# Experimentalphysik III - Zusammenfassung

Luca Cordes

8. Februar 2025

## Inhaltsverzeichnis

# 1 EM-Wellen in homogener Materie

## 1.1 Maktroskopische Maxwellgleichungen

In Materie gelten die makroskopischen Maxwellgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec\nabla\cdot\vec D &= \rho_{\text{frei}} & \vec\nabla\times\vec E &= -\frac{\partial\vec B}{\partial t} \\ \vec\nabla\cdot\vec B &= 0 & \vec\nabla\times\vec H &= \vec\jmath_{\text{frei}} + \frac{\partial\vec D}{\partial t} \end{aligned}}$$

mit den elektrischen Feldstärke/Flussdichte $\vec E/\vec D$, und der magnetischen Feldstärke/Flussdichte $\vec H/\vec B$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec D &= \epsilon_0\epsilon_r\vec E & \vec B &= \mu_0\mu_r\vec H \\ &= \epsilon_0(\vec E+\vec P) & &= \mu_0(\vec H+\vec M) \end{aligned}}$$

## 1.2 Sammlung

**Allgemein:**

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec E^2 + c^2\vec B^2\right) \\ \vec S &= \vec E\times\vec H \\ I &= \langle|\vec S|\rangle \\ P_{\text{st}} &= \frac{I}{c} \\ n(\lambda) &= \frac{c_0}{c(\lambda)} = \sqrt{\mu_r\epsilon_0} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c_0}{n} \\ c_0 &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \\ n &= \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \end{aligned}$$

**Ebene Wellen:**

$$\begin{aligned} \vec E &= \operatorname{Re}\left(\vec E_0 e^{i(\vec k\vec x-\omega t)}\right) \\ \vec B &= \frac{1}{\omega}\vec k\times\vec E \\ \vec S &= \frac{1}{\mu_0\mu_r c}\vec E^2\hat k \\ w &= \epsilon_0\vec E^2 \end{aligned}$$

**Medien:**

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}V}$$
$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}V}$$
$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$
$$\mu_r = 1 + \chi_m$$
$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = c_0 \frac{k}{\omega} = n' - i\kappa = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

## 1.3 Mikroskopisches Modell in nichtleitendem Material

Im klassischen Modell regt die EM-Welle die Elektronen im Material zu erzwungenen Schwingungen an. Die DGL ist:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a(t) = -\frac{eE(t)}{m} = -\frac{e}{m} E_{\text{lok}}^0 e^{i\omega t}$$

Für eine solche Anregung ist aus der Mechanik bekannt, dass die Amplitude der angeregten Schwingung durch

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}$$
$$x_0 = -\frac{eE_{\text{lok}}^0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

gegeben ist.

Die Auslenkung um $x$ führt zu einem Dipolmoment $\vec{p}$, und bei Dichte an Dipolmomenten $N$ zu der Polarisation $\vec{P}$

$$\vec{p} = -ex \equiv \alpha \vec{E}_{\text{lok}}$$
$$\vec{P} = N\alpha \vec{E}_{\text{lok}}$$

mit $\alpha$ als Polarisierbarkeit des Materials.

Dieser Zusammenhang kann in die makroskopische Wellengleichung mit $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

eingesetzt werden, um den Brechungsindex zu berechnen:

$$n^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = c_0^2 \frac{k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}$$

speziell für das diskutierte Modell ist der Brechungsindex somit

$$\boxed{n = \sqrt{1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}}}$$

Der Brechungsindex ist also im Allgemeinen imaginär, wobei der Imaginärteil die exponentielle Absorbtion der Welle beschreibt, wie man sieht wenn man $n$ in eine Ebene Welle einsetzt:

$$\vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i\left(\frac{(n' + i\kappa)\omega}{c} x - \omega t\right)} = \vec{E}_0 e^{-\kappa k_0 x} e^{i\left(n' k_0 x - \omega t\right)}$$

Die Intensität geht dann, mit dem *Absorbtionskoeffizienten* $A$, wie

$$I(\vec{x}) = c\epsilon_0 E_0^2 e^{-2\kappa \vec{k}_0 \vec{x}} \equiv I_0 e^{-\vec{A}\vec{x}}$$
$$\boxed{A = 2\kappa k_0}$$

Für $n \approx 1$ kann man die Näherung $n^2 - 1 \approx 2(n-1)$ machen, um $n'$ und $\kappa$ explizit zu erhalten:

$$\boxed{\begin{aligned} n' &= 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ \kappa &= \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{aligned}}$$

Aufgrund der Dispersion sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in Materie verschieden:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Phasengeschwindigkeit:} \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{n'} \\ &\text{Gruppengeschwindigkeit:} \quad c = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c_0}{n' + \omega \frac{\partial n'}{\partial \omega}} \end{aligned}}$$

## 1.4 Mikroskopisches Modell in leitendem Material

In leitenden Materialien führt das E-Feld zu einem Strom $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Man erhält eine modifizierte Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

das Einsetzen einer Ebenen Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ führt dann wieder zu einem komplexen Brechungsindex

$$-k^2 = -\mu_0 \omega^2 \left(\epsilon_0 \epsilon_r - \frac{i\sigma}{\omega}\right)$$

$$\implies c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\left(\epsilon_0\epsilon_r - \frac{i\sigma}{\omega}\right)}}$$
$$\implies n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon_r - i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}}$$

und einem Zusammenhang zwischen Brechungsindex und den Materialeigenschaften $\epsilon_r$ und $\sigma$:

$$n'^2 - \kappa^2 = \epsilon_r \qquad 2n'\kappa = \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}$$

Man bezeichnet als *Eindringtiefe* oder *Skintiefe* die Strecke $\delta = 1/A$ auf der die Intensität auf $1/e$ abgefallen ist.

Für die Reaktion des Mediums auf die Welle kann die im vorherigen Teil hergeleitete Formel für den Brechungsindex verwendet werden, wenn man $\omega_0 = 0$ einsetzt. Mit $\omega_p$ als *Plasmafrequenz*:

$$\boxed{n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{1 - i\frac{\gamma}{\omega}} \text{ mit } \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}}$$

Betrachten wir nun zwei Grenzfälle:

$$\omega \ll \gamma: \qquad n' = \kappa = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2\omega\gamma}}$$
$$\omega \gg \gamma: \qquad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

An der ersten Gleichung sieht man, dass für kleine Frequenzen Realteil gleich Imaginärteil ist, und somit starke Absorbtion auftritt.

Für große Frequenzen gibt es zwei Fälle; ist $\omega \leq \omega_p$ wird der Brechungsindex rein imaginär, und die Wellen kann sich im leitendem Medium nicht ausbreiten, es kommt zur Reflektion. Für $\omega > \omega_p$ ist der Brechungsindex reell, die Absorbtion somit gering, das Material wird transparent.

# 2 EM-Wellen an Grenzflächen

## 2.1 Gesetz von Snellius

Reist ein Lichtstrahl von einem Medium $A$ mit Brechungsindex $n_A$ in ein zweites mit Brechungindex $n_B$, wird er gebrochen. Der Winkel kann mithilfe von Snell's Gesetz berechnet werden:

$$\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_A}{n_B}}$$

## 2.2 Totalreflexion

Geht eine Welle von einem optisch dichten Medium in ein optisch dünnes Medium über kann es bei großen Einfallswinkel zu sog. Totalreflexion kommen, d.h. es wird die 100% der Intensität reflektiert. Ausgehend vom Gesetz von Snellius kann man den minimal Winkel für Totalreflexion herleiten, indem man fordert, dass der Ausftrittswinkel mindestens 90° beträgt:

$$\boxed{\sin\alpha_{\min} = \frac{n_B}{n_A}}$$

## 2.3 Fresnelformeln

Es bleibt die Frage, wie sich die Intensität der einfallenden auf transmittierte und reflektierte Welle aufteilt. Zur Herleitung des korrekten Zusammenhangs, verwendet man folgende Stetigkeitsbedingungen, welche die Welle an der Grenzfläche erfüllt:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \qquad \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_1) = 0$$
$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \qquad \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Es ergeben sich für den Reflexionskoeffizient $\rho = \frac{E_r}{E_0}$ und Transmissionskoeffizienten $\tau = \frac{E_t}{E_0}$ die sog. Fresnel-Gleichungen, wobei es s- und p-Polarisation seperate Formeln gibt, und die folgenden Gleichungen nur für nicht absorbierende Medien gelten:

**s-Polarisation:**

$$\rho_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad \tau_s = 2\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

**p-Polarisation:**

$$\rho_p = -\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \qquad \tau_p = \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$$

Auch für absorbierende Medien gelten hingegen die folgenden Gleichungen:

$$\rho_s = \frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta} \qquad \tau_s = \frac{2n_1\cos\alpha}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}$$
$$\rho_p = \frac{n_2\cos\alpha - n_1\cos\beta}{n_2\cos\alpha + n_1\cos\beta} \qquad \tau_p = \frac{2n_2\cos\alpha}{n_2\cos\alpha + n_1\cos\beta}$$

Weiter gibt es für die reflektierten Wellen Phasensprünge von $\pi$ wenn $\rho$ negativ wird, und für die p-Polarisation nochmal durch die positive Definition der Schwingrichtung insgesamt ergibt sich für die Phasensprünge:

| | | $n_2 > n_1$ | $n_2 < n_1$ |
|---|---|---|---|
| p-pol: | $\alpha < \alpha_B$ | $\pi$ | 0 |
| | $\alpha > \alpha_B$ | 0 | $\pi$ |
| s-pol: | $\alpha < \alpha_B$ | $\pi$ | 0 |
| | $\alpha > \alpha_B$ | $\pi$ | 0 |

Man definiert an dieser Stelle auch noch Reflektions/Transmissionskoeffizienten für die Intensitäten:

$$R = \frac{I_R}{I_0} = |\rho|^2 \qquad T = \frac{I_T}{I_0} = |\tau|^2$$

## 2.4 Brewsterwinkel

Treffen p-polarisierte Wellen unter dem sog. Brewsterwinkel

$$\boxed{\tan \alpha_{\mathrm{B}} = \frac{n_B}{n_A}}$$

auf eine Grenzfläche, werden sie vollkommen transmittiert. Dies ist eine direkte Konsequenz der Fresnelformeln, und kann einfach verstanden werden, indem man sich vorstellt, dass die Wellen im Material zeitlich änderne Dipole induzieren. Herzsche Dipole emittieren keine Intensität in die Schwingrichtung ($I \propto \sin^2 \alpha$), beim Brewsterwinkel handelt es sich daher einfach um den Winkel, bei dem induzierte Dipolschwingungen parallel zum reflektiertem Licht sind, also $90° = \alpha + \beta$.

## 2.5 Anisotrope Medien

- **Optische Achse:** Die Achse, um die der Kristall die höhste Symmetrie hat. Für optisch einachsige Kristalle ist der Brechungsindex für alle senkrecht zur optischen Achse polarisierten Wellen gleich $n_o$.
- **Ordentlicher Strahl:** Ein Strahl, welcher senkrecht zur optischen Achse polarisiert ist. Er verhält sich in einachsigen Kristallen wie in einem isotropen Material.
- **Außerordentlicher Strahl:** Ein Strahl, welcher eine Polarisationskomponente in Richtung der optischen Achse hat (Brechungsindex $n_a$), und eine senkrecht ($n_o$). Der außerordentliche Strahl folgt im Allgemeinen nicht dem Brechungsgesetz und wird auch bei senkrechtem Einfall gebrochen.

# 3 Polarisation

## 3.1 Definitionen

- **Lineare Polarisation:**
  Ein Strahl, dessen $\vec{E}$-Feld in nur einer konstanten Ebene schwingt, z.B $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{E}e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t)}$. Er kann als Superposition zweier zirkular polarisierter Strahlen dargestellt werden, die konträren Drehsinn haben.
- **Zirkulare Polarisation:**
  Ein Strahl, dessen $\vec{E}$-Feld im Betrag konstant ist, und um die Ausbreitungsrichtung kreist. Er kann als Überlagerung zweier orthogonaler, linear polarisierter Strahlen dargestellt werden, die zueinnander um 90° phasenverschoben sind.

  $$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$
- **Elliptische Polarisation:** Alle anderen Polarisationen klassifiziert man als elliptisch. Jede elliptische Polarisation lässt sich darstellen als eine zirkulare Polarisation, bei der die Sinus und Cosinus Schwingungen verschiedene Amplituden haben.
- **Polarisationsgrad:** Man definiert den Polarsationsgrad bezüglich einer bestimmen Richtungs als

  $$\Pi = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\parallel + I_\perp}$$

## 3.2 Erzeugung

- **Brewstereffekt**
- **Dichroismus:** in Effekt bei dem eine selektive Absorption einer der beiden orthogonalen Komponenten des E-Feldes stattfindet
- **Pol-Filter:** Film aus langkettigen Kohlenwasserstoffmolekülen, die durch eine Streckung des Films ausgerichtet werden. Auch auf diese Weise entsteht Dichroismus, denn die Elektronen können sich entlang der ausgerichteten Molekülketten leicht bewegen und der zu den Ketten parallelen Komponente der Lichtwelle Energie entziehen.

- **Doppelbrechende Polarisatoren** (z.B. Nicol-Prisma)

## 3.3 Veränderung der Polarisation

Wir betrachten Plättchen, die so aus einem anisotropen Kristall geschnitten wurden (parallel zur optischen Achse), das Licht welches linear in x-Richung polarisiert ist, den Brechungsindex $n_o$ erfährt, für in y-Richtung polarisiertes $n_a$. Nach Durchlaufen einer Dicke $d$ des Plättchen ist die Phasendifferenz zwischen den Komponenten dementsprechend

$$\Delta\phi = k_0 d \Delta n$$

- **$\lambda/4$-Plättchen:** Wählt man zu einer gegebenen Wellenlänge die Dicke so, dass $\Delta\phi = 90°$, also $d = \frac{\lambda_0}{4\Delta n}$, dann wird in einem 45° Winkel eintretendes linear polarisiertes Licht zu zirkular polarisiertem Licht umgewandelt. Analog wird aus zirkularer Polarisation lineare.
- **$\lambda/2$-Plättchen:** Wählt man die Diche so, dass $\Delta\phi = 180°$, dann wird für linear polarisiertes Licht die Polarisationsebene entlang der optischen Achse gespiegelt, während zirkular polarisiertes Licht die Drehrichtung wechselt.
- **Optische aktive Flüssigkeit:** Eine optisch aktive Flüssigkeit besteht in der Regel aus chiralen Molekülen, welche verschiedene Brechungsindizes für rechts- und linksdrehendes Licht aufweist. Ein linear polarisierter Strahl dreht beim durchqueren seine Polarisationsebene.

# 4 Wellenoptik

Eine ebene Welle wird mathematisch beschrieben durch:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Im} \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \text{ , } \mathbf{E}_0, \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3 \in \mathbb{C}^3$$

Im Amplitudenvektor $\vec{E}_0$ steckt die Amplitude als $|E_{0,i}|$ und die Phasenverschiebung als $\arg \vec{E}_{0,i}$. Damit beschreibt sie auch die Polarisation.

## 4.1 Interferenz

Zwei oder mehr Wellenzüge überlagern sie sich nach dem Superpositionsprinzip. Die Observable der Intensität $\langle I \rangle = \epsilon_0 c \langle \vec{E}^2 \rangle$ kann bei kohärentem Licht konstruktiv oder destruktiv interferieren, es ergibt sich die folgende mittlere Intensität:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle I \rangle &= \left\langle I_1 \right\rangle + \left\langle I_2 \right\rangle + \left\langle I_{12} \right\rangle \\ \langle I_{12} \rangle &= 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos(\Delta\phi) \end{aligned}}$$

## 4.2 Kohärenz

- **Kohärenzzeit:** Zeitspanne $\Delta t_c$ in der sich die Phasendifferenz $\Delta\phi(\vec{r},t) = \phi_1(\vec{r},t) - \phi_2(\vec{r},t)$ um weniger als $2\pi$ ändert. Man definiert hier auch die Kohärenzlänge $\Delta l_c = c \cdot \Delta t_c$.
- **Kohärenzlänge:** Wenn sich die Phasendifferenz jeder Teilwelle $i$, $\Delta\phi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_i(\vec{r}_1, t) - \psi_i(\vec{r}_2, t)$ an zwei Punkten während des eines Zeitraumes um weniger als $2\pi$ ändert dann spricht man von räumlicher Kohärenz zwischen den beiden Punkten.
- **Kohärenzlänge realer Lichtquellen** Die Emission eine Wellenzuges durch ein angeregtes Atom dauert ca. 1 bis 10ns ($= \Delta t_c$). In einem Wellenzug koexistieren verschiedene Frequenzen, die einer Verteilung folgen. Man nennt $\Delta f = \frac{1}{\Delta t_c}$ die Frequenzbreite. Die Kohärenzlänge lasst sich in erster Näherung berechnen als $l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

## 4.3 Spalte und Gitter

**Einzelspalt:**

Die Intensität ergibt sich als:

$$I_{\text{Einzelspalt}}(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)^2}$$

Für Maxima/Minima müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \sin\theta_{\max} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} \\ \sin\theta_{\min} &= \frac{n\lambda}{d} \end{aligned}$$

**Doppenspalt**

Die Intensität ergibt sich im allgemeinen Fall als die Intensitätsverteilung für einen Doppelspalt mit

Spaltbreite $b = 0$, welche moduliert wird durch die Verteilung eines Einzelspaltes $I = I_{\text{Doppelspalt},\, b=0} \cdot I_{\text{Einzelspalt}}$:

$$I_{\text{Doppelspalt}}(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)^2} \frac{\sin^2\left(2\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

Für Maxima/Minima müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\sin\theta_{\max} = \frac{n\lambda}{d}$$
$$\sin\theta_{\min} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$

**Gitter**

Die Intensität ergibt sich mit der Spaltanzahl $N$ als:

$$I_{\text{Gitter}}(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)^2} \frac{\sin^2\left(N\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

Für Maxima/Minima müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\sin\theta_{\max} = \frac{n\lambda}{d}$$
$$\sin\theta_{\min} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$
$$\sin\theta_{1.\ \text{Nebenmin}} = \left(n + \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

**Maximale Ordnung**

Es gibt eine maximale abgebildete Ordnung, denn $1 \geq \sin\alpha$. Für den Doppelspalt/Gitter würde sich ergibt sich z.B. für die maximale Ordnung der abgebildeten Maxima $n_{\max} = \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor$.

**Überlappung von Spektren**

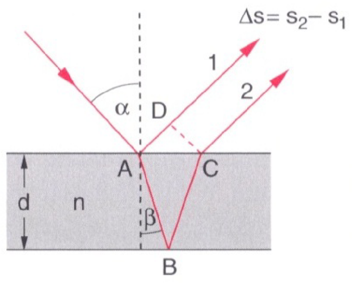
Die Spektren zweier benachbarter Ordnungen überlappen sich, wenn $\theta_{\max}(\lambda_{\max}, n) > \theta_{\max}(\lambda_{\min}, n+1)$ gilt. Für Doppelspalt und Gitter ergibt sich damit Überlappung für:

$$n > \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}$$

**Rayleighkriterium**

Zwei Wellenlängen $\lambda$ und $\lambda+\Delta\lambda$ können getrennt werden, sobald das Maximum zu $\lambda + \Delta\lambda$ im ersten benachbarten Minimum liegt. Für ein Gitter ergibt sich damit: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN$.

## 4.4 Interferenz an dünnen Schichten




Die optische Weglängen differenz ist

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$$

Zusätzlich erfahren die relektierten Strahlen Phasensprünge. Insgesamt erhält man maximale Intensität der Reflexion für

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Die transmittierte Strahlung hat die gleiche optische Weglängendifferenz, erfährt aber keine Phasensprünge. Maximale Transmission tritt auf bei:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = m\lambda$$

## 4.5 Vielstrahlinterferenz an einer dünnen Platte

Berücksichtigt man viele interne Reflextionen und vernachlässigt die Absorbtion ergeben sich für reflektierte und transmittierte Intensität die sog. Airy-Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} I_R &= I_0 \frac{F\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}{1 + F\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}} \\ I_T &= I_0 \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}} \\ F &\equiv \frac{4R}{(1-R)^2} \end{aligned}}$$

## 4.6 Fabry-Perot-Interferometer

Das Fabry-Perot-Inteferometer hat einen solchen Aufbau, dass die Airyformeln anwendbar sind. Es gibt somit maximale Transmission für

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = m\lambda$$

Der Transmissionskoeffizient ist als Funktion der Frequenz periodisch mit der Halbwärtsbreite

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{c}{2nd}\frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}}$$

Man definiert in diesem Zusammenhang auch noch die Finesse $F$, ein Maß dafür wie breit die Resonanzpeaks sind, im Verhältnis zu dem Abstand von zwei Peaks $\delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m$

$$\boxed{F = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}}$$

## 4.7 Dielektrische Spiegel

## 4.8 Antireflexbeschichtung

## 4.9 Beugungsphänomene

### Frauenhofer Beugung

Abstand des Objektes zum Schirm groß → Stahlen annähernd parallel → Beugungsbild nur Richtungsabhängig.

### Fresnel Beugung

Abstand des Objektes zum Schirm *nicht* groß → Stahlen nicht parallel → Beugungsbild Distanz und Richtungsabhängig.

### Fresnel-Kirchhoff'sches Beugungsintegral

Die Amplitude und Phase auf einem Schirm ($z = 0$) sei durch $\vec{E}_0(x, y)$ und $\phi(x, y)$ gegeben. Dann ist die Amplitude an einem Punkt $P = (x, y, z)^T$:

$$\vec{E}_P(x,y,z) = \iint\limits_{z=0} K(\beta)\frac{\vec{E}_0(x',y')}{r_A}e^{i(\phi(x',y')-kr_A)}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$$
$$\text{mit } r_A = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$$

### Fresnel-Linse

$$\text{Radien:} \qquad r_n = \sqrt{n\lambda f + \frac{n^2\lambda^2}{4}} \overset{f\gg n\lambda}{\approx} \sqrt{n\lambda f}$$

### Lochblende

Position der ersten Minima und Maxima hinter einer Lochblende. Angegeben sind die Werte für $\frac{kD}{2\pi}\sin\theta_{min}$ bzw. $\frac{kD}{2\pi}\sin\theta_{max}$. Außerdem ist die Intensität der Nebenmaxima im Verhältnis zum zentralen Maximum angegeben.

| | 1. Ordnung | 2. Ordnung | 3. Ordnung |
|---|---|---|---|
| Minimum | 1,2197 | 2,2331 | 3,2383 |
| Maximum | 1,6347 | 2,6793 | 3,6987 |
| $I_{max}/I_0$ | 0,0175 | $4{,}16 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}60 \cdot 10^{-3}$ |

### Rayleigh-Kriterium

Die maximale Auflösung eines optischen Systems ist durch Beugungseffekte am Rand der Linse fundamental beschränkt. Das Rayleigh-Kriterium definiert die minimale auflösbare Winkeldistanz als die Winkeldistanz bei der sich das Beugungsminimum erster Ordnung, des einen Objektes, mit dem Beugungsmaximum erster Ordnung, des anderen Objektes, überlappen würde. Für eine Lochblende gilt:

$$\sin\theta_{min} = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad \Longrightarrow \qquad r_{min} = 1.22\frac{f\lambda}{D}$$

### Babinet'sche Prinzip

Das Babinet'sche Prinzip besagt, dass die Beugungsbilder zueinander komplementärer Blenden außerhalb des Bereiches, der durch die geometrische Abbildung be- leuchtet wird gleich ist.

## 4.10 Polarisations Effekte

### Definitionen

- **Lineare Polarisation:**
  Ein Strahl, dessen $\vec{E}$-Feld in nur einer konstanten Ebene schwingt, z.B $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{E}e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t)}$. Er kann als Superposition zweier zirkular polarisierter Strahlen dargestellt werden, die konträren Drehsinn haben.

- **Zirkulare Polarisation:**
  Ein Strahl, dessen $\vec{E}$-Feld im Betrag konstant ist, und um die Ausbreitungsrichtung kreist. Er kann als Überlagerung zweier orthogonaler, linear polarisierter Strahlen dargestellt werden, die zueinander um 90° phasenverschoben sind.

- **Optische Achse (Kristalloptik):**
  Die optische Achse ist bei einem anisotropen Kristall jene Achse, entlang derer jede alle orthogonale Polarisationsrichtungen den gleichen Brechungsindex haben.

- **Haubtschnitt:**
  Der Haubtschnitt ist jene Ebene, die durch die optische Achse und die Ausbreitungsrichtung des Lichts aufgespannt wird.

- **(Außer)Ordentlicher Strahl:**
  Der ordentliche Teil eines Lichtstrahls ist jeder Teil dessen $\vec{E}$-Feld parallel zur optischen Achse schwingt. Die Brechungsindizes von ordentlichem und außerordentlichem Strahl sind jeweils $n_o$ und $n_{ao}$.

**Polarisationsfilter (Gesetz von Malus)**

$$I' = I \cdot \cos^2(\Delta\theta)$$

**Lambda/4-Plättchen**

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\,\Delta n$$

**Fresnel'sche Formeln**

Trifft ein Lichtstrahl unter einem Winkel $\alpha$ zum Lot auf eine Grenzfläche zweier Medien mit Brechungszahlen $n_1$ und $n_2$, so wird er in einen reflektierten und einen gebrochenen Strahl aufgespalten. Ihre Amplituden sind durch die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Anteile an Polarisation in der Einfallsebene (Index p) und senkrecht dazu (Index n) gegeben:

$$r_n = \frac{n_1 \cos\alpha - n_2 \cos\beta}{n_1 \cos\alpha + n_2 \cos\beta}$$
$$r_p = \frac{n_2 \cos\alpha - n_1 \cos\beta}{n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta}$$

$$t_n = \frac{2n_1 \cos\alpha}{n_1 \cos\alpha + n_2 \cos\beta}$$
$$t_p = \frac{2n_2 \cos\alpha}{n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta}$$

**Anisotropie durch Spannung**

Setzt man ein Material unter Spannung (Kraftvektor $\vec{F}$), kann das Material anisotrop werden. Der ordentliche Strahl ist orthogonal zu $\vec{F}$, der außerordentliche parallel.

**Faraway Effekt**

Linear polarisiertes Licht wird reist durch ein Material, das von einerm starken B-Feld entlang der Ausbreitungsrichtung durchsetzt ist. Es wird dabei um einen Winkel $\alpha = V\,L\,B$, $V =$ Verdet-Konstante gedreht. Es lässt sich erklären, wenn man das linear polarisierte Licht als Überlagerung zweier zirkular polarisierter Strahlen betrachtet. Die beiden Wellen regen Elektronen zu einer Kreisbahn an, die einen Dipolmoment erzeugt, der je nach Richtung energetisch günstig oder ungünstig im B-Feld liegt.

**Kerr-Effekt**

Equivalent zum Faraway Effekt, jedoch wird hier ein E-Feld angelegt. Es bildet sich erneut ein anisotropes Material, da das äußere E-Feld die Schwingungseigenschaften der Elektronen beeinflusst. Die optische Achse liegt entlang der E-Feld Richtung. Die Erzeugung von Dipolen ist proportional zu $E$, und die Ausrichtung der Dipole auch, insgesamt also $\propto E^2$:

$$\Delta n = n_{ao} - n_o = K\lambda E^2 \text{ , } K = \text{Kerr-Konstante}$$
$$\Delta\phi = 2\pi L K E^2$$

**Pockels-Effekt**

Wie Kerr-Effekt, jedoch linear in $E$. Der Effekt ist um mindestens eine Größenordnung stärker als der Kerr-Effekt, bei gleicher Feldstärke. Der Effekt ist stark Richtungsabhängig.

$$\Delta n = n_{ao} - n_o = n^3 r_{\text{eff}} E$$
$$r_{\text{eff}} = \text{effektiver elektrischer Tensor}$$

**Spiegel-Isomerie**

Eine Lösung mit chiralen Molekülen dreht den Winkel des einfallenden linear polarisierten Licht.

$$\alpha = [\alpha]_\lambda^T \cdot \beta \cdot L$$
$$[\alpha]_\lambda^T = \text{spezifischer Drehwinkekl}$$
$$\beta = \text{Konzentration}$$

# 5 Strahlenoptik

## 5.1 Fermat's Prinzip

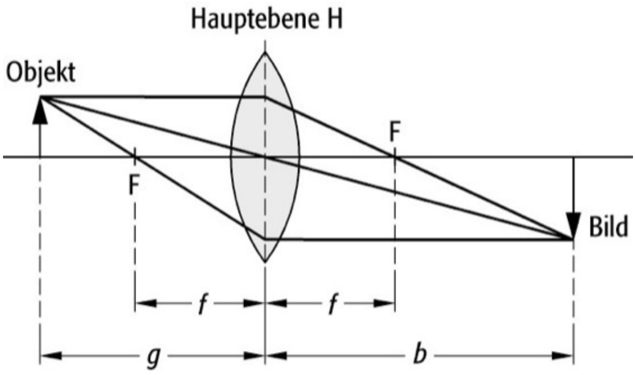
Die geometrische Optik lässt sich mathematisch elegant beschreiben wenn man den Lichtweg $L = \int |\vec{r}(t)| \cdot n(\vec{r}(t))\, \mathrm{d}t$ definiert. Er ist der normale Weg, gewichtete mit dem lokalen Brechungsindex. Das Licht nimmt immer den Weg, der den Lichtweg extremal werden lässt. Zur Erinnerung: Es gilt $n = \frac{c}{v}$
Der Weg des Lichts kann daher formal mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen beschrieben werden als:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}}\ , \text{ mit } \mathcal{L} = |\vec{r}(t)| \cdot n(\vec{r}(t))$$

## 5.2 Allgemeine Definitionen

| | |
|---|---|
| Gegenstandsweite: | $g \cong$ Gegenstandsweite |
| Bildweite: | $b \cong$ Bildweite |
| Gegenstand: | $G \cong$ Gegenstand |
| Bild: | $B \cong$ Bild |
| Brennweite: | $f, f' \cong$ Brennpunkt |
| Brechkraft: | $D = \frac{1}{f}$ |
| Abbildungsmaßstab: | $\Gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ |
| Deutliche Sehweite: | $s_0 = 25\,\mathrm{cm}$ |
| Winkelvergrößerung: | $V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ |
| Numerische Apperatur: | $A_N = n \sin \alpha$ |
| Öffnungsverhältnis: | $F = \frac{f}{D_{\text{Öffnung}}}$ |

Eine positive/negative Bildweite $b$ zeigt ein reelles/virtuelles Bild an. Ein positives/negatives Bild $B$ zeigt eine aufrechtes/verkehrtes Bild an. Eine positive/negative Brennweite $f$ zeigt einen reellen/virtuellen Brennpunkt an.




## 5.3 Listing'sche Strahlenkonstruktion

- **Haubtstrahl:** Trifft auf die Mitte der Linse, die Symmetrie fordert, dass der Strahl bei Linsen gerade durch geht, und bei Spiegeln mit Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel reflektiert wird.
- **Achsenparallele:** Geht vom Gegenstand parallel zur optischen Achse. Wird in paraxialer Näherung auf den Brennpunkt gebrochen (Linsen), bzw. zum Brennpunkt hin oder weg gespiegelt (Spiegel).
- **Brennstrahl:** Analog zum Knotenpunktstrahl.

Für mehrere Linsen in einer Reihe, wird erst der (virtuelle) Bildpunkt der ersten Linse konstruiert, anhand dessen dann der nächste Bildpunkt konstruiert wird. Darf man sich die Gegenstandsweite auswählen, ist es meist sinnvoll diese als $g = 2f$ zu wählen, da dann $g = b = 2f$ und der Abstand zwischen Gegenstand und Bild minimal ist.

## 5.4 Dünne Linsen in paraxialer Näherung

**Linsengleichungen:**

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{g} = \frac{B}{G}$$

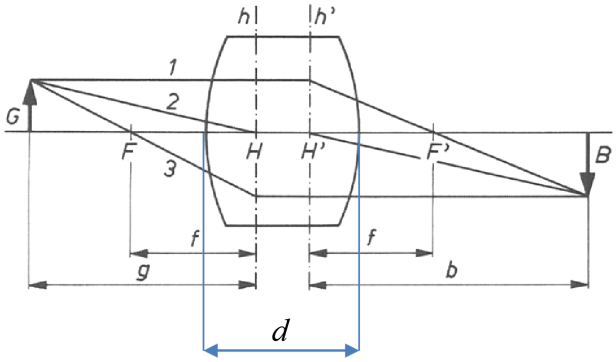
Diese Gleichung gilt auch für Spiegel. Für einen konvexe Spiegel ist die Brennweite negativ, virtuelle Bilder haben eine negative Bildweite.

**Linsenmachergleichung:**

$$D = \frac{n_0}{f} = (n_L - n_0)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

**Brechkraft eines optischen Systems:**

$D = D_1 + D_2 - dD_1D_2$ , mit $d \cong$ Distanz zwischen Linse




## 5.5 Dicke Linsen

**Linsenmachergleichung:**

$$D = \frac{n_0}{f} = (n_L - n_0)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n_L - n_0)^2}{n_L}\frac{d}{r_1 r_2}$$

**Haubtebenen:**

$$h_1 = \frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{fd}{r_2} \qquad h_2 = -\frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{fd}{r_1}$$

**Newtonsch'sche Abbildungsgleichung**

$$z \cdot z' = f_B \cdot f_G$$

**Haubtebenen**

Bei dicken Linsen definiert man die sog. Haubtebenen, anhand denen die Strahlen weiterhin konstruiert werden können. Alle Größen wie $b, g$ und $f$ beziehen sich nun auf die jeweilige Haubtebene. Die Konstruktion mit Haubteben funktioniert wie folgt:

- **Achsenparallele:** Ein Strahl aus dem Objektpunkt ($G$), breitet sich parallel ($p$) zur optischen Achse bis $H$ aus, dann parallel zur optischen Achse mit $H'$ und dann durch $f'$.
- **Haubtstrahl:** Ein Strahl vom Objektpunkt aus auf den Schnittpunkt der Haubtebene $H$ mit der optischen Achse fällt (symmetrisch/$s$), breitet sich bis $H$ aus, dann Achsenparallel bis $H'$, und schließlich parallel zum ersten Strahl ($s$) weiter.
- **Brennpunktstrahl:** Ein Strahl aus dem Objektpunkt welcher durch den objektseitigen Brennpunkt $f$ geht, breitet sich bis $H$ aus, dann parallel zur optischen Achse bis $H'$ und dann weiter parallel zur optischen Achse.

Kompakt kann man die Regel für Achsenparallele/Haubtstrahl und Brennpunktstrahl kompakt zusammenfassen zu:

$$G \xrightarrow{\text{p/s/}f} H \xrightarrow{\text{p}} H' \xrightarrow{f'\text{/s/p}} \infty$$

## 5.6 Matrizen-Optik

Sind vom Gegenstandspunkt aus gesehen, die vom Licht durchlaufenden Strecken $s_1, s_2, \ldots, s_n$, so ist die korrekte Matrix gegeben durch $M_n \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1$. Die Matrizen müssen somit anderrum multipliziert werden. Ein optisches Gerät ist dann scharf eingestellt wenn $M \cdot (0, \alpha)^T = (0, \beta)^T$.

Zustandsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}$

Freie Ausbreitung: $\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{n_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

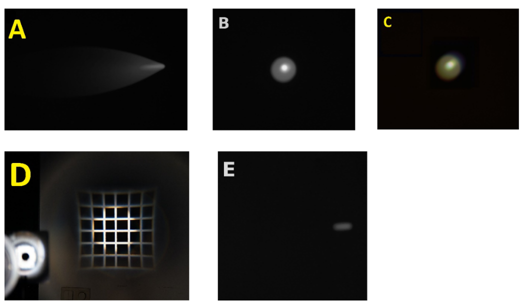
Brechung: $\mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0 - n_L}{R} & 1 \end{pmatrix}$

Dünne Linse: $\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix}$

Dicke Linse:

$$\mathbf{M}_{\bar{L}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{d}{R_1} & \frac{d}{n_L} \\ -D & 1 + \frac{n_L - n_0}{n_L}\frac{d}{R_2} \end{pmatrix}$$

## 5.7 Bildfehler



**A. Koma:**

Parallele Lichtstrahlen fallen in einem Winkel auf die Linse. Das Koma ist die Überlagerung zweier anderer Bildfehler, dem Astigmatismus und der Sphärischen Abberation.

**B. Sphärische Abberation/Öffnungsfehler:**

Dieser Bildfehler entsteht dadurch, dass die Kugel nicht die mathematisch perfekte Form ist um parallele Lichtbündel auf einen Punkt zu fokossieren; dies währe ein Paraboloid. Die Kugel ist achsenfern stärker gekrümmt als die Parabollinse, und hat daher dort eine stärkere Brechkraft. Der Fokuspunkt von achsenfernen Licht liegt folglich näher an der Linse.

**C. Chromatische Abberation:**

Die Ursache der chromatischen Abberation ist, dass die Brechkraft der Linse eine Funktion der Wellenlänge des Lichts ist. Folglich werden verschiedene Wellenlängen auf verschiedene Brennpunkte fokossiert. Ein Linsensystem das keine chromatische Abberation aufzeigt (zumindest in erster Ordung), also $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial n(\lambda)} = 0$, nennt sich Achromat.

**D. Verzeichung:**

Verzeichnung ist ein Lagefehler und bedeutet, dass die Bildhöhe (Abstand eines Bildpunktes vom Bildzentrum) auf nichtlineare Weise von der Höhe des entsprechenden Objektpunktes abhängt. Man kann auch sagen: Der Abbildungsmaßstab hängt von der Höhe des Objektpunktes ab.h Es können sowohl kissenförmige als auch tonnenförmige Verzeichungen entstehten.

**E. Astigmatismus:**

Astigmatismus tritt bei ßchiefen Strahlen" auf. die Ursache ist, dass das Strahlenbündel entlang der Maridional- und der Sagittalebene unterschiedlich stark gebrochen wird.

## 5.8 Winkelvergrößerung

**Definition:**

$$\boxed{V = \frac{\text{Winkel mit Instrument}}{\text{Winkel ohne Instrument}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

**Lupe:** Die Lupe ist das wohl einfachste optische Instrument. Sie besteht aus einer Sammellinse, wobei für ein aufrechtes Bild die Gegenstandsweite kleiner als die Brennweite sein muss $g \leq f$. Im Fall dass $g = f$ ensteht das Bild im unendlichen, sodass es vom entspannten Auge betrachtet werden kann. In diesem Ideal ergibt sich als Winkelvergrößerung:

$$\boxed{V = \frac{s_0}{f}}$$

**Mikroskop:** Das Mikroskop besteht aus zwei Teilen: Ein **Objektiv**, das ein reelles, vergrößertes Zwischenbild erzeugt (Vergrößerung $V = B/G > 1$ für $f < g < 2f$), und einem **Okular** welches praktisch eine Lupe ist, mit der man das Zwischenbild betrachtet. Man muss darauf achten, dass die Tubuslänge auch tatsächlich lang genug ist, damit dass Zwischenbild zwischen den beiden Linsen entsteht.

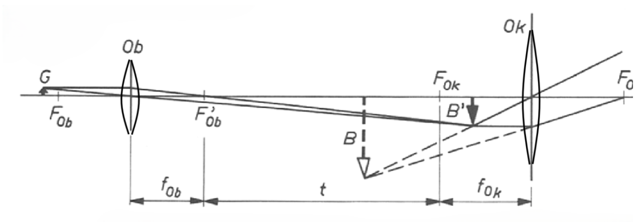



Abbildung 1: Skizze eines Mikroskop

Die Vergrößerung ergibt sich als:

$$\Gamma_{\text{ob}} \approx \frac{t}{f_{\text{oqb}}} \text{ , mit } t \hat{=} \text{Tubuslänge}$$

$$V_{\text{ok}} = V_{\text{Lupe}} = \frac{s_0}{f_{\text{ok}}}$$

$$\boxed{V_{\text{Mikroskop}} = \Gamma_{\text{ob}} V_{\text{ok}} = \frac{t s_0}{f_{\text{ob}} f_{\text{ok}}}}$$

**Teleskop:** Ein einfaches Teleskop besteht aus zwei Linsen, dessen Brennpunkte ineinander liegen. Dadurch erzeugt das Objektiv ein reelles Zwischenbild, welches man durch das Okular, wie durch eine Lupe, vergrößert betrachtet.

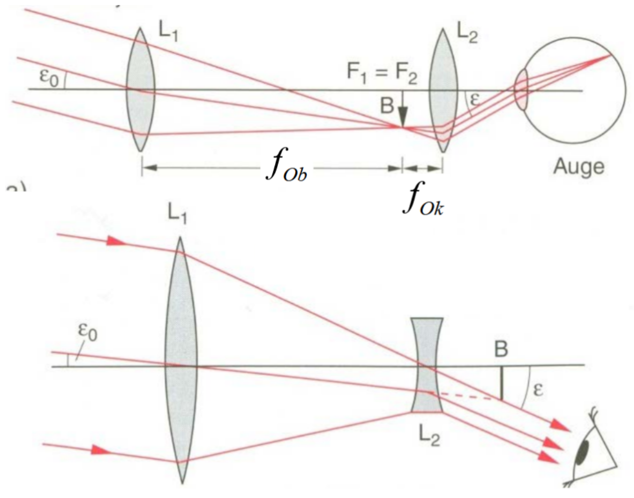



Abbildung 2: Skizzen von 1. einem Kepler-Fernrohr, und 2. eines Galiler-Fernrohrs

Man kann der Skizze entnehmen, dass

$$\varepsilon = \frac{B}{f_{\text{ok}}}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{B}{f_{\text{ob}}}$$

sodass sich die Winkelvergrößerung insgesamt ergibt als:

$$\boxed{V_{\text{Teleskop}} = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}}$$

### 5.9 Lichtstärke

Man kann zeigen, dass die Lichtintensität in der Bildebene proportional ist zu:

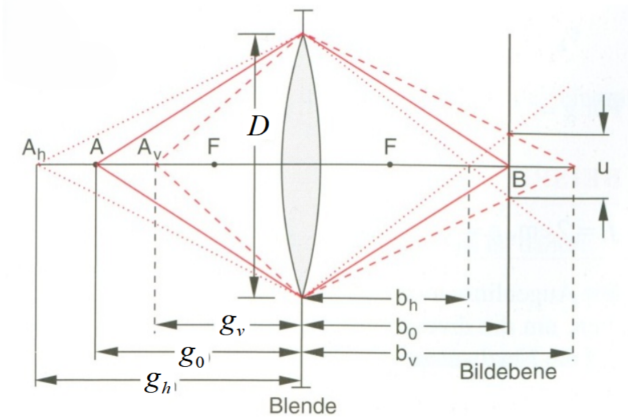
$$\boxed{I \sim \frac{1}{F^2} = \left(\frac{D}{f}\right)^2} \tag{1}$$

Wobei $F$ die sog. Blendenzahl ist.

### 5.10 Schärfentiefe

Immer wenn $g$ nicht die Linsengleichung erfüllt, entsteht in der Bildebene kein Punkt sondern ein kleines Scheibchen, das Bild ist also nicht mehr scharf. Solange diese Scheibchen aber kleiner sind als die Größe eines Sensorpixels $u$, ist diese Unschärfe nicht warnehmbar. Es gibt somit einen Bereich $g_\nu < g_0 < g_h$ in dem das Bild scharf erscheint.

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta g_\nu &= g_0 - g_\nu = \frac{uFg_0^2}{b_0 f + uFg_0} \\ \Delta g_h &= g_h - g_0 = \frac{uFg_0^2}{b_0 f - uFg_0} \end{aligned}}$$




## 6 Optik der Atmossphäre

### 6.1 Gebogener Lichtstrahl

### 6.2 Fata Morgana

### 6.3 Regenbogen

## 7 Fotometrie

### 7.1 Allgemein

| Strahlungsphysikalische Größen | | | Lichttechnische Größen | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Name** | **Definition** | **Einheit** | **Name** | **Definition** | **Einheit** |
| Strahlungsfluss | $\Phi_E$ | 1 W | Lichtstrom | $\Phi_V$ | 1 lm |
| Strahlungsmenge | $Q_E = \int \Phi_E dt$ | 1 J | Lichtmenge | $Q_V = \int \Phi_V dt$ | 1 lms |
| Strahlstärke | $I_E = \frac{d\Phi_E}{d\Omega}$ | $1\,\frac{\text{W}}{\text{sr}}$ | Lichtstärke | $I_V = \frac{d\Phi_V}{d\Omega}$ | 1 cd |
| Strahldichte | $L_E = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\Phi_E}{dA\,d\Omega}$ | $1\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{sr}}$ | Leuchtdichte | $L_V = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\Phi_V}{dA\,d\Omega}$ | $1\,\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$ |
| Bestrahlungsstärke | $E_E = \frac{d\Phi_E}{dA}$ | $1\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ | Beleuchtungsstärke | $E_V = \frac{d\Phi_V}{dA}$ | 1 lx |
| | | | Belichtung | $H_V = \int E_V dt$ | 1 lxs |

## 7.2 Gesetze

**Stefan-Boltzmann-Gesetz:**

Gibt die Strahlungsleistung als Funktion von Fläche $A$, Temperatur $T$ und der Bolzmannkonstante $\sigma$ an:

$$\boxed{\Phi_E = \sigma \cdot A \cdot T^4}$$

**Wien'sches Verschiebungsgesetz:**

Ist $\lambda_{\text{max}}$ die Wellenlänge, bei der die Emission eines Schwarzerkörpers die maximale Intensität zeigt, so gilt:

$$\boxed{\lambda_{max} \cdot T = \text{const.} = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{m K}}$$

**Rayleigh-Jean-Gesetz:**

Das Rayleigh-Jean-Gesetz beschreibt die Abstrahlungsleistungspektrum bei hohen Wellenlängen:

$$\boxed{M_E(\lambda) := \frac{\mathrm{d}\Phi_E(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = 2\pi kc \frac{T}{\lambda^4}}$$

**Wien'sches Strahlungsgesetz:**

Das Wien-Gesetz beschreibt die Abstrahlungsleistungspektrum bei niedrigen Wellenlängen:

$$\boxed{M_E(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B} \frac{1}{\lambda T}}}}$$

# 8 Quantenphysik

## 8.1 De-Broglie-Wellenlänge

$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

## 8.2 Plancksche Strahlungsformel / Schwarzkörperstrahlung

$$P(\nu) = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

## 8.3 Compton-Effekt

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

## 8.4 Wellenfunktion

In der Quantenphysik dreht sich alles um die Wellenfunktion $\psi/\Psi$, denn sie trägt alle existierenden Informationen über ein System gleichzeitig in sich. Beobachtbare Größen werden durch lineare, hermitische Operatoren beschrieben, welche auf die Wellenfunktion wirken können. Die Eigenvektoren eines solchen $\hat{A}\,|A_n\rangle = A_n\,|A_n\rangle$ formen eine vollständige, orthonormale Basis. Hat man sich eine passende Basis ausgesucht, kann die Wellenfunktion dieser entwickelt werden als $|\psi\rangle = \sum_n |E_n\rangle \langle E_n|\psi\rangle$. Die Koeffizienten vor jedem Basisvektor, haben nach der Born-Regel eine wichtige physikalische Bedeutung: Ihr Norm-Quadrat entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung der dem Basisvektor zugehörige Eigenwert gemessen wird.

**Schrödinger Gleichung**

Die Schrödinger Gleichung definiert dem Hamiltonoperator in Orts-Koordinaten, und kann daher verwendet werden, um die Wellenfunktion eines Systems zu finden.
Zeitunabhängig:

$$\hat{H}\,|\Psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\,|\psi\rangle + V\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$$

mit

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n A_n e^{-iE_n t/\hbar}\,|\psi_{E_n}\rangle$$

Zeitabhängig:

$$\hat{H}\,|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle$$

Eine physikalische Wellenfunktion $\psi$ ist normierbar. Für ein Potenzial $V(x) =\propto \delta(x)$ ist die Wellenfunktion in Orts-Basis stetig, für eine unstetiges Potenzial sie stetig diffbar, und für ein stetiges Potenzial zweimal diffbar.

## 8.5 Operatoren

### Bra

Der Bra $\langle\phi|$ wirkt auf einen Vektor $|\psi\rangle$ wie ein hermitisches Skalarprodukt mit dem Vektor $|\phi\rangle$:

$$\langle\phi|\,|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle = \int \overline{\phi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

### Hermitisches Konjugat

Das hermitische Konjugat $A^\dagger$ eines Operators $\hat{A}$, ist definiert als:

$$\langle\psi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\psi|\psi\rangle$$

Ist der Operator eine Matrix, berechnet sich das hermitische Konjugat als $\hat{M}^\dagger = \overline{\hat{M}^T}$. Gilt für einen Operator, dass $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, so nennt man in hermitisch.

### Unitäre Operatoren

Ein Operator ist zudem unitär, wenn die Tranformation das Skalarprodukt erhält.

$$\begin{aligned} &\langle\phi|\psi\rangle \overset{!}{=} \langle\hat{U}\phi|\hat{U}\psi\rangle = \langle\phi|\hat{U}^\dagger\hat{U}\psi\rangle \\ \Longrightarrow\ &\hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\jmath} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

### Kommutator

Der Kommutator ist definiert als:

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Man sagt, dass zwei Operatoren miteinander kommutieren, wenn $[\hat{A},\hat{B}] = 0$.

### Erwartungswert

Der Erwartungswert $\langle A\rangle$ eines Operators $\hat{A}$ errechnet sich als:

$$\langle A\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

### Standartabweichung

Für nicht kommutierende Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist die Standardabweichung $\Delta A, \Delta B$ gegeben durch:

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi|(\hat{A} - \langle A\rangle)^2\psi\rangle = \left\langle A^2\right\rangle - \langle A\rangle^2$$

### Wichtige Operatoren

1. Die Identität $\mathbb{1}$:

$$\mathbb{1} = \sum_i |i\rangle\,\langle i|$$

2. Zeitevolution-Operator $\hat{T}$ (für zeitinvarianten Hamiltonoperator, und Hamilton-Basis):

$$\begin{aligned} \hat{T} &= e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \\ |\psi(t)\rangle &= \hat{T}\,|\psi(0)\rangle \\ &= \sum_n |E_n\rangle\,\langle E_n|\psi\rangle\, e^{-iE_nt/\hbar} \\ &= \sum_n |E_n\rangle\,\langle E_n|\psi\rangle\, e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

3. Impuls-Operator $\hat{p}$:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \text{ , Herleitung mit } \psi(x) = \int \mathrm{d}k\, e^{ikx}$$

4. Zeitunabhängiger Hamilton-Operator $\hat{E}/\hat{H}$:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$$

5. Drehimpuls-Operator $\hat{L}_i$:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}}\times\hat{\vec{p}} \quad \text{und} \quad \hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\,\hat{x}_j\hat{p}_k$$

Der Operator gehorcht der Drehimpuls-Algebra:

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j] = \epsilon_{ijk}\, i\hbar\,\hat{L}_k$$

6. Spin-Operator $\hat{S}_i$:

$$\begin{aligned} \hat{S}_i &= \frac{\hbar}{2}\sigma_i \\ [\hat{S}_i,\hat{S}_j] &= \epsilon_{ijk}\, i\hbar\,\hat{S}_k \end{aligned}$$

mit den Paulimatizen $\sigma_i$, welche den vierdimensionalen Raum der hermitischen $2\times 2$-Matrizen aufspannt.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{1,x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{2,y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{3,z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für sie gelten folgende nützliche Identitäten:

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\,\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$\sigma_i = \sigma_i^{-1} \quad \text{und} \quad [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = \epsilon_{ijk}\, 2i\, \sigma_k$$

## 8.6 Unschärfenrelationen

Die Unschärfenbeziehungen lassen sich alsgemein aus

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

herleiten.

$$\Delta x_i \Delta x_j \geq 0$$
$$\Delta p_i \Delta p_j \geq 0$$

$$\Delta p_i \Delta x_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij}$$

$$\Delta |\vec{L}| \Delta L_i \geq 0$$
$$\Delta L_i \Delta L_j > 0 \;,\; i \neq j$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

## 8.7 Zeit-Evolution von Erwartungswerten

Die zeitliche Evolution des Erwartungswertes eines Operators $\hat{A}$ ist gegeben durch das Ehrenfest-Theorem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \langle \partial_t \hat{A} \rangle$$

Die Herleitung ist recht einfach, an einer Stelle wird die Schrödingergleichung verwendet $\partial_t |\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\psi\rangle$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = (\partial_t \langle \psi |)\, \hat{A} \,|\psi\rangle + \langle \psi |\, \hat{A} (\partial_t |\psi\rangle) + \langle \psi |\, (\partial_t \hat{A})\, |\psi\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar} \left( -\hat{H} \langle \psi |\, \hat{A}\, |\psi\rangle + \langle \psi |\, \hat{A}\hat{H}\, |\psi\rangle \right) + \langle \partial_t \hat{A} \rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar} \left( -\langle \psi |\, \hat{H}\hat{A}\, |\psi\rangle + \langle \psi |\, \hat{A}\hat{H}\, |\psi\rangle \right) + \langle \partial_t \hat{A} \rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \langle \partial_t \hat{A} \rangle$$

## 8.8 Basen

Die Schrödinger Gleichung kann in der orthonormalen Basis, einer messbaren Größe zugehörigen Operators, entwickelt werden.

### Orts-Basis

Basis: $\mathcal{B} = \{ |x_0\rangle = \delta(x - x_0), x_0 \in \mathbb{R} \}$
Entwicklung:

$$\psi(x) = \int \mathrm{d}x'\, \psi(x')\, |x'\rangle$$

### Impuls-Basis

Basis: $\mathcal{B} = \left\{ |p\rangle = e^{ikx} = e^{ipx/\hbar} \right\}$

$$\psi(x) = \int \mathrm{d}k\, \psi(k) e^{ikx}$$

## 8.9 Einfache Lösungen

### Unendlicher Potentialtopf

$$|\psi\rangle = A \sin \frac{n\pi x}{a}$$
$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

Breiterer Topf $\Longrightarrow$ niedrigere Grundzustandenergie

### Endlicher Potentialtopf

### Unendliche Potentialbarriere

$$|\psi\rangle = A \sin kx \;,\; k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

### Endliche Potentialbarriere

### Harmonischer Oszillator

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{m\omega^2}{2} x^2$$
$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

$\psi_n \propto H_n(x)e^{-x^2}$ , $H_n \hat{=}$ Hermite-Polynome