Name: Luca Cordes, 444900
Name: Justus Fassnacht, 426722

Experimentalphysik IV (WS 2023/2024)

Übung 1

Tutorium: 2 Abgabe: 17.04.2024

Aufgabe 1: Massenspektrometer

Aus einem Strahl aus einfach ionisierten Uran-Atomen mit natürlichem Isotopengemisch (0.72 % ^{235}U und 99.28 % ^{238}U) soll in einem Thomsonschen Massenspektrometer nach der Parabelmethode ^{235}U abgeschieden werden. Der Durchmesser des Strahls sei 1 mm, die erreichbare Stromstärke im Strahl beträgt 0.2 mA. Im 4 cm langen Spektrometer herrscht ein homogenes elektrisches Feld von $5000\frac{\text{V}}{\text{m}}$ und ein homogenes Magnetfeld von 0.01 T. Wir betrachten Teilchen ^{235}U und ^{238}U, die sich mit gleicher Geschwindigkeit v durch das Spektrometer bewegen.

(a)

Bei welcher Geschwindigkeit der Uran-Atome überlappen sich die Strahlen der beiden Isotope direkt hinter dem Spektrometers gerade nicht mehr?

Sei das Massenspektrometer nach Thomson so aufgebaut, dass der magnetische Nordpol und der elektrische negative Pol in $\hat{e}_y$-Richtung liegen, und die Atome Richtung $\hat{e}_z$ fliegen. Beim durchqueren des Massenspektrometer wirken auf die Uran Isotope die Coloumb-/ und Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = q\,\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{e}_x$$
$$\vec{F}_C = q\vec{E} = qE\hat{e}_y$$

Da jede Kraft nur in jeweils eine Richtung wirkt, kann die Bewegung des Uran für beide Richtungen einzeln betrachtet werden:

$$F_L = ma_x \implies \ddot{x} = \frac{qvB}{m} \implies x(t) = \frac{qvB}{2m}t^2$$
$$F_C = ma_y \implies \ddot{y} = \frac{qE}{m} \implies y(t) = \frac{qE}{2m}t^2$$

Nimmt man an, dass die Geschwindigkeit der Teilchen entlang der z-Achse konstant ist gilt für den Zeitpunkt an dem die Teilchen auf den Schirm auftreffen $t_0 = L/v$ mit L als Distanz bis zum Schirm, und somit für die Distanzen x_0, y_0:

$$x_0 = x(t_0) = \frac{qBL^2}{2mv}$$
$$y_0 = y(t_0) = \frac{qEL^2}{2mv^2}$$

Die Strahlen der beiden Uran-Isotope überlappen sich dann gerade nicht mehr, wenn der Anstand ihrer zentralen Strahlen Δ auf dem Schirm mindestens so groß wie der Strahldurchmesser d sein. Werte die sich auf ^{235}U beziehen sind im folgendem nicht gestrichen, Werte die sich auf ^{238}U beziehen sind gestrichen.

$$d = \Delta$$
$$d^2 = (x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{qBL^2}{2mv} - \frac{qBL^2}{2m'v}\right)^2 + \left(\frac{qEL^2}{2mv^2} - \frac{qEL^2}{2m'v^2}\right)^2 \\
&= \frac{q^2B^2L^4}{4v^2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right)^2 + \frac{q^2E^2L^4}{4v^4}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right)^2 \\
&= \frac{q^2L^4}{4v^4}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right)^2 (v^2B^2 + E^2) \\
0 &= v^4 - \frac{q^2L^4}{4d^2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right)^2 (v^2B^2 + E^2) \\
&= v^4 - \frac{\eta^2M^2}{4}(v^2B^2 + E^2) \ , \ \begin{cases} \eta = \frac{qL^2}{d} \\ M = \frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \end{cases} \\
\implies v^2 &= \frac{\eta^2M^2B^2}{8} + \sqrt{\left(\frac{\eta^2M^2B^2}{8}\right)^2 + \frac{\eta^2M^2E^2}{4}} \\
&= \frac{\eta^2M^2B^2}{8} + \frac{\eta M}{2}\sqrt{\frac{\eta^2M^2}{16}B^4 + E^2} \\
\implies v &= 57307\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \ , \ \frac{v}{c} = 0.191‰
\end{aligned}
$$

f

hier ist beim Einsetzen was schiefgelaufen

$v = 4555\,\frac{m}{s}$ -4

Wobei verwendet wurde, dass die Atommasse für $^{235}\mathrm{U}$ 235 u ist, und für $^{238}\mathrm{U}$ 238 u.

(b)

Wie lange dauert das Abscheiden von 1 mg ^{235}U?

Seien j_q der Teilchenstrom in $\frac{1}{\mathrm{s}}$ und j_C der Ladungsstrom in $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$.

$$
\begin{aligned}
m_{\text{ges}} &= mN = m\,j_q\,t = \frac{M_{\text{mol}}\,j_C\,t}{n_A\,q} \cdot f_{235} \\
t &= \frac{m_{\text{ges}}\,n_A\,q}{M_{\text{mol}}\,j_C} \\
&\approx \frac{10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}\frac{1}{\mathrm{mol}} \cdot 1.60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{0.235\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}} \\
&\approx 2.05 \cdot 10^6\,\mathrm{s} = 23.7\,\mathrm{d}
\end{aligned}
$$

f

$f_{235} = 0{,}72$ % Anteil am Gesamtstrom

1 mg $= 10^{-6}$ kg!

-6

14/24

Aufgabe 2: Röntgenbeugung an Kristallen

(a)

Wie groß sind Radius und Volumen von Ar*-Atomen in einem kalten* Ar*-Kristall (dichteste Kugelpackung in kubisch-flächenzentriertem Gitter), wenn bei Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlung ($\lambda = 0.45$ nm), die unter dem Winkel θ gegen die Netzebene parallel zu den Würfelflächen einfällt, das erste Reflexionsminimum bei $\theta = 43°$ auftritt?*

Hinweis: Betrachtet werden Reflexionen an der Ebene parallel zu den Würfelflächen. Deswegen ist, wenn a die Länge der kubischen Elementarzelle ist, die Distanz zwischen zwei Streuebenen ist $d = a/2$ (Siehe Abbildung 1).

Für ein Reflexionsminimum muss die Wegdifferenz zweier Strahlen die an den zwei Streuebenen reflektiert werden $n\lambda - \lambda/2$, $n \in \mathbb{N}$ betragen (destruktive Interferenz).

$$\lambda(n - 1/2) \overset{!}{=} \Delta s = 2d\sin\theta = a\sin\theta$$

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\lambda}{2\sin\theta}\,, \quad \text{für } n = 1 \\
&= \frac{0.45\,\mathrm{nm}}{2\sin(43^\circ)} \\
&\approx 6.60\,\text{Å} \quad \text{ff} \qquad\qquad -2
\end{aligned}
$$

Aus der Geometrie folgt für den Radius r:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (2r)^2 + (2r)^2 \\
\implies r &= \frac{a}{\sqrt{8}} \\
&\approx 2.33\,\text{Å} \quad \text{ff}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&\approx 53.0\,\text{Å}^3 \quad \text{ff}
\end{aligned}
$$

(b)

In der Vorlesung wurde ein NaCl-*Kristall (kubisch-flächenzentriertes Gitter) in Braggscher Anordnung mit Röntgenlicht einer Molybdän-Anode vermessen. Die Bragg Winkel ergaben sich zu* 7.22° *und* 6.41°. *Berechnen Sie den Abstand der Streuebenen des* NaCl-*Kristalls. Bestimmen Sie mit Ihrem Ergebnis die Avogadro-Zahl.* ($\rho_{NaCl} = 2.163\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$)

Hinweis: Die Molybdän Anode emittiert ein kontinuierliches Röntgenspektrum mit zwei charakteristischen Linien bei $E_{K_\alpha} = 17.4\,\mathrm{keV}$ *und* $E_{K_\beta} = 19.6\,\mathrm{keV}$. *Die molaren Massen von* Na *und* Cl *sind Ihnen bekannt.*

Die den charakteristischen Linien zugehörige Wellenlängen sind:

$$
\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{K_\alpha} &\approx 71.3\,\mathrm{pm} \\
\lambda_{K_\beta} &\approx 63.3\,\mathrm{pm}
\end{aligned}
$$

Für die Glanzwinkel gilt die Bragg-Bedingung:

$$
\begin{aligned}
n\lambda &= 2d\sin\theta \\
d &= \frac{n\lambda}{2\sin\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{K_\alpha} &\approx 2.83\,\text{Å} \\
d_{K_\beta} &\approx 2.83\,\text{Å}
\end{aligned}
$$

Für die Glanzwinkel der beiden charakteristischen Linien kommt der gleiche Abstand der Streuebenen von 2.83 Å heraus.

In der Elementarzelle des NaCl befinden sich vier Natriumatome und vier Chloratome. Die Kantenlänge der Elementarzelle ist $a = 2d$ (siehe Nr.2 (a)). Damit lässt sich die Avogadro-Konstante wie folgt bestimmen:

$$
\rho_{\mathrm{NaCl}} = \frac{4m_{\mathrm{Na}} + 4m_{\mathrm{Cl}}}{a^3}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\frac{M_{\mathrm{Na}} + M_{\mathrm{Cl}}}{n_A a^3} \\
n_A &= 4\frac{M_{\mathrm{Na}} + M_{\mathrm{Cl}}}{\rho_{\mathrm{NaCl}}\, a^3} \\
&\approx 5.96 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}
\end{aligned}
$$

Der Literaturwert für die Avogadro-Konstante ist $6.02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}$, damit ist der relative Fehler des experimentellen Wertes etwa 1.02%.

26/28

Aufgabe 3: Tintenstrahldrucker

Die Düse eines Tintenstrahldruckers spritzt Tröpfchen auf ein Blatt Papier. Ein Tintentröpfchen hat die Masse $m = 1.3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}$ *und eine Ladung von* $Q = -1.5 \cdot 10^{-13} C$. *Die Tröpfchen treten orthogonal in ein homogenes E-Feld der Länge* $L = 1.6\,\mathrm{cm}$ *mit einer Geschwindigkeit von* $v = 20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *ein.*

(a)

Wie stark muss das E-Feld gewählt werden, damit die Tröpfchen beim Verlassen des E-Feldes $0.5\,\mathrm{mm}$ *vertikal abgelenkt werden?*

Sei d die Distanz, die das Tröpfchen nach dem Kondensator bis zum Papier zurücklegen muss. Im Kondensator wirkt auf das Tröpfchen wirkt die Coloumbkraft:

$$
\begin{aligned}
ma &= F_C = qE \\
\ddot{x} &= \frac{qE}{m} \\
\implies x(t) &= \frac{qE}{2m} t^2
\end{aligned}
$$

Bei konstanter Geschwindigkeit Richtung Papier ($v_z = \text{const.}$) benötigt das Tröpfchen $t_0 = \frac{L}{v}$ um aus dem Kondensator wieder raus zu kommen. Es hat zu diesem Zeitpunkt die x-Koordinate und die Geschwindigkeit:

$$
\begin{aligned}
x_0 = x(t_0) &= \frac{qEL^2}{2mv^2} \\
v_0 = \dot{x}(t_0) &= \frac{qEL}{mv}
\end{aligned}
$$

Zwischen Papier und Kondensator wirken keine Kräfte, somit ist die finale x-Koordinate des Tröpfchens:

$$
\begin{aligned}
x' &= x_0 + v_0 t' \\
&= \frac{qEL^2}{2mv^2} + \frac{qELd}{mv^2} \\
&= \frac{qEL\,(L + 2d)}{2mv^2} \\
\implies E &= \frac{2mv^2 x'}{qL^2}\ , d = 0 \\
&\approx -1.35 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

(b)

Die Tropfen haben eine Größe von $0.5\,\mathrm{mm}$ auf dem Papier. Wie weit entfernt müsste das Papier mindestens sein, damit zwei Tropfen mit einer um eins unterschiedlichen Elementarladung Q und $Q+e$ sich nicht überlappen?

$$
\begin{aligned}
D &\stackrel{!}{=} x_2' - x_1' \\
&= \frac{EL(q_2 - q_1)\,(L+2d)}{2mv^2} \\
&= -\frac{eEL\,(L+2d)}{2mv^2} \\
d &= -\frac{mv^2 D}{eEL} - \frac{L}{2} \\
&\approx 7500\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

✓ 24/24

Aufgabe 4: Einheiten umrechnen

Schreiben Sie ein kurzes Programm oder Jupyter Notebook, um Einheiten umrechnen zu können. Erstellen Sie eine Tabelle mit den Werten 1-10 des Ausgabewertes und berechnen Sie den entsprechenden Zielwert. Rechnen sie folgende Einheiten um: Joule in Elektronvolt, Meter in Ångström, kg in Stoffmenge (Mol) für H_2O, Elektronvolt in Wellenlänge und Frequenz (für Photonen).

Python Code

```
import scipy.constants as c

def J2eV(J):
    # $1\,\mathrm{eV} = q_{elektron} \cdot 1\,\mathrm{V} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \implies 1\,\mathrm{J} = \frac{1}{1.602\cdot 10^{-19}}\,\mathrm{eV}$
    return J / c.elementary_charge

def m2angstrom(m):
    # $1\,\mathrm{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m} \implies 1\,\mathrm{m} = 10^{10}\,\mathrm{Å}$
    return m * 1e10

def kg2MolH2O(kg):
    # $m/n = M_{\mathrm{H_2O}} \implies n = \frac{m}{M_{\mathrm{H_2O}}}$
    return kg / 18.01528e-3

def eV2lambda(eV):
    # $E = hf = \frac{hc}{\lambda} \implies \lambda = \frac{hc}{E}$
    return c.h * c.c / c.elementary_charge / eV

def eV2f(eV):
    # $E = hf \implies f = \frac{E}{h}$
    return eV * c.elementary_charge / c.h

def i(x):
    return float(x)

for f in [i, J2eV, m2angstrom, kg2MolH2O, eV2lambda, eV2f]:
    print(f"{f.__name__+('' if f is i else '(i)'):13}" , end="")
    for n in range(1,11):
        print(f"{f(n):10.3}", end="")
    print("")

# returns:
```

```
# i                  1.0       2.0       3.0       4.0       5.0       6.0       7.0       8.0
↪  9.0      10.0
# J2eV(i)        6.24e+18  1.25e+19  1.87e+19   2.5e+19  3.12e+19  3.74e+19  4.37e+19
↪  4.99e+19  5.62e+19  6.24e+19
# m2angstrom(i)      1e+10     2e+10     3e+10     4e+10     5e+10     6e+10     7e+10
↪  8e+10     9e+10     1e+11
# kg2MolH2O(i)        55.5  1.11e+02  1.67e+02  2.22e+02  2.78e+02  3.33e+02  3.89e+02
↪  4.44e+02     5e+02  5.55e+02
# eV2lambda(i)   1.24e-06   6.2e-07  4.13e-07   3.1e-07  2.48e-07  2.07e-07  1.77e-07
↪  1.55e-07  1.38e-07  1.24e-07
# eV2f(i)        2.42e+14  4.84e+14  7.25e+14  9.67e+14  1.21e+15  1.45e+15  1.69e+15
↪  1.93e+15  2.18e+15  2.42e+15
```

24/24

88/100