

Experimentalphysik Va (WS 2023/2024)

Übung 3

Tutorium: 1

Abgabe: 04.11.2024

Aufgabe 1: Stoßzeiten u. freie Weglängen im Drude-Modell

(a)

Mit der Drude Formel $\sigma = \frac{ne^2}{m_e}\tau$, $\sigma = \rho^{-1}$ und $n = n_A \frac{Z\rho_M}{M}$ folgt:

$$\tau = \frac{m_e M}{n_A \rho_M e^2 \rho} \rightarrow \begin{cases} \tau_{\text{Ag}} = 38.1 \text{ fs} \\ \tau_{\text{Li}} = 8.32 \text{ fs} \end{cases}$$

Die Leitungselektronen im Metall werden im Drude Modell beschrieben als ideales Gas, ihre Geschwindigkeiten folgen daher der Maxwell-Boltzmann-Verteilung, dessen Mittel gegeben ist durch:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}}$$

Damit gilt für die mittlere Weglänge:

$$\Lambda = \tau \langle v \rangle = \tau \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}} \rightarrow \begin{cases} \Lambda_{\text{Ag}} = 4.10 \text{ nm} \\ \Lambda_{\text{Li}} = 0.900 \text{ nm} \end{cases}$$

(b)

Die Massendichte von Stickstoff bei normal Bedingungen ist etwa $\rho_M = 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, die molare Masse $M = 28.0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

$$\tau_{\text{N}_2} = \frac{1}{n \langle v \rangle \sigma} = \frac{M}{n_A \rho_M} \frac{1}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\pi m_{\text{N}_2}}{8k_B T}} = \frac{M}{n_A \rho_M} \frac{1}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\pi M}{8k_B n_A T}} = 182 \text{ fs}$$
$$\Lambda_{\text{N}_2} = \langle v \rangle \tau_{\text{N}_2} = \frac{1}{n \sigma} = \frac{M}{n_A \rho_M} \frac{1}{\pi d^2} = 86.5 \text{ nm}$$

Die (Elektronen-) Dichten in einem Metall sind deutlich höher als in alltäglichen Gasen, weshalb es nicht verwunderlich ist, dass Relaxionszeit und freie Weglänge in den beiden Metallen etwa ein bis zwei Größenordnungen kleiner sind als für Stickstoff.

Aufgabe 2: Potentialtopf-Modell für Retinal

Der eindimensionale Potentialtopf hat für ein einzelnes Teilchen die Lösungen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad E_n = \frac{\hbar k_n^2}{2m}$$

wobei das dreidimensionale Äquivalent mit einem Separationsansatz wieder auf den eindimensionalen Potenzialtopf zurückgeführt werden kann. Die Lösung ist daher:

$$\psi_{\vec{n}}(\vec{x}) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad k_i = \frac{\pi n_i}{L}, \quad E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \vec{n}^2$$

(a)

Da die Elektronen dem Pauliprinzip unterliegen, sind im Grundzustand je zwei Elektronen in den fünf niederenergetischsten Niveaus. Für das höchste, besetzte Energieniveau (3-fach entartet) gilt $\vec{n} = (2, 2, 1)$.

Der erste angeregte Zustand entspricht dem Übergang eines Elektrons mit $\vec{n} = (2, 1, 1)$ zu $\vec{n}' = (2, 2, 1)$. Die Energiedifferenz beträgt E_0 , der Grundzustandsenergie.

$$E_0 = \frac{6\pi^2 \hbar^2}{mL^2} = 2.30 \text{ eV}$$

Die Wellenlänge des ersten Absorptionsmaximum ist gerade so, dass die Grundenergie absorbiert wird:

$$E_0 = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_0} = 539 \text{ nm}$$

2.1

Aufgabe 3: Fermi-Gase

Die molaren Massen von Silber und Helium-3 sind $M_{\text{Ag}} = 108 \text{ u}$ und $M_{\text{He}} = 3.02 \text{ u}$. Es gilt

$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} \quad v_F = \frac{\hbar k_F}{m_e}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} \quad T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

mit der Teilchendichte $n = \frac{n_A \rho}{M}$.

Damit ergeben sich die folgenden Werte:

	k_F in $\frac{1}{\text{m}}$	v_F in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$	E_F in J	T_F in K
Ag	$1.2 \cdot 10^{10}$	$1.39 \cdot 10^3$	$8.81 \cdot 10^{-19}$	63800
³ He	$7.82 \cdot 10^9$	905	$3.73 \cdot 10^{-19}$	27000

2.2

Aufgabe 4: Thermodynamik des Fermi-Gases bei $T = 0$ K

$$N(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}}, \quad D(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}, \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

(a)

$$\begin{aligned} U &= \int dE E D(E) \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{E_F} dE E^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{5} \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{3}{5} \underbrace{\frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{3}{2}}}_N E_F \\ &= \frac{3}{5} E_F N \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mu &= \left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_{S,V} \\ &= \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{3}{5} E_F N \right) \\ &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial N} N^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= E_F \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} p &= - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T \\ &= - \frac{\partial}{\partial V} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{\frac{2}{3}} N^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{U}{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= -V \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T \\
&= -V \frac{\partial}{\partial V} \frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{5}{3} \frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{10}{9} \frac{U}{V}
\end{aligned}$$

(d)

Die Formel aus (c) kommt mit der angegebenen Fermi-Energie auf einen Kompressionsmodul von

$$K_{\text{Na}}(E_F = 3.14 \text{ eV}) = \underline{7.63 \text{ GPa}}$$

4.1

und trifft damit den experimentellen Wert von 7.46 GPa mit einer relativen Fehler von nur $\sim 2\%$.

Aufgabe 5: Breite der Fermi-Kante für $T > 0 \text{ K}$

(a)

Die im Plot eingezeichnete Kante schneidet die beiden Geraden bei ± 2 , die Breite δ_E ist also

$$\delta_E = 4k_B T + \mu \approx 4k_B T$$

(b)

Für 300 K ergibt sich:

$$\delta_E = 0.103 \text{ eV}, \quad \frac{\delta}{E_F} = 2\%$$

4.2

Index der Kommentare

1.1	A1: 3/4
2.1	A2: 3/3
2.2	A3: 2/4
4.1	A4: 4.5/5
4.2	A5: 4/4