Experimentalphysik III - Zusammenfassung

Luca Cordes

17. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Licht

1.1 Fermat's Prinzip

Die geometrische Optik lässt sich mathematisch elegant beschreiben wenn man den Lichtweg $L = \int |\vec{r}(t)| \cdot n(\vec{r}(t))\, \mathrm{d}t$ definiert. Er ist der normale Weg, gewichtete mit dem lokalen Brechungsindex. Das Licht nimmt immer den Weg, der den Lichtweg extremal werden lässt. Zur Erinnerung: Es gilt $n = \frac{c}{v}$
Es Weg des Lichts kann daher formal mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen beschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}}\ , \quad \text{mit } \mathcal{L} = |\vec{r}(t)| \cdot n(\vec{r}(t))$$

1.2 Snell's Gesetz

Reist ein Lichtstrahl von einem Medium mit Brechungsindex n_1 in ein zweites mit Brechungindex n_2, wird er gebrochen. Der Winkel kann mithilfe von Snell's Gesetz berechnet werden:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_a}{n_b}$$

2 Strahlenoptik

2.1 Allgemein

Abbildungsmaßstab:	$\beta = \frac{B}{G}$
Gegenstandsweite:	$g \cong$ Distanz Linse/Gegenstand
Bildweite:	$b \cong$ Distanz Linse/Bild
Gegenstand:	$G \cong$ Gegenstand
Bild:	$B \cong$ Bild
Abbildungsmaßstab:	$\beta = \frac{B}{G}$
Deutliche Sehweite:	$s_0 = 25\,\mathrm{cm}$
Vergrößerung:	$V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
Numerische Apperatur:	$A_N = n\sin\alpha$

2.2 Listing'sche Strahlenkonstruktion

1. Haubtstrahl: Trifft auf die Mitte der Linse, die Symmetrie fordert, dass der Strahl bei Linsen gerade durch geht, und bei Spiegeln mit Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel reflektiert wird.

2. Achsenparallele: Geht vom Gegenstand parallel zur optischen Achse. Wird in paraxialer Näherung auf den Brennpunkt gebrochen (Linsen), bzw. zum Brennpunkt hin oder weg gespiegelt (Spiegel).

3. Brennstrahl: Analog zum Knotenpunktstrahl.

Nie Vergessen den entstehenden Bildpunkt zu kennzeichnen mit B, und von der optischen Achse einen orthogonalen Sprich zu B hochzuziehen, um den gesamten Gegenstand anzudeuten. Für mehrere Linsen in einer Reihe, wird erst der (virtuelle) Bildpunkt der ersten Linse konstruiert, anhand dessen dann der nächste Bildpunkt konstruiert wird.

2.3 Dünne Linsen in paraxialer Näherung

Linsengleichungen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{g} = \frac{B}{G}$$

Diese Gleichung gilt auch für Spiegel. Achtung: Für einen konvexe Spiegel sind zuwohl Bildweite als auch Brennweite negativ!

Linsenmachergleichung:

$$D = \frac{n_0}{f} = (n_L - n_0)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Brechkraft eines optischen Systems:
$D = D_1 + D_2 - dD_1D_2$, mit $d \cong$ Distanz zwischen Linsen

2.4 Dicke Linsen

Linsenmachergleichung:

$$D = \frac{n_0}{f} = (n_L - n_0)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n_L - n_0)^2}{n_L}\frac{d}{r_1 r_2}$$

Haubtebenen:

$$h_1 = \frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{fd}{r_2}$$

$$h_2 = -\frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{fd}{r_1}$$

Newtonsch'sche Abbildungsgleichung

$$z \cdot z' = f_B \cdot f_G$$

2.5 Matrizen-Optik

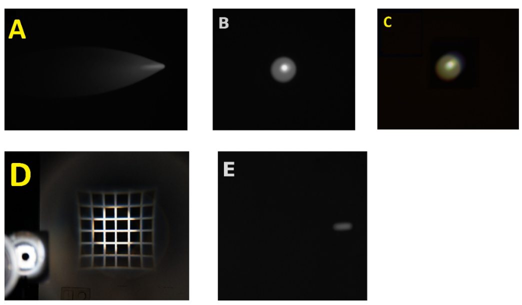
Sind vom Gegenstandspunkt aus gesehen, die vom Licht durchlaufenden Strecken $s_1, s_2, \ldots, s_n$, so ist die korrekte Matrix gegeben durch $M_n \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1$. Die Matrizen müssen somit anderrum multipliziert werden. Ein optisches Gerät ist dann scharf eingestellt wenn $M \cdot (\alpha, 0)^T = (\beta, 0)^T$.

Zustandsvektor:	$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}$
Freie Ausbreitung:	$\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{n_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Brechung:	$\mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0 - n_L}{R} & 1 \end{pmatrix}$
Dünne Linse:	$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix}$

Dicke Linse:

$$\mathbf{M}_{\bar{L}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{d}{R_1} & \frac{d}{n_L} \\ -D & 1 + \frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{d}{R_2} \end{pmatrix}$$

2.6 Bildfehler



A. Koma:

Parallele Lichtstrahlen fallen in einem Winkel auf die Linse. Ist die überlagerung zweier anderer Bildfehler, dem Astigmatismus und der Sphärischen Abberation.

B. Sphärische Abberation/Öffnungsfehler:

Dieser Bildfehler entsteht dadurch, dass die Kugel nicht die mathematisch perfekte Form ist um parallele Lichtbündel auf einen Punkt zu fokossieren; dies währe ein Paraboloid. Die Kugel ist achsenfern stärker gekrümmt als die Parabollinse, und hat daher dort eine stärkere Brechkraft. Der Fokuspunkt von achsenfernen Licht liegt folglich näher an der Linse.

C. Chromatische Abberation:

6Die Ursache der chromatischen Abberation ist, dass die Brechkraft der Linse eine Funktion der Wellenlänge des Lichts ist. Folglich werden verschiedene Wellenlängen auf verschiedene Brennpunkte fokossiert. Ein Linsensystem das keine chromatische Abberation aufzeigt (zumindest in erster Ordung), also $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial n(\lambda)} = 0$, nennt sich Achromat.

D. Verzeichung:

Verzeichnung ist ein Lagefehler und bedeutet, dass die Bildhöhe (Abstand eines Bildpunktes vom Bildzentrum) auf nichtlineare Weise von der Höhe des entsprechenden Objektpunktes abhängt. Man kann auch sagen: Der Abbildungsmaßstab hängt von der Höhe des Objektpunktes ab.h Es können sowohl kissenförmige als auch tonnenförmige Verzeichungen entstehten.

E. Astigmatismus:

Astigmatismus tritt bei ßchiefen Strahlen" auf. die Ursache ist, dass das Strahlenbündel entlang der Maridional- und der Sagittalebene unterschiedlich stark gebrochen wird.

2.7 Vergrößerung

Winkelvergrößerung allgemein:

$$V = \frac{\text{Winkel mit Instrument}}{\text{Winkel ohne Instrument}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Lupe:

$$V = \frac{s_0}{f}$$

Mikroskop, Abbildungsmaßstab des Objektives, Okularvergrößerung:

$$\Gamma_{ob} \approx \frac{t}{f_{ob}} \quad , \quad \text{mit } t \hat{=} \text{Tubuslänge}$$

$$V = \Gamma_{ob} V_{ok} = \frac{t s_0}{f_{ob} f_{ok}}$$

Teleskop:

$$V = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

3 Fotometrie

3.1 Allgemein

Strahlungsphysikalische Größen			Lichttechnische Größen		
Name	**Definition**	**Einheit**	**Name**	**Definition**	**Einheit**
Strahlungsfluss	Φ_E	1 W	Lichtstrom	Φ_V	1 lm
Strahlungsmenge	$Q_E = \int \Phi_E dt$	1 J	Lichtmenge	$Q_V = \int \Phi_V dt$	1 lms
Strahlstärke	$I_E = \frac{d\Phi_E}{d\Omega}$	$1 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}$	Lichtstärke	$I_V = \frac{d\Phi_V}{d\Omega}$	1 cd
Strahldichte	$L_E = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{d\Phi_E}{dA d\Omega}$	$1 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 sr}}$	Leuchtdichte	$L_V = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{d\Phi_V}{dA d\Omega}$	$1 \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m^2}}$
Bestrahlungsstärke	$E_E = \frac{d\Phi_E}{dA}$	$1 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$	Beleuchtungsstärke	$E_V = \frac{d\Phi_V}{dA}$	1 lx
			Belichtung	$H_V = \int E_V dt$	1 lxs

3.2 Gesetze

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$\Phi_E = \sigma \cdot A \cdot T^4$

$$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}} \text{ , Stefan-Boltzmann-Konstante}$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz:

Ist λ_{max} die Wellenlänge, bei der die Emission eines Schwarzerkörpers die maximale Intensität zeigt, so gilt:

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const.} = 2.8978 \cdot 10^{-3} \mathrm{m\,K}$$

Rayleigh-Jean-Gesetz:

Das Rayleigh-Jean-Gesetz beschreibt die Abstrahlungsleistungspektrum bei hohen Wellenlängen:

$$M_E(\lambda) := \frac{\mathrm{d}\Phi_E(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = 2\pi k c \frac{T}{\lambda^4}$$

Wien'sches Strahlungsgesetz:

Das Wien-Gesetz beschreibt die Abstrahlungsleistungspektrum bei niedrigen Wellenlängen:

$$M_E(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B} \frac{1}{\lambda T}}}$$

4 Wellenoptik

4.1 EM-Wellen:

Eine ebene Welle wird mathematisch beschrieben durch:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \text{ , } \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$$

Ist $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$, so schwingt die Welle nicht in Richtung ihrer Ausbreitungsrichtung und ist somit als eine Longitudinal-Welle zu identifizieren. Dies ist für EM-Wellen im Vakuum der Fall. Ist der Phasendifferenz

zwischen den beiden Komponenten in $\mathbf{E}_0$ die orthogonal zur Bewegungsrichtung sind gleich null, so schwingen E-/ und B-Feld in Phase, die Welle ist *linear polarisiert*. Für $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ ist die Norm des Feldes zeitlich konstant, der Feldvektor rotiert nur um die Bewegungsrichtung; dieser Fall nennt sich *zirkulare Polarisation*. Liegt der Winkel hingegen irgendwo dazwischen, so rotiert der Feldvektor auf elliptischen Bahnen, daher der Name *elliptische Polarisation*.
Überlagern sich die Amplituden zweier kohärenter Wellen, so ist die Intensität:

$$\langle I\rangle = 4\langle I_0\rangle \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

Und allgemein für zwei Wellen mit Phasendifferenz $\Delta\phi$:

$$\begin{aligned}\langle I\rangle &= \varepsilon_0 c\left\langle(\vec{E}_1+\vec{E}_2)^2\right\rangle \\ &= \varepsilon_0 c\left[\left\langle\vec{E}_1^2\right\rangle + 2\left\langle\vec{E}_1\vec{E}_2\right\rangle + \left\langle\vec{E}_1 2^2\right\rangle\right] \\ &= \left\langle I_1\right\rangle + \left\langle I_{12}\right\rangle + \left\langle I_2\right\rangle \\ \langle I_{12}\rangle &= \varepsilon_0 c E_{01}E_{02}\cos(\Delta\phi) = \varepsilon_0 c\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}\cos(\Delta\phi)\end{aligned}$$

4.2 Kohärenz

Zeitliche Kohärenz

Zeitspanne Δt_c in der sich die Phasendifferenz $\Delta\phi_{12}(\vec{r},t) = \phi_1(\vec{r},t) - \phi_2(\vec{r},t)$ um weniger als 2π ändert.

$$\Delta t\Delta f \approx 1$$

Man definiert hier auch die Kohärenzlänge $\Delta l_c = c\cdot\Delta t_c$.

Räumliche Kohärenz

Analog definiert man die räumlihe Kohärenz, wenn eine Wellenfront ihre Phasendifferenz $\Delta\phi_{12}(\vec{r},t) = \phi_1(\vec{r},t) - \phi_2(\vec{r},t)$ zwischen zwei an zwei Orten um weniger als 2π ändert.

Kohärenzlänge realer Lichtquellen

Die Emission eine Wellenzuges durch ein angeregtes Atom dauert ca. 1 bis 10ns ($= \Delta t_c$). In einem Wellenzug koexistieren verschiedene Frequenzen, die einer Verteilung folgen. Man nennt $\Delta f = \frac{1}{\Delta t_c}$ die Frequenzbreite. Die Kohärenzlänge lasst sich in erster Näherung berechnen als $l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

4.3 Interferenzphänomene

Doppenspalt:

$$\begin{aligned}&\text{Maxima:} && \sin\theta_{max} = \frac{n\lambda}{d} \\ &\text{Minima:} && \sin\theta_{min} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}\end{aligned}$$

Einzelspalt:

$$\begin{aligned}&\text{Maxima:} && \sin\theta_{max} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} \\ &\text{Minima:} && \sin\theta_{min} = \frac{n\lambda}{d}\end{aligned}$$

Gitter:

N-Spalte mit Abstand g.

$$\begin{aligned}&\text{Maxima:} && \sin\theta_{max} = \frac{n\lambda}{g} \\ &\text{Minima:} && \sin\theta_{min} = \left(n+\frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{g}\end{aligned}$$

Maximale Ordnung:

Es gibt eine maximale Ordnung, denn der Winkel muss kleiner 90° sein $1 \geq \sin\alpha$. Für den Doppelspalt/Gitter würde sich $n_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}$ ergeben.

Überlappung von Spektren

Die Spektren zweier benachbarter Ordnungen überlappen sich, wenn $\theta_{\max}(\lambda_{\max}, n) > \theta_{\max}(\lambda_{\min}, n+1)$ gilt. Für Doppelspalt und Gitter ergibt sich damit, Überlappung für:

$$n > \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}$$

Auflösungsvermögen/Rayleighkriterium:

Zwei Wellenlängen λ und $\lambda+\Delta\lambda$ können getrennt werden, sobald das Maximum zu $\lambda+\Delta\lambda$ im ersten benachbarten Minimum liegt. Für ein Gitter ergibt sich damit: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN$.

4.4 Beugungsphänomene

Frauenhofer Beugung:

Abstand des Objektes zum Schirm groß → Stahlen annähernd parallel → Beugungsbild nur Richtungsabhängig.

Fresnel Beugung:

Abstand des Objektes zum Schirm *nicht* groß → Stahlen nicht parallel → Beugungsbild Distanz und Richtungsabhängig.

Fresnel-Kirchhoff'sches Beugungsintegral

Die Amplitude und Phase auf einem Schirm ($z = 0$) sei durch $\vec{E}_0(x, y)$ und $\phi(x, y)$ gegeben. Dann ist die Amplitude an einem Punkt $P = (x, y, z)^T$:

$$\vec{E}_P(x,y,z) = \iint\limits_{z=0} K(\beta) \frac{\vec{E}_0(x',y')}{r_A} e^{i(\phi(x',y')-kr_A)} \, dx' \, dy'$$

$$\text{mit } r_A = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$$

Fresnel-Linse

$$\text{Radien:} \qquad r_n = \sqrt{n\lambda f + \frac{n^2\lambda^2}{4}} \overset{f \gg n\lambda}{\approx} \sqrt{n\lambda f}$$

Lochblende

Position der ersten Minima und Maxima hinter einer Lochblende. Angegeben sind die Werte für $\frac{kD}{2\pi} \sin\theta_{min}$ bzw. $\frac{kD}{2\pi} \sin\theta_{max}$. Außerdem ist die Intensität der Nebenmaxima im Verhältnis zum zentralen Maximum angegeben.

	1. Ordnung	2. Ordnung	3. Ordnung
Minimum	1,2197	2,2331	3,2383
Maximum	1,6347	2,6793	3,6987
I_{max}/I_0	0,0175	$4{,}16 \cdot 10^{-3}$	$1{,}60 \cdot 10^{-3}$

Rayleigh-Kriterium

Die maximale Auflösung eines optischen Systems ist durch Beugungseffekte am Rand der Linse fundamental beschränkt. Das Rayleigh-Kriterium definiert die minimale auflösbare Winkeldistanz als die Winkeldistanz bei der sich das Beugungsminimum erster Ordnung, des einen Objektes, mit dem Beugungsmaximum erster Ordnung, des anderen Objektes, überlappen würde. Für eine Lochblende gilt:

$$\sin\theta_{min} = 1.22\frac{\lambda}{D} \quad \Longrightarrow \quad r_{min} = 1.22\frac{f\lambda}{D}$$

Babinet'sche Prinzip

Das Babinet'sche Prinzip besagt, dass die Beugungsbilder zueinander komplementärer Blenden außerhalb des Bereiches, der durch die geometrische Abbildung be- leuchtet wird gleich ist.

5 Polarisation

Allgemein

1. Lineare Polarisation:
   Ein Strahl, dessen $\vec{E}$-Feld in nur einer konstanten Ebene schwingt, z.B $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{E}e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t)}$. Er kann als Superposition zweier zirkular polarisierter Strahlen dargestellt werden, die konträren Drehsinn haben.

2. Zirkulare Polarisation:
   Ein Strahl, dessen $\vec{E}$-Feld im Betrag konstant ist, und um die Ausbreitungsrichtung kreist. Er kann als Überlagerung zweier orthogonaler, linear polarisierter Strahlen dargestellt werden, die zueinnander um 90° phasenverschoben sind.

3. Optische Achse (Kristalloptik):
   Die optische Achse ist bei einem anisotropen Kristall jene Achse, entlang derer jede Polarisationsrichtung den gleichen Brechungsindex hat.

4. Haubtschnitt:
   Der Haubtschnitt ist jene Ebene, die durch die optische Achse und die Ausbreitungsrichtung des Lichts aufgespannt wird.

5. (Außer)Ordentlicher Strahl:
   Der ordentliche Strahl eines Lichtstrahls ist jeder Teil dessen $\vec{E}$-Feld *senkrecht* zum Haubtschnitt schwingt. Beim außerordentlichen findet die Schwingung dem entsprechend in der Ebene (Haubtschnitt) statt.
   Die Brechungsindizes von ordentlichem und außerordentlichem Strahl sind jeweils n_o und n_{ao}.

Polarisationsfilter (Gesetz von Malus)

$$I' = I \cdot \cos^2(\Delta\theta)$$

Lambda/4-Plättchen

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\,\Delta n$$

Fresnel'sche Formeln

Trifft ein Lichtstrahl unter einem Winkel α zum Lot auf eine Grenzfläche zweier Medien mit Brechungszahlen n_1 und n_2, so wird er in einen reflektierten und einen gebrochenen Strahl aufgespalten. Ihre Amplituden sind durch die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Anteile an Polarisation in der Einfallsebene (Index p) und senkrecht dazu (Index n) gegeben:

$$r_n = \frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}$$
$$r_p = \frac{n_2\cos\alpha - n_1\cos\beta}{n_2\cos\alpha + n_1\cos\beta}$$
$$t_n = \frac{2n_1\cos\alpha}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}$$
$$t_p = \frac{2n_2\cos\alpha}{n_2\cos\alpha + n_1\cos\beta}$$

Anisotropie durch Spannung

Setzt man ein Material unter Spannung (Kraftvektor $\vec{F}$), kann das Material anisotrop werden. Der ordentliche Strahl ist orthogonal zu $\vec{F}$, der außerordentliche parallel.

Faraway Effekt

Linear polarisiertes Licht wird reist durch ein Material, das von einerm starken B-Feld entlang der Ausbreitungsrichtung durchsetzt ist. Es wird dabei um einen Winkel $\alpha = V\,L\,B$, V = Verdet-Konstante gedreht. Es lässt sich erklären, wenn man das linear polarisierte Licht als Überlagerung zweier zirkular polarisierter Strahlen betrachtet. Die beiden Wellen regen Elektronen zu einer Kreisbahn an, die einen Dipolmoment erzeugt, der je nach Richtung energetisch günstig oder ungünstig im B-Feld liegt.

Kerr-Effekt

Equivalent zum Faraway Effekt, jedoch wird hier ein E-Feld angelegt. Es bildet sich erneut ein anisotropes Material, da das äußere E-Feld die Schwingungseigenschaften der Elektronen beeinflusst. Die optische Achse liegt entlang der E-Feld Richtung. Die Erzeugung von Dipolen ist proportional zu E, und die Ausrichtung der Dipole auch, insgesamt also $\propto E^2$:

$$\Delta n = n_{ao} - n_o = K\lambda E^2 \ , \ K = \text{Kerr-Konstante}$$
$$\Delta\phi = 2\pi L K E^2$$

Pockels-Effekt

Wie Kerr-Effekt, jedoch linear in E. Der Effekt ist um mindestens eine Größenordnung stärker als der Kerr-Effekt, bei gleicher Feldstärke. Der Effekt ist stark Richtungsabhängig.

$$\Delta n = n_{ao} - n_o = n^3 r_{\text{eff}} E$$
$$r_{\text{eff}} = \text{effektiver elektrischer Tensor}$$

Spiegel-Isomerie

Eine Lösung mit chiralen Molekülen dreht den Winkel des einfallenden linear polarisierten Licht.

$$\alpha = [\alpha]_\lambda^T \cdot \beta \cdot L$$
$$[\alpha]_\lambda^T = \text{spezifischer Drehwinkekl}$$
$$\beta = \text{Konzentration}$$

6 Quantenphysik

6.1 De-Broglie-Wellenlänge

$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k} \to \lambda = \frac{h}{p}$$

6.2 Planksche Strahlungsformel / Schwarzkörperstrahlung

$$P(\nu) = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

6.3 Compton-Effekt

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

6.4 Wellenfunktion

In der Quantenphysik dreht sich alles um die Wellenfunktion ψ/Ψ, denn sie trägt alle existierenden Informationen über ein System gleichzeitig in sich. Beobachtbare Größen werden durch lineare, hermitische Operatoren beschrieben, welche auf die Wellenfunktion wirken können. Die Eigenvektoren eines solchen $\hat{A}\,|A_n\rangle = A_n\,|A_n\rangle$ formen eine vollständige, orthonormale Basis. Hat man sich eine passende Basis ausgesucht, kann die Wellenfunktion dieser entwickelt werden als $|\psi\rangle = \sum_n |E_n\rangle\,\langle E_n|\psi\rangle$. Die Koeffizienten vor jedem Basisvektor, haben nach der Born-Regel eine wichtige physikalische Bedeutung: Ihr Norm-Quadrat entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung der dem Basisvektor zugehörige Eigenwert gemessen wird.

Schrödinger Gleichung

Die Schrödinger Gleichung definiert dem Hamiltonoperator in Orts-Koordinaten, und kann daher verwendet werden, um die Wellenfunktion eines Systems zu finden.
Zeitunabhängig:

$$\hat{H}\,|\Psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\,|\psi\rangle + V\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$$

mit

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n A_n e^{-iE_n t/\hbar}\,|\psi_{E_n}\rangle$$

Zeitabhängig:

$$\hat{H}\,|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle$$

Eine physikalische Wellenfunktion ψ ist normierbar. Für ein Potenzial $V(x) =\propto \delta(x)$ ist die Wellenfunktion in Orts-Basis stetig, für eine unstetiges Potenzial sie stetig diffbar, und für ein stetiges Potenzial zweimal diffbar.

6.5 Operatoren

Bra

Der Bra $\langle\phi|$ wirkt auf einen Vektor $|\psi\rangle$ wie ein hermitisches Skalarprodukt mit dem Vektor $|\phi\rangle$:

$$\langle\phi|\,|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle = \int \overline{\phi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

Hermitisches Konjugat

Das hermitische Konjugat $A^\dagger$ eines Operators $\hat{A}$, ist definiert als:

$$\langle\psi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\psi|\psi\rangle$$

Ist der Operator eine Matrix, berechnet sich das hermitische Konjugat als $\hat{M}^\dagger = \overline{\hat{M}^T}$. Gilt für einen Operator, dass $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, so nennt man in hermitisch.

Unitäre Operatoren

Ein Operator ist zudem unitär, wenn die Tranformation das Skalarprodukt erhält.

$$\langle\phi|\psi\rangle \overset{!}{=} \langle\hat{U}\phi|\hat{U}\psi\rangle = \langle\phi|\hat{U}^\dagger\hat{U}\psi\rangle$$
$$\implies \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{I}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\jmath} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Kommutator

Der Kommutator ist definiert als:

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Man sagt, dass zwei Operatoren miteinander kommutieren, wenn $[\hat{A},\hat{B}] = 0$.

Erwartungswert

Der Erwartungswert $\langle A\rangle$ eines Operators $\hat{A}$ errechnet sich als:

$$\langle A\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

Standartabweichung

Für nicht kommutierende Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist die Standardabweichung $\Delta A, \Delta B$ gegeben durch:

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi|(\hat{A}-\langle A\rangle)^2\psi\rangle = \left\langle A^2\right\rangle - \left\langle A\right\rangle^2$$

Wichtige Operatoren

1. Die Identität $\mathbb{I}$:

$$\mathbb{I} = \sum_i |i\rangle\langle i|$$

2. Zeitevolution-Operator $\hat{T}$ (für zeitinvarianten Hamiltonoperator, und Hamilton-Basis):

$$\hat{T} = e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$
$$|\psi(t)\rangle = \hat{T}\,|\psi(0)\rangle$$
$$= \sum_n |E_n\rangle\langle E_n|\psi\rangle\, e^{-iE_nt/\hbar}$$
$$= \sum_n |E_n\rangle\langle E_n|\psi\rangle\, e^{-i\omega t}$$

3. Impuls-Operator $\hat{p}$:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \text{ , Herleitung mit } \psi(x) = \int \mathrm{d}k\, e^{ikx}$$

4. Zeitunabhängiger Hamilton-Operator $\hat{E}/\hat{H}$:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$$

5. Drehimpuls-Operator $\hat{L}_i$:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}}\times\hat{\vec{p}} \qquad \text{und} \qquad \hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\,\hat{x}_j\hat{p}_k$$

Der Operator gehorcht der Drehimpuls-Algebra:

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j] = \epsilon_{ijk}\,i\hbar\,\hat{L}_k$$

6. Spin-Operator $\hat{S}_i$:

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$$
$$[\hat{S}_i,\hat{S}_j] = \epsilon_{ijk}\,i\hbar\,\hat{S}_k$$

mit den Paulimatizen σ_i, welche den vierdimensionalen Raum der hermitischen 2×2-Matrizen aufspannt.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad \sigma_{1,x} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$\sigma_{2,y} = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \qquad \sigma_{3,z} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Für sie gelten folgende nützliche Identitäten:

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\,\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$\sigma_i = \sigma_i^{-1} \qquad \text{und} \qquad [\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j] = \epsilon_{ijk}\,2i\,\sigma_k$$

6.6 Unschärfenrelationen

Die Unschärfenbeziehungen lassen sich alsgemein aus

$$\Delta A\cdot\Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$$

herleiten.

$$\Delta x_i\Delta x_j \geq 0$$
$$\Delta p_i\Delta p_j \geq 0$$

$$\Delta p_i\Delta x_j \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}$$

$$\Delta|\vec{L}|\Delta L_i \geq 0$$
$$\Delta L_i\Delta L_j > 0 \text{ , } i\neq j$$

$$\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

6.7 Zeit-Evolution von Erwartungswerten

Die zeitliche Evolution des Erwartungswertes eines Operators $\hat{A}$ ist gegeben durch das Ehrenfest-Theorem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle + \langle\partial_t\hat{A}\rangle$$

Die Herleitung ist recht einfach, an einer Stelle wird die Schrödingergleichung verwendet $\partial_t|\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle &= (\partial_t\langle\psi|)\,\hat{A}\,|\psi\rangle + \langle\psi|\,\hat{A}(\partial_t|\psi\rangle) + \langle\psi|\,(\partial_t\hat{A})\,|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left(-\hat{H}\langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle + \langle\psi|\,\hat{A}\hat{H}\,|\psi\rangle\right) + \langle\partial_t\hat{A}\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left(-\langle\psi|\,\hat{H}\hat{A}\,|\psi\rangle + \langle\psi|\,\hat{A}\hat{H}\,|\psi\rangle\right) + \langle\partial_t\hat{A}\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle + \langle\partial_t\hat{A}\rangle\end{aligned}$$

6.8 Basen

Die Schrödinger Gleichung kann in der orthonormalen Basis, einer messbaren Größe zugehörigen Operators, entwickelt werden.

Orts-Basis

Basis: $\mathcal{B} = \{|x_0\rangle = \delta(x-x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$
Entwicklung:

$$\psi(x) = \int \mathrm{d}x'\,\psi(x')\,|x'\rangle$$

Impuls-Basis

Basis: $\mathcal{B} = \left\{|p\rangle = e^{ikx} = e^{ipx/\hbar}\right\}$

$$\psi(x) = \int \mathrm{d}k\,\psi(k)e^{ikx}$$

6.9 Einfache Lösungen

Unendlicher Potentialtopf

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= A\sin\frac{n\pi x}{a} \\ E_n &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2\end{aligned}$$

Breiterer Topf $\implies$ niedrigere Grundzustandenergie

Endlicher Potentialtopf

Unendliche Potentialbarriere

$$|\psi\rangle = A\sin kx\;,\; k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

Endliche Potentialbarriere

Harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m\omega^2}{2}x^2 \\ E_n &= \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ \psi_n &\propto H_n(x)e^{-x^2}\;,\; H_n \widehat{=} \text{Hermite-Polynome}\end{aligned}$$