oben beschränkt. Nach Satz 3.2.8 konvergiert die Folge der Teilsummen (also konvergiert die Reihe S).

Wir fassen zusammen: Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit positiven Termen $a_k \geq 0$ gilt,

- wenn $a_k \geq \frac{c}{k}$ für ein $c > 0$, dann divergiert die Reihe. Also reicht das Verschwinden der Terme nicht für Konvergenz der Reihe aus.

- wenn $a_k \leq \frac{c}{k^{1+\varepsilon}}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$, dann konvergiert die Reihe. Also reicht polynomisches Verschwinden der Terme mit Rate echt größer als Eins für Konvergenz der Reihe aus.

6.3 Potenzreihen

In diesem Abschnitt betrachten wir Objekte der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

die Potenzreihen genannt werden. Bemerken Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =: f(x)$$

eine Funktion von x ist, also viel komplizierter als die Reihen reeller Zahlen, die wir bis jetzt betrachtet haben. Insbesondere stellen sich die Fragen:

1. Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Für keine $x \in \mathbb{R}$ außer 0? Oder für welche?

2. Ist f für die x, für die f wohldefiniert ist, stetig? Differenzierbar?

3. Wenn f differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}?$$

Potenzreihen sind ein besonderer Fall von Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{6.3.1}$$

Potenzreihen sind aber viel einfacher zu analysieren als allgemeine Reihen der Form (6.3.1). Außerdem sind Potenzreihen wichtig, weil die sogenannte Taylorreihe einer Funktion eine Potenzreihe ist (siehe Abschnitt 6.4).

Definition 6.3.1. *Eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

heißt eine *Potenzreihe* *(in x). Die Zahlen a_k heißen* *Koeffizienten*. *Die Zahl*

$$R := \sup\left\{ |x| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert} \right\}$$

wird der *Konvergenzradius* *der Potenzreihe genannt.*

Bemerkung. *Allgemeiner nennen wir eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe um den Punkt x_0 (mit Spezialfall $x_0 = 0$ oben). Der Konvergenzradius ist dann analog durch Verschieben um x_0 definiert:

$$R := \sup\left\{ |x - x_0| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

Satz 6.3.2. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Es gilt*

(i) *Wenn $R = 0$, so konvergiert die Reihe nur in $x = 0$.*

(ii) *Wenn $R > 0$, so ist die Potenzreihe absolut konvergent für alle $x \in (-R, R)$.*

(iii) *Für alle x mit $|x| > R$ divergiert die Potenzreihe.*

Ob die Potenzreihe in $x = \pm R$ konvergiert, muss man seperat betrachten. (An der Grenze muss man immer vorsichtig sein.)

Beweis von Satz 6.3.2. *(i)* und *(iii)* folgen aus der Definition von R. Um *(ii)* zu zeigen, wählen wir ein $x \in (-R, R) \setminus \{0\}$. Nach Definition 6.3.1 existiert ein y mit

$$|x| < |y| < R, \tag{6.3.2}$$

so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$$

konvergiert. Insbesondere ist

$$|a_k y^k| \leq 1 \quad \text{für alle } k \text{ groß genug.} \tag{6.3.3}$$

Um absolute Konvergenz in x zu prüfen, schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |a_k x^k| &= \left| a_k y^k \frac{x^k}{y^k} \right| \overset{(6.3.3)}{\leq} \left| \frac{x}{y} \right|^k \\ &= q^k \quad \text{für ein } q \in (0,1), \end{aligned}$$

wobei wir (6.3.2) angewendet haben. Nach Vergleich mit der geometrischen Reihe schließen wir absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. $\square$

Um den Konvergenzradius einer Potenzreihe zu bestimmen, benutzen wir unsere Werkzeuge für Reihen reeller Zahlen.

Beispiele.

① Finden Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k x^k}{k!}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Um das Quotientenkriterium anzuwenden, betrachten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k x^k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|x\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right| \\
&= |x| \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\
&= |x| \cdot e.
\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|x| < \frac{1}{e}$ und die Reihe divergiert für $|x| > \frac{1}{e}$. Also ist $R = \frac{1}{e}$.

② Finden Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wir betrachten den Quotienten wieder:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\right| \\
&= |x|^2 \cdot \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist $R = \infty$.

Mit dem Wurzelkriterium erhält man die folgende Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz 6.3.3. *Der Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

erfüllt die Gleichung

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

mit der Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$.

Beweis. Das Wurzelkriterium liefert Konvergenz für

$$1 > \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k||x|^k} = |x| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

und Divergenz für

$$1 < |x| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

□

Also ist

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

auf $(-R, R)$ wohldefiniert, das heißt $(-R, R) \subseteq \mathcal{D}(f)$. Ob f für $x = R$ und $x = -R$ wohldefiniert ist, muss man separat untersuchen.

Beispiel. Finden Sie das größte Intervall I, auf dem $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergiert. Zunächst berechnen wir

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = 1.$$

Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert, ist $I = [-1, 1)$.

Satz 6.3.4. *Sei* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann ist* f *auf* $(-R, R)$ *stetig.*

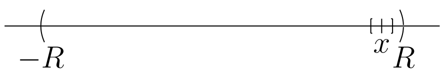
Beweis. Sei $x \in (-R, R)$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass aus $|x - y|$ klein folgt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \right| \text{ klein.}$$

Die Idee ist, dass wir $N_0 \in \mathbb{N}$ wählen, so dass

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=N_0}^{\infty} a_k y^k \tag{6.3.4}$$

klein sind. Dann bleibt nur die Differenz zweier Polynome.



Da x im Inneren des Konvergenzintervalls ist, können wir ein $N_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass (6.3.4) für alle y hinreichend nah an x gilt. Um dies deutlich zu machen, setzen wir

$$Y := |x| + \frac{R - |x|}{2}$$

und bemerken, dass $|x| < Y < R$. Wir wählen $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k| Y^k < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nach dem Vergleichsprinzip ist

$$\left|\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k y^k\right| \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k| Y^k < \frac{\varepsilon}{4} \tag{6.3.5}$$

für alle $y \in [-Y, Y]$. Andererseits wählen wir $\delta > 0$, so dass aus $|x - y| \leq \delta$ folgt

$$\left|\sum_{k=0}^{N_0} a_k x^k - \sum_{k=0}^{N_0} a_k y^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3.6}$$

Die Dreiecksungleichung zusammen mit (6.3.5) und (6.3.6) ergibt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{N_0} a_k x^k - \sum_{k=0}^{N_0} a_k y^k\right| + \left|\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k y^k\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\end{aligned}$$

für alle y, die $|x - y| \leq \tilde{\delta}$ erfüllen, wobei

$$\tilde{\delta} := \min\left\{\delta, \frac{R - |x|}{2}\right\}.$$

$\square$

Wir werden auch in der Lage sein müssen, Potenzreihen miteinander zu multiplizieren.

Satz 6.3.5. *Seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius* R *bzw.* $\tilde{R}$*. Dann ist das Produkt eine Potenzreihe mit Konvergenzradius größer gleich* $\min\left\{R, \tilde{R}\right\}$ *und es gilt*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit $c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$.

Man kann zeigen, dass Potenzreihen auf $(-R, R)$ viel besser als stetig sind.

Satz 6.3.6. *Sei* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann ist* f *auf* $(-R, R)$ *differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1} \quad \text{für } x \in (-R, R).$$

Iteration ergibt:

Korollar 6.3.7. *Sei* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann ist* $f \in C^\infty((-R, R))$ *und es gilt*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n} \quad \text{für } x \in (-R, R).$$

6.4 Taylor-Formel

Definition 6.4.1. *Sei* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *n-mal differenzierbar. Das* *Taylorpolynom n-ter Ordnung* *um* $x_0 \in (a,b)$ *ist*

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Der *Restterm* *ist*

$$R_n(x; x_0) := f(x) - T_n(x; x_0).$$

Wir haben schon das Taylorpolynom erster Ordnung als Approximation von f benutzt. Jetzt approximieren wir f—falls f glatt genug ist—durch Polynome höherer Ordnung. Natürlich ist f selber kein Polynom (außer wenn der Restterm identisch Null ist). Sehr wichtig ist, dass wir den Restterm abschätzen können.

Satz 6.4.2 (Taylor-Formel, Differentialform des Restterms)**.** *Sei* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$*-mal* *differenzierbar. Für $x, x_0 \in (a,b)$ existiert ein c zwischen x und x_0, so dass*

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Insbesondere gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{6.4.1}$$

Wichtig zu bemerken ist, dass (6.4.1) **nicht** sagt, dass jede Funktion ein Polynom ist! Der Punkt c hängt von x ab!

Für $n = 0$ ist (6.4.1) der Mittelwertsatz.

Man kann Satz 6.4.2 anwenden, um die Qualität einer Approximation zu überprüfen.

Beispiel. Sei $f \in C^3((a,b))$ mit

$$|f'''(x)| \leq C \quad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Dann gilt

$$|f(x) - T_2(x; x_0)| \leq \frac{C}{6}|x - x_0|^3.$$

Übung 12. Geben Sie eine Abschätzung für

$$|e^x - (x+1)|$$

auf $x \in (0, \frac{1}{2})$ an.

Man kann Satz 6.4.2 auch anwenden, um zu bestimmen, ob ein kritischer Punkt x_0 zum Beispiel ein lokales Minimum ist.

Übung 13. Angenommen $f \in C^4((a,b))$ und für $x_0 \in (a,b)$ gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0.$$

Geben Sie ein Kriterium an, so dass

(i) x_0 ein lokales Minimum ist,

(ii) x_0 ein lokales Maximum ist,

(iii) x_0 kein lokales Extremum ist.

Hinweis: Betrachten Sie

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Wenn $f \in C^\infty((a,b))$, dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die Taylorreihe von f um x_0. Wenn für jedes $x_0 \in (a,b)$ die Taylorreihe um x_0 für alle x in einer Umgebung von x_0 gegen $f(x)$ konvergiert, dann heißt f auf (a,b) analytisch.

Übung 14. Benutzen Sie die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

um zu zeigen, dass nicht jede C^∞-Funktion analytisch ist.

Man kann zeigen, dass $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ und $\exp(\cdot)$ auf $\mathbb{R}$ analytisch sind und dass gilt

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},\\
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$