert man für konservative Felder das Potential durch (hier am Beispiel des elektrischen Feldes)

$$U(\vec{r}) = \frac{E_{\text{pot}}(\vec{r})}{q} \quad (33)$$

und erhält eine vom Probeteilchen unabhängige, das Feld charakterisierende Größe. Offenbar:

$$U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad (34)$$

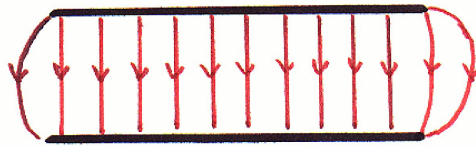


Abbildung 9: Elektrisches Feld eines Plattenkondensators [T.H.]

Das Potential kann nur für konservative Felder definiert werden! Einheiten von  $\vec{E}$  und von  $U$ : abhängig von Art des Kraftfeldes!

Beachte: Das skalare Feld  $U(\vec{r})$  enthält die gleiche Information wie das dreikomponentige Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{r})$ !

*BEISPIEL:*

*Gravitations-Potential einer Punktmasse  $M$ :*

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \cdot \frac{M}{r^2} \vec{e}_r \quad U(\vec{r}) = -G \cdot \frac{M}{r}$$

mit Bezugspunkt ' $\infty$ '.

Als Äquipotentialflächen bezeichnet man Flächen auf denen das Potential konstant ist, also  $U(\vec{r}) = \text{const.}$  Die Äquipotentialflächen verlaufen senkrecht zu den Feldlinien. Bei Verschiebung auf diesen Flächen wird *keine* Arbeit geleistet, denn der Integrand  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  in der Definition der Arbeit (12) verschwindet dann, weil das Skalarprodukt null ist.

*BEISPIEL: Radialfeld und Dipolfeld (entgegengesetzte Ladungen). Feldlinien und Äquipotentialflächen bzw. -linien zeigt Abb. 10.*

Aus dem *Superpositionsprinzip* für die Kräfte bzw. Feldstärken folgt ein Superpositionsprinzip für Potentiale (und potentielle Energien):

$$U = \sum U_i \quad (35)$$

$U$  ist das Gesamtpotential, das aufgrund der Quellen  $i$  mit den zugehörigen Potentialen  $U_i$  auf den Probekörper 'wirkt'.

#### 2.4.6. Energieerhaltung, Energieformen

Es seien zunächst alle Kraftfelder konservativ; dann gilt der Energiesatz der Mechanik:

**Für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten ist die Summe der kinetischen und potentiellen Energien zeitlich konstant:**

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \sum E_{\text{pot}}^i + \sum E_{\text{kin}}^i = \text{const} \quad (36)$$



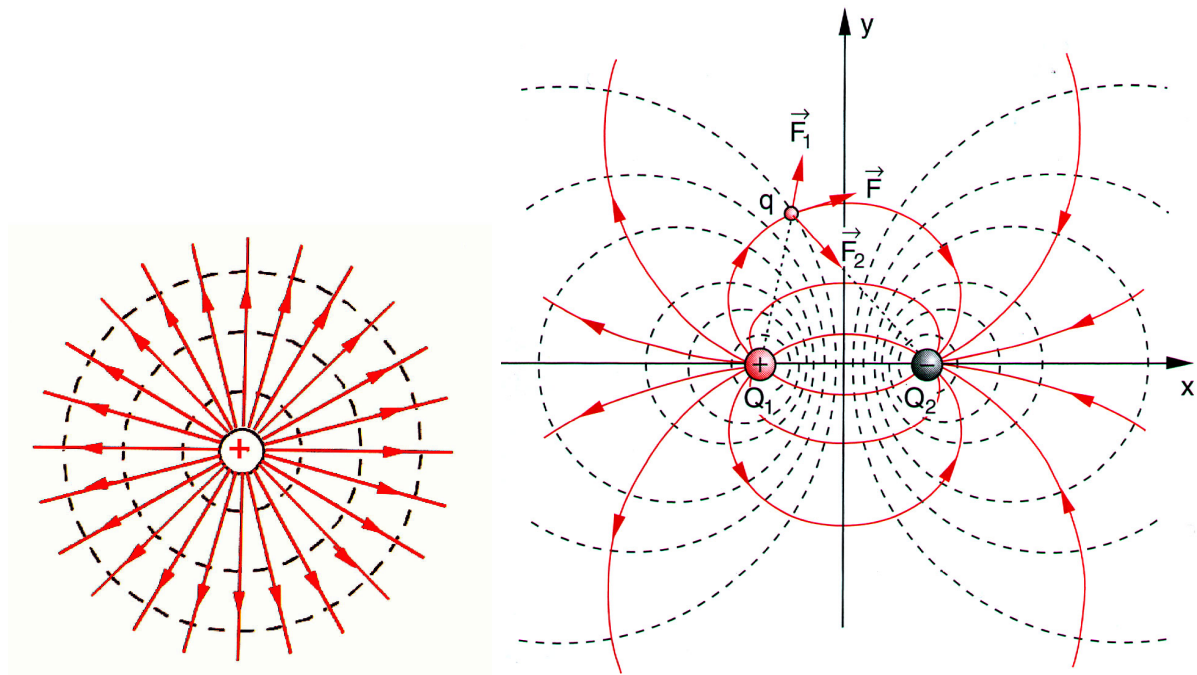


Abbildung 10: Elektrisches Feld von Punktladung und Dipol: Feldlinien (rot) und Äquipotentiallinien (schwarz, gestrichelt) [Demtröder]

Beweis für einen Massenpunkt (fester Masse  $m$ ):

$$\frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v})^2 + \vec{\nabla} E_{pot} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{v} \dot{\vec{v}} - \vec{F} \vec{v} = m \vec{v} \dot{\vec{v}} - m \dot{\vec{v}} \vec{v} = 0 \quad (37)$$

*BEISPIEL: Freier Fall (s.o.)*

*Potentielle Energie (der Gravitation) wird vollständig in kinetische Energie umgewandelt.*

*BEISPIELE: Fadenpendel, Wurf, Looping-Bahn.*

In vielen Situationen ist die mechanische Energie *nicht* erhalten (wenn die Kräfte nicht konservativ sind - Reibung!).

**VERSUCH Me-45:** Kugel und weiche Knetmasse fallen auf Metallplatte. Offenbar wird im zweiten Fall kinetische Energie zur Deformation benutzt.

Man kann den Energiesatz so erweitern, dass er universell gilt. Dazu müssen weitere Energieformen eingeführt werden:

- chemische Bindungsenergie (mikroskopisch: elektrische potentielle Energie)
- elektromagnetische Strahlung (Photonen)
- Wärme (mikroskopisch: kinetische Energie der Atome/Moleküle)
- Deformationsenergie (mikroskopisch: elektrische potentielle Energie)
- Reibung (mikroskopisch: elektrische Kräfte → Deformation + Bewegung)

...

Während man mechanische potentielle und kinetische Energie beliebig oft vollständig ineinander umwandeln kann, ist dies z.B. für Reibungskräfte und Wärmeenergie nicht der Fall!

### VERSUCH Me-21: Energieerhaltung beim Pendel

#### 2.4.7. Anwendungen der Erhaltungssätze

**Beachte: Impulserhaltung gilt in abgeschlossenen Systemen IMMER, Energieerhaltung nur unter Einbeziehung 'nichtmechanischer' Energieformen wie Wärme.**

##### 1) Erdgravitationsfeld

Welche Geschwindigkeit  $v_2$  muss eine Kanonenkugel der Masse  $m$  beim Abschuss von der Erdoberfläche haben, um sich aus dem Schwerfeld der Erde (Masse  $M_E$ ) lösen zu können, also um sich unendlich weit von ihr entfernen zu können? Wir vernachlässigen die anderen Himmelskörper und die Luftreibung. Unser Bezugssystem ist fest mit dem Zentrum der Erde verbunden, letztere solle nicht rotieren.

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie bleibt während des Fluges konstant:

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{m M_E}{R_E + r} = \text{const} \quad (38)$$

$r$  ist die Höhe über der Erdoberfläche,  $R_E$  der Erdradius. Die potentielle Energie ist so gewählt, dass sie im Unendlichen null wird. Die kleinstmögliche Abschussgeschwindigkeit  $v_2$  ist die, für die die kinetische Energie im Unendlichen auf null reduziert worden ist. Also

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - G \frac{m M_E}{R_E} = 0 - G \frac{m M_E}{R_E + \infty} = 0 \quad (39)$$

Somit:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 G M_E}{R_E}} = \sqrt{2 g R_E} = 11.2 \text{ km/s} \approx 40 \cdot 10^3 \text{ km/h} \quad (40)$$

unabhängig von der Masse  $m$ ! Das ist die '2. kosmische Geschwindigkeit'.

Bemerkungen:

- Wieso spielt der Impulssatz bei der obigen Betrachtung keine Rolle? Er gilt natürlich auch hier: beim Abschuss wird auch ein Impuls auf die Erde übertragen, der im Schwerpunktsystem (s.u.) betragsmäßig gleich dem Impuls der Kugel ist. Solange  $m \ll M_E$  gilt, ist aber die damit verbundene Geschwindigkeitsänderung der Erde und damit der Energieübertrag vernachlässigbar klein.
- Falls die Erde nicht rotiert, ist es egal, in welche Richtung man die Kanonenkugel abfeuert (horizontal, vertikal ...)
- Wegen der Eigenrotation der Erde, die am Äquator zu einer Geschwindigkeit von



460 m/s führt, reicht es, die Rakete mit etwa 10.7 km/s abzufeuern, wenn man sie am Äquator tangential nach Osten schießt.

- Es gibt auch eine 1. kosmische Geschwindigkeit: die eines Satelliten der dicht oberhalb der Erdoberfläche die Erde umkreist, siehe spätere Vorlesungen.

## 2) Zentrale Stöße zwischen zwei Körpern.

Zentral bedeutet: die Körper bewegen sich vor und nach dem Stoß auf der Verbindungslinie ( $\equiv \vec{e}$ ) der beiden Massenpunkte, Abb. 11. Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  sowie die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  vor dem Stoß seien bekannt. Die Geschwindigkeiten  $\vec{v}'_1$  und  $\vec{v}'_2$  nach der Kollision sind zu berechnen.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) Kräfte konservativ, Stoß elastisch,  $\sum E_{kin} = const$

b) Kräfte (teilweise) 'dissipativ', Stoß inelastisch,  $\sum E'_{kin} < \sum E_{kin}$ .

Kennt man nur diese Ungleichung, kann man nicht vollständig berechnen was beim Stoß passiert. Wir betrachten im folgenden deshalb einen Spezialfall: Nach dem Stoß kleben beide Massen zusammen (Stoß vollständig inelastisch), damit haben wir eine weitere Bedingung ( $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$ ) und können die Gleichungen lösen.

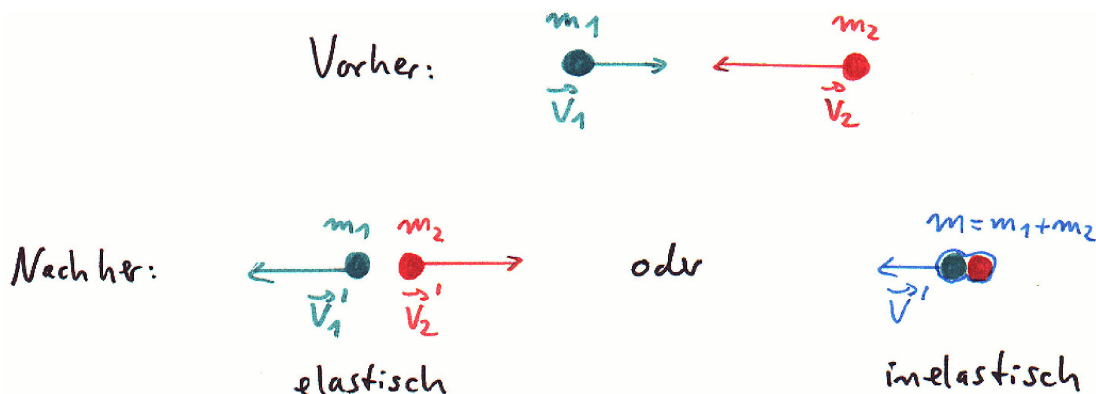


Abbildung 11: eindimensionaler Stoß [T.H.]

Da es sich um ein eindimensionales Problem handelt (alle  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ ), schreiben wir einfach nur  $v$  (Vorsicht:  $v$  ist hier nicht der Betrag der Geschwindigkeit, sondern deren x-Komponente, also eine skalare Größe mit Vorzeichen!).

Impulssatz (gilt immer - auch bei inelastischem Stoß!):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (41)$$

Das ist *eine* Gleichung für die beiden Unbekannten  $v'_1, v'_2$ . Damit allein kann der Ausgang der Kollision *nicht* vorausgesagt werden!

Fall a) (elastisch):

Energiesatz:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad (42)$$

Lösung (Übung):

$$v_1' = \frac{1}{m} \cdot [(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2] \quad (43)$$

$$v_2' = \frac{1}{m} \cdot [(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1] \quad (44)$$

mit

$$m = m_1 + m_2 \quad (45)$$

Man beachte die Symmetrie der beiden Gleichungen!

*BEISPIELE (Spezialfälle):*

$v_1 = v_2$  (! Vorzeichen !): dann  $v_1' = v_2'$  (!)

$v_1 = -v_2$  und  $m_1 = m_2$ : dann  $v_1' = -v_1$ ,  $v_2' = -v_2$

$v_2 = 0$ : Falls  $m_1 = m_2$ :  $v_1' = 0$ ,  $v_2' = v_1$   
(Münze [1] gegen zweite gleiche ruhende Münze [2])

$v_2 = 0$ : Falls  $m_1 \gg m_2$ :  $v_1' \approx v_1$ ,  $v_2' \approx 2v_1$   
(Zug [1] gegen leeren stehenden Waggon [2])

$v_2 = 0$ : Falls  $m_1 \ll m_2$ :  $v_1' \approx -v_1$ ,  $v_2' \approx v_2 = 0$   
(Tennisball [1] gegen Haus [2])

Fall b) (inelastisch):

Falls Stoßpartner aneinander kleben bleiben:  $v_1' = v_2' = v'$

Lösung (folgt sofort aus (41):

$$v' = \frac{1}{m} \cdot (m_1 v_1 + m_2 v_2) \quad (46)$$

### **SIMULATION: (in)elastischer Stoß (eindimensional)**

Elastischer und (vollkommen) unelastischer Stoß (LEIFiphysik)

<https://www.leifiphysik.de/mechanik/impulserhaltung-und-stoesse/versuche/elastischer-und-vollkommen-unelastischer-stoss-simulation>

**VERSUCH 2.2.17:** Münze auf Tisch wird von gleicher Münze angestoßen

**VERSUCH Me-23:** Kugelstoßpendel

Mehrere Kugeln sind nebeneinander aufgehängt. . .

**VERSUCH: Me-44:** Springball-Pyramide

$n$  Gummi-Kugeln (der Größe nach geordnet, oben die kleinen) fallen simultan senkrecht nach unten. Rechnung: Übung.

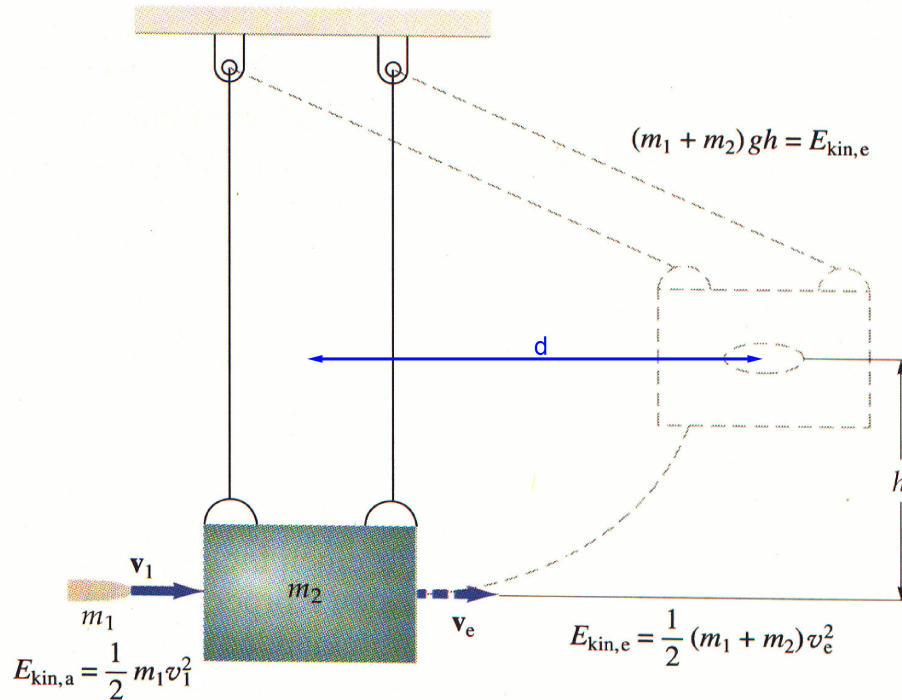


Abbildung 12: Ballistisches Pendel [Tipler]

### 3) Ballistisches Pendel

Wir wollen mit diesem Experiment die Geschwindigkeit  $v_1$  bestimmen. Wir betrachten den Vorgang vom sichtbaren Ergebnis ausgehend: Aus der Steighöhe  $h$  (oder aus der horizontalen Auslenkung aus der Ruhelage) kann man die Geschwindigkeit  $v_e$  (entspricht  $v'$ ) des Pendelkörpers (Masse  $m_2$ ) - nachdem das Projektil der Masse  $m_1$  stecken geblieben ist - bestimmen, s. Abb. 12:

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = m g h \quad m = m_1 + m_2 \approx m_2 \quad (47)$$

Wir nähern hier und im Folgenden  $m_1 \ll m_2$ . Da die maximale vertikale Auslenkung  $h$  sehr klein ist, kann man stattdessen die maximale horizontale Auslenkung  $d$  messen, aus geometrischen Überlegungen folgt näherungsweise für  $h \ll d$ :

$$h = \frac{d^2}{2l} \quad (48)$$

Aus der Geschwindigkeit  $v_e$  des Pendelkörpers nach dem Auftreffen des Geschosses kann man mit Formel (46) sofort die Geschwindigkeit  $v_1$  des Projektils vor dem Auftreffen auf den Pendelkörper bestimmen

$$v_1 = v_e \cdot \frac{m}{m_1} \approx v_e \cdot \frac{m_2}{m_1} \quad (49)$$

Dabei setzen wir voraus, dass das Geschoss stecken bleibt. Also:

$$v_1 \approx \sqrt{2gh} \cdot \frac{m_2}{m_1} \quad (50)$$

Numerisch, mit  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $m_1 = 1 \text{ g}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ :  $v_1 = 450 \text{ m/s}$ .

### VERSUCH Me-22: Ballistisches Pendel

#### 4) Rakete

Wir analysieren die Antriebsphase einer einstufigen Rakete R im fernen Weltraum (keine Gravitationskraft und keine anderen externen Kräfte) der Anfangsmasse  $m_R = m_R^0$ , die den Treibstoff T (in der Rakete) der Masse  $m_T = m_T^0$  einschließt:  $m_R^0 > m_T^0$ . Der Antrieb erfolgt durch Emission von Treibstoff mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}_T$  relativ zur Rakete (!) und konstantem Fluss (= Massenausstoß pro Zeit)  $\dot{m}_T = \dot{m}_R < 0$ , siehe Abb. 13. Also  $m_R \leq m_R^0$ .

Die Berechnung der Endgeschwindigkeit ist am einfachsten im Schwerpunktsystem = Ruhesystem der Rakete vor dem Start, also ist der Gesamtimpuls immer null. Hier handelt es sich um ein Inertialsystem!

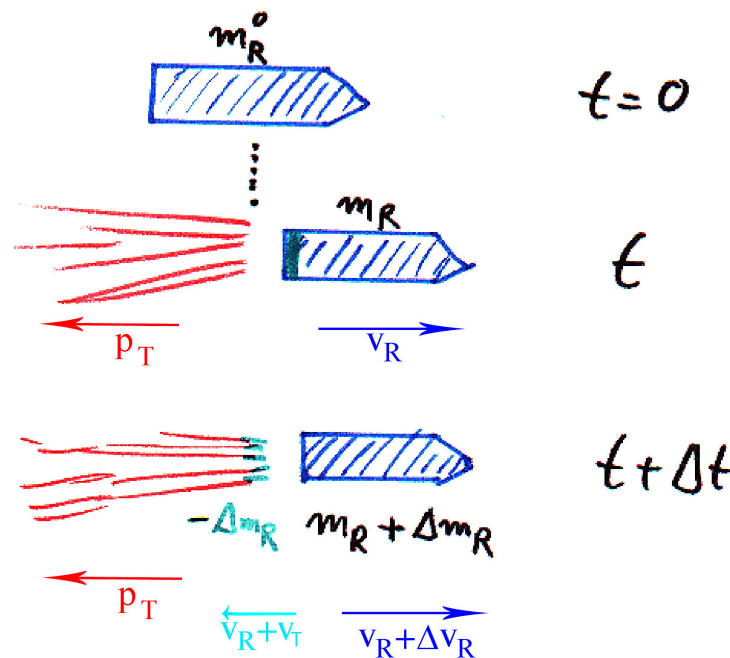


Abbildung 13: Rakete. Betrachtung im Inertialsystem in dem die Rakete beim Start ruht. [T.H.]

Den Energiesatz der Mechanik kann man hier nicht nutzen, da chemische Energie eine Rolle spielt.

Impulserhaltung (zunächst in Worten):

Für jedes kleine Zeitintervall in der Beschleunigungsphase gilt:

Impuls ausgestoßener Treibstoff + Impulsänderung Rakete = null.

In Gleichungen:

Man betrachte ein kleines Treibstoffpaket der Masse  $\Delta m_R$  (negativ!), das zum Zeitpunkt  $t$  ausgestoßen wird, wenn die Rakete die Masse  $m_R$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}_R$  besitzt (beide zeitabhängig!):

$$\vec{0} = \vec{p}_T + m_R \vec{v}_R = \vec{p}_T + (-\Delta m_R)(\vec{v}_R + \vec{v}_T) + (m_R + \Delta m_R)(\vec{v}_R + \Delta \vec{v}_R) \quad (51)$$

Hier ist  $\vec{p}_T$  der Gesamtimpuls des vor dem Zeitpunkt  $t$  insgesamt ausgestoßenen Treibstoffs.  $m_R \vec{v}_R$  ist der Impuls der Rakete zum gleichen Zeitpunkt. Nach Ausstoß des Treibstoffpakets der Masse  $\Delta m_R$  wird aus  $m_R \vec{v}_R$  die Summe des Impulses des gerade emittierten Treibstoffs (zweiter Summand in obiger Formel) und des Impulses der um diese Treibstoffmasse erleichterten Rakete (letzter Summand). Man beachte, dass die Geschwindigkeit des Treibstoffs per Galilei-Transformation (siehe Kapitel 2.1.6.,  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ ) vom System Rakete ins Inertialsystem umgerechnet werden muss. Produkte kleiner Differenzen wie  $\Delta m_R \Delta \vec{v}_R$  können wir vernachlässigen, also folgt aus (51):

$$-\Delta m_R \cdot \vec{v}_T + m_R \cdot \Delta \vec{v}_R = \vec{0} \quad (52)$$

Infinitesimal:

$$d \vec{v}_R = \vec{v}_T \cdot \frac{d m_R}{m_R} \quad (53)$$

Da  $d m_R$  negativ ist, so ist die vektorielle Geschwindigkeitszunahme  $d \vec{v}_R$  der Ausstoßgeschwindigkeit  $\vec{v}_T$  entgegengerichtet<sup>7</sup>. Integration vom Start-Zeitpunkt  $t_1 = 0$  der Rakete bis zum Ausbrennen ( $t_2$ , dann ist der gesamte Treibstoff verbrannt) liefert die Endgeschwindigkeit  $\vec{V}_R$  der Rakete:

$$\vec{V}_R \equiv \vec{v}_R(t_2) = \int_{\vec{0}}^{\vec{V}_R} d \vec{v}_R = \int_{m_R(0)}^{m_R(t_2)} \vec{v}_T \frac{1}{m_R} d m_R = \vec{v}_T \cdot \ln \frac{m_R(t_2)}{m_R(0)} = \vec{v}_T \cdot \ln \frac{m_R^0 - m_T^0}{m_R^0} \quad (54)$$

Man beachte, dass der Logarithmus (ln) hier negativ ist, also sind  $\vec{v}_T$  und  $\vec{V}_R$  entgegengerichtet. Die Endgeschwindigkeit hängt offenbar nicht von der Dauer  $t_2 - t_1$  der Antriebsphase ab. Also, betragsmäßig:

$$V_R \equiv |\vec{V}_R| = |\vec{v}_T| \cdot \ln \frac{m_R^0}{m_R^0 - m_T^0} = |\vec{v}_T| \cdot \ln \left( 1 - \frac{m_T^0}{m_R^0} \right) \quad (55)$$

Das ist die Raketen(grund)gleichung, die 1903 von Konstantin Ziolkowski aufgestellt wurde.

<sup>7</sup>Man kann mit dieser Gleichung sowohl das Beschleunigen einer Rakete ( $\vec{v}_T$  und  $\vec{v}_R$  weisen in entgegengesetzte Richtungen) als auch das Abbremsen ( $\vec{v}_T$  und  $\vec{v}_R$  sind gleichgerichtet) beschreiben.

*BEISPIEL: Saturn V*

*Anfangsmasse  $m_R^0 = 2800 \text{ t}$ , davon Treibstoff  $m_T^0 = 2000 \text{ t}$ . Ausstoßgeschwindigkeit relativ zur Rakete  $v_T = 2.5 \text{ km/s}$ :*

$$|V_R| = 2.5 \text{ km/s} \cdot \left| \ln \left( 1 - \frac{2000}{2800} \right) \right| = 3.1 \text{ km/s}$$

*ist die Endgeschwindigkeit der ersten Stufe - wenn keine Gravitation im Spiel ist.*

**VERSUCH Me-43:** Spielzeugrakete mit Druckluft-Antrieb

**VERSUCH 91174:** Raketenwagen mit CO<sub>2</sub>-Antrieb