Luca Cordes, 444900
Justus Fassnacht, 426722

Experimentalphysik IV (WS 2023/2024)

Übung 3

Tutorium: 2 | Abgabe: 02.05.2024

Aufgabe 1: Tunneleffekt

(a) *Ein zeitlich konstanter Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E < E_0$ bewege sich in positive x-Richtung auf eine Potentialbarriere zu. Berechnen Sie den Reflektionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T, und zeigen Sie, dass*

$$T = \frac{1 - E/E_0}{1 - E/E_0 + \frac{E_0}{4E}\sinh^2(\alpha a)}\ , \quad \textit{mit } \alpha = \sqrt{2m(E_0 - E)/\hbar^2}$$

gilt. Dabei gibt die Transmission T an mit weclher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen die Potentialbarriere durchfliegt während, $R = 1 - T$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Teilchen reflektiert wird.

Da sich der Teilchenstrom auf den Abschnitten $(-\infty, 0), [0, a], (a, \infty)$ jeweils in einem konstanten Potential bewegt, sind die Lösungen jeweils die eines freien Teilchens.

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x) & \text{für} \quad x < 0 \\ \psi_2(x) = C\exp(ik_2x) + D\exp(-ik_2x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ \psi_3(x) = A'\exp(ik_1x) + B'\exp(-ik_1x) & \text{für} \quad a < x \end{cases}$$

Es muss $B' = 0$ gelten, da der zugehörige Term mit $p \propto -\vec{e}_x$ ein Teilchenstrom repräsentiert, der sich von $+\infty$ aus auf die Potentialbarriere zubewegt, und dies per Konstruktion unphysikalisch ist.

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x) & \text{für} \quad x < 0 \\ \psi_2(x) = C\exp(ik_2x) + D\exp(-ik_2x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ \psi_3(x) = A'\exp(ik_1x) & \text{für} \quad a < x \end{cases}$$

Da das Potenzial beschränkt ist, muss die Wellenfunktion an den Übergängen bei $x = 0$ und $x = a$ erstens stetig sein, und zweitens stetig diffbar.

I.:

$$\left.\begin{matrix} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \end{matrix}\right\} \implies \begin{cases} A + B & = C + D \\ C\exp(ik_2a) + D\exp(-ik_2a) & = A'\exp(ik_1a) \end{cases}$$

II.:

$$\left.\begin{matrix} \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{matrix}\right\} \implies \begin{cases} k_1(A - B) & = k_2(C - D) \\ k_2\left(C\exp(ik_2a) - D\exp(-ik_2a)\right) & = k_1A'\exp(ik_1a) \end{cases}$$

Python-Code

```python
from sympy import *
init_printing()

A,A2,B,C,D,k1,k2,a = symbols("A,A2,B,C,D,k1,k2,a")

eq = [A+B-C-D,
      C*exp(1j*k2*a) + D*exp(-1j*k2*a) - A2*exp(1j*k1*a),
      k1*(A-B) - k2*(C-D),
      k2*(C*exp(1j*k2*a) - D*exp(-1j*k2*a)) - k1*A2*exp(1j*k1*a)]

sol = solve(eq)[0]
print(f"A = {sol[A]}\nB = {sol[B]}")

# returns:
#
# A = 0.25*A2*(-k1**2*exp(2.0*I*a*k2) + k1**2 + 2.0*k1*k2*exp(2.0*I*a*k2) + 2.0*k1*k2 -
↪  k2**2*exp(2.0*I*a*k2) + k2**2)*exp(I*a*(k1 - k2))/(k1*k2)
# B = 0.25*A2*(-k1**2*exp(2.0*I*a*k2) + k1**2 + k2**2*exp(2.0*I*a*k2) - k2**2)*exp(I*a*(k1
↪  - k2))/(k1*k2)
```

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{0.25A'\left(-k_1^2e^{2.0iak_2}+k_1^2+2.0k_1k_2e^{2.0iak_2}+2.0k_1k_2-k_2^2e^{2.0iak_2}+k_2^2\right)e^{ia(k_1-k_2)}}{k_1k_2} \\
&= \frac{-k_1^2e^{iak_2}+k_1^2e^{-ik_2a}+2k_1k_2e^{iak_2}+2k_1k_2e^{-iak_2}-k_2^2e^{iak_2}+k_2^2e^{-iak_2}}{4k_1k_2}A'e^{ik_1a} \\
&= \frac{-2ik_1^2\sin(k_2a)+4k_1k_2\cos(k_2a)-2ik_2^2\sin(k_2a)}{4k_1k_2}A'e^{ik_1a} \\
&= \frac{2k_1k_2\cos(k_2a)-i(k_1^2+k_2^2)\sin(k_2a)}{2k_1k_2}A'e^{ik_1a} \\
&= \left(\cos(k_2a)-i\frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2}\sin(k_2a)\right)e^{ik_1a}A'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{0.25A'\left(-k_1^2e^{2.0iak_2}+k_1^2+k_2^2e^{2.0iak_2}-k_2^2\right)e^{ia(k_1-k_2)}}{k_1k_2} \\
&= \frac{-k_1^2e^{ik_2a}+k_1^2e^{-ik_2a}+k_2^2e^{ik_2a}-k_2^2e^{-ik_2a}}{4k_1k_2}e^{iak_1}A' \\
&= \frac{-2ik_1^2\sin(k_2a)+2ik_2^2\sin(k_2a)}{4k_1k_2}e^{iak_1}A' \\
&= i\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}\sin(k_2a)e^{iak_1}A'
\end{aligned}
$$

Der reflektierte Anteil ist dann der reflektierte Teilchenstrom (in Teilchen pro Sekunde) durch den eingehenden Teilchenstrom

$$
R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\left(\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}\right)^2\sin^2(k_2a)}{\cos^2(k_2a)+\left(\frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2}\right)^2\sin^2(k_2a)}
$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2k_1k_2}{k_2^2-k_1^2}\right)^2 \tan^{-2}(k_2a) + 1}$$

$$|A|^2 = \left(\cos^2(k_2a) + \left(\frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2}\right)^2 \sin^2(k_2a)\right) A'^2$$

$$|B|^2 = \left(\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}\right)^2 \sin^2(k_2a) A'^2$$

und die Transmission ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung als:

$$\begin{aligned} T &= 1 - R \\ &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{2k_1k_2}{k_2^2-k_1^2}\right)^2 \tan^{-2}(k_2a) + 1} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}\right)^2 \tan^2(k_2a)} \end{aligned}$$

(b)

(c)