

# Experimentalphysik III

## Optik und Quantenphysik

### Zusammenfassung

Jannis Zeller

Wintersemester 2016/2017  
Letzte Änderung: 5. April 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Elektromagnetische Optik</b>	<b>4</b>
2.1	Vakuum . . . . .	4
2.1.1	Die einfache Ebene Welle . . . . .	4
2.1.2	Polarisation im Vakuum . . . . .	5
2.1.3	Zusammenhang zwischen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ . . . . .	5
2.1.4	Energie, Intensität, Strahlungsdruck . . . . .	5
2.2	Isotrope Medien . . . . .	6
2.2.1	Mikroskopisches Modell und Brechungsindex . . . . .	7
2.3	Wellen an Grenzflächen . . . . .	9
2.3.1	Reflexion und Transmission an Grenzflächen . . . . .	10
2.3.2	Totalreflexion . . . . .	11
2.3.3	Reflexion an Metalloberflächen . . . . .	12
2.4	Anisotrope Medien, Doppelbrechung . . . . .	12
2.5	Polarisation . . . . .	12
2.5.1	Erzeugung linearer Polarisation . . . . .	13
2.5.2	Manipulation der Polarisationsart . . . . .	13
2.6	Elektro- und magneto-optische Effekte . . . . .	14
2.7	Nichtlineare Optik . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Wellenoptik</b>	<b>15</b>
3.1	Interferenz . . . . .	15
3.2	Kohärenz . . . . .	16
3.3	Huygens-Fresnel-Prinzip . . . . .	17
3.4	Zweistrahl-Interferenz . . . . .	17
3.4.1	Youngscher Doppelspaltversuch . . . . .	17
3.4.2	Ausgedehnte Lichtquelle . . . . .	18
3.4.3	Dünne Schichten (I) . . . . .	19
3.5	Vielstrahlinterferenz . . . . .	19
3.5.1	Dünne Schichten (II) . . . . .	19

3.6	Zusammenfassung Interferenz	20
3.7	Beugung am Einzelspalt	20
3.7.1	Beugung am Doppelspalt	21
3.8	Gitterinterferenz	21
3.9	Fresnel Beugung	22
3.10	Zusammenfassung Beugung	23
3.11	Übergang von Fresnel zu Fraunhofer Beugung	24
3.12	Fresnelbeugung und Fouriertransformation	24
3.13	Babinetsches Prinzip	24
3.14	Rayleigh Streuung	24
<b>4</b>	<b>Geometrische Optik</b>	<b>25</b>
4.1	Einführung - Lochkamera	25
4.2	Grundaxiome der geometrischen Optik	26
4.3	Zusammenhang zur Wellenoptik	26
4.4	Das Fermatsche Prinzip	26
4.5	Spiegel	27
4.6	Prisma	28
4.7	Linsen	28
4.7.1	Dünne Linsen	29
4.7.2	Bildkonstruktion an dünner Sammellinse	29
4.7.3	Bildkonstruktion an dünner Zerstreuungslinse	30
4.7.4	Dicke Linsen	30
4.8	Linsensysteme	30
4.8.1	Abbildungskonstruktion	31
4.9	Abbildungsfehler	31
4.9.1	Chromatische Aberration	32
4.9.2	Sphärische Aberration	32
4.9.3	Koma	32
4.9.4	Astigmatismus	32
4.9.5	Bildfeldwölbung	32
4.9.6	Verzeichnung	32
4.10	Matrixoptik	33
4.10.1	Translationsmatrix	33
4.10.2	Brechungsmatrix	33
4.10.3	Transformationsmatrix einer Linse	33
4.10.4	Abbildungsmatrix für dünne Linse in Luft	34
<b>5</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>34</b>
5.1	Das Auge	34
5.2	Lupe	35
5.3	Mikroskop	35
5.4	Teleskop	36
5.5	Auflösungsvermögen	36
5.6	Lichtstärke	37
5.7	Schärfentiefe	37
5.8	Kamera	38
5.9	Holographie	38
5.10	Optik der Atmosphäre	38

<b>6</b>	<b>Quantenphysik</b>	<b>39</b>
6.1	Temperaturstrahlung . . . . .	39
6.2	Planck'sche Strahlungsformel . . . . .	40
6.3	Photoeffekt . . . . .	41
6.4	Comptoneffekt . . . . .	41
6.5	Photonen . . . . .	42
6.6	Teilchen-Welle-Dualismus . . . . .	42
6.6.1	Elektron als Quantenobjekt . . . . .	42
6.7	Materiewellen . . . . .	43
6.8	Die Schrödingergleichung . . . . .	45

## 1 Einführung

Zu Beginn eine kurze Inhaltsangabe. Die optischen Phänomene die auftreten verlangen ein immer komplizierteres Konzept von Licht. So kann man mit der **Strahlenoptik** die geradlinige Lichtausbreitung und die Brechung an Grenzflächen beschreiben (aber nicht erklären!). Um die Welleneigenschaften zu beschreiben, also Beugung und Interferenz benötigt man das Konzept von Licht als *skalarer* Welle, in der **Wellenoptik**. Um dann auch Polarisationsphänomene erklären zu können muss die Welle auch eine transversale Vorzugsrichtung haben, also eine vektorwertige Welle sein. Lichterzeugung wiederum lässt sich dann nur noch mit der **Quantenphysik** erklären. Auch der von Einstein erklärte *photoelektrische Effekt* (Nobel Preis) ist nur erklärbar, wenn Licht auch über Teilcheneigenschaften verfügt. Insgesamt ergibt sich schon hier der wichtige **Welle-Teilchen-Dualismus** von Licht (und auch allgemein von Quantenobjekten). Die Abbildungen in dieser Zusammenfassung wurden den Skripten von Prof. Schäpers (2011/2012 RWTH Aachen) und Prof. Feld (2014/2015) entnommen.

## 2 Elektromagnetische Optik

Verwendet werden hier die Maxwell Gleichungen in der Form:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

für die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  und Flussdichte  $\mathbf{D}$ , sowie

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

für magnetische Feldstärke und Flussdichte. Es gelten zur Umrechnung in erster Ordnung die **Medien Gleichungen**:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}.$$

Für die Stromdichte gilt zudem der lineare Zusammenhang  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , mit Leitfähigkeit  $\sigma$ . Daraus ergeben sich auch die bekannten Wellengleichungen der elektromagnetischen Wellen, also auch des Lichtes:

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Analog ist die Gleichung für  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$ . Der Laplace Operator  $\Delta$  wird hier auf jede Komponente einzeln angewendet, sodass sich wieder ein Vektor ergibt.

### 2.1 Vakuum

#### 2.1.1 Die einfache Ebene Welle

Zunächst ist zu erwähnen, dass man i.A. zwischen Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  und Gruppengeschwindigkeit  $v_{gr}$  unterscheiden muss:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Eine einfache Welle breitet sich nur in eine Richtung aus und ihre Funktion ist nur von dieser einen Ortskoordinate abhängig. Man spricht von *eben*, da dann die Schwingung in der zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene stattfindet. Die Funktion hat im reellen z.B. die Form:

$$\mathbf{E} = E_{0x} \sin(\omega t - kz + \delta_x) \mathbf{e}_x + E_{0y} \sin(\omega t - kz + \delta_y) \mathbf{e}_y$$

### 2.1.2 Polarisation im Vakuum

Hier am Beispiel von  $\mathbf{E}$ ; Gleiches gilt für die anderen Vektorgrößen. Durch verschiedene Phasenbeziehungen von  $x$  und  $y$  Komponente des Wellenvektors kommen verschiedene Arten von Polarisation zu stande:

- 1) **lineare Polarisation:** Komponenten in Phase, sodass die Welle gleich ausgerichtet bleibt. Die Amplitude schwankt.
- 2) **zirkuläre Polarisation** Die Komponenten schwingen gegenphasig, also ist  $\delta_x - \delta_y = \pm\pi/2$ . Dadurch *kreist* die Welle bei gleichen Amplituden der Komponenten um die Ausbreitungsrichtung, wobei dann gilt:  $|\mathbf{E}| = \text{const}$
- 3) **elliptische Polarisation** Die Amplituden der Komponenten sind unterschiedlich, also ist auch  $|\mathbf{E}|$  nicht mehr konstant.

Überlagerungen von vielen verschiedenen Polarisationsformen nennt man unpolarisiert.

### 2.1.3 Zusammenhang zwischen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$

Durch Integration der 4ten Maxwell Gleichung bei gegebener elektrischer Welle, z.B.

$$\mathbf{E} = E_0 \cdot (e^{i(kz - \omega t)}, 0, 0)^T,$$

ergibt sich der Zusammenhang:

$$\boxed{|\mathbf{E}| = c_0 |\mathbf{B}|} \quad (2.1)$$

Bekannt ist, dass das Magnetfeld senkrecht zum elektrischen Feld, sowie zur Ausbreitungsrichtung sein muss, wodurch sich (analog für das elektrische Feld) ergibt:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{B} \times \mathbf{k} \quad (2.2)$$

### 2.1.4 Energie, Intensität, Strahlungsdruck

Die **Energiedichte** des Elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch:

$$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\mathbf{E}^2 + c_0^2 \mathbf{B}^2) = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2}. \quad (\text{mit (2.1)})$$

**Die Intensität** ist die Energie, die pro senkrechtem (zu  $\mathbf{k}$ ) Flächenteil und Zeit auf eine Zielfläche übertragen wird:

$$I = \frac{W}{A_{\perp} t} = v \cdot w = c \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^2.$$

Interessant ist meist nur die zeitliche Mittlung der Intensität:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I dt$$

**Der Pointing-Vektor** ist einfach definiert als das Kreuzprodukt der Feldstärken. Es ergibt sich:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \varepsilon_0 c^2 E B = I$$

Die Richtung des Pointing Vektors gibt also die Ausbreitungsrichtung an und seine Länge die instantane Intensität.

**Der Strahlungsdruck** ist der Druck, den ein Lichtstrahl auf eine Zielfläche ausübt (Photonen Impulse). Er ist betragsmäßig gleich der Energiedichte. Er bietet einen Ansatz für einen treibstofffreien Raketenantrieb:

$$p_{st} = w = \frac{I}{c}$$

Er erzeugt auch einen statistischen Impuls:

$$\pi_{st} = \frac{p_{st}}{c}$$

## 2.2 Isotrope Medien

Im Vakuum gibt es keinen Unterschied zwischen Gruppen und Phasengeschwindigkeit, man spricht auch von **Dispersionsfreiheit**. Die Phasengeschwindigkeit  $c$  im Medium ist immer kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$ . Die Photonen selbst bewegen sich allerdings stets mit Lichtgeschwindigkeit.  $c$  ist zudem abhängig von der Wellenlänge (**Dispersion**). Dies kann man mithilfe eines **Prismas** veranschaulichen. Im Medium kann die Welle abgeschwächt werden und ihre Polarisierung ändern. Eine charakteristische Größe ist der Brechungsindex:

$$n(\lambda) = \frac{c_0}{c(\lambda)}$$

Eine typische Abhängigkeit geht im Plot wie  $1/x$ . Die **Frequenz** darf sich im Medium nicht ändern (Informationsverlust). Durch Betrachtung der Laufzeiten im Medium und im Vakuum:

$$t_v = \frac{\Delta z}{c_0}, \quad t_m = n \frac{\Delta z}{c_0}$$

kann man mit Hilfe der Lösung der Wellengleichung die Phasendifferenz nach durchlaufen des Mediums herleiten:

$$\Delta \varphi = 2\pi(n-1) \frac{\Delta z}{\lambda_0}.$$

Im Medium verändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Da elektromagnetische Wellen im Wesentlichen über das Elektrische Feld mit Medien wechselwirken ist meist  $\mu_r \approx 1$ , sodass gilt:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

Es ist zu beachten, dass  $n$  stark Frequenzabhängig ist (Beispiel Wasser:  $\varepsilon_r$  ist im quasi statischen Fall 81!).

### 2.2.1 Mikroskopisches Modell und Brechungsindex

#### Nichtleitende Medien

Die Elektronen der Atoms des Mediums erfahren durch die Welle die Kraft  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$  und werden so zu harmonischen Schwingungen angeregt. Zerlegt man die Elektrische Flussdichte in einen Term mit Elektrischem Feld und einen, den wir **Polarisation**  $\mathbf{P}$  nennen:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

so taucht  $\mathbf{P}$  auch in der Wellengleichung auf. Man spricht von Sekundärwellen, deren Überlagerung mit der Primärwelle die Wellenlänge leicht verkürzt. Leitet man einen Wert für die Polarisierbarkeit  $\alpha$  aus der Amplitude für die getriebene, gedämpfte, harmonische Schwingung ab:

$$\alpha = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \boxed{\text{Halbwertsbreite: } \gamma}$$

und setzt diesen in der Formel für das Dipolmoment  $\mathbf{p} = \alpha \cdot \mathbf{E}$  zusammen mit der Wellengleichung ein, so ergibt sich für den Brechungsindex der Ausdruck:

$$\boxed{n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}},$$

der von  $\omega$  und somit auch durch  $\omega = 2\pi c/\lambda$  von der Wellenlänge abhängt, wie es nötig ist, um die Dispersion zu beschreiben. Man sieht, dass  $n$  eine Komplexe Größe ist und schreibt dafür auch:

$$\boxed{n = n' - i\kappa}$$

Mittels Betrachtung der Wellengleichung unter Benutzung von:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0/n} = nk_0$$

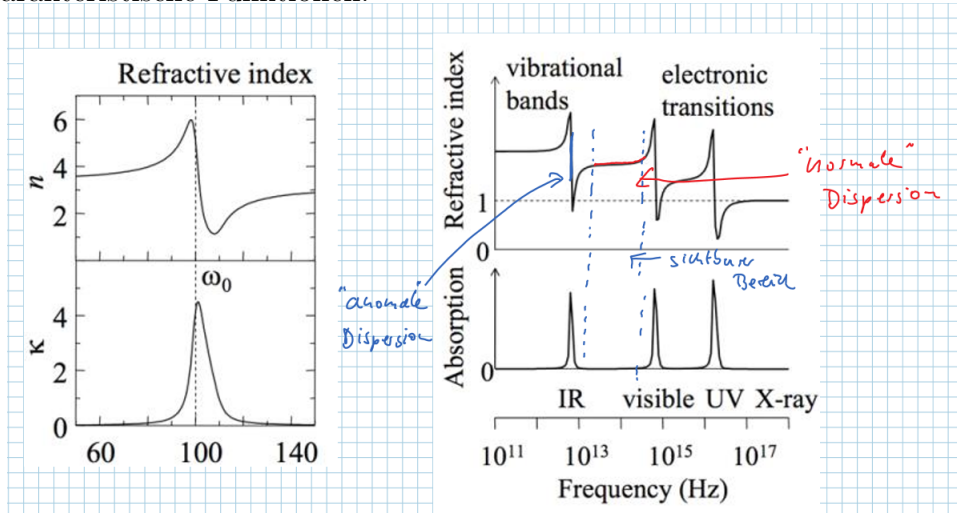
kann man herleiten, dass sich für die Elektromagnetische Welle im Material eine **exponentielle Dämpfung**, in Abhängigkeit des Ortes, ergibt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) \cdot e^{-\kappa k_0 z}.$$

Man definiert dann den Absorptionskoeffizienten über die Intensität. Das nennt man auch das **Beer'sche Gesetz**:

$$I = I_0 \cdot e^{-Az} \quad \Leftrightarrow \quad A = 2\kappa k_0$$

$\kappa$  und  $n'$  kann man hier besser durch die Näherung  $(n^2 - 1) \approx 2(n - 1)$  für  $n \approx 1$  finden, man nennt die Ausdrücke dann **Dispersionsrelationen**. Es ergeben sich Charakteristische Funktionen:



Man spricht hier auch von **normaler** ( $n'$  steigt mit  $\omega$ ) und **anomaler** ( $n'$  fällt mit  $\omega$ ) Dispersion, wie in der Abbildung gezeigt. Man kann vor allem die normale Dispersion auch mit einem Prisma veranschaulichen. Die Dämpfung  $\gamma$  ist ein Maß für die Breite des  $\kappa$ -Piks.

### Leitende Medien

In leitenden Medien wird der Effekt der Dämpfung mit dem jetzt vorhandenen Stromfluss mit Leitfähigkeit  $\sigma$  erklärt:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Dieser Term muss dann in den Maxwell Gleichungen berücksichtigt werden und führt mit dem Lösungsansatz  $\mathbf{E} \propto \exp(i\omega t - ikz)$  auf die Differentialgleichung:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon (i^2 \omega^2) \mathbf{E} + \mu_0 \sigma i \omega \mathbf{E}$$

Somit ergibt sich mit ein bisschen Rechnung wieder ein komplexer Ausdruck:

$$n^2 = \varepsilon_r - \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} i$$

Man verfährt ansonsten genau wie bei Nichtleitern. Man bezeichnet die **Eindringtiefe** als den Kehrwert des Absorptionskoeffizienten:

$$\delta = \frac{1}{A}$$



Betrachtet man das Leitende Medium als polarisierbar aber mit Eigenfrequenz  $\omega_0 = 0$  erhält man durch analoge Betrachtung wie oben, mit **Plasmafrequenz**:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$$

für den Brechungsindex die Relation:

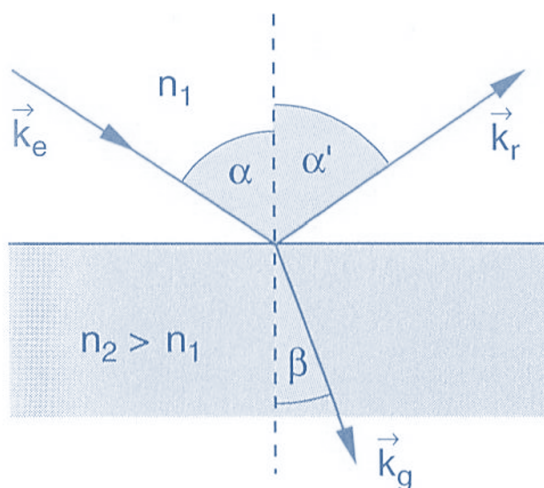
$$n^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\gamma}$$

Im Bereich, in dem  $n^2$  negativ ist ist die Absorption im Allgemeinen sehr stark und im positiven Bereich werden die Medien zunehmend transparent. Gerne vereinfacht man die obigen Formeln, um leichter im Komplexen rechnen zu können. Dafür nähert man z.B. für kleine Frequenzen, sodass  $\omega/\gamma$  sehr klein oder sehr groß ist.

Ein **reales Medium** kann mehrere Dispersionensfrequenzen haben, da nicht nur äußere Elektronen (mittlerer Frequenzbereich), sondern auch innere Elektronen (hohe Frequenzen), sowie Atomkerne (niedrige Frequenzen), zu den Sekundärwellen beitragen können.

Wie man sieht kann der Brechungsindex durchaus kleiner werden als 1, das ist aber hier kein Widerspruch zur **Relativitätstheorie**, da Informationen nur durch Pulse übertragen werden können. Insgesamt wird so, auch mit Gruppen und Phasengeschwindigkeiten der Widerspruch aufgelöst.

## 2.3 Wellen an Grenzflächen



Die Wellengleichungen der einzelnen Anteile werden entsprechend der Ausbreitungsvektoren umgeschrieben. Aus dem Stokesschen Integralsatz folgt die Stetigkeitsbedingung für die Felder, die besagt, dass die Tangentialkomponenten der Felder an Randstellen gleich sind (Herleitung mit infinitesimal kleiner senkrechten Länge). Summiert man dann die tangentialen Komponenten der gebrochenen ( $g$ ), reflektierten ( $r$ ) und einfallenden ( $e$ ) auf, so muss die Stetigkeitsbedingung für alle Zeiten und Orte an der Grenzfläche gleich sein.

Also Müssen die Exponenten der Komplexen Wellendarstellung übereinstimmen. Insbesondere im Ursprung führt diese Bedingung darauf, dass die **Frequenzen gleich bleiben** müssen. Lässt man dann entsprechend den zeitlichen Anteil weg, führt die Betrachtung eines Ortsvektors, der zu einem der Wellenvektoren senkrecht steht darauf, dass er auch senkrecht zu den anderen sein muss. Alle Komponenten der Welle liegen also **in einer Ebene**. Beschreibt man dann die Wellenvektoren

durch ihre Winkel, Frequenz, Lichtgeschwindigkeit und Brechungsindex ergibt sich das **Snellius'sche Brechungsgesetz**:

$$\boxed{\alpha = \alpha', \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}} \quad (2.3)$$

Hier wird also, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit im zweiten Medium größer ist vom Lot weg gebrochen! [Wiki](#)

### Intensität

Man zerlegt zur Betrachtung der Intensität die Amplitude in in der Einfallsebene  $(x, y)$  und senkrecht zur Einfallsebene  $(z)$  liegende Komponenten. Dadurch ist die  $z$ -Komponente automatisch tangential zur Einfallsebene (Stetigkeitsbedingung für  $\mathbf{E}$  und da  $\mu_r \approx 1$  auch für  $\mathbf{B}$  unter Benutzung von (2.1.3)):

$$(\mathbf{E} :) \quad A_{es} + A_{rs} = A_{gs}, \quad (\mathbf{B} :) \quad k_{eq}A_{es} + k_{ry}A_{rs} = k_{gy}A_{gs}$$

Ähnliche Bedingungen erhält man auch für die parallele Polarisation. Damit lassen sich die **Fresnel'schen Formeln** herleiten:

$$\text{Polarisation } \perp \text{ zur Einfallsebene (s-pol): } \rho_S = \frac{E_{rs}}{E_{es}} = \frac{A_{rs}}{A_{es}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Polarisation } || \text{ zur Einfallsebene (p-pol): } \rho_P = \frac{E_{rp}}{E_{ep}} = \frac{A_{rp}}{A_{ep}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

$\rho$  ist hier der **Reflektionskoeffizient**. Analog kann man auch die transmittierte Welle betrachten und erhält ähnliche **Transmissionskoeffizienten**  $\tau_{S/P}$ .

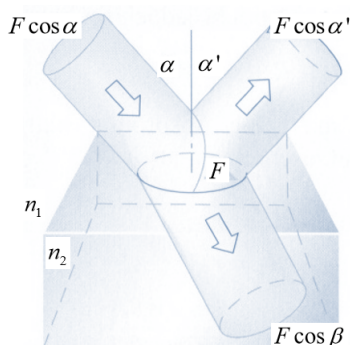
### 2.3.1 Reflexion und Transmission an Grenzflächen

Man definiert Reflexions- und Transmissionsvermögen über die Leistung:

$$\boxed{R = \frac{P_r}{P_e} \quad T = \frac{P_g}{P_e}}$$

Mit der Intensität

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 \epsilon_0} A^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 \epsilon_0} (A_S^2 + A_P^2)$$



kann man die Leistung als Produkt von Intensität und Fläche ausdrücken. Die Flächen sind wiederum winkelabhängig. Das Transmissions- und Reflexionsverhalten ergibt sich dann zu:

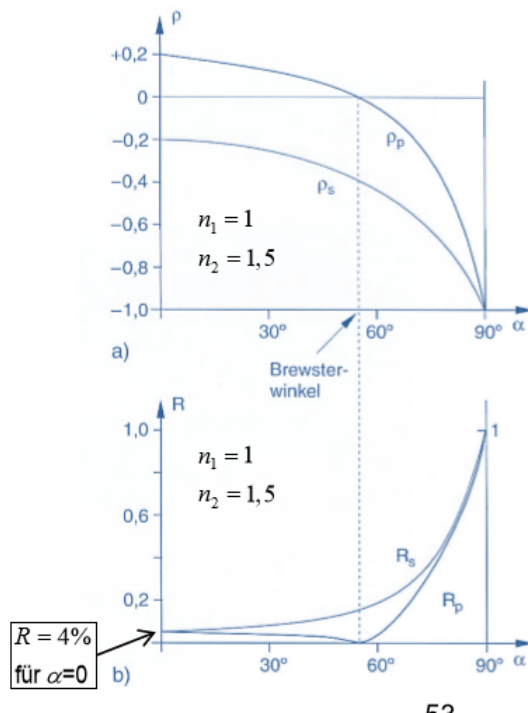
$$R = \frac{A_r^2}{A_e^2} \quad T = \frac{n_2 A_g^2 \cos(\beta)}{n_1 A_e^2 \cos(\alpha)}$$

Die Amplituden hängen nach Fresnel dann wieder von der Polarisation der einfallenden Welle ab. Es gilt:

$$\boxed{T_s + R_s = T_p + R_p = T + R = 1}$$

Für  $\alpha = 0$  ergibt sich in  $s$  und  $p$ -pol natürlich das selbe:

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$



Der Reflexionskoeffizient  $\rho$  kann ein negatives Vorzeichen haben, das der Amplitudenvektor einen Phasensprung an der Grenzfläche machen kann. **In der  $p$ -pol gibt es nur bei Winkeln größer als dem Brewster-Winkel einen Phasensprung am optisch dichteren und bei kleineren am dünneren Medium! In der  $s$ -pol gibt es immer einen Phasensprung am optisch dichteren Medium!** Es fällt zudem auf, dass in der  $p$ -pol keine Reflexion für  $\alpha + \beta = \pi/2$  auftritt, da dort  $\rho_p \rightarrow 0$ . Man kann den Brewster-Winkel einfach mit Snellius ausrechnen:

$$\tan(\alpha_b) = \frac{n_2}{n_1}.$$

Mittels des Brewster-Winkels kann man also auch Licht polarisieren! (Im Bild gilt  $R = 4\%$  für Glas.)

### Mikroskopische Erklärung der Brewster-Winkels

Man kann das Phänomen im mikroskopischen Bereich durch das Modell der Teilchen als schwingende Dipole erklären. Die Dipole am Zielpunkt überlagern ihre Schwingungen dann zu einer Abstrahlung (senkrecht zu ihrer Schwingrichtung!), die die  $p$ -pol kompensiert. Dieser Effekt tritt natürlich immer bei  $\alpha + \beta = \pi/2$  auf. So kann auch ein Fotograf den Brewster-Winkel ausnutzen, wenn Reflexionen von Gläsern stören. Auch in Lasern macht man sich den Effekt zunutze, um Reflexionsverluste zu minimieren.

### 2.3.2 Totalreflexion

Bei Reflexion am optisch dünneren Medium wird ab einem Winkel für den  $\beta \geq \pi/2$  wird natürlich nichts mehr transmittiert. Mit Snellius folgt dann:

$$\sin(\alpha_G) = \frac{n_2}{n_1}$$

Bei Glas ist der Grenzwinkel schon bei ca.  $41,8^\circ$  erreicht. Glasfaserkabel dürfen also nur eine bestimmte Krümmung aufweisen (oder müssen mindestens).

### 2.3.3 Reflexion an Metalloberflächen

Bei Metallen gibt es i.A. starke Absorption an den Oberflächen. Man muss hier den komplexen Brechungsindex betrachten! Damit ist auch der Reflexionskoeffizient komplex. Es treten Phasensprünge auf, sodass das Licht polarisiert wird. Bei senkrechten Einfall ergibt sich für große  $\kappa$  ein Reflexionsvermögen von fast  $R = 1$ .

## 2.4 Anisotrope Medien, Doppelbrechung

Bisher wurden nur isotrope Medien betrachtet. Bei diesen macht es keinen Unterschied, in welche Richtung sich das Licht im Medium ausbreitet. In anisotropen Medien macht das einen Unterschied und die Brechung hängt insbesondere von der Polarisation des einfallenden Lichts ab. Ein Beispiel für einen solchen Stoff ist Kalkspat ( $\text{CaCO}_3$ ). Besonders ist, dass die beiden erzeugten Strahlen **senkrecht zueinander polarisiert** sind.

### Mikroskopische Erklärung:

Anders als bei isotropen Medien ist die *Rückstellkraft* der Elektronen nicht in alle Richtungen gleich, sondern es gibt eine sog. **Vorzugsrichtung**. Die Schwingungsrichtung der Elektronen wird also ggf. aus der Richtung des elektrischen Feldes gezwungen! Dadurch kann man die Polarisation durch den **Dielektrizitätstensor** beschreiben:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\tilde{\varepsilon}_r - 1) \cdot \mathbf{E}$$

Es ist klar, dass das  $\mathbf{D}$ -Feld jetzt nicht mehr parallel zum  $\mathbf{E}$ -Feld ist:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E}$$

Für ein nichtleitendes anisotropes Medium folgt aber weiterhin aus den Maxwellgleichungen, dass  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  immer noch senkrecht zu  $\mathbf{k}$  sind.  $\mathbf{B}$  bleibt auch senkrecht zu  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$ . Da  $\mathbf{E}$  aber gegen  $\mathbf{D}$  gedreht ist ergibt sich durch den Pointing-Vektor eine **andere Energieflussrichtung** als  $\mathbf{k}$ ! Es kann so auch bei senkrechtem Einfall Brechung auftreten. Es ergeben sich also in die Raumrichtung **unterschiedliche Resonanzfrequenzen**! Somit ist auch die Funktion des Brechungsindex in  $\omega$  verschoben und der Brechungsindex ist für verschiedene Polarisationsrichtungen unterschiedlich. Das ist z.B. bei Kalkspat durch die unsymmetrische Kristallstruktur zu erklären. Die Achse um die der Kristall die höchste Rotationssymmetrie aufweist heißt **optische Achse**. Man unterscheidet i.A. zwischen dem Brechungsindex für Polarisation senkrecht zur optischen Achse  $n_o$  (**ordentlich**) und parallel  $n_a$  (**außerordentlich**). Je nach Größe der Brechungsindizes unterscheidet man zwischen **optisch positiven**  $n_a > n_o$  und **negativen** Medien. Der ordentliche Strahl verhält sich somit wie in einem isotropen Medium. Der außerordentliche Strahl hat eine Polarisationskomponente parallel zur optischen Achse und somit ist die Phasengeschwindigkeit  $c_0/n_a$  verändert! In drei Dimensionen bildet der Brechungsindex einen Ellipsoid.

## 2.5 Polarisation

Man unterscheidet bei elliptischer Polarisation zwischen links (Blick auf Quelle gegen Uhrzeigersinn) und rechts polarisierten Wellen. Ist ein Polarisationsfilter in einem

Winkel  $\theta$  gegen den Amplitudenvektor bei linear polarisierten Wellen verdreht ergibt sich für die Intensität das **Malussche Gesetz**:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2(\theta)$$

### 2.5.1 Erzeugung linearer Polarisation

- 1) Wie man im Abschnitt über Reflexion und Transmission gesehen hat kann man die Reflexion der parallel zur Einfallsebene beim Einstrahlen unter dem Brewster Winkel unterbinden. Man bezeichnet den **Polarisationsgrad** als:

$$\Pi = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}}$$

Wichtig ist hierbei, dass man die Intensität nach Reflexion oder Transmission durch den Transmissions- bzw. Reflexionskoeffizienten ausdrücken kann:

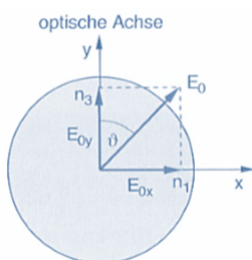
$$I = I_0 \cdot R, \quad \text{bzw.} \quad I = I_0 \cdot T$$

- 2) Eine weitere Möglichkeit bildet der **Dichroismus** (Zweifarbigkeit). Dieses Phänomen beruht im wesentlichen auf den selben Modellen, wie die Doppelbrechung, da sich ja auch die  $\kappa(\omega)$  Funktion verschiebt und somit in einer Raumrichtung starke Absorption auftreten kann, während die andere durchlässig ist. So funktionierten die ersten Polaroidfolien, auf denen kleine Herapit Kristallite ausgerichtet waren. Heutzutage werden Polymerfolien aus gedehnten Kohlenwasserstoffen gefertigt, die durch die Streckung eine Vorzugsrichtung erhalten. *Problematisch* ist, dass diese Folien dabei auch viel Energie absorbieren und somit u.U. schmelzen (Laser).
- 3) **Doppelbrechende Polarisatoren** bieten eine Möglichkeit bei geringer Absorption in Durlassrichtung zu polarisieren. Als Beispiel sei hier das *Nicol Prisma* genannt, bei dem an einer Grenzfläche zwischen zwei Prismen Totalreflexion des ordentlichen Strahl erzeugt wird.

### 2.5.2 Manipulation der Polarisationsart

Durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten im Doppelbrechenden Material ergibt sich ein Phasenunterschied zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d\Delta n$$



Betrachtet man Linear polarisiertes Licht, dass auf ein Plättchen gemäß der Abbildung auftrifft kann man durch Einstellen der Plättchendicke die Phasendifferenz nach Belieben einstellen:

**$\lambda/4$ -Dicke:** Da hier der Polarisationswinkel genau  $45^\circ$  ist ergibt sich  $E_{0x} = E_{0y}$  und somit mit  $\Delta\phi = \pi/2$  **zirkular polarisiertes Licht**.

**$\lambda/2$ -Dicke:** Hier ergibt sich eine Phasenverschiebung von  $\pi$ , sodass eine Komponente bezüglich der anderen ihr Vorzeichen ändert. Die Polarisation wird in der optischen Achse gespiegelt. Die Polarisationsrichtung wird um  $2\theta$  gedreht.

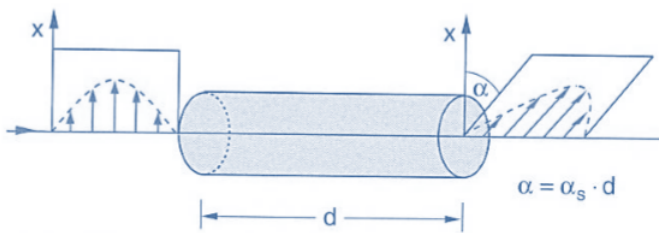
### Interferenzfarben

Durch die Phasendifferenz erhält man bei geraden Vielfachen  $2\pi$  maximale und ungeraden Vielfachen von  $2\pi$  minimale Intensität, wenn man einen Pol-Filter nachschaltet. Man kann also aus „Mischlicht“ einzelne Wellenlängen filtern!

### Spannungsdoppelbrechung

Durch Einwirkung mechanischer Spannung auf ein Medium kann man das Material optisch anisotrop machen. Damit kann man auch Spannungen in z.B. Gebäuden sichtbar machen. Dafür muss man das Licht zunächst linear polarisieren, damit man dann den doppelgebrochenen Anteil durch einen zweiten, zum ersten senkrechten, Polarisator sichtbar machen.

### Optische Aktivität



Als optische Aktivität bezeichnet man allgemein die Drehung der Polarisationssebene um einen Winkel. Man unterscheidet zwischen links- und rechtsdrehenden Medien. Die Drehung ergibt sich durch:

$$\alpha = \alpha_s \cdot d$$

Dabei ist das *spezifische Drehvermögen*  $\alpha_s$  eine Materialkonstante. Die Ursache für den Effekt ist die Händigkeit der Molekül- oder Kristallstruktur.

### Flüssigkeits Kristallanzeige - LCD

Füllt man eine mit Kristalliten angereicherte Flüssigkeit zwischen zwei gerillte Metallplättchen richten sich die Kristallite gemäß der Rillen aus. Jetzt kann man die Kristallite mit den Plättchen drehen um die Polarisationsvorzugsrichtung zu manipulieren. Durch einen nachgeschalteten Filter kann man dann selektieren.

## 2.6 Elektro- und magneto-optische Effekte

Man kann die Brechung von Licht in Materie durch anlegen eines Feldes beeinflussen. Der erste, der diesen Effekt nachweisen konnte war **Faraday**. Anders als bei optischer Aktivität kann man zeigen, dass man den Effekt durch rückwärtiges Durchlaufen nicht rückgängig gemacht werden kann. Isotrope transparente Stoffe können durch anlegen eines elektrischen Feldes doppelbrechend werden **Kerr Effekt**:

$$\Delta n \propto \lambda_0 E^2.$$

## 2.7 Nichtlineare Optik

Anstatt wie bisher anzunehmen, dass die Polarisation linear zum elektrischen Anteil der Welle ist, betrachtet man in der Nichtlinearen Optik auch Polarisationen, die in höheren Ordnungen vom Feld abhängen:

$$P = \varepsilon_0 \sum_{i=n}^N \chi^{(n)} \mathbf{E}^n$$

Mit dem Subzeptibilitätstensor  $\chi = (\tilde{\varepsilon}_r - 1)$ . Dadurch resonieren im Medium entsprechend auch andere Frequenzen und es kommt z.B. zur **Frequenzverdoppelung** (grüner Laser).

## 3 Wellenoptik

### 3.1 Interferenz

Man betrachtet nach dem Superpositionsprinzip die Überlagerung zweier elektromagnetischer Wellen (natürlich gilt dies auch für  $n$  Wellen!), mit gleicher Frequenz aber verschiedener Phase und unterschiedlichem  $k$ -Vektor. Dann gilt für die Intensität:

$$\langle I \rangle = \varepsilon_0 c \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \rangle = \varepsilon_0 c [\langle \mathbf{E}_1^2 \rangle + 2\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle + \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle] := \langle I_1 \rangle + \langle I_{12} \rangle + \langle I_2 \rangle$$

Dann folgt mit Additionstheorem und  $\langle \cos^2(x) \rangle = \langle \sin^2(x) \rangle = 1/2$ , sowie  $\langle \sin(x) \cos(x) \rangle = 0$ :

$$\boxed{\langle I_{12} \rangle = \varepsilon_0 c \mathbf{E}_{01} \mathbf{E}_{02} \cos(\Delta\varphi) = 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos(\Delta\varphi)}$$

Wobei die **Phasendifferenz** hier auch vom räumlichen Anteil abhängt:

$$\Delta\varphi = \mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \varphi_1 - \varphi_2$$

Im **Spezialfall**  $\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle := \langle I_0 \rangle$  gilt:

$$\langle I \rangle = 2\langle I_0 \rangle (1 + \cos(\Delta\varphi)) = 4\langle I_0 \rangle \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Somit kann die Intensität bis auf das vierfache der Einzelintensitäten steigen! Man spricht von **konstruktiver** Interferenz, wenn die Intensität größer ist, als die Einzelintensität und sonst von **destruktiver** Interferenz. Beim Maximum und Minimum nennt man die Interferenz auch **vollständig**.

Für den **Spezialfall zweier Kugelwellen**, die vom Radius  $r$  über den  $k$ -Wert (hier kein Vektor  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$ !) abhängen gilt:

$$\boxed{\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) + \varphi_1 - \varphi_2}$$

Man sieht leicht, dass für vollständige Interferenz und negative Interferenz gilt:

$$\text{konstruktiv: } \Delta\varphi = 2\pi n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{destruktiv: } \Delta\varphi = (2n + 1)\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

### Michelson Interferometer

Eine wichtige Anwendung ist das Michelson Interferometer. Für die auf dem Schirm auftreffende Welle gilt mit dem Reflexions- und Transmissionsvermögen des Strahlteilers:

$$\mathbf{E}_i = \sqrt{RT} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Somit folgt für die Gesamtintensität auf dem Schirm:

$$\langle I_s \rangle = RT I_0 (1 + \cos(\Delta\varphi))$$

Verschiebt man den Spiegel um eine Strecke  $\Delta z$  ergibt sich dadurch ein zusätzlicher Phasenterm:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (2\Delta z).$$

Dadurch ergibt sich die Anzahl der Maxima:

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

Dadurch, dass der Lichtstrahl nicht perfekt geradlinig auftrifft, sondern etwas „auffächert“ sieht man keinen Punkt, sondern konzentrische Ringe auf dem Schirm. Mit dem Interferometer kann man dann entsprechend Wellenlängen und kleine Strecken messen. Bekannt ist natürlich auch die Bedeutung des Versuchs für die Spezielle Relativitätstheorie (Ex I & II).

## 3.2 Kohärenz

Zwei Lichtstrahlen heißen *kohärent* wenn die Phasen der Wellen im Raum zeitlich zueinander konstant sind. Es ist klar, dass man nur mit kohärenten Lichtstrahlen stabile Interferenzmuster erzeugen kann. Reale Lichtquellen senden aber einzelne **Wellenzüge** aus, die in ihrer Phase unabhängig voneinander sind. Im Teilchenmodell sind dies die einzelnen Photonen. Mathematisch sagt man: Zwei Wellen sind **zeitlich Kohärent**, wenn:

$$\Delta\varphi_{ij}(\mathbf{r}) = \varphi_i(\mathbf{r}, t) - \varphi_j(\mathbf{r}, t)$$

sich in einem Zeitraum  $\Delta t$  um weniger als  $2\pi$  ändert. Die Zeit, auf die das zutrifft heißt **Kohärenzzeit**  $\Delta t_c$ . Die **Kohärenzlänge** ist dann

$$\boxed{\Delta s_c = c \cdot \Delta t_c}.$$

Analog definiert man die **räumliche Kohärenz**, wenn eine Wellenfront ihre Phasendifferenz

$$\Delta\varphi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi_i(\mathbf{r}_1, t) - \varphi_i(\mathbf{r}_2, t)$$

an zwei Orten um weniger als  $2\pi$  ändert. Auf einer **Kohärenzfläche**, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, sind alle Teilwellen räumlich kohärent.



### Ursachen für zeitliche Änderung der Phasendifferenz

- 1) Frequenz ändert sich in der Zeit.
- 2) Lichtquelle sendet endliche Wellenzüge aus, die keine konstante Phase haben.
- 3) Änderung der Phase in Medien.

### Kohärenzlänge realer Lichtquellen

Die Emission eines Wellenzuges durch ein angeregtes Atom dauert ca. 1 bis 10ns ( $= \Delta t_c$ ). In einem Wellenzug koexistieren verschiedene Frequenzen, die einer Verteilung folgen. Man nennt  $\Delta f = 1/\Delta t_c$  die **natürliche Frequenzbreite**. Die Stöße von Atomen kann die Emission unterbrechen und die Bewegung von Atomen kann eine **Doppler Verschiebung** erzeugen.

### Quantenphysikalischer Vorgriff

Ein Photon kann in diesem Modell eigentlich nur mit sich selbst interferieren.

## 3.3 Huygens-Fresnel-Prinzip

*Eine Lichtwelle pflanzt sich so fort, als ob zu dem Zeitpunkt von jedem nicht abgeschwächten Punkt eine Elementar(kugel)welle ausginge, deren Amplitude und Phase durch die eingehende Welle gegeben ist. Der weitere Verlauf ergibt sich durch Überlagerung der Elementarwellen.*

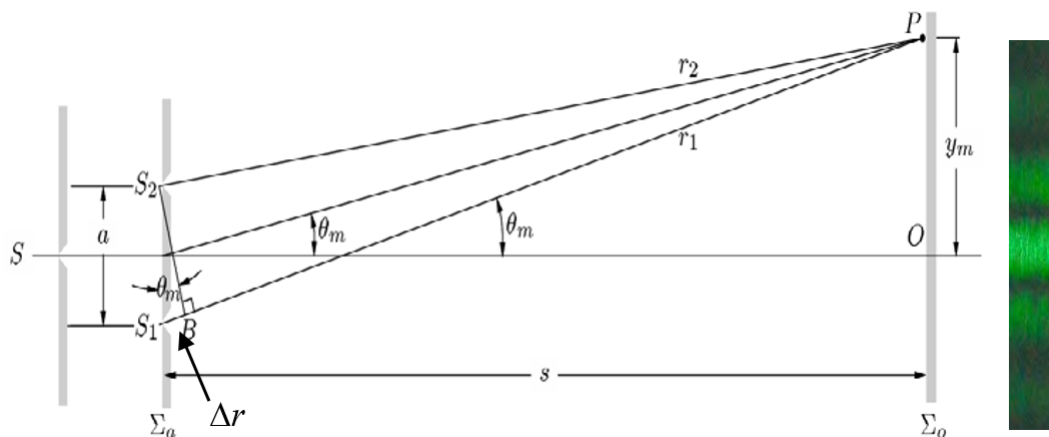
Als mathematische Beschreibung kann man die **Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsformel** für eine beugende Oberfläche  $\sigma$  herleiten (Theo):

$$E_p = -\frac{iA}{\lambda} \int_{\sigma} \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)}{2} d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

## 3.4 Zweistrahl-Interferenz

### 3.4.1 Youngscher Doppelspaltversuch

Damit man einen kohärenten Lichtstrahl erhält wurde ein Einfachspalt verwendet:



Durch geometrische Betrachtung ergibt sich für den Gangunterschied am Punkt P für kleine Winkel:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = a \sin(\theta) \approx a \frac{y}{s}$$

Also gilt für Maxima und Minima Verteilung mit  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$a \cdot \sin(\theta) = m\lambda$$

Für den Abstand zweier Maxima kann man angeben:

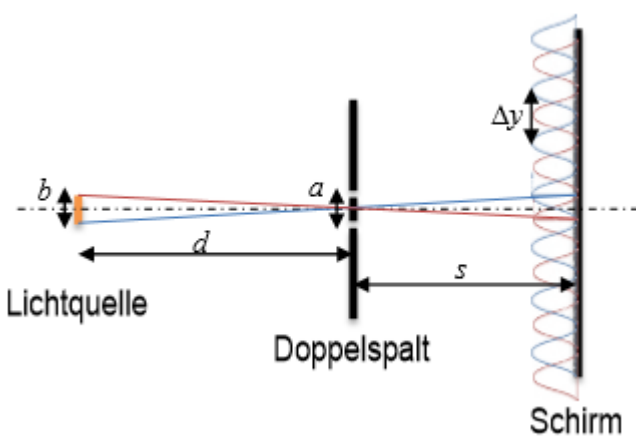
$$\Delta y = y_m - y_{m+1} = \frac{s}{a} \cdot \lambda$$

Mit den Formeln aus (3.1) kann man herleiten:

$$\langle I(y) \rangle = 4 \langle I_0 \rangle \cos^2 \left( \frac{\pi a y}{\lambda \cdot s} \right)$$

Hier entstehen auch Überlagerung durch die Einzelspaltbeugung, sodass diese Formel nicht ganz korrekt ist.

### 3.4.2 Ausgedehnte Lichtquelle



Ersetzt man den punktförmigen Einzelspalt durch eine Ausgedehnte Lichtquelle ändert sich das Interferenzbild, da jeder Punkt der Quelle einen Strahl durch jede Spaltöffnung schickt. Damit man also noch Interferenzen betrachten kann muss  $\Delta y$  mindestens kleiner als der Abstand zweier Maxima sein, also:

$$\Delta y \leq \frac{s}{a} \cdot \lambda$$

Man kann also auch mit Strahlensatz:

$$\frac{\Delta y_{max}}{s} = \frac{b_m a x}{d} = \frac{\lambda}{a}$$

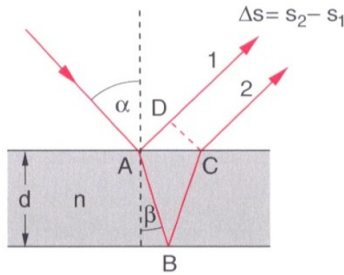
Dadurch ist

$$d\Omega = \frac{b_m a x^2}{d^2}$$

der **Raumwinkel**, unter dem die Lichtquelle von Doppelspalt aus zu sehen ist. U Für die Kohärenzfläche ergibt sich dann:

$$F_C = a^2 = \frac{\lambda^2}{d\Omega}$$

### 3.4.3 Dünne Schichten (I)



Für den Gangunterschied ergibt sich:

$$\Delta s = n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}$$

Für Einfallswinkel unterhalb des Brewster Winkels ergibt sich eine (zusätzliche) Phasendifferenz durch den Phasensprung:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s - \pi$$

Bei Ölschlieren auf der Straße ändert sich entsprechend  $d$ , sodass Interferenzfarben auftreten. Ein Maximum tritt also auf unter:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

Betrachtet man nicht den reflektierten sondern den transmittierten Anteil erhalten wir keinen Phasensprung, da immer am optisch dünneren Medium reflektiert wird!

## 3.5 Vielstrahlinterferenz

### 3.5.1 Dünne Schichten (II)

Entsprechend kann man auch bei höheren Reflexionskoeffizienten mehr als nur einen Strahl zur Überlagerung bringen. Die Formel für die Maxima ändert sich nicht, wohl aber die Intensität, zu schärfer definierten Maxima führt. Das Ergebnis sind die sog. **Airy-Formeln**:

$$I_R = I_0 \frac{F \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}, \quad I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

wobei  $F = 4\pi/(1 - R)^2$ .

### Anwendung - Fabry-Perot Interferometer (Etalon)

Der Einfallswinkel wird hier 0 gewählt, sodass für Maxima gilt:

$$\lambda_m = \frac{2dn}{m}.$$

Aus dem Abstand  $\delta\lambda$  zweier Wellenlängen, die total konstruktiv interferieren erhält man den **freien Spektralbereich** für die Frequenz:

$$\delta f = \delta \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2nd}$$

Die **Halbwertsbreite**  $\Delta f$  ist die Breite, nach der Hälfte der Halbwertsbreite die Intensität auf die Hälfte gesunken ist. Aus den Airy Formeln ergibt sich:

$$\Delta f = \frac{c}{2nd} \frac{1 - R}{\pi\sqrt{R}}$$

Den Quotient  $F^* = \delta f / \Delta f$  nennt man **Finesse**. Je höher die Finesse umso genauer kann man messen.

### Anwendung - Dielektrischer Spiegel

Indem man über dem Spiegelmaterial 2 Schichten mit größer werdendem Brechungsindex aufbringt kann man durch die Interferenz dieser Strahlen miteinander das Reflexionsvermögen bis auf über 99,9% steigern. Allerdings ist diese Reflexion wellenlängenabhängig! Diese Anordnung kann man natürlich auch mehrfach hintereinander anordnen.

### Anwendung - Antireflexbeschichtung

Indem Schichten aufgebracht werden, deren Brechungsindex aufsteigt (bis zum Substrat) kann man in der Umkehrung des Spiegels erreichen, dass es möglichst viel destruktive Interferenz auftritt!

## 3.6 Zusammenfassung Interferenz

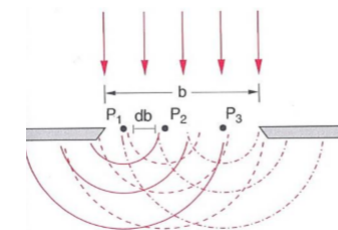
Überlagern sich verschiedene Strahlen, die die Kohärenzbedingung erfüllen, so kommt es bei einer Phasendifferenz von

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$$

zu Interferenz. Zusätzlich muss man bei einer Reflexion ggf. einen Phasensprung berücksichtigen. Es gilt: unterhalb des Brewster Winkels: **Phasensprung von  $\pi$**  bei Reflexion am optisch dichteren Medium.

## 3.7 Beugung am Einzelspalt

Beugung allgemein beschreibt einfach die Abweichung vom gradlinigen Strahlenang. Letzten Endes ist Beugung „nur“ die Interferenz von vielen Teilwellen. Von Interferenz spricht man bei wenigen.



Mithilfe des Huygens-Fresnel-Prinzips kann man auch die Interferenz am Einzelspalt erklären. Man nähert, dass der Schirm weit entfernt ist, sodass die Teilstrahlen annähernd parallel sind (**Fraunhofer Näherung**). Analog zum Doppelspalt kann man für zwei benachbarte Punktquellen schreiben:

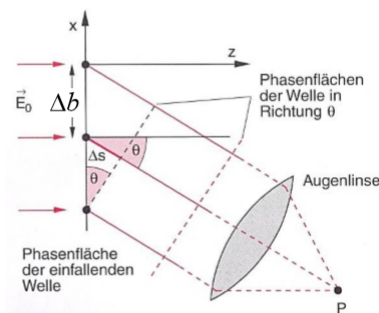
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{b}{N} \cdot \sin(\theta)$$

Summiert man über  $N$  benachbarte Spalten ergibt sich eine geometrische Summe sodass man für das Feld angeben kann:

$$E_N = A_0 \cdot \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} = A_0 \cdot e^{(i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi)} \cdot \frac{\sin(\frac{N}{2}\Delta\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi)}$$

Es folgt dann für die **Intensität** im Limes  $N \rightarrow \infty$ :

$$I(\theta) = I_e \cdot \frac{\sin^2 \left[ \frac{\pi}{\lambda} b \sin(\theta) \right]}{\left[ \frac{\pi}{\lambda} b \sin(\theta) \right]^2} \quad \text{mit} \quad I_e = N^2 I_0.$$



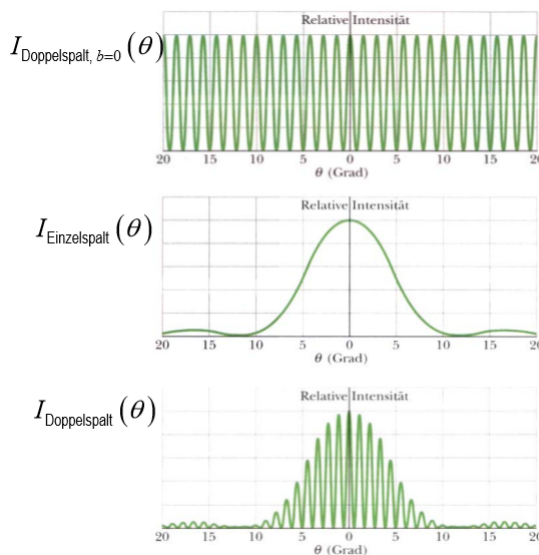
Somit ergeben sich Bedingungen für Minima (indem man das Zähler-Sinus-Argument gleich  $\pi$  setzt) und Maxima (gleich  $\pi/2$ ):

$$\sin(\theta_{min}) = \frac{\lambda}{b} \cdot n, \quad \sin(\theta_{max}) = \frac{\lambda}{b} \cdot \left(m + \frac{1}{2}\right)$$

Das zentrale Maximum enthält 90% der Intensität. Ähnlich kann man die Beugung an einem kleinen runden Loch herleiten, wofür man allerdings die **Besselfunktion erster Art** benötigt. Es ist zu beachten, dass für eine **extrem kleine Öffnung** keine Interferenz zu betrachten ist, da man quasi nur noch eine Punktquelle erhält. Das wird auch durch die Intensitätsformel gestützt.

In dieser Näherung spricht man auch von **Fraunhofer-Beugung**. Nähert man nicht, so ist das Beugungsbild abstandsabhängig, da man Kugelwellen berücksichtigen muss, man spricht von **Fresnel-Beugung**.

### 3.7.1 Beugung am Doppelspalt

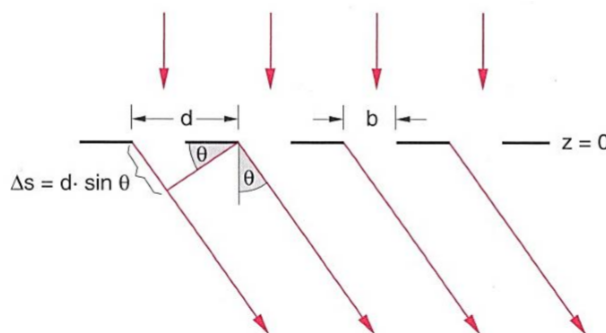


Nimmt man an, dass bei einem Doppelspalt, nicht zwei Punktquellen, sondern zwei reale Einzelspalte vorliegen wird das Doppelspaltinterferenzbild von der Einzelspaltbeugung *überlagert*. Man erhält durch Multiplikation der Intensitätsverteilungen:

$$I = I_e \cdot \frac{\sin^2 \left[ \frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda} \right]}{\left[ \frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda} \right]^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[ 2 \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda} \right]}{\left[ \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda} \right]^2}$$

Wobei  $b$  die Breite der Einzelspalte und  $a$  deren Abstand ist.

## 3.8 Gitterinterferenz



Die Intensität des Interferenzbildes am Gitter ergibt sich durch die Multiplikation der  $N$ -Strahl Interferenz Intensität, bekannt aus der Herleitung des Einzelspalt,

$$I(\theta) = I_e \frac{\sin^2 \left[ N \cdot \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]}{\sin^2 \left[ \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]}$$

mit der Intensität des Einzelspalt:

$$I(\theta) = I_e \underbrace{\frac{\sin^2 \left[ N \cdot \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]}{\sin^2 \left[ \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]}}_{\text{Gitter}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 \left[ \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right]}{\left[ \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right]^2}}_{\text{Einzelspalt}}$$

Man nennt den Abstand  $d$  der einzelnen Gitterspalten auch **Periode** des Gitters. Die Bedingung für konstruktive Interferenz ist, dass der Gangunterschied zweier benachbarter Spalten ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist:

$$d \sin \theta = m\lambda$$

Das benachbarte Nebenminimum hängt von der Spaltzahl ab:

$$d \sin \theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

Bei höheren Ordnungen verbessert sich zwar das Auflösungsvermögen (Maxima der verschiedenen Wellenlängen unterscheiden sich stärker im Winkel), aber die Intensität nimmt ab.

### Auflösungsvermögen

2 Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$  können getrennt werden, sobald das Maximum zu  $\lambda + \Delta\lambda$  im ersten benachbarten Minimum liegt. Also:

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

Dies führt auf das Auflösungsvermögen:

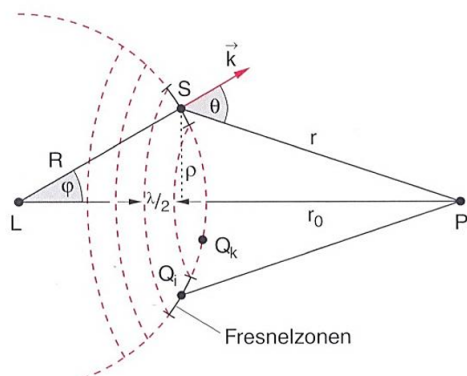
$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

Bei einem **Blase-Gitter** betrachtet man die Interferenz von an einer gezahnten Oberfläche reflektierten Lichtstrahlen. Dadurch kann man die Beugung mehr in eine Richtung lenken, sodass ein Großteil der Intensität in einer Richtung vorliegt.

## 3.9 Fresnel Beugung

Die bisherige Beschreibung der Interferenzphänomene fand in der *Fraunhofer Näherung* statt. In dieser Näherung befindet sich der Schirm weit weg von der Quelle, sodass die Wellenfronten quasi als Ebene, parallele Wellen auf den Schirm auftreffen. Die **Fresnel Beugung** ist allgemeiner! Hier wird auch der nicht parallele Strahlengang zwischen Schirm und Quelle berücksichtigt.

### Fresnel'sche Zonen



Die Fresnelzonen werden konstruiert, indem man Kugeln des Radius

$$r_m = r_0 + m \frac{\lambda}{2}.$$

um die Quelle anordnet. Dann wird der Beitrag eines Kreisringstückes  $dS$  zur Feldstärke am Beobachtungspunkt **P** bestimmt:

$$dE = K \cdot \frac{E_0}{R} e^{ikR} \frac{1}{r} e^{ikr} dS$$

Mit Neigungsfaktor:

$$K = \frac{1}{i\lambda} \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

Analog zur Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsformel (3.1). Mithilfe des Cosinussatzes und einiger Rechnung (Integration) kann man den Beitrag einer Zone zur Feldstärke bestimmen zu:

$$E_m = (-1)^{m+1} \frac{E_0}{R + r_0} (1 + \cos(\theta_m) e^{ik(R+r_0)})$$

Da sich der Neigungsfaktor von zwei benachbarten Zonen kaum unterscheidet, sind aufgrund des alternierenden Vorzeichens Terme der Form:

$$\frac{1}{2}|E_{m-1}| - |E_m| + \frac{1}{2}|E_{m+1}| = 0.$$

Somit ergibt sich Insgesamt:

$$E(\mathbf{P}) \approx \frac{E_1}{2} = \frac{E_0}{R + r_0} e^{ik(R+R_0)}$$

Dies entspricht also genau dem Wert einer Kugelwelle, die zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{L}$  propagiert, da  $R + r_0 = \overline{LP}$ .

### Kreisblende, die nur erste Zone durchlässt

Liegt eine Kreisblende, mit dem Radius

$$\rho_1 = \sqrt{r_1^2 - r_0^2} = \sqrt{\left(r_0 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2} \approx \sqrt{r_0 \lambda}$$

Man kann also durch Blenden, Scheiben und sog. **Zonenplatten** einzelne Zonen ausblenden, sodass man die Feldstärke am Punkt  $\mathbf{P}$  manipulieren kann. Es ergeben sich erstaunliche Ergebnisse wie z.B. der **Poissonsche Fleck**.

**Zonenplatte** Man erhält die Radien einer Zonenplatte, die nur die ungeraden (also positiven) Beiträge durchlässt, indem man ansetzt:

$$r_0 = m\lambda.$$

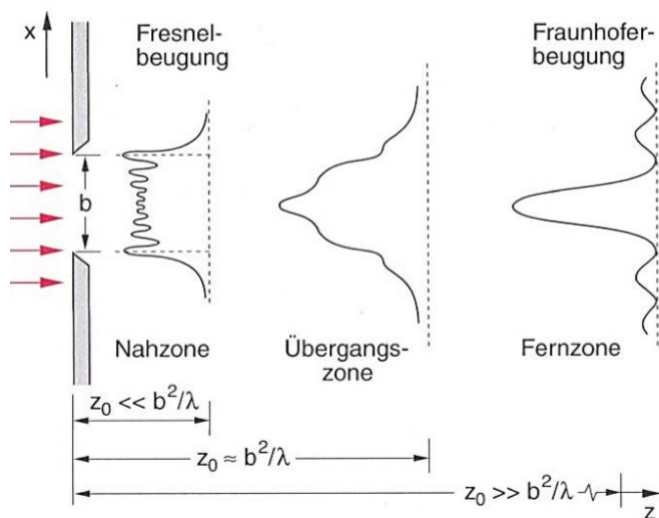
## 3.10 Zusammenfassung Beugung

- Hindernisse groß gegen die Wellenlänge: **geometrische Schatten**
- Hindernisse von der Größe der Wellenlänge: **Beugungserscheinungen**
- Hindernisse klein gegen die Wellenlänge: **Kugelwelle**

Es gibt zwei Näherungen:

- **Fraunhofer Beugung:** Abstand zum Schirm groß gegen Hindernis  $\rightarrow$  Strahlen annähernd parallel  $\rightarrow$  Beugungsbild nur Richtungsabhängig
- **Fresnel Beugung:** Summation über Zonen mit konstanter Phasendifferenz  $\rightarrow$  Beugungsbild abstandsabhängig

### 3.11 Übergang von Fresnel zu Fraunhofer Beugung



Durch Entwicklung des Abstandes  $r(\mathbf{x})$  (Pythagoras) von einem Schirm kann man durch eine Näherung von Fresnel zu Fraunhofer Beugung gelangen.

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + z_0^2}$$

In der **Nahzone** tragen noch **viele Zonen** zur Beugung bei, in der **Übergangszone** nur noch **wenige** und in der **Fernzone** nur noch die **erste**.  $z_0$  ist hier der Abstand zwischen Blende und Schirm,  $x$  ist die senkrechte Koordinate.

### 3.12 Fresnelbeugung und Fouriertransformation

Wir haben eine Transmissionsfunktion  $\tau(x, y)$  (z.B. Theta-Funktion bei einem Spalt oder Delta-Funktion bei einer Punktquelle). Man nennt diese Funktion auch **Aper-tur**. Die Feldstärke ergibt sich dann durch:

$$E_p \propto \int_{\mathbb{R}^2} \tau(x, y) \exp\left(\frac{ik}{z_0}(x'x + y'y)\right) dx dy$$

Somit durch eine Fouriertransformation von  $\tau$ .

### 3.13 Babinetsches Prinzip

Teilt man die Gesamtfläche  $\sigma$  in zwei komplementäre, also auch disjunkte, Flächen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auf, so ergibt sich aus dem Beugungsintegral und dessen Linearität:

$$E(\sigma) = E(\sigma_1) + E(\sigma_2)$$

Da  $\sigma$  die Gesamtebene ist gilt für die Punkte, an denen es Dunkel ist:

$$I(\sigma_1) = I(\sigma_2)$$

### 3.14 Rayleigh Streuung

Die Rayleigh Streuung beschreibt die Wechselwirkung von Licht mit Teilchen, die kleiner sind als die Wellenlänge. Die Teilchen verhalten sich hier wie Hertzsche Dipole, die mit der gemittelten Leistung von

$$P = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta$$



Wobei  $\omega$  die Anregungsfrequenz ist. Aufgrund der  $\omega^4$  Abhängigkeit erscheint z.B. der Himmel bei hoch stehender Sonne blau, da dann in Richtung der Erde gestreut wird. Bei tief stehender Sonne wird das blaue Licht entsprechend „rausgestreut“ und der Himmel erscheint rötlich. Die Rayleigh Streuung kann durch Polarisation auch andere Effekte erzeugen.

Bei größeren Teilchen wird die Frequenzabhängigkeit immer geringer, sodass man erst sogenannte **Mie Streuung** und schließlich gar keine frequenzabhängige Streuung erhält. Man muss hier unterscheiden, dass das Licht nicht nur in Ausbreitungsrichtung gestreut wird, anders als in Festkörpern, wo die konstruktive Interferenz nur in Ausbreitungs- und ggf. Vorzugsrichtung vorliegt. In ungeordneten Medien, also Flüssigkeiten und Gasen, kann auch anders gestreut werden.

## 4 Geometrische Optik

Das Ziel der Vereinfachungen in der geometrischen Optik ist es, die Abbildung von Körpern durch optische Systeme leicht beschreiben zu können. Dabei betrachtet man das Licht als Strahlen, mit geradlinigem Strahlengang. Die geometrische Optik ergibt sich als **Grenzfall aus der Wellenoptik für  $\lambda \rightarrow 0$** , da dann alle Interferenzphänomene wegfallen. Solche scharf begrenzte Lichtbündel, die auch nach einem Objekt nicht senkrecht zur ursprünglichen Ausbreitungsrichtung propagieren, nennt man dann Lichtstrahlen.

### 4.1 Einführung - Lochkamera

Bildet man einen strahlenden Punkt  $P$  durch eine Lochkamera auf einen Schirm ab, erhält man einen Bereich  $P'$ , welches ein (verschwommenes) Abbild von  $P$  ist. Die Breite des Bereichs  $P'$  sei  $d'$  und die Breite der Blende sei  $d$ . Der Abstand von  $P$  zur Blende sei  $a$  und die Länge der Lochkamera sei  $b$ . Aus dem Strahlensatz ergibt sich:

$$d' = \frac{a+b}{a} \cdot d$$

Für eine hypothetische Beugung an der Blende ergibt sich in erster Näherung für den Winkel des ersten Minimums:

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{2r}$$

Das erste Maximum hat also die Breite

$$d_B = 2b \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Das optimale Abbild erreicht man also bei

$$\boxed{d' = d_B} \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \lambda.$$

Die Auflösung einer Lochkamera wird also durch die Beugung limitiert.

## 4.2 Grundaxiome der geometrischen Optik

- In optisch homogenen Medium sind Lichtstrahlen Geraden.
- An der Grenzfläche zwischen zwei Medien werden Lichtstrahlen gebrochen und reflektiert und gehorchen dabei dem Reflexions und Brechungsgesetz (2.3).
- Mehrere Strahlenbündel beeinflussen sich nicht gegenseitig.
- Lichtstrahlen sind umkehrbar.

Es gilt natürlich weiterhin: Am **optisch dichteren Medium** wird zum Lot hin gebrochen!

## 4.3 Zusammenhang zur Wellenoptik

- Die geom. Optik ergibt sich als Grenzfall der Wellenoptik für  $\lambda \rightarrow 0$ .
- Licht wird als Lichtbündel beschrieben, die man durch beliebig viele Lichtstrahlen, die senkrecht auf den Wellenfronte stehen, visualisieren kann.

## 4.4 Das Fermatsche Prinzip

Die Grundaxiome der geometrischen Optik kann man im Fermatschen Prinzip zusammenfassen:

*Zwischen zwei Punkten und durchläuft ein Lichtstrahl stets eine optische Weglänge, die bezüglich der Variation dieses Weges stationär ist.*

In der Praxis bedeutet dies, dass ein Lichtstrahl den Weg der geringsten Laufzeit wählt. Mathematisch beschreibt man dies durch ein Variationsprinzip, mit Optischer Weglänge  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \int_S^P n \, ds \quad \text{mit} \quad \delta \mathcal{L} = 0 \quad (4.1)$$

Hierbei gilt insbesondere in homogenen Medien:

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{c_0}{\frac{ds}{dt}} = c_0 \frac{dt}{ds}$$

Allgemein gilt für ein Funktional de Form:

$$S[f(y', y, x)] = \int_a^b f(y', y, x) \, dx \quad \text{genau dann} \quad \delta S = 0,$$

wenn

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Das Fermatsche Prinzip kann auch aus den Maxwell Gleichungen hergeleitet werden.

## 4.5 Spiegel

Ein **ebener Spiegel** erzeugt ein Abbild eines Körpers, das **aufrecht, gleich groß, seitenverkehrt** und **virtuell** ist.

Das Konzept des **virtuellen Bildes** ist sehr wichtig. Im Wesentlichen besagt es, dass ein Beobachter den Strahlen, die er wahrnimmt, eine Quelle zuordnet, die diese Strahlen mit geradlinigem Gang zum Beobachter erzeugt. Diese (nicht reale!) Quelle ist das Virtuelle Bild. Im Gegensatz dazu liegt ein reelles Bild vor, wenn sich die Strahlen tatsächlich im Bildpunkt vereinigen. Ein virtuelles Bild ist nur in einem einzigen Punkt scharf und kann daher auch nicht auf einen Schirm abgebildet werden.

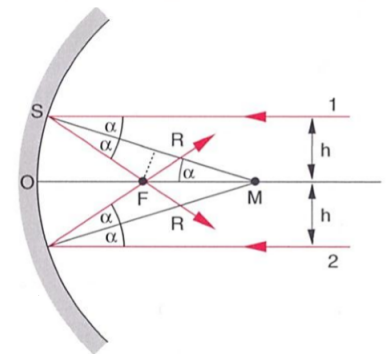
### Spärischer Hohlspiegel:

Aus der Skizze ergibt sich mit etwas Rechnung und Geometrie:

$$\overline{OF} = R \left( 1 - \frac{R}{2\sqrt{R^2 - h^2}} \right)$$

Bezeichnet man  $\overline{OF} = f$  als die **Brennweite** und beschränkt man sich auf Strahlen, für die  $h$  klein ist, auf sog. **paraxiale Strahlen** (nahe der optischen Achse) erhält man:

$$f = \frac{R}{2}$$



Möchte man den Abbildpunkt  $b$  eines im Abstand  $g$  entfernten Körper ermitteln ergibt sich, für paraxiale Strahlen die **Abbildungsgleichung** des sphärischen Hohlspiegels:

$$\boxed{\frac{1}{b} + \frac{1}{g} \approx \frac{2}{R} \approx \frac{1}{f}}$$

Für die Form eines Spiegels, der nur eine Brennweite (also unabhängig von  $h$  ohne paraxiale Näherung) ergibt sich der **parabolische Hohlspiegel**. Seine Oberfläche wird beschrieben durch:

$$\boxed{y^2 = 4fx}$$

### Abbildung ausgedehnter Objekte am Hohlspiegel

Wir betrachten die Abbildung eines Pfeils (Orientierung vorgegeben, daher praktisch)  $A$ . In der Näherung paraxialer Strahlen verläuft ein paralleler Strahl nach Reflexion durch den Brennpunkt, ein Brennpunktstrahl wird parallel und ein Mittelpunktstrahl wird einfach umgekehrt. Man erkennt, dass sich durch diese Konfiguration das Bild umkehrt. Der Punkt  $B$  in dem diese Strahlen zusammenlaufen ist ein reeller Bildpunkt, da sich die Strahlen tatsächlich in ihm vereinigen. Es ergeben sich verschiedene Fälle:

- 1)  $g > 2f$ : Das Bild ist also verkleinert, da  $B < A$ , invertiert und reell.

- 2)  $g \in (f, 2f)$ : vergrößert, invertiert, reell
- 3)  $g < f$  vergrößert, imaginär und aufrecht.
- 4)  $g = f$  Es existiert kein Bild, da alle Strahlen als parallele Strahlen reflektiert werden.

Man definiert sich den **Abbildungsmaßstab**  $\Gamma$  als das Verhältnis:

$$\Gamma = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = -\frac{b}{g}$$

## 4.6 Prisma

Es liegt ein gleichschenkliges Prisma mit dem „Öffnungswinkel“  $\gamma$  vor.  $\delta$  ist der Winkel der Gesamtablenkung. Es ergibt sich durch einige Rechnung, dass Minimale Ablenkung dann vorliegt, wenn der Einfallswinkel  $\alpha_1$  gleich dem Austrittswinkel  $\alpha_2$  auf der anderen Seite sein muss. Insgesamt kann man beschreiben (Snellius):

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad (4.2)$$

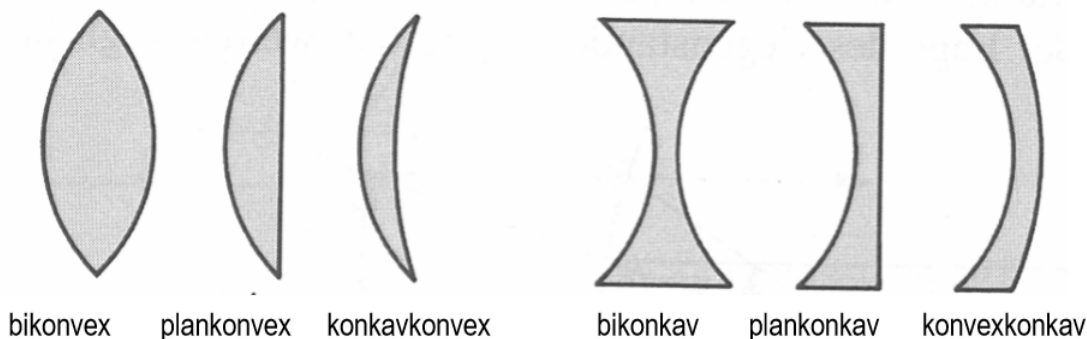
Dies gilt natürlich nur für eine einzelne Wellenlänge. Bei mehrfarbigem Licht gibt es Dispersion. Insgesamt also mit Kettenregel:

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}} \frac{dn}{d\lambda}$$

Da wir hier Transmission betrachtet wird liegt i.d.R. *Normale Dispersion* ( $dn/d\lambda < 0$ ) vor.

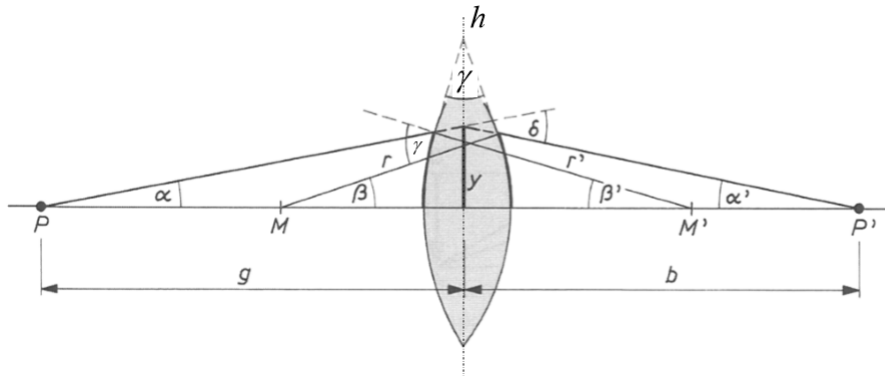
## 4.7 Linsen

Wir betrachten hier meist **sphärische Linsen**, d.h. dass die Linse durch zwei Kugelflächen begrenzt ist. Es gibt verschiedene Linsentypen:



Die drei linken Linsen sind **Sammellinsen**, die rechte **Zerstreuungslinsen** (je nachdem noch einmal Radiusabhängig). Man kann jetzt die Betrachtung von Linsen durch eine Abbildung von dicken Halbräumen, letzten Endes einfach Brechung an den Grenzflächen beschreiben. Leichter und schneller geht es über die Betrachtung von **dünnen Linsen**.

## 4.7.1 Dünne Linsen



Die Näherung zur dünnen Linse wird vorgenommen, wenn der Teil der optischen Achse in der Linse klein gegen den Krümmungsradius ist. In den Zeichnungen geht dies natürlich nicht maßstabsgetreu.  $h$  heißt hier **Hauptebene**. In der Näherung kann man dann die Linse als ein kleines Prisma, mit kleinem Winkeln  $\gamma$  und  $\delta$  annähern, sodass aus (4.2) direkt mit  $\delta = \alpha + \alpha'$  und  $\gamma = \beta + \beta'$  folgt:

$$\alpha + \alpha' = (n - 1)(\beta + \beta')$$

Dadurch ergibt sich mit  $y \approx \beta r \approx \beta r'$  und  $\alpha \approx y/g$ , sowie  $\alpha' \approx y/b$  die **Linsengleichung**:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)} \quad (4.3)$$

In diesem Fall sind **beide Radien positiv** (Konvention). Für parallele Strahlen (also  $g \rightarrow \infty$ ) sich die **Brennweite**:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

Dadurch ergibt sich dieselbe Abbildungsgleichung wie beim Hohlspiegel:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}} \quad (4.4)$$

Mit **bildseitigem Brennpunkt**  $F'$ . Analog gibt es einen **objektseitigen Brennpunkt**  $F$ , der bei symmetrischen Linsen aber gleich dem bildseitigen ist. Für den Abbildungsmaßstab gilt:

$$\boxed{\Gamma = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f - g}}$$

## 4.7.2 Bildkonstruktion an dünner Sammellinse

- Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen.
- Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen.
- Hauptstrahlen bleiben Hauptstrahlen (durch Mittelpunkt).

### 4.7.3 Bildkonstruktion an dünner Zerstreuungslinse

Bei Zerstreuungslinsen ist die **Brennweite und Bildweite negativ definiert!**

- Parallelstrahlen werden so gebrochen, als kämen sie aus dem objektseitigem Brennpunkt  $F$ .
- Hauptstrahlen bleiben Hauptstrahlen.
- Brennpunktstrahlen, die durch den bildseitigen Brennpunkt gehen würden, werden Parallelstrahlen.

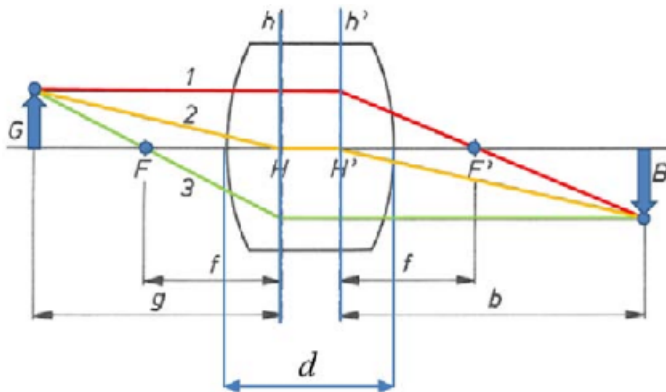
Das Bild ist immer verkleinert, imaginär und aufrecht.

Zum rumspielen: [Leifi-Zerstreuung](#) [Leifi-Sammel](#)

### 4.7.4 Dicke Linsen

Für die dicke Linse muss man die Herleitung in 2 Hauptachsen aufteilen. Dann muss man mit mehrfachem Snellius argumentieren und für paraxiale Strahlen herleiten:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{(n - 1) \cdot d}{n \cdot r r'} \right)$$



Bezieht man die Hauptebenen auf die Gegenstands- und Bildweite, bleibt die Abbildungsgleichung  $1/f = 1/g + 1/b$  gültig. Die Konstruktion erfolgt wie in der Skizze. Die Hauptebenen sind definiert durch den Schnittpunkt der Verlängerung des achsparallelen Strahls auf der einen und des Brennpunktstrahls auf der anderen Seite. (einmal von beiden Seiten!) Dafür muss man den Bildpunkt  $B$  natürlich schon kennen!

## 4.8 Linsensysteme

Es ergibt sich für den neuen Brennpunkt (also ein achsparalleler Strahl nach Gesamtdurchlauf geht durch):

$$f' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad \xrightarrow{d \rightarrow 0} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

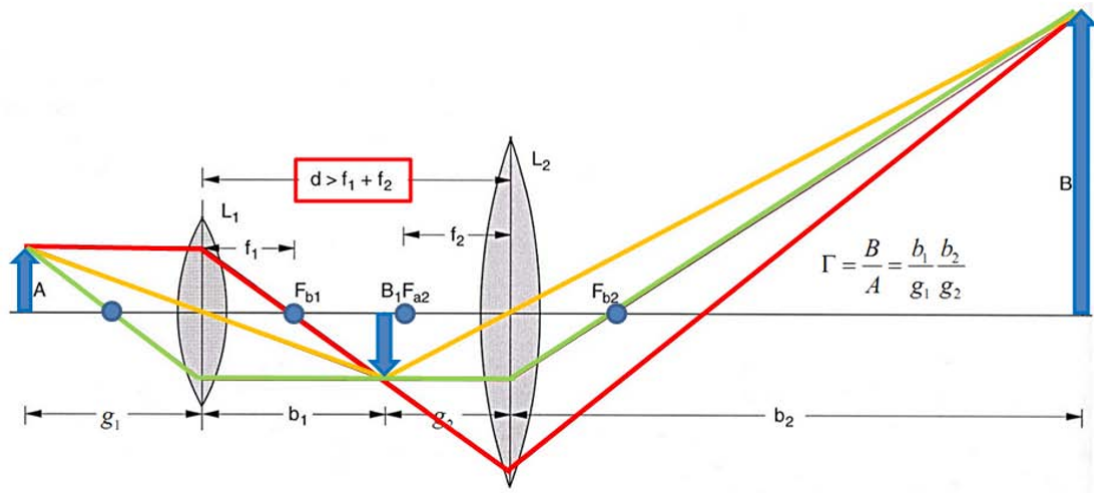
Für die Entfernung des Gesamtbrennpunkts zu den Einzellinsen gilt:

$$\frac{1}{|S_{1f}|} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2 - d}, \quad \frac{1}{|S_{2f}|} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1 - d}$$

Den Kehrwert der Gesamtbrennweite nennt man auch die **Dioptrie**.

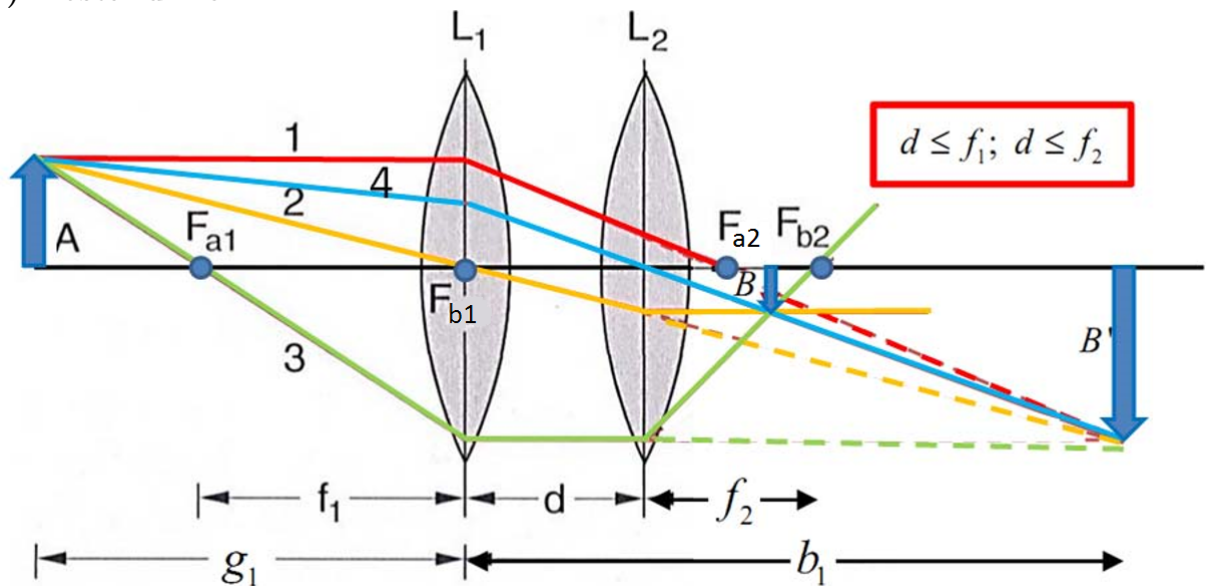
## 4.8.1 Abbildungskonstruktion

## 1) Abstand groß:



Es wird einfach konstruiert wie mit 2 Linsen.

## 2) Abstand klein:



Man betrachtet einfach entsprechend viele Strahlen, damit man den Bildpunkt eindeutig festlegen kann!  $B'$  ist der Bildpunkt, der nur bei Brechung an der ersten Linse entstehen würde. Die Brennpunkte  $F_{ai}$  gehören zu Linse 1 und die Brennpunkte  $F_{bi}$  zu Linse 2.

## 4.9 Abbildungsfehler

In der Technik kommen meistens kompliziertere Systeme aus vielen Linsen vor. Man kann sich fragen, warum? Der Grund ist, dass die Abbildung an Linsen (auch durch die paraxiale Näherung) fehlerbehaftet sind!

#### 4.9.1 Chromatische Aberration

Aberration bedeutet eine Verschiebung des Brennpunkts. Aufgrund der Abhängigkeit der Brennweite vom Brechungsindex hängt diese hier bei Dispersion auch von der Wellenlänge ab. Dadurch werden verschiedene Farben ( $\approx$  chromatisch) an unterschiedlichen Punkten fokussiert. Bei normaler Dispersion ist  $n_{\text{blau}} > n_{\text{rot}}$  und somit wird blaues Licht früher fokussiert als Rotes.

**Lösung:** Kombination von Linsen verschiedener Brechungsindizes. Man Wählt eine Sammellinse unmittelbar gefolgt von einer Zerstreuungslinse. Solch ein System heißt auch **Achromat**. Um auch noch den grünen und sonstige Anteile zu fokussieren verwendet man sog. Apochromaten, die nach dem selben Prinzip wie Achromaten funktionieren (nur mit entsprechend vielen Linsen)

#### 4.9.2 Sphärische Aberration

Durch die paraxiale Näherung haben wir bisher ignoriert, dass an sphärischen Spiegeln und Linsen die Brennweite von der Entfernung der Strahlen zur Achse abhängt. Der dadurch entstehende Fehler ist die sphärische Aberration.

**Lösung:** Man kann die Fehler durch Ausblendung der achsfernen Strahlen, bei entsprechendem Verlust der Helligkeit, durch Kombination von Linsen, oder auch durch Verwendung asphärischer Linsen verringern.

#### 4.9.3 Koma

Die achsfernen Strahlen fallen in der Realität unter einem Anderen Winkel ein. Dadurch werden die Bildpunkte dieser Strahlen entsprechend langgezogen und verzerrt. Das Wort „Koma“ kommt aus dem griechischen und bedeutet so viel wie Schweif (vgl. Komet).

**Lösung:** Ausblendung der Randstrahlen

#### 4.9.4 Astigmatismus

An einer sphärischen Linse bildet ein Punkt durch Aufspaltung seines Strahls unter größeren Winkeln auf verschiedene Brennpunkte ab. Daher auch Astigmatismus (gr. „Punktlosigkeit“).

#### 4.9.5 Bildfeldwölbung

Ein ausgedehntes Objekt besteht aus quasi unendlich vielen Objektpunkten, die leider unter verschiedenen Winkeln an der Linse gebrochen werden. Dadurch verlagert sich der Brennpunkt in der *Höhe*.

#### 4.9.6 Verzeichnung

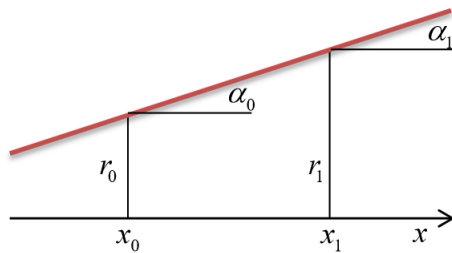
Durch Ausblendung verschiedener Strahlen (vor oder nach der Linse) ergibt sich eine (Tonnen oder Kissen-)förmige Verzeichnung.



## 4.10 Matrixoptik

Betrachten man ein Linsensystem von mehreren Linsen interessiert meist nur, an welcher Stelle der Strahl nach Durchlauf aller Linsen fokussiert wird. Dies kann in der Matrixoptik durch Betrachtung des Abstands zur optischen Achse  $r$  und des ersten Winkels zur optischen Achse beschrieben werden. Dieser Winkel ist nach Konvention positiv, wenn der Strahl oberhalb der Parallelen zur optischen Achse propagiert.

### 4.10.1 Translationsmatrix



Die geradlinige Ausbreitung in einem homogenen Medium wird in Kleinwinkelnäherung (paraxiale Strahlen) durch die einfache Translationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ n \alpha_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{T}} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ n \alpha_0 \end{pmatrix}$$

### 4.10.2 Brechungsmatrix

Analog zur obigen Translationsmatrix kann man an einer Brechenden Grenzfläche die Beziehung, wobei  $r_1 = r_2$  an der Grenzfläche:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Falls der Mittelpunkt der Linse auf der anderen Seite (also Richtung  $r_1$ ) liegt muss  $-R$  verwendet werden.

### 4.10.3 Transformationsmatrix einer Linse

Verkettet man entsprechend 2 Brechungsmatrizen und eine Translationsmatrix kann man die Transformationsmatrix einer Linse mit unterschiedlichen Radien bestimmen:

$$\tilde{M}_L = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d(n_2 - n_1)}{n_2 R_1} & \frac{d}{n_2} \\ \frac{n_2(n_3 - n_1)R_1 - n_2(n_2 - n_1)R_2 - (n_3 - n_2)(n_2 - n_1)d}{n_2 R_1 R_2} & 1 + \frac{(n_3 - n_2)d}{n_2 R_2} \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung für eine allgemeine Linse ist natürlich nicht sehr hilfreich. In der Näherung einer dünnen Linse in Luft vernachlässigt man alle Terme mit  $d$ , setzt  $n_1 = n_3 = 1$  und erhält:

$$\boxed{\tilde{M}_{DL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}$$

#### 4.10.4 Abbildungsmatrix für dünne Linse in Luft

Aus analogen Überlegungen ergibt sich, vom Gegenstandspunkt bis zum Bildpunkt mit 2 Translations und einer Dünne-Linsen-Matrix:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{f} & g + b - \frac{gb}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{g}{f} \end{pmatrix}}_{\tilde{M}_{AB}} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Damit der Abstand des Bildpunkt unabhängig vom Winkel  $\alpha_1$  ist (Fokussierung im Punkt  $B$ , also gewöhnliche Abbildung) muss der Eintrag  $\tilde{M}_{AB}^{12} = 0$  sein, woraus sich die bekannt Abbildungsgleichung der dünnen Linse in paraxialer Näherung (4.4) ergibt.

## 5 Anwendungen

### 5.1 Das Auge

Durch die Fokussierung mittels einer Linse im Auge wird ein **reelles, umgekehrtes** Bild auf der Netzhaut erzeugt. Da die Linse auf der Linken Seite an Luft grenzt und links an eine Wasserartige Flüssigkeit sind die bild- und objektseitigen Brennweiten nicht mehr gleich. Um verschiedene Entfernungen scharf sehen zu können kann die Brennweite der Linse durch einen Muskel verändert werden. Linsenfehler kann das Auge durch Änderung der Pupillengröße verringern, gleichzeitig schützt dies vor Überbelichtung. Das Licht wird von ca. 125 Mio Sinneszellen auf der Netzhaut in elektrische Signale umgewandelt. Der Großteil dieser Zellen sind **lichtempfindliche Stäbchen** und (nur ca. 6 bis 7 Mio) **farbempfindliche Zapfen**. In den zentralen Sehrgrube (**Fovea Zentralis**) befinden sich die meisten Zapfen, sodass man dort am schärfsten sieht. Andererseits gibt es einen Bereich, in dem der Sehnerv aus der Netzhaut hinaus verläuft, wo dann nichts wahrgenommen werden kann. Das Hirn füllt diesen Blinden Fleck dann einfach nach dem best guess. Das Spektrale Auflösungsvermögen hängt durch die Mischung der blau, rot und grün Signale von den Lichtintensität ab.

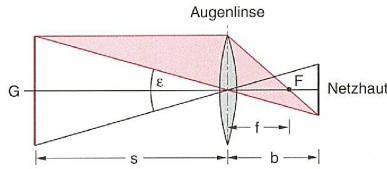
Bei einer Sehschwäche liegt Weitsichtigkeit vor, wenn die Brennweite der Linse zu groß ist und Kurzsichtigkeit, wenn sie zu klein ist. Man kann dann bei Kurzsichtigkeit eine Zerstreuungslinse und bei Weitsichtigkeit eine Sammellinse zur Korrektur verwenden.

**Abbildungsgleichung des Auges** Mit den Brechungsindices  $n_1$  und  $n_2$  erhält man die allgemeine Abbildungsgleichung:

$$\boxed{\frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{b} = 1}$$

Den Abstand  $g = s_0 \approx 25cm$  nennt man die deutliche Sehweite in der die meisten Leute ohne Fokussierung scharf sehen können.

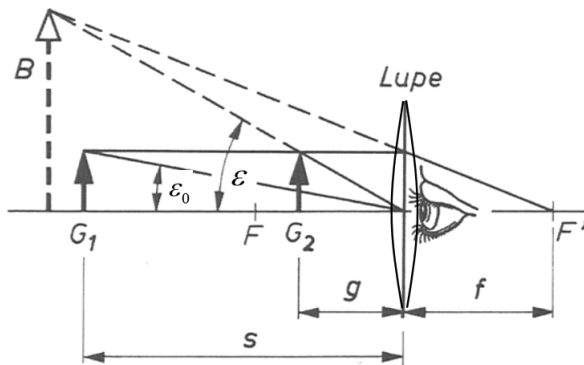
### Räumliches Auflösungsvermögen



Aus der dichte der Sinneszellen auf der Netzhaut erhält man, dass der minimale erkennbare Sehwinkel in der Größenordnung von  $0,02^\circ$  liegt. In der deutlichen Sichtweite ist das kleinste auflösbare Objekt also von der Größe

$$\varepsilon \approx \frac{G}{s} \quad \Leftrightarrow \quad G \approx \varepsilon s \quad G(s = s_0) \approx 70 \mu m \quad (360 \text{ dpi})$$

## 5.2 Lupe



Damit man tatsächlich einen vergrößernden Effekt erhält muss man mit dem Auge, wie man in der Zeichnung erkennt mindestens so nah an die Linse, dass man ein **imaginäres** Bild wahrnimmt, also **näher als die Bildweite!** Man definiert den Winkel  $\varepsilon_0$  als den Winkel, mit dem man das Objekt  $G_2$  in der Entfernung  $s_0$  sehen würde (also quasi  $G_1$ ). Wählt man  $g \approx f$  ist

$$\varepsilon \approx \frac{G}{f}$$

Das Verhältnis zwischen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_0$  nennt man die **Winkelvergrößerung**, wobei dies für ein beliebiges Instrument gilt. Für die Lupe ergibt sich:

$$V = \frac{s_0}{f}$$

## 5.3 Mikroskop

In einem Mikroskop passiert eine Abbildung an zwei weit auseinander stehenden Sammellinsen (Objektiv, Okular). Dabei erzeugt das Objektiv ein invertiertes reelles Zwischenbild, welches dann durch das Okular wie eine Lupe betrachtet wird. Das Zwischenbild muss dabei, wie bei der Lupe, zwischen Okular und Brennweite des Okulars liegen. Für das **Objektiv** ist der Betrag des Abbildungsmaßstabs von Interesse:

$$\Gamma_{ob} = \frac{b}{g} \approx \frac{t}{f_{ob}}$$

wobei  $t$  die **Tubuslänge** (Abstand der Brennpunkte von Objektiv und Okular) ist und  $g \approx f_{ob}$ . Für die **Okularvergrößerung** dieses Zwischenbildes gelten dann die selben Beziehungen wie bei der Lupe:

$$V = \Gamma_{ob} V_{ok} \approx \frac{t s_0}{f_{ob} f_{ok}}$$

Um Abbildungsfehler zu minimieren bestehen Okular und Objektiv natürlich in der Realität aus Linsensystemen. Auch die Ausleuchtung des Objektes spielt eine Rolle.

## 5.4 Teleskop

Auch bei einem Teleskop besteht der schematische Aufbau aus 2 Linsen. Dabei soll der Abstand zwischen den Beiden Linsen der Summe der Brennweiten entsprechen. Da man weit entfernte Objekte betrachtet ist der Winkel  $\varepsilon_0$  sofort gegeben und alle Strahlen treffen in guter Näherung parallel auf das Objektiv. Dadurch verlassen die Strahlen das Okular auch wieder parallel ( $\varepsilon$  auch sofort gegeben). Es ergibt sich nach dem Strahlensatz der einfache Zusammenhang:

$$V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

In verschiedenen Typen von Fernrohren sind die Bilder i.A. umgekehrt oder aufrecht. Man kann Fernrohre auch mit einem Hohlspiegel als Objektiv bauen, um höhere Lichtstärken zu erreichen.

**Achtung!**  $\varepsilon_0$  ist *nicht* durch  $s_0$  definiert! Es gilt immer:

$\varepsilon_0$  ist immer der Winkel unter dem man das Objekt ohne Instrument betrachtet!

$\varepsilon$  ist immer der Winkel unter dem man das Objekt mit Instrument betrachtet!

## 5.5 Auflösungsvermögen

Durch Begrenzung des Strahlengangs auf einen Durchmesser  $D$  wird ein Punkt zu einem Beugungsscheibchen. Dadurch ist das Auflösungsvermögen von optischen Instrumenten limitiert. Der Durchmesser des zentralen Maximums ist nach Kapitel 3.7 gegeben durch (Besselfunktion bei Beugung an Lochblende):

$$d_{Beug} \approx 2,4 \frac{\lambda}{D} f$$

**Rayleigh-Kriterium:** Punkte können getrennt werden, falls das zentrale Maximum des einen Punktes im 1. Minimum des anderen liegt.

Der kleinste auflösbare Winkelabstand ist also:

$$\delta_{min} = 1,2 \frac{\lambda}{D}$$

Insgesamt gibt es ein Optimum für die Schärfe zwischen Beugungseffekten ( $D$  klein) und Abbildungsfehlern ( $D$  groß). Im Auge ergibt sich somit, dass der Durchmesser eines Beugungsscheibchens ungefähr dem Abstand der Zapfen auf der Netzhaut entspricht.

### Abbe-Kriterium

Bei einem Mikroskop kann man keine Fraunhofer Näherung mehr annehmen. Dafür gibt es ein anderes Kriterium, um die Auflösung zu beschreiben:

Betrachtet man die Abbildung eines Doppelspaltes mit Spaltabstand  $d$  erhält man in der ersten Beugungsordnung Informationen über das Beugende Objekt. D.h.,

dass man ein Objektivsystem min. so breit sein muss, dass die Maxima der ersten Ordnung

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d}$$

gemessen werden kann. Es ergibt sich also:

$$d > \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha}$$

Bei genauerer Betrachtung ergibt sich mit der **numerischen Apertur**

$$NA = n \cdot \sin \alpha:$$

$$\Delta x_{min} = 0,66 \frac{\lambda_0}{NA}$$

## 5.6 Lichtstärke

Allgemein bezeichnet man ein das Lichtbündel in der Breite begrenzendes Objekt als **Aperturblende**. In einem optischen System ist hier die Linse eine Aperturblende; ein begrenzendes Objekt vor der Linse nennt man **Eintrittspupille** (begrenzt mit Raumwinkel  $\Omega$ ) und nach der Linse **Austrittspupille** (begrenzt mit Raumwinkel  $\Omega'$ ). Also für  $D \ll g$ :

$$\Omega = \frac{\pi(D/2)^2}{4\pi g^2} = \frac{1}{16} \left( \frac{D}{g} \right)^2$$

Mit der Näherung  $g \gg f$ , dem Abbildungsmaßstab und der Abbildungsgleichung ergibt sich für die Bildgröße:

$$|B| \approx \frac{fG}{g}$$

Und somit:

$$I \propto \frac{\Omega}{B^2} \propto \left( \frac{D}{f} \right)^2.$$

Man nennt  $D/f$  das Öffungsverhältnis und den Kehrwert die Blendenzahl  $F = f/D$ .

## 5.7 Schärfentiefe

Man erhält ein Schärfescheibchen  $u$  durch den Strahlensatz. Solange  $u$  kleiner ist als das Auflösungsvermögen des Sensors in Entfernung  $b_0$  ist das Bild scharf.

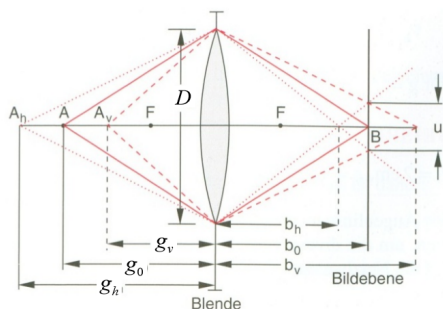
Dadurch ergibt sich mit einiger Geometrie ein Intervall, für  $g$ , sodass alle Objekte in diesem Intervall scharf sind:

$$g \in (g_0 - \Delta g_v, g_0 + \Delta g_h)$$

mit

$$\Delta g_v = \frac{uFg_0^2}{b_0f + uFg_0}, \quad \Delta g_h = \frac{uFg_0^2}{b_0f - uFg_0}.$$

$F$  ist auch hier die Blendenzahl  $F = f/D$ . Für große  $F$  ist die Summe aus  $\Delta g_v$  und  $\Delta g_h$ , also die **Schärfentiefe**, besonders hoch.

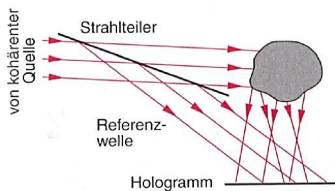


## 5.8 Kamera

In einer Kamera kann nicht mehr der Schirm oder das Objekt sondern nur die Linsengruppen verschoben werden um Scharf zu stellen. Man bezeichnet den **Bildwinkel** als das Verhältnis von Sensordiagonale zu Brennweite. Mit einem Zoom-Objektiv kann man die Brennweite und somit den Bildwinkel variieren. Dazu verschiebt man schematisch eine Zerstreuungslinsenpaar zwischen zwei Sammellinsen. Eine weitere Eigenschaft ist die Licht-/Sensorempfindlichkeit (ISO-Wert). Bei hohen Werten ist jeder einzelne Sensorpixel Lichtempfindlicher, dadurch wird der Bildpixel größer und das Bild unschärfer. Dafür kommt man mit weniger Licht aus. Auch die Blendenzahl beeinflusst natürlich die Helligkeit des Bildes ( $I \propto 1/F^2$ ). Insgesamt ergibt sich:

$$\text{Helligkeit des Bildes} \propto \frac{t \cdot \text{ISO}}{F^2}$$

## 5.9 Holographie



Der Unterschied zur Fotografie ist, dass ein Hologramm dreidimensional erscheint, also Abhängig vom Winkel der Betrachtung ist. Die Phaseneigenschaft geht bei der Fotografie verloren. In der Holographie bringt man eine „Foto“ (Gegenstandswelle) mit einem kohärenten zweiten Lichtstrahl (Referenzwelle) zur Interferenz und erhält die Phaseninformation. Bei der Überlagerung der beiden Wellen ergibt sich eine *phasenabhängige* Intensitätsverteilung auf dem Schirm. Der Schirm wirkt dann als Zonenplatte. Bei der Betrachtung muss das Bild dann auch mit einer Rekonstruktionswelle betrachtet werden, die die Information über die Phase dekodiert. Dadurch entsteht ein **konjugiertes** reelles Bild „hinter“ dem Schirm und ein **wahres** virtuelles Bild „vor“ dem Schirm. Die Struktur des konjugierten Bildes hängt dann von der Phaseninformation ab. So entsteht ein dreidimensionaler Eindruck. Die so entstehenden Hologramme heißen **Transmissionshologramme**. Da man diese nur bei Beleuchtung mit einer entsprechenden (sehr kohärenten) meist Laser-Referenzwelle betrachten kann, gibt es auch andere Formen der Holographie, wie **Reflexionsholographie**. Beides zusammen tritt z.B. bei Dickschichtholographie auf. Bei Weißlichthologrammen wird eine Art Kristallgitter mit der kodierten Phaseninformation aufgebracht, das dann Interferenz bei Reflexion erzeugt (Bragg-Reflexion).

## 5.10 Optik der Atmosphäre

### Fata Morgana

In der Atmosphäre ist der Brechungsindex abhängig vom Luftdruck:

$$(n - 1) \propto \rho$$

Da die Dichte mit der Höhe abnimmt, wird das Licht gekrümmt. Dadurch verschiebt sich der Horizont weiter weg. Auch die Temperatur beeinflusst die Dichte. Auf sehr heißen Oberflächen (Asphalt) entstehen ggf. sehr heiße Luftschichten, deren Brechungsindex sich bei zunehmender Höhe sprunghaft ändert. Dadurch kann sogar Totalreflexion auftreten. Bei anderen Wetterlagen entstehen Luftschichten in der

Höhe, die wärmer als die Schicht am Boden sind (Inversionsschicht). Dadurch können Lichtstrahlen an dieser Schicht „zurückgekrümmt“ werden.

## Regenbogen

Je nach Einfallswinkel werden Strahlen an Wassertröpfchen in der Atmosphäre, an einem Ort, an dem es noch regnet, anders gebrochen. Totalreflexion tritt dann auf, wenn man diesen Bereich in dem es noch regnet unter einem Winkel von ca.  $42^\circ$  betrachtet. Die Dispersion verursacht das Aufspalten der Farben. Ein Regenbogen bei doppelter Reflexion ergibt sich unter  $51^\circ$  mit geringerer Intensität.

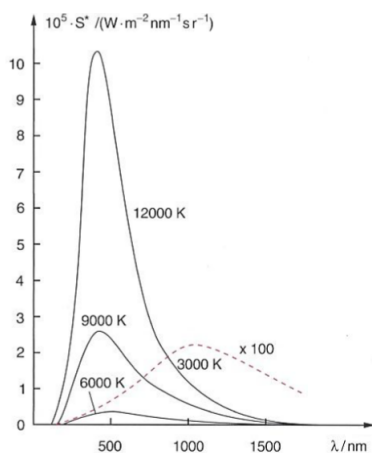
# 6 Quantenphysik

## 6.1 Temperaturstrahlung

Nach der klassischen Physik müsste das Strahlungsspektrum eines heißen Körpers mit zunehmender Temperatur abfallen.

### Schwarzer Körper

- Auftreffende Strahlung wird völlig absorbiert  
⇒ idealisierte Strahlungsquelle



Experimentell kann dies erreicht werden, indem man einen reflektierenden Hohlraum in ein Wärmebad einbringt. Versucht man das Strahlungsspektrum mit klassischer Elektrodynamik zu beschreiben erhält man eine Gleichung, die nicht mit dem Realen Verlauf vereinbar ist. Hierbei betrachtet man stehende Wellen im Schwarzkörperhohlraum und betrachtet die **Zustandsdichte**  $dZ$ , die sich aus diesen möglichen Wellenlängen ergibt. Dabei betrachtet man den *Abstand* der verschiedenen möglichen Wellenvektoren:

$$dZ \propto \frac{L^3}{(2\pi)^3}$$

Mit dem thermodynamischen Gleichverteilungssatz  $E_f = kT$  (für jeden Zustand) ergibt sich die **(spektrale) Energiedichte**

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{\text{Strahlungsenergie in Freq. Bereich } \nu \text{ bis } \nu + d\nu}{\text{Volumen}} = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T d\nu$$

So ergibt sich mit einiger Rechnung die **(spektrale) Energieflussdichte**:

$$2P(\nu, T) d\nu = \frac{\text{Strahlungsleistung in Freq. Bereich } \nu \text{ bis } \nu + d\nu}{\text{Raumwinkel} \cdot \text{Fläche}} = 2 \frac{\nu^2}{c^2} k_b T d\nu$$

Also gekürzt (**Rayleigh-Jeans-Gesetz**)

$$P(\nu, T) d\nu = \frac{\nu^2}{c^2} \cdot kT d\nu$$

Für große Wellenlängen und kleine Temperaturen stimmt dieses Gesetz etwa mit der Beobachtung überein. Es kann aber die Strahlung eines schwarzen Körpers insgesamt *nicht* beschreiben (*UV-Katastrophe*). Auch das Wien'sche Verschiebungsgesetz, dass die Maxima der Schwarzkörperstrahlung Experimentell beschreibt,

$$\lambda_{max} = \frac{0.29 \text{ cm} \cdot K}{T}$$

und das Stefan-Boltzmann-Gesetz, dass die Gesamtleistung des Strahlers pro Fläche  $A$  beschreibt,

$$P/A = \sigma T^4 \quad (\varepsilon = 1, \text{ da schw. Körper})$$

kann man klassisch nicht erklären.

## 6.2 Planck'sche Strahlungsformel

Max Planck hat dann versucht dieses Dilemma aufzulösen und ein neues Modell zur Beschreibung der Schwarzkörperstrahlung zu entwickeln. Seine Annahmen:

- Die Atome in den Wänden sind el.-mag. Oszillatoren mit Frequenz  $\nu$ , die mit der Strahlungsschwingung im Gleichgewicht stehen.
- Diese Oszillatoren können nur *diskrete* Energiewerte annehmen:

$$E_n = nh\nu \quad n \in \mathbb{N}, \quad h = 4,41 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Da  $h$  so winzig ist kann man diese Effekte im Alltag nicht spüren.

- Die Anzahl der Zustände im Hohlraum (bleibt) ist

$$dZ = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} \cdot d\nu$$

Einstein hat die Strahlungsformel alternativ hergeleitet. Dabei ging er davon aus, dass auch die Abstrahlung der Photonen quantisiert ist:

$$E_\gamma = h\nu$$

Daraus folgt in der Überlegung, dass auch bei Absorbtion eines Photons die Energiedifferenz der Atomzustände gequantelt ist:

$$\Rightarrow E_2 - E_1 = h\nu$$

Dabei nahm er an, dass es **Absorbtion, spontane und stimulierte Emission** gibt. Betrachtet man diese verschiedenen Übergänge in einem Zeitintervall  $dt$  mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten (*Einstein-Koeffizienten*  $A_{21}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$ ) erhält man mit den Zuständen im Thermischen Gleichgewicht ( $N(E, T) \propto e^{-E/kT}$ ) die Gleichung

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} \left( e^{\frac{h\nu}{kT}} \right) - B_{21}}$$

Durch weitere Rechnung kann man die Einstein Koeffizienten bestimmen und erhält die **Plancksche Energiedichteformel**:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$



### Plancksche Strahlungsformel

$$\Rightarrow \boxed{P(\nu, T) = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}}$$

Das Maximum dieser Funktion ergibt das Wiensche Verschiebungsgesetz. Da es sich hier um Dichten handelt muss man bei der Umrechnung entsprechend beachten:  $P(\lambda, T)d\lambda = P(\nu, T)d\nu$ , wobei  $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$ .

Auch das Stefan-Boltzmann Gesetz erhält man, indem man über die Energiestromdichte über alle Frequenzen integriert erhält man:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}$$

Aus der Herleitung folgt zudem, dass die Wahrscheinlichkeit zur Emission und Absorption proportional zueinander sind, was dem Kirchhoffschen Gesetz entspricht.

### 6.3 Photoeffekt

Das Experiment zeigt, dass Licht hoher Frequenz (höher als  $\nu_{\text{grenz}}$ ) Elektronen aus einer Metalloberfläche auslösen kann. Die nötige Energie zur Auslösung von Elektronen nennt man **Austrittsarbeit**  $W_A$ . In der klassischen Physik sollte der Photoeffekt bei jeder Frequenz auftreten, was man aber nicht beobachtet. Um diese Beobachtung besser zu quantifizieren legt man ein Gegenfeld an. Wenn der Stromfluss durch den Fotoeffekt zum Erliegen kommt kann man die kinetische Energie der Elektronen durch die nötige **Gegenspannung** ermitteln. Trägt man diese Gegenspannung gegen die Frequenz des Lichtes auf erhält man einen **linearen Zusammenhang** für die Energie des Photons:

$$E_\gamma = W_A + eU_{\text{max}}$$

Was man dann mit  $E_\gamma = h\nu$  umschreiben kann zu:

$$\boxed{U_{\text{max}} = \frac{h}{e} \nu - \frac{W_A}{e}, \quad W_A = h\nu_{\text{grenz}}}$$

### 6.4 Comptoneffekt

Streut man Licht an einem Objekt würde man klassisch erwarten, dass das gestreute Licht die selbe Wellenlänge hat, wie das einfallende. Man findet Experimentell, dass die Wellenlängenpeaks in der Intensität vom Streuwinkel abhängen:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos(\theta)) ,$$

wobei  $\lambda_c = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{m}$  eine Konstante ist. Mithilfe der relativistischen Energie und des relativistischen Impulses der Teilchen und deren Erhaltung erhält man in einer etwas aufwändigeren Herleitung:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$$

## 6.5 Photonen

### Welleneigenschaften:

Frequenz, Wellenlänge, Amplitude, Intensität, Energiedichte.

### Teilcheneigenschaften:

- Energie:  $E_\gamma = h\nu$
- Impuls:  $p_\gamma = h/\lambda$
- Geschwindigkeit:  $v = c$
- Ruhemasse:  $m_0 = 0$
- Anzahlldichte:  $n = \frac{w}{h\nu} \Rightarrow n \propto E^2$
- Intensität:  $I = wv = nh\nu c$
- Relativistische Masse:  $m_\gamma = \frac{E_\gamma}{c^2}$

Dabei ist noch wichtig zu beachten, dass für die relativistische kinetische Energie eines Teilchens gilt:

$$E_{kr} = (\gamma - 1)m_0c^2$$

Dadurch ergibt sich auch eine Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld. In Analogie zu anderen Elementarteilchen ordnet man auch dem Photon einen Spin zu:

$$\text{Photonenspin} \quad 1\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

## 6.6 Teilchen-Welle-Dualismus

Die Experimente zeigen, dass man Licht mal als Welle (Interferenz) und mal als Teilchen (Photoeffekt) betrachten muss. Erstaunlich ist aber, dass man beim Doppelspaltversuch für sehr kleine Intensitäten (fast einzelne Photonen), nach ggf. Längerer Wartezeit eine interferenz-artige Intensitätsverteilung registriert. Die Frage ist, *womit* interferiert dann ein einzelnen Photon. Es bleibt nur übrig, dass das Photon mit sich selbst interferiert.

*Die Welleneigenschaft steckt schon im Photon als solches.*

Dadurch ändert sich das Konzept der Betrachtung von Wellen. Diese sind jetzt ein Maß für die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* von Quantenobjekten.

### 6.6.1 Elektron als Quantenobjekt

Das Elektron hat als Teilchen die folgenden Eigenschaften:

- quasi-punktförmig auf Längenskala:  $10^{-18}m$
- Ladung  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}C$
- Masse  $m_e = 9,1091 \cdot 10^{-34}kg$

De Broglie sagte 1921 theoretisch den Wellencharakter von Teilchen voraus, indem er die Teilcheneigenschaften des Photons auf andere Teilchen übertrug. Somit ergibt sich für den Impuls:

$$\text{De-Broglie-Wellenlänge: } \boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

und für die Frequenz:

$$\boxed{\nu = \frac{E}{h}}$$

Dass diese Zuordnungen sinnvoll sind kann man mittels einer Elektronenröhre veranschaulichen, da sich hier auch für Elektronen ein Interferenzbild ergibt! Bei Interferenzexperimenten mit Elektronen verwendet man Braggreflexion an Kristallen ( $\cong$  Gitter), da es hierbei Leichter ist sehr kleine Gangunterschiede zu ermöglichen.

## 6.7 Materiewellen

Für die Beschreibung von Materien als Wellen machen wir nun den Ansatz einer Wellenfunktion:

$$\boxed{\psi = C \exp\left(\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right)}$$

wobei Wellenlänge und  $k$ -Vektor durch die Gleichungen für Frequenz und de Broglie Wellenlänge ersetzt wurden. Für die Phasengeschwindigkeit der Materie Welle folgt mit der Bedingung  $d/dt(\omega t - kx) = 0$  (also konstante Phase):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\hbar}{2m}k$$

Wobei die zweite Gleichheit gilt, da:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Hier erkennt man auch die Dispersion! Das heißt, wir erhalten nur die Hälfte der Teilchengeschwindigkeit, die man in der klassischen Betrachtung erwarten würden. Man kann also die Wellenfronten nicht als Aufenthaltsort des Teilchens identifizieren. Um das Teilchen also tatsächlich zu Lokalisieren verwendet man das Konzept eines **Wellenpakets**. Hierbei breitet sich wie bei einer Schwebung das Maximum mit der Gruppengeschwindigkeit aus:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

In dieser Betrachtung überlagert man Wellen verschiedener  $k$ -Werte, die um ein  $k_0$  zentriert werden:

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} c(k) \cdot \exp(i(\omega t - kx)) dx$$

In der Näherung, dass  $\Delta k \ll k_0$  erhält man in linearer Näherung für  $\omega(k)$  und  $c(k) = \text{const}$ :

$$\psi(x, t) = 2c(k_0) \cdot \frac{\sin(u \frac{\Delta k}{2})}{u} \exp(i(w_0 t - k_0 t))$$

Mit der Abkürzung:

$$u = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (t - x)$$

Man kann zeigen, dass sich das Maximum dieses Wellenpakets bei  $u = 0$  genau mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt, indem man einfach die Abkürzung auf 0 setzt. Die örtliche Breite des Wellenpakets erhält man näherungsweise durch die beiden Nullstellen des Sinus Terms für  $\pm\pi$ :

$$\Delta x = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

Man kann dies mit der Voraussetzung  $k < 2k_0$  erkennt man, dass man das Teilchen nicht genauer Lokalisieren kann, als bis auf die De-Broglie Wellenlänge:

$$\Delta x > \lambda$$

Nimmt man an, dass das  $c(k)$  nicht einfach konstant ist, die Wellen also nicht durch gleich-verteilte sondern durch *Gauß-Verteilte*  $k$ -Werte beschrieben wird wird man die Überschwinger in der  $\psi$  Funktion los. Dabei ist  $\Delta k$  die Standardabweichung.

### Wahrscheinlichkeitsinterpretation

1927 interpretierte der Physiker Max Born diese Wellenfunktion als ein Maß für die *Wahrscheinlichkeit* des Teilchenaufenthaltes in einem Ortsbereich  $x \pm dx$ :

$$W(x, t)dx = |\psi(x, t)|^2 dx, \quad \int_{\mathbb{R}} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

### Unschärferelation

Für ein bestimmtes Wellenpaket erhält man in obiger Herleitung eine konkrete Unschärfe. Für gleich-verteilte  $k$  erhält man also (s.o.)

$$\Delta x \cdot \Delta p = 2h.$$

Dieses Produkt ist minimal für ein Gaußsches Wellenpaket (Theo). Dementsprechend ist es für alle anderen Verteilungen größer und man erhält die **Heisenbergsche Unschärferelation**:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Dies gilt für jede einzelne Koordinate eines kartesischen Koordinatensystems:  
 $\Delta x_i \cdot \Delta p_i \geq \hbar/2$ .

Analog zur obigen Betrachtung kann man auch anstatt im  $k$ -Raum zu integrieren im Frequenzraum über  $\omega$  integrieren und erhält eine Analoge Unschärfe der **Energie und Zeit**:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Aufgrund dieser Unschärfe kann man auch die Zeitliche Entwicklung des Systems nicht mehr exakt vorhersagen, sondern nur noch statistische Aussagen über diese treffen. Durch eine Messung beeinflusst man zusätzlich durch Wechselwirkung der Teilchen mit dem Messinstrument (aber auch schon alleine mit Luft) die Entwicklung, da man dadurch ja einen genauen Ort zuordnet.

## 6.8 Die Schrödingergleichung

Erwin Schrödinger entwickelte 1926 eine Gleichung, die die nichtrelativistische quantenmechanische Entwicklung eines Systems beschreibt. Ein freies Teilchen kann man gemäß der obigen ebenen Wellengleichung beschreiben. In einem stationären Fall betrachten wir ein System, in dem  $p = \text{const}$  und  $V = V(x)$  ist. Ein Separationsansatz:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \exp(-i\omega t)$$

führt mit Energieerhaltung  $E_{kin} = E - V$  und Wellengleichung auf die

**zeitunabhängige Schrödingergleichung:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem zeitlichen Term, der sich durch  $\exp(-iE/\hbar)$  ausdrücken lässt erhält man aus dem einfachen Zusammenhang

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

**zeitabhängige Schrödingergleichung:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

Lösungen dieser Gleichungen müssen **zwei mal differenzierbar** sein und auftretenden Konstanten müssen insbesondere die **Normierung** der Wahrscheinlichkeitsinterpretation erfüllen.

### Verschiedene Lösungsansätze

*Kräftefreies Teilchen:*

Für ein kräftefreies ( $V = 0$ ) Teilchen ist die Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$$

Diese wird durch die gewöhnliche Schwingungsgleichung gelöst. Es folgt

$$\Psi(x, t) = A \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}(kx - Et)\right) + B \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(kx + Et)\right)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  folgen aus der Betrachtung der Ausbreitungsrichtung des Teilchens (positive  $x$ -Richtung  $A$ , negative  $B$ ) und der Normierungsbedingung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation.

#### *Potentialstufe*

Löst Man die Schrödingergleichung für zwei Bereiche, in denen  $V = 0$  und  $V = E_0$ .