Prof. Stahl
Thilo Birkenfeld

III. Physikalisches Institut B | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Experimentalphysik III
Optik und Quantenphysik

Übungsblatt 10

Zur Abgabe über *moodle* bis 19.12.2023 24:00 Uhr!

● **Aufgabe 1:** (10 Punkte) **Pauli-Matrizen**

Die Pauli-Matrizen spielen eine essenziell in der quantenmechanischen Behandlung des Spins. Sie lauten wie folgt:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass das Quadrat jeder Pauli-Matrix die Einheitsmatrix ergibt:

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass folgende Beziehung gelten:

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i\sigma_k \quad \text{mit} \quad i, j, k \,\text{zyklisch}$$

Bestimmen Sie damit den Wert der Vertauschungsrelation (auch Kommutator genannt):

$$[\sigma_i,\, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = ?$$

●● **Aufgabe 2:** (10 Punkte) **Normierung von Wellenfunktionen**

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchen ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion $|\psi\left(\vec{r}\right)|^2$ gegeben. Da die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo zu finden, eins sein muss, werden Wellenfunktionen oft auf 1 normiert:

$$\int |\psi\left(\vec{r}\right)|^2 d^3r = 1$$

Normieren Sie folgende Wellenfunktionen auf 1, indem Sie den Faktor N bestimmen:

a) $\psi(x) = N \sin \frac{n\pi x}{L}$ im 1-dimensionalen Intervall $0 \leq x \leq L$ mit $n \in \mathbb{N}$

b) $\psi(\vec{r}) = N e^{-|\vec{r}|/a}$ mit $a > 0$

●●● **Aufgabe 3:** (10 Punkte) **Der Raum der quadratintegrablen Funktionen**

Der Raum der quadratintegrablen Funktionen $L^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}\right)$ ist der Raum der Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ für die das Integral von $|f(\vec{r})|^2$ über den $\mathbb{R}^3$ endlich ist:

$$L^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}\right) = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \middle| \int\limits_{\mathbb{R}^3} |f(\vec{r})|^2 < \infty \right\}.$$

Auf diesem Raum wird das Skalarprodukt $\langle f|g\rangle$ definiert als

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f * (\vec{r}) \cdot g(\vec{r})\, d^3r$$

mit $\|f\|^2 = \langle f|f\rangle$ der Norm in L^2.
Dieser Hilbertraum hat eine besondere Bedeutung in der Quantenphysik, da sowohl die Wellenfunktionen im Ortsraum, wie auch die im Impulsraum Elemente dieses Raumes sind.

Seien f und g Elemente dieses Raumes. Zeigen Sie, dass dann auch $(\alpha f + \beta g)$ im Raum liegt mit α, $\beta \in \mathbb{C}$. Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass in diesem Raum die Dreiecksungleichung gilt ($\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$).

Zeigen Sie auch, dass die Schwarz'sche Ungleichung gilt ($\| \langle f|g\rangle \| \leq \|f\| \cdot \|g\|$).