

Experimentalphysik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Übung 05

Aufgabe 1 *Elektron-Myon-Streuung* (4 Punkte)

Betrachten Sie die Elektron-Myon-Streuung $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ im Rahmen der QED, sodass der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben ist durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2 \theta).$$

Wie viele Myonpaare werden bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 34 \text{ GeV}$ und einer Luminosität von $5 \cdot 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ pro Sekunde im Zentralbereich (Streuwinkel zwischen 45° und 135°) erzeugt?

Aufgabe 2 *Elektrisches Dipolmoment des Neutrons* (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein permanentes elektrisches Dipolmoment des Neutrons, welches ein magnetisches Moment besitzt, sowohl die P - als auch die T -Symmetrie verletzt (und damit bei Erhaltung von CPT auch die CP -Symmetrie).

Aufgabe 3 *CKM-Matrix* (1+2+4+3+2=12 Punkte)

Die CKM-Matrix sei wie in der Vorlesung definiert durch

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ und $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$.

- Zeigen Sie, dass V_{CKM} eine unitäre Matrix ist.
- Geben Sie V_{CKM} in geschlossener Form an.
- Leiten Sie mit den Definitionen

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{-i\delta} = A\lambda^3(\rho - i\eta)$$

die in der Vorlesung gezeigte Wolfenstein-Parameterisierung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^4)$ her.

- d. Zeigen Sie, dass sowohl aus der geschlossenen Form als auch aus der Wolfenstein-Parameterisierung jeweils die Beziehungen

$$s_{12} = \lambda = \frac{|V_{us}|}{\sqrt{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}}, \quad s_{23} = A\lambda^2 = \lambda \left| \frac{V_{cb}}{V_{us}} \right|, \quad s_{13}e^{i\delta} = V_{ub}^* = A\lambda^3(\rho + i\eta)$$

folgen.

- e. Zeigen Sie, dass die Spitze des in der Vorlesung definierten Unitaritätsdreiecks tatsächlich in der komplexen Ebene bei (ρ, η) bzw. $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ liegt.

Aufgabe 4 *Zerfall des D^0 -Mesons* (3+3=6 Punkte)

- a. Begründen Sie, warum das D^0 -Meson ($c\bar{u}$) viel häufiger nach $K^-\pi^+$ als nach $K^+\pi^-$ zerfällt. Zeichnen Sie die zugehörigen Feynman-Diagramme!
- b. Schätzen Sie grob das Verhältnis der beiden relativen Zerfallsbreiten ab. Vergleichen Sie mit den experimentellen Daten.

Loesung_Myonerzeugung

November 25, 2024

1 Musterlösung zur 5. Übung, Aufgabe 1

```
%config InteractiveShell.ast_node_interactivity='last_expr_or_assign'
```

```
import sympy as sp
import astropy.units as u
import astropy.constants
```

```
alpha, s, theta, x = sp.symbols('alpha s theta x', real=True)
```

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ ist gegeben durch:

```
wq = alpha**2/4/s * (1+sp.cos(theta)**2)
```

$$\frac{\alpha^2 (\cos^2(\theta) + 1)}{4s}$$

Der gesamte Wirkungsquerschnitt für die Streuung in den (vom Detektor abgedeckten) Zentralbereich ergibt sich durch Integration über den entsprechenden Raumwinkelbereich mit Hilfe von $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = -d\cos\theta d\phi$ zu

$$\sigma = \int \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) d\Omega = \int_{\cos 135^\circ}^{\cos 45^\circ} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) d\phi d\cos\theta = \frac{2\pi\alpha^2}{4s} \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1 + x^2) dx.$$

(2 Punkte)

```
sigma = 2 * sp.pi * sp.integrate(wq.subs(sp.cos(theta),x), (x, -sp.sqrt(2)/2, sp.sqrt(2)/2))
```

$$\frac{7\sqrt{2}\pi\alpha^2}{12s}$$

(1 Punkt)

Wir können auch das in der Vorlesung genannte Ergebnis für den totalen Wirkungsquerschnitt nachrechnen:

```
sigma_tot = 2 * sp.pi * sp.integrate(wq.subs(sp.cos(theta),x), (x, -1, 1))
```

$$\frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

```
astropy.constants.alpha
```

0.0072973526

```
E = 34 * u.GeV
```

34 GeV

```
L = 5.e30 / u.cm**2 / u.s
```

$$5 \times 10^{30} \frac{1}{\text{s cm}^2}$$

Wir wandeln den *sympy*-Ausdruck in eine Funktion um, damit wir einheitenbehaftete Größen dort einsetzen können:

```
sigma_func = sp.lambdify((alpha, s), sigma)
```

```
<function _lambdifygenerated(alpha, s)>
```

Die Zählrate ergibt sich dann als Produkt von Luminosität und Wirkungsquerschnitt:

```
Ndot = L * sigma_func(astropy.constants.alpha, E**2)
```

$$5.969315 \times 10^{23} \frac{1}{\text{s GeV}^2 \text{ cm}^2}$$

Umrechnung der Einheiten mit der richtigen Potenz von $\hbar c$:

```
Ndot = (L * sigma_func(astropy.constants.alpha, E**2) * (astropy.constants.
↪ hbar*astropy.constants.c)**2).decompose()
```

$$0.00023243281 \frac{1}{\text{s}}$$

(1 Punkt)

Physik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Musterlösung zu Übung 5, Aufgabe 2

Ein **magnetisches Dipolmoment** $\vec{\mu}$ ist gegeben als Integration über $\vec{r} \times \vec{j}$, wobei \vec{r} ein Ortsvektor und \vec{j} eine Stromdichte sind. Unter P -Transformation ändern sowohl \vec{r} als auch \vec{j} ihr Vorzeichen, deshalb ist $\vec{\mu}$ insgesamt invariant unter P -Transformation. Unter T -Transformation bleibt der Raumvektor unverändert, aber der Strom fließt rückwärts, also ändert \vec{j} sein Vorzeichen und damit auch $\vec{\mu}$.

(1 Punkt)

Ein **elektrisches Dipolmoment** \vec{d} verhält sich wie $q\vec{r}$, wobei q eine Ladung ist. Im einfachsten Fall haben wir zwei entgegengesetzte Ladungen, die durch den Abstandsvektor \vec{r} verbunden sind. Unter P -Transformation ändert damit \vec{d} sein Vorzeichen, unter T -Transformation ist \vec{d} invariant.

(1 Punkt)

Dieses Transformationsverhalten ist insgesamt in Abbildung 1 zusammengefasst und visualisiert.

Damit führt aber eine T -Transformation bei einem Teilchen wie dem Neutron, welches sowohl ein permanentes Dipolmoment als auch ein magnetisches Moment besitzt, zu einem anderen (unterscheidbaren) Zustand. Dasselbe gilt für die P -Transformation.

(1 Punkt)

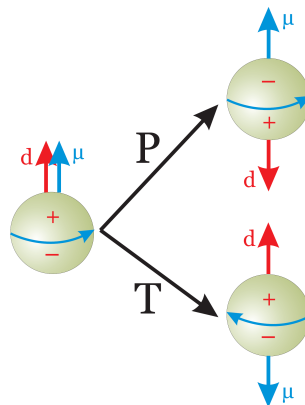


Abbildung 1: Transformation der Dipolmomente unter P - und T -Transformation.

Loesung_CKM

November 25, 2024

1 Musterlösung zur 5. Übung, Aufgabe 3

```
%config InteractiveShell.ast_node_interactivity='last_expr_or_assign'
```

```
import sympy as sp
from sympy import I
from sympy.matrices import Matrix
from sympy import sin, cos, exp, sqrt
from sympy.physics.quantum.dagger import Dagger
```

1.1 a)

Wir definieren zunächst die relevanten Variablen und die drei Matrizen, deren Produkt die CKM-Matrix bildet.

```
t12, t13, t23, delta = sp.symbols('theta_12 theta_13 theta_23 delta', real=True)
```

```
U1 = Matrix(3,3,[1,0,0,0,cos(t23),sin(t23),0,-sin(t23),cos(t23)])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{23}) & \sin(\theta_{23}) \\ 0 & -\sin(\theta_{23}) & \cos(\theta_{23}) \end{bmatrix}$$

```
U2 = Matrix(3,3,[cos(t13),0,sin(t13)*exp(-I*delta), 0, 1, 0,
↪-sin(t13)*exp(I*delta), 0, cos(t13)])
```

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_{13}) & 0 & e^{-i\delta} \sin(\theta_{13}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -e^{i\delta} \sin(\theta_{13}) & 0 & \cos(\theta_{13}) \end{bmatrix}$$

```
U3 = Matrix(3,3,[cos(t12), sin(t12), 0, -sin(t12), cos(t12), 0, 0, 0, 1])
```

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_{12}) & \sin(\theta_{12}) & 0 \\ -\sin(\theta_{12}) & \cos(\theta_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jetzt überprüfen wir, dass jede der drei Matrizen unitär ist, d.h. $U_i^+ U_i = U_i U_i^+ = 1$.

```
sp.simplify(Dagger(U1)*U1)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
sp.simplify(U1*Dagger(U1))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
sp.simplify(Dagger(U2)*U2)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
sp.simplify(Dagger(U3)*U3)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da die unitären Matrizen eine Gruppe bilden, ist auch das Produkt zweier unitärer Matrizen wieder eine unitäre Matrix, also auch unsere CKM-Matrix U .

(1 Punkt)

1.2 b)

Wir können U jetzt durch explizites Ausmultiplizieren in geschlossener Form angeben:

```
U = U1*U2*U3
```

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{13}) & \sin(\theta_{12}) \cos(\theta_{13}) & e^{-i\delta} \sin(\theta_{12}) \cos(\theta_{13}) \\ -e^{i\delta} \sin(\theta_{13}) \sin(\theta_{23}) \cos(\theta_{12}) - \sin(\theta_{12}) \cos(\theta_{23}) & -e^{i\delta} \sin(\theta_{12}) \sin(\theta_{13}) \sin(\theta_{23}) + \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{23}) & \sin(\theta_{23}) \cos(\theta_{12}) \\ -e^{i\delta} \sin(\theta_{13}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{23}) + \sin(\theta_{12}) \sin(\theta_{23}) & -e^{i\delta} \sin(\theta_{12}) \sin(\theta_{13}) \cos(\theta_{23}) - \sin(\theta_{23}) \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) \end{bmatrix}$$

(2 Punkte)

Wir geben dieselbe Matrix noch einmal mit unserer Kurznotation für die Winkelfunktionen an:

```
s12, s13, s23, c12, c13, c23 = sp.symbols('s_12 s_13 s_23 c_12 c_13 c_23',
↪real=True)
```

```
short = [(sin(t12), s12), (sin(t13), s13), (sin(t23), s23), (cos(t12), c12),
↪(cos(t13), c13), (cos(t23), c23)]
```

```
[(sin(theta_12), s_12),
(sin(theta_13), s_13),
```

```
(sin(theta_23), s_23),
(cos(theta_12), c_12),
(cos(theta_13), c_13),
(cos(theta_23), c_23)]
```

```
U.subs(short)
```

$$\begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} - c_{23}s_{12} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ -c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} + s_{12}s_{23} & -c_{12}s_{23} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{bmatrix}$$

Wir überprüfen noch einmal die Unitarität von U:

```
sp.simplify(Dagger(U)*U)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 c)

Die Wolfenstein-Parameterisierung benutzt genauso wie die konventionelle Form vier freie, reelle Parameter:

```
A, lam, rho, eta = sp.symbols('A lambda rho eta', real=True)
```

Es lässt sich zeigen, dass eine unitäre 3×3 -Matrix im allgemeinen neun reelle Parameter hat. Fünf davon können als Phasen in die Wellenfunktionen der Quarks absorbiert werden, ohne dass dies beobachtbare Auswirkungen hätte. Es bleiben vier Parameter übrig, von denen drei als Drehwinkel um die drei Raumachsen interpretiert werden können. Es bleibt ein Parameter übrig, der eine komplexe Phase sein muss, die schließlich zu der beobachtbaren CP -Verletzung durch die schwache Wechselwirkung im Quarksektor führt.

Um die Ersetzung zu erleichtern, schreiben wir alle Kosinus-Terme mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$ explizit in Sinus-Terme um, um gleich einfacher die Definitionen der Wolfenstein-Parameter einsetzen zu können:

```
V = U.subs([(cos(t12), sqrt(1-sin(t12)**2)), (cos(t13), sqrt(1-sin(t13)**2)),
↪(cos(t23), sqrt(1-sin(t23)**2))])
```

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\sin^2(\theta_{12})}\sqrt{1-\sin^2(\theta_{13})} & \sqrt{1-\sin^2(\theta_{13})}\sin(\theta_{12}) \\ -\sqrt{1-\sin^2(\theta_{12})}e^{i\delta}\sin(\theta_{13})\sin(\theta_{23}) - \sqrt{1-\sin^2(\theta_{23})}\sin(\theta_{12}) & \sqrt{1-\sin^2(\theta_{12})}\sqrt{1-\sin^2(\theta_{23})} - e^{i\delta}\sin(\theta_{12})\sin(\theta_{23}) \\ -\sqrt{1-\sin^2(\theta_{12})}\sqrt{1-\sin^2(\theta_{23})}e^{i\delta}\sin(\theta_{13}) + \sin(\theta_{12})\sin(\theta_{23}) & -\sqrt{1-\sin^2(\theta_{12})}\sin(\theta_{23}) - \sqrt{1-\sin^2(\theta_{23})}e^{i\delta}\sin(\theta_{12}) \end{bmatrix}$$

Oder knapper notiert:

```
V.subs(short)
```


$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-s_{12}^2}\sqrt{1-s_{13}^2} & s_{12}\sqrt{1-s_{13}^2} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}\sqrt{1-s_{23}^2}-s_{13}s_{23}\sqrt{1-s_{12}^2}e^{i\delta} & -s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta}+\sqrt{1-s_{12}^2}\sqrt{1-s_{23}^2} & s_{23}\sqrt{1-s_{13}^2} \\ s_{12}s_{23}-s_{13}\sqrt{1-s_{12}^2}\sqrt{1-s_{23}^2}e^{i\delta} & -s_{12}s_{13}\sqrt{1-s_{23}^2}e^{i\delta}-s_{23}\sqrt{1-s_{12}^2} & \sqrt{1-s_{13}^2}\sqrt{1-s_{23}^2} \end{bmatrix}$$

(1 Punkt)

Die Definition der Wolfenstein-Parameter wird durch die Beobachtung einer starken Hierarchie in den Absolutwerten der Elemente der CKM-Matrix motiviert. Wir setzen jetzt einfach ein und führen von Hand die komplexe Konjugation für den entsprechenden Term durch, so dass sich genau die vier notwendigen Gleichungen ergeben, die die beiden Parameterisierungen ineinander überführen.

```
def1 = (sin(t12), lam)
def2 = (sin(t23), A*lam**2)
def3 = (sin(t13)*exp(-I*delta), A*lam**3*(rho-I*eta))
def4 = (sin(t13)*exp(+I*delta), A*lam**3*(rho+I*eta))
V = sp.simplify(V.subs([def1, def2, def3, def4]))
```

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\lambda^2}|\cos(\theta_{13})| & \lambda|\cos(\theta_{13})| & A\lambda^3(-i\eta+\rho) \\ -\lambda(A^2\lambda^4\sqrt{1-\lambda^2}(i\eta+\rho)+\sqrt{-A^2\lambda^4+1}) & -A^2\lambda^6(i\eta+\rho)+\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{-A^2\lambda^4+1} & A\lambda^2|\cos(\theta_{13})| \\ A\lambda^3(-\sqrt{1-\lambda^2}(i\eta+\rho)\sqrt{-A^2\lambda^4+1}+1) & -A\lambda^2(\lambda^2(i\eta+\rho)\sqrt{-A^2\lambda^4+1}+\sqrt{1-\lambda^2}) & \sqrt{-A^2\lambda^4+1}|\cos(\theta_{13})| \end{bmatrix}$$

(1 Punkt)

Es bleiben die $\cos(\theta_{13})$ -Terme übrig, die sich wieder über die bekannte Beziehung der Winkelfunktionen sowie die Definitionsgleichung $\sin\theta_{13}e^{-i\delta} = A\lambda^3(\rho - i\eta)$ substituieren lassen:

```
V = V.subs(cos(t13), sqrt(1-(A*lam**3*(rho-I*eta)*exp(+I*delta))**2))
```

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\lambda^2}\left|\sqrt{-A^2\lambda^6(-i\eta+\rho)^2e^{2i\delta}+1}\right| & \lambda\left|\sqrt{-A^2\lambda^6(-i\eta+\rho)^2e^{2i\delta}+1}\right| & A\lambda^3(-i\eta+\rho) \\ -\lambda(A^2\lambda^4\sqrt{1-\lambda^2}(i\eta+\rho)+\sqrt{-A^2\lambda^4+1}) & -A^2\lambda^6(i\eta+\rho)+\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{-A^2\lambda^4+1} & A\lambda^2\left|\sqrt{-A^2\lambda^6(-i\eta+\rho)^2e^{2i\delta}+1}\right| \\ A\lambda^3(-\sqrt{1-\lambda^2}(i\eta+\rho)\sqrt{-A^2\lambda^4+1}+1) & -A\lambda^2(\lambda^2(i\eta+\rho)\sqrt{-A^2\lambda^4+1}+\sqrt{1-\lambda^2}) & \sqrt{-A^2\lambda^4+1}\left|\sqrt{-A^2\lambda^6(-i\eta+\rho)^2e^{2i\delta}+1}\right| \end{bmatrix}$$

(1 Punkt)

Jetzt können wir die einzelnen Matrixelemente bis zur vierten Ordnung in λ entwickeln.

```
sp.series(V[0,0], lam, n=4)
```

$$1 - \frac{\lambda^2}{2} + O(\lambda^4)$$

```
sp.series(V[1,0], lam, n=4)
```

$$-\lambda + O(\lambda^4)$$

```
sp.series(V[2,0], lam, n=4)
```

$$\lambda^3(-iA\eta - A\rho + A) + O(\lambda^4)$$

An diesem Beispiel studieren wir die weitere Vereinfachung und Umwandlung des Terms:

```
sp.collect(sp.series(V[2,0], lam, n=4).remove0(),A)
```

$$A\lambda^3(-i\eta - \rho + 1)$$

Mit diesen Mitteln können wir die gesamte Matrix nach λ entwickeln:

```
V = V.applyfunc(lambda x: sp.collect(sp.series(x, lam, n=4).remove0(), A))
```

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(-i\eta + \rho) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(-i\eta - \rho + 1) & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1 Punkt)

Wir überprüfen die Unitarität:

```
M1 = sp.simplify(Dagger(V)*V)
```

$$\begin{bmatrix} -A^2\lambda^6(i\eta - \rho + 1)(i\eta + \rho - 1) + \lambda^2 + \frac{(\lambda^2-2)^2}{4} & A^2\lambda^5(-i\eta + \rho - 1) & \frac{A\lambda^5(i\eta - \rho)}{2} \\ A^2\lambda^5(i\eta + \rho - 1) & A^2\lambda^4 + \frac{\lambda^4}{4} + 1 & \frac{A\lambda^4(-2i\eta + 2\rho - 1)}{2} \\ -\frac{A\lambda^5(i\eta + \rho)}{2} & \frac{A\lambda^4(2i\eta + 2\rho - 1)}{2} & -A^2\lambda^6(i\eta - \rho)(i\eta + \rho) + A^2\lambda^4 + 1 \end{bmatrix}$$

```
M1.applyfunc(lambda x: sp.series(x, lam, n=4))
```

$$\begin{bmatrix} 1 + O(\lambda^4) & O(\lambda^4) & O(\lambda^4) \\ O(\lambda^4) & 1 + O(\lambda^4) & O(\lambda^4) \\ O(\lambda^4) & O(\lambda^4) & 1 + O(\lambda^4) \end{bmatrix}$$

```
M1.applyfunc(lambda x: sp.series(x, lam, n=4).remove0())
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 d)

Zum Beweis fangen wir jeweils mit den V_{xy} -Termen an und leiten daraus die Ausdrücke ab, die sich jeweils in der herkömmlichen Parameterisierung (in diesem Skript mit U bezeichnet) und der Wolfenstein-Parameterisierung (in diesem Skript mit V bezeichnet) ergeben.

1.4.1 i. $\frac{|V_{us}|}{\sqrt{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}}$

```
Uud=U[0,0]
```

$$\cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{13})$$

```
Uus=U[0,1]
```

$$\sin(\theta_{12}) \cos(\theta_{13})$$

```
sp.simplify(sp.Abs(Uus)/sqrt(Uud**2 + Uus**2))
```

$$|\sin(\theta_{12})|$$

```
Vud=V[0,0]
```

$$1 - \frac{\lambda^2}{2}$$

```
Vus=V[0,1]
```

$$\lambda$$

```
a12=sp.simplify(sp.Abs(Vus)/sqrt(Vud**2 + Vus**2))
```

$$\frac{2|\lambda|}{\sqrt{\lambda^4 + 4}}$$

```
sp.series(a12, lam, n=4)
```

$$\lambda + O(\lambda^4)$$

(1 Punkt)

1.4.2 ii. $\lambda \left| \frac{V_{cb}}{V_{us}} \right|$

```
Ucb=U[1,2]
```

$$\sin(\theta_{23}) \cos(\theta_{13})$$

```
(lam*Ucb/Uus).subs([def1])
```

$$\sin(\theta_{23})$$

```
Vcb=V[1,2]
```

$$A\lambda^2$$

```
lam*Vcb/Vus
```

$$A\lambda^2$$

(1 Punkt)

1.4.3 iii. V_{ub}^*

$$U_{ub}=U[0,2]$$

$$e^{-i\delta} \sin(\theta_{13})$$

$$\text{sp.conjugate}(U_{ub})$$

$$e^{i\delta} \sin(\theta_{13})$$

$$V_{ub}=V[0,2]$$

$$A\lambda^3(-i\eta + \rho)$$

$$\text{sp.conjugate}(V_{ub})$$

$$A\lambda^3(i\eta + \rho)$$

(1 Punkt)

1.5 e)

Um die Position der Spitze des Unitaritätsdreiecks in der komplexen Ebene zu berechnen, wenden wir die in der Vorlesung gegebenen Definitionen für die linke und die rechte Flanke des Dreiecks an.

$$V_{cd}=V[1,0]$$

$$-\lambda$$

Linke Seite:

$$V_{ud}*\text{sp.conjugate}(V_{ub})/(V_{cd}*\text{sp.conjugate}(V_{cb}))$$

$$-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)(i\eta + \rho)$$

Es ist $\bar{\rho} \equiv \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\rho$ und $\bar{\eta} \equiv \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\eta$ und durch den Betrag wird das Minuszeichen irrelevant.

$$V_{td}=V[2,0]$$

$$A\lambda^3(-i\eta - \rho + 1)$$

$$V_{tb}=V[2,2]$$

$$1$$

(1 Punkt)

Rechte Seite: (wie oben brauchen wir ein Minuszeichen)

$$1 - (-V_{td} \cdot \text{sp.conjugate}(V_{tb}) / (V_{cd} \cdot \text{sp.conjugate}(V_{cb})))$$

$$i\eta + \rho$$

(1 Punkt)

Loesung_D0

November 25, 2024

1 Musterlösung zur 5. Übung, Aufgabe 4

```
%config InteractiveShell.ast_node_interactivity='last_expr_or_assign'
```

1.1 a)

Wir zeichnen zunächst die beiden Feynman-Diagramme und schreiben die relevanten Elemente der CKM-Matrix an die Vertices.

```
import matplotlib
matplotlib.rcParams['mathtext.fontset'] = 'stix'
matplotlib.rcParams['font.family'] = 'STIXGeneral'

from feynman import Diagram

def D0decay(kaon, pion, q3, q4):

    fig = matplotlib.pyplot.figure(figsize=(10.,6.))
    ax = fig.add_axes([0,0,1,1], frameon=False)

    y1 = 0.8
    y2 = 0.6
    y3 = y2 - 0.2
    y4 = y3 - 0.2
    x2 = 0.5
    x3 = 0.65
    x4 = 0.9
    fs = 30

    diagram = Diagram(ax)
    diagram.text(0.4, y1 + 0.1, fr'$D^0 \rightarrow \{kaon\}\{pion\}$', fontsize=30)
    q1in = diagram.vertex(xy=(.1, y2), marker='')
    q2in = diagram.vertex(xy=(.1, y1), marker='')
    v1 = diagram.vertex(xy=(x2, y2))
    v2 = diagram.vertex(xy=(x3, y3))
    q1out = diagram.vertex(xy=(x4, y2), marker='')
    q2out = diagram.vertex(xy=(x4, y1), marker='')
    diagram.connect(q1in, v1)
    diagram.connect(q2in, v1)
    diagram.connect(v1, v2)
    diagram.connect(v2, q1out)
    diagram.connect(v2, q2out)
```

```

q3out = diagram.vertex(xy=(x4, y3), marker='')
q4out = diagram.vertex(xy=(x4, y4), marker='')

lw = 4
arrow = dict(color='blue', length=0.08, width=0.02)
# Quarks
diagram.line(q1in, v1, color='blue', lw=lw, arrow_param=arrow)
diagram.line(q2out, q2in, color='blue', lw=lw, arrow_param=arrow)
diagram.line(v1, q1out, color='blue', lw=lw, arrow_param=arrow)
diagram.text(0.06, y2, r'$c$', fontsize=fs)
diagram.text(0.06, y1, r'$\bar{u}$', fontsize=fs)
diagram.text(x4+0.03, y1, r'$\bar{u}$', fontsize=fs)
diagram.text(x4+0.03, y2, fr'$q3$', fontsize=fs)

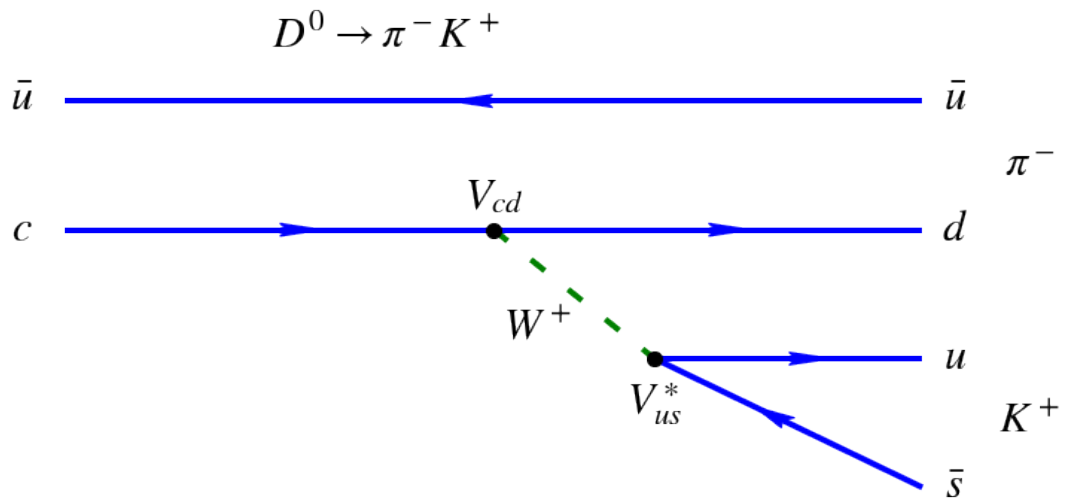
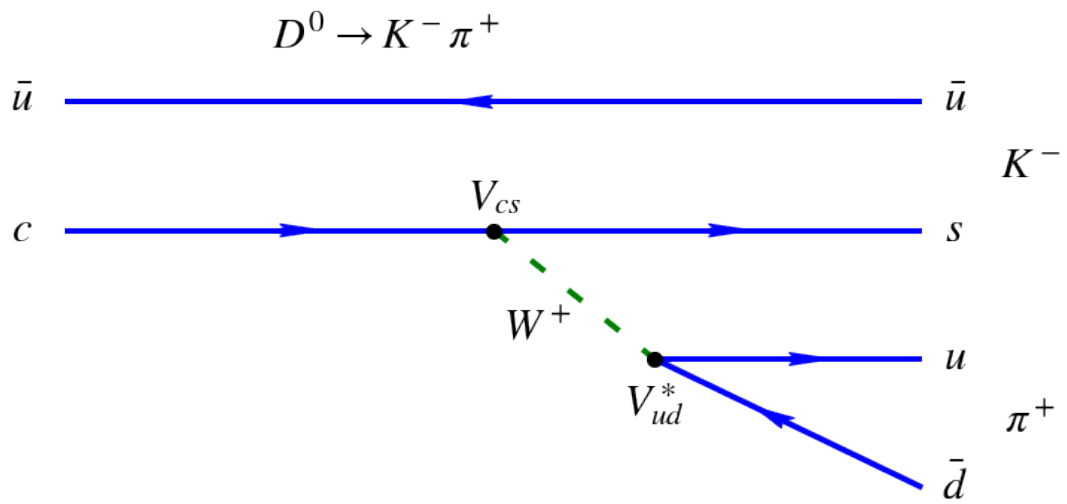
# W
diagram.line(v1, v2, style='dotted', color='green', lw=lw, arrow=None)
diagram.text(x2 + 0.04, y3 + 0.05, r"$W^+$", fontsize=fs)

# new Quarks
diagram.line(v2, q3out, color='blue', lw=lw, arrow_param=arrow)
diagram.line(q4out, v2, color='blue', lw=lw, arrow_param=arrow)
diagram.text(x4+0.03, y3, r'$u$', fontsize=fs)
diagram.text(x4+0.03, y4, fr'$\bar{\{q4\}}$', fontsize=fs)

diagram.text(x2, y2 + 0.05, fr'$V_{\{c\{q3\}\}}$', fontsize=fs)
diagram.text(x3, y3 - 0.07, fr'$V_{\{u\{q4\}\}}^{\ast}$', fontsize=fs)
diagram.text(x4+0.1, 0.5*(y1+y2), fr'$\{kaon\}$', fontsize=fs)
diagram.text(x4+0.1, 0.5*(y3+y4), fr'$\{pion\}$', fontsize=fs)
diagram.plot()

D0decay('K^-', '\pi^+', 's', 'd')
D0decay('\pi^-', 'K^+', 'd', 's')

```



(2 Punkte)

Das Matrixelement für den Zerfall $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ ist also proportional zu $V_{cs} V_{ud}^* = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$.

Das Matrixelement für den Zerfall $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ ist proportional zu $V_{cd}V_{us}^* = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$.

Zahlenwert von λ laut Vorlesung:

```
lambda_val = 0.22658
```

0.22658

Entsprechend ist der Zerfall $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ im Vergleich zu $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ unterdrückt.

(1 Punkt)

1.2 b)

Aus der Betrachtung der Feynman-Diagramme sehen wir, dass das Matrixelement für den Zerfall $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ einen Faktor λ^2 im Vergleich zum Zerfall $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ aufweist. Die Zerfallsbreite ist proportional zum Quadrat des Matrixelements und damit ergibt sich als grober Schätzwert ein Faktor λ^4 :

```
round(lambda_val**4, 6)
```

0.002636

(2 Punkte)

Mit den Zahlen aus dem Review of Particle Physics der Particle Data Group ergibt sich für das experimentell gefundene Verhältnis der relativen Zerfallsbreiten:

```
round(1.5e-4/3.946e-2, 6)
```

0.003801

(1 Punkt)