



III. Physikalisches Institut B, RWTH Aachen
 Prof. Dr. Christopher Wiebusch, Dr. Philipp Soldin

Übungen zur Physik IV - SS 2024
 Atome Moleküle Kerne

Übung 6

Ausgabedatum: 15.05.2024

Abgabedatum: 29.05.2024

Tag der Besprechung: 03.06.2024

Verständnisfragen

Kapitel 5.1-5.3

1. Erläutern Sie die Schrödinger Gleichung für das He-Atom.
2. Welche Probleme treten bei der Lösung der Schrödinger Gleichung auf und wie können Sie näherungsweise vermieden werden?
3. Wie schirmen sich Elektronen gegenseitig in der Hülle ab?
4. Erläutern Sie wie aus der Ununterscheidbarkeit von Teilchen das Pauli Prinzip folgt.
5. Was ist der Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen?
6. Was bewirkt der Permutationsoperator?
7. Wie unterscheiden sich symmetrische und anti-symmetrische Wellenfunktionen?
8. Was sind Triplett und Singulett Zustände im Helium und wie kommt es dazu?
9. Erläutern Sie das Termschema des He Atoms und begründen Sie die wichtigsten Eigenschaften.
10. Beschreiben Sie das Helium Spektrum. Was ist der Unterschied zwischen Para- und Ortho-Helium?
11. Warum finden vom Triplett keine Übergänge in den 1S Grundzustand statt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 1 ★ ★ ☆ ☆ ☆ FEINSTRUKTUR

(5 + 15 = 20 Punkte)

In der Vorlesung wurde für die totale Feinstrukturaufspaltung im Wasserstoff-Atom der Ausdruck gefunden:

$$\Delta E_{FS} = E_n \cdot \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \quad (1)$$

Diese Aufspaltung setzt sich aus den Beiträgen der Spin-Bahn-Kopplung ΔE_{LS} , dem Darwin-Term ΔE_D

und der relativistischen Korrektur ΔE_{rel} zusammen:

$$\begin{aligned}\Delta E_{LS} &= -E_n \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \cdot \frac{1}{2l(l+1/2)(l+1)} \cdot \begin{cases} l & \text{für } j = l + 1/2 \text{ und } l \geq 1 \\ -l - 1 & \text{für } j = l - 1/2 \text{ und } l \geq 1 \end{cases} \\ \Delta E_D &= -E_n \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \quad , \quad \text{für } l = 0 \\ \Delta E_{rel} &= -E_n \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right)\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass sich die Darwinkorrektur auch für den Fall $l = 0$ aus der ΔE_{LS} Korrektur ergibt. Warum tritt der zweite Fall $-l - 1$ der Fallunterscheidung bei der Darwinkorrektur nicht auf?
- Leiten Sie aus den genannten Korrekturen die Gesamtkorrektur, Gleichung 1 her und zeigen Sie damit, dass die Feinstrukturaufspaltung nur von n und j abhängig ist. Benennen Sie einen entarteten Zustand unterschiedlichen Bahndrehimpulses.

Hinweis: Berücksichtigen Sie die Gültigkeit der Ausdrücke für bestimmte Quantenzahlen.

Aufgabe 2 ★ ★ ☆ ☆ ☆

(10 + 10 = 20 Punkte)

KORREKTUREN ZUM WASSERSTOFFSPEKTRUM

In der Vorlesung haben Sie verschiedene Korrekturen zum Wasserstoffspektrum kennengelernt:

- Zeichnen Sie für $n = 1, 2$ und 3 ein vollständiges (nicht maßstäbliches) Termschema des Wasserstoffatoms, das die verschiedenen Korrekturen zum unkorrigierten Wasserstoffspektrum herausstellt. Achten Sie dabei auf die korrekte Bezeichnung der Energieniveaus und erläutern Sie kurz, wodurch die einzelnen Korrekturen hervorgerufen werden.

Hinweis: Wegen der Übersicht genügt für $n = 3$ die Betrachtung bis zur Feinstrukturaufspaltung.

- Bestimmen Sie die Energien der Übergänge $2^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$ und $2^2S_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$.

Hinweis: Verwenden Sie $\Delta E_{Lamb}(1^2S_{1/2}) = +3,35 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$. Eine Berücksichtigung der Hyperfeinstrukturaufspaltung ist nicht notwendig.

Aufgabe 3 ★ ☆ ☆ ☆ ☆

(5 × 4 = 20 Punkte)

PAULI-PRINZIP UND SCHALENBAU DER ATOME

- Durch welche Quantenzahlen werden die Elektronenzustände Schalenmodell eines Atom beschrieben?
- Wie viele Elektronen finden in den Unterschalen eines Atoms Platz, und welche Quantenzahlen kommen jeweils den einzelnen Elektronenzuständen zu?
- Wie viel Elektronen "passen" in die K-, L-, M- und N-Schale?
- Nehmen Sie an, dass sich in demselben Atom zwei Elektronen mit den selben Quantenzahlen $n = 2$ und $l = 1$ befinden. Wäre das Pauli-Prinzip nicht gültig, wie viele Kombinationen von Zuständen wären denkbar?
- Mit den gleichen Annahmen wie schon in d). Wie viele und welche Zustände werden durch das Pauli-Prinzip verboten?

Aufgabe 4 ★ ★ ★ ★ ☆**(20 Punkte)****STÖRUNGSRECHNUNG IM HELIUMATOM**

Das Potential des Helium Atoms ist aus der Vorlesung bekannt als

$$V(r_1) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \Delta V(r_{12}). \quad (2)$$

Wie sieht das Potential $V(r_1)$ für das zweite Elektron im He-Atom aus, wenn das erste Elektron durch eine 1s-Wellenfunktion beschrieben werden kann (d.h. die Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen wird nur gemittelt berücksichtigt)?

Tipp: Berechnen sie ΔV über Störungsrechnung in dem Sie explizit Ψ_1 einsetzen und über \vec{r}_1 integrieren.

Aufgabe 5 ★ ★ ★ ☆ ☆**(20 Punkte)****HYPERFEINSTRUKTUR DES WASSERSTOFFATOMS**

Die Hyperfeinstrukturaufspaltung ΔE_{HFS} ergibt sich aus der Wechselwirkung des Kernspins I mit dem Gesamtdrehimpuls des Hüllenelektrons j .

a) Zeigen Sie, dass für die Hyperfeinstrukturaufspaltung folgende Abhängigkeit von j , I und F gilt:

$$\Delta E_{HFS} = \frac{A}{2} (F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)), \quad \text{mit} \quad A = \frac{g_I \mu_K B_j}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (3)$$

b) Zeigen Sie, dass für den Abstand aufeinanderfolgender Energieniveaus folgende Regel gilt:

$$\Delta E_{HFS,F+1} - \Delta E_{HFS,F} = A \cdot (F+1) \quad (4)$$

c) Das Isotop ^{209}Bi hat einen angeregten Zustand der elektronischen Konfiguration $^2\text{D}_{5/2}$. Der Zustand zeigt eine Aufspaltung in 6 Hyperfein-Niveaus mit entsprechenden Abständen zueinander. Eine experimentelle Messung der Abstände der Wellenzahl $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ ist in der folgenden Tabelle für 20 Messreihen dargestellt. Bestimmen Sie den Kernspin I und die Konstante A , samt ihrer Fehler. Erstellen Sie ein python-Skript oder Jupyter-Notebook und wählen Sie eine sinnvolle grafische Darstellung der Messungen und Fehler der einzelnen Abstände. Denken Sie daran ihre Analyse zu kommentieren oder so zu beschreiben, dass sie nachvollziehbar ist. Die Daten finden Sie auch in dataLines.csv im Jupyter-Hub der RWTH. Die Datei kann man wie in dem Beispielskript unserer Präsenzübung auslesen.

$\delta\nu_{12} [\text{cm}^{-1}]$	$\delta\nu_{23} [\text{cm}^{-1}]$	$\delta\nu_{34} [\text{cm}^{-1}]$	$\delta\nu_{45} [\text{cm}^{-1}]$	$\delta\nu_{56} [\text{cm}^{-1}]$
0.236 254 314 9	0.311 374 761 9	0.390 867 609 3	0.470 713 686	0.550 002 036 7
0.236 252 426 1	0.310 594 072 6	0.390 075 160 6	0.468 019 632 4	0.550 346 857 1
0.236 278 913 4	0.311 252 556 3	0.390 552 032 9	0.470 337 926 7	0.552 238 966 6
0.235 031 578 3	0.310 514 786 4	0.390 998 708 1	0.469 674 361 6	0.551 356 720 3
0.236 939 323 8	0.313 050 930 5	0.392 717 709 8	0.466 194 759 4	0.550 015 003 3
0.236 268 656 9	0.674 109 339	0.391 685 401 5	0.469 970 881 6	0.552 155 453 9
0.234 985 239 7	0.314 818 382 9	0.392 775 350 4	0.472 121 089 1	0.549 234 760 4
0.235 073 618 2	0.311 918 301 1	0.389 974 249 4	0.472 438 671 3	0.551 582 995 4
0.235 526 984 5	0.313 802 615 4	0.393 098 387 2	0.468 418 835 1	0.552 556 530 5
0.235 360 326 7	0.313 886 896 4	0.391 368 967 1	0.470 590 646 5	0.554 706 583 4
0.234 592 965 2	0.311 980 456 4	0.389 629 100 3	0.470 901 297 6	0.550 246 131 4
0.237 412 579 3	0.313 409 404 9	0.390 171 523 9	0.471 857 887 7	0.549 743 487 6
0.236 698 699 1	0.310 005 802 8	0.388 184 029 8	0.471 073 346 2	0.548 619 831
0.238 433 495 8	0.312 671 906 6	0.388 906 395 7	0.468 511 002 2	0.550 929 664 3
0.237 610 563 8	0.312 212 871 9	0.389 310 803 7	0.469 397 954 9	0.558 735 728 1
0.238 263 817 7	0.312 965 919 9	0.391 510 313 8	0.471 740 658 6	0.549 517 289 2
0.237 912 591 6	0.312 017 402 7	0.392 449 107 5	0.473 181 752 9	0.548 422 598 6
0.234 548 425 1	0.312 169 108 8	0.392 081 318 8	0.472 439 576 5	0.549 515 150 8
0.238 639 477 8	0.313 253 712 2	0.391 829 916 6	0.471 375 904	0.548 741 509 5
0.236 446 967 4	0.309 675 863	0.391 868 704 4	0.471 412 367	0.551 254 769 5