Name: Luca Cordes, 444900

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Experimentalphysik III (WS 2023/2024)

Übung 11

Tutorium: 8 Abgabe: 09.01.2023

Aufgabe 1: Quantenmechanischer Oszillator

Die Lösungen der Schrödingergleichung für das Potenzial eines eindimensionalen harmonischen Oszillators lauten:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{s^n n!} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \ , n \in \mathbb{R}$$

und mit:

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für die Zustände $n = 0, 1, 2,$ die Energie gegeben ist über $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Werten Sie dazu durch explizite Rechnung die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(X)$$

mit dem Hamilton Operator $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ aus.

. . . .

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar}x\,\psi_0$$

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_n(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_n(x) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_n(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_0(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_0(x) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_0(x) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0(x) \\ \implies E_0 &= \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_1(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_1(x) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)2\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x\,\psi_0(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m\omega^2 x^2\right)\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x\,\psi_0(x) \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) + m\omega^2 x^3\right)\sqrt{\frac{m\omega}{h}}\psi_0(x) \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{m}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{m\omega}{\hbar}\left(2x - \frac{m\omega}{\hbar}x^3\right)\right) + m\omega^2 x^3\right)\sqrt{\frac{m\omega}{h}}\psi_0(x) \\
&= \left(\hbar\omega\left(3 - \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) + m\omega^2 x^2\right)\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x\psi_0(x) \\
&= 3\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x\psi_0(x) \\
&= \frac{3}{2}\hbar\omega\psi_1(x) \\
\implies E_1 &= \frac{3}{2}\hbar\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\psi_2(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi_2(x) \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\left(4\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 2\right)\psi_0(x) \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{m\omega}{\hbar}\left(2x - x^3\frac{m\omega}{\hbar}\right) + 2\frac{m\omega}{\hbar}x\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\left(4\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 2\right)\right)\psi_0(x) \\
&= \left(-\hbar\omega\frac{\partial}{\partial x}\left(5x - 2\frac{m\omega}{\hbar}x^3\right) + m\omega^2 x^2\left(2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)\right)\psi_0(x) \\
&= \left(-\hbar\omega\left(5\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) - 2\frac{m\omega}{\hbar}\left(3x^2 - \frac{m\omega}{\hbar}x^4\right)\right) + m\omega^2 x^2\left(2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)\right)\psi_0(x) \\
&= \left(-\hbar\omega\left(5\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) - 6\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) - m\omega^2 x^2\right)\psi_0(x) \\
&= \left(-\hbar\omega\left(5 - 11\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) - m\omega^2 x^2\right)\psi_0(x) \\
&= \hbar\omega\left(-5 + 10\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\psi_0(x) \\
&= \frac{5}{2}\hbar\omega\cdot\left(4\frac{m\omega}{h}x^2 - 2\right)\cdot\psi_0(x) \\
&= \frac{5}{2}\hbar\omega\cdot\psi_2(x) \\
\implies E_2 &= \frac{5}{2}\hbar\omega
\end{aligned}
$$

Damit wird die Energie des quantenmechanischen Oszillators für die Zustände $n = 0, 1, 2$ korrekt mit der Formel $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ beschrieben.

Aufgabe 2: Messwerte des quantenmechanischen Oszillators

Berechnen Sie den zu erwartenden Messwert der Energien der folgenden Zustände unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Aufgabe 1.

(a) $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\psi_0\rangle + \frac{1}{2}|\psi_1\rangle$

$$\mathrm{E}[E] = \sum p_i E_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum |c_i|^2 E_i \\
&= \frac{3}{4}E_0 + \frac{1}{4}E_1 \\
&= \frac{3}{4}\hbar\omega\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\hbar\omega\frac{3}{2} \\
&= \frac{6}{8}\hbar\omega
\end{aligned}
$$

(b) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_2\rangle$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[E] &= \sum p_i E_i \\
&= \sum |c_i|^2 E_i \\
&= \frac{1}{3}E_0 + \frac{1}{3}E_1 + \frac{1}{3}E_2 \\
&= \frac{1}{3}\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\hbar\omega
\end{aligned}
$$