Luca Cordes, 444900

Experimentalphysik Vb (WS 2023/2024)

Übung 2

Tutorium: 1 Abgabe: 31.10.2024

Aufgabe 1: Mandelstam-Variablen

Für die drei Mandelstam-Variablen gilt:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= (2E, \vec{p} - \vec{p})^2 \\ &= 4E \\ &= 4(\vec{p}^2 + m^2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 \\ &= (E - E, \vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 \\ &= -2\vec{p}^2 + 2\vec{p}_1\vec{p}_3 \\ &= -2\vec{p}^2 + 2\vec{p}^2 \cos\theta \\ &= -2\vec{p}^2(1 - \cos\theta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= (p_1 - p_4)^2 \\ &= (E - E, \vec{p}_1 - \vec{p}_4)^2 \\ &= (E - E, \vec{p}_1 + \vec{p}_3)^2 \\ &= -2\vec{p}^2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_3 \\ &= -2\vec{p}^2 - 2\vec{p}^2 \cos(\theta) \\ &= -2\vec{p}^2(1 + \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Linear Beschleuniger and Zyklotron

(a)

Die Längen l_i der Driftröhren müssen offensichtlich als $\frac{v_i}{2f}$ gewählt werden. Der Energiegewinn nach jeder Driftröhre ist dann

$$\Delta E = eU_0$$

Insgesamt benötigt man also

$$N = \frac{E_{\text{kin}}}{\Delta E} = 100$$

Driftröhren. Die Gesamtlänge des Beschleunigers beläuft sich damit auf:

$$l = \sum_i l_i = \sum_i \frac{v_i}{2f} = \frac{1}{2f} \sum_i \sqrt{\frac{2i\Delta E}{m_p}} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{\Delta E}{2m_p}} \sum_{i=1}^{100} \sqrt{i} \approx \frac{671}{f}\sqrt{\frac{\Delta E}{2m_p}} \approx 104\,\text{m}$$

(b)

Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft:

$$F_z = F_L \Leftrightarrow \frac{mv^2}{r} = evB \Leftrightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{mv}{eB}\frac{1}{v} = 2\pi \frac{m}{eB} = \text{const.}$$
$$\Longrightarrow B = \frac{2\pi m}{eT} = \frac{m\omega}{e} \approx 1.31\,\mathrm{T}$$

Unter der Annahme, dass die Protonen bei jeder Runde zwei Mal beschleunigt werden, müssen sie 50 Mal den Zyklotron durchlaufen.
Der Durchmesser ist:

$$r_{\max} = \frac{mv_{\max}}{eB} = \frac{mv_{\max}}{e}\frac{e}{m\omega} = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{kin}}}{m_p}} \approx 49.3\,\mathrm{cm}$$

Aufgabe 3: Luminosität

(a)
Allgemein ergibt sich die Luminosität als Überlappungsintegral der Dichtefunktionen der beiden Strahlen:

$$L = KN_1N_2fn_B \iiiint \rho_1(x,y,s,-s_0)\rho_2(x,y,s,s_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s_0$$

Speziell für ein doppelt Gaußisches Profil ergibt sich damit

$$L = \frac{n_B f N_1 N_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \approx \frac{n_B c N_1 N_2}{4\pi l \sigma_x\sigma_y} \approx \begin{cases} 1.48\cdot 10^{38}\,\frac{1}{\mathrm{m^2 s}} \\ 1.48\cdot 10^{34}\,\frac{1}{\mathrm{cm^2 s}} \\ 14.8\,\frac{1}{\mathrm{nb\,s}} \end{cases}$$

(b)

$$L_{\mathrm{int}} = \eta \int_0^{t'} \mathrm{d}t\, L = \eta\cdot 6\cdot 30\cdot 24\cdot 60^2\,\mathrm{s}\cdot L = 57.3\,\mathrm{fb}$$

(c)

$$N = L_{\mathrm{int}}\sigma \approx 1.15\cdot 10^6$$

Aufgabe 4: Ionisierungs Verluste

(a)

Python-Code 1:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import pi, sqrt, log
from astropy.constants import alpha
plt.rcParams.update({"xtick.top": True , "ytick.right": True,
"xtick.minor.visible": True, "ytick.minor.visible": True,
"xtick.direction": "in" , "ytick.direction": "in",
"axes.labelsize": "large", "text.usetex": False, "font.size": 11})

# Nr.4
c,hbar,epsilon0,kB = 1,1,1,1
m_e = 0.51 # MeV
K = 0.307 # MeV / g / cm^2
rho = 1.06 # g / cm^3
ZA = 0.53768
I = 68.7e-6 # MeV
L = 1 # cm

particles = ["muon", "pion", "kaon", "proton", "alpha"]
particle_masses = [105.7, 139.6, 493.7, 938.3, 3727.4] # MeV
particle_charges = [1,1,1,1,2] * sqrt(4*pi*alpha) # 1

gamma = lambda p,M: sqrt(1 + (p / M)**2)
beta = lambda p,M: sqrt(1 - 1 / (gamma(p,M))**2)
W_max = lambda p,M: 2 * m_e * c**2 * beta(p,M)**2 * gamma(p,M)**2 / (1 + 2*gamma(p,M)*m_e/M +
↪  (m_e/M)**2)

dEdx = lambda p,M,z: K * rho * z**2 * ZA / beta(p,M)**2 * gamma(p,M)**2 / (1/2 * np.log(2 *
↪  m_e * c**2 * beta(p,M)**2 * gamma(p,M)**2 * W_max(p,M) / I**2) - beta(p,M)**2)

xlim = [1/2,8000]
p = np.linspace(*xlim,10000)
fig,ax = plt.subplots()
ax.set_xscale("log")
ax.set_yscale("log")
ax.set(xlabel="p in MeV",ylabel="(dE/dx in MeV/cm) bzw. ($\\approx \\Delta E$ in MeV)",
↪  xlim=xlim, title="Ionisierungsverluste")

for particle, mass, charge in zip(particles, particle_masses, particle_charges):
    DE = [dEdx(p, mass, charge) for p in p]
    ax.plot(p, np.divide(DE,mass), label=particle)
    argmin = np.argmin(DE[np.argmax(DE):])
    min = p[argmin]
    print(f"{particle:6}:    argmin         = {min:.5} MeV")
    print(f"{"":11}dE/dx(argmin) = {DE[argmin]:.5} MeV/cm")

ax.axvline(10**2.2, linestyle="--", label="158.5 MeV")
ax.legend()
fig.savefig("2.svg")
```

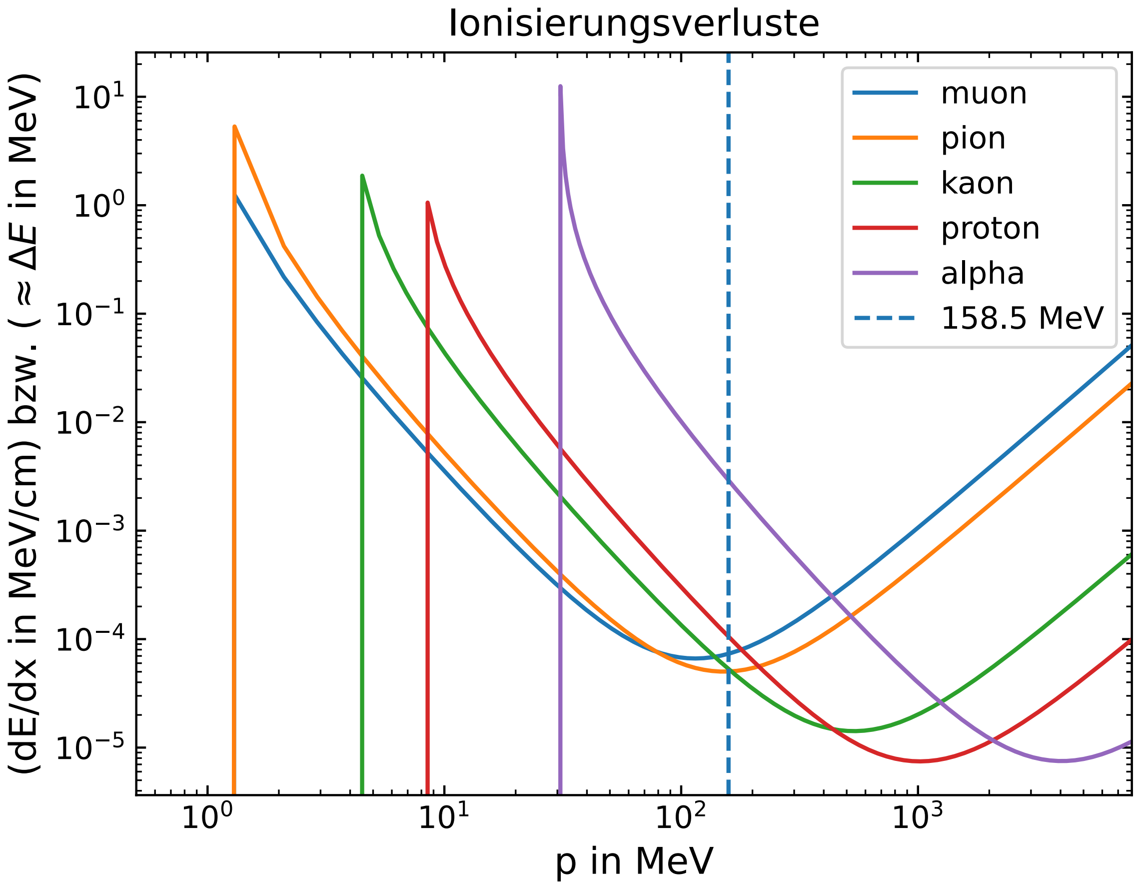

Abbildung 1: Resultierender Plot

(b)

Der mittlere Energieverlust ist für Pionen und Kaonen ungefähr bei 158.5 MeV gleich, wie man im Plot sehen kann.

(c)

Das Script gibt aus:

```
muon  :    argmin         = 114.1 MeV
           dE/dx(argmin)  = 0.0070069 MeV/cm
pion  :    argmin         = 150.91 MeV
           dE/dx(argmin)  = 0.0070055 MeV/cm
kaon  :    argmin         = 531.72 MeV
           dE/dx(argmin)  = 0.0070029 MeV/cm
proton:    argmin         = 1010.1 MeV
           dE/dx(argmin)  = 0.0070024 MeV/cm
alpha :    argmin         = 4014.3 MeV
           dE/dx(argmin)  = 0.028008 MeV/cm
```

Wobei $\mathrm{d}E\,/\,\mathrm{d}x(\mathrm{argmin})\cdot 1\,\mathrm{cm}$ näherungsweise der Energie entspricht, die die MIPs in einem cm Absorber deponieren.