

Experimentalphysik IV (WS 2023/2024)

Übung 5

Tutorium: 2

Abgabe: 15.05.2024

Aufgabe 1: Stern-Gerlach Experiment

Mit einem Atomstrahl aus Kalium-Atomen wird ein Stern-Gerlach-Experiment durchgeführt. Die Temperatur des Ofens beträgt $T = 190^\circ\text{C}$, das Magnetfeld besitzt eine Inhomogenität $\frac{\partial B}{\partial z} = 82 \frac{\text{T}}{\text{m}}$. Die Atome durchfliegen das Magnetfeld auf einer Strecke von $l = 10 \text{ cm}$. In einem Abstand von $d = 32 \text{ cm}$ hinter dem Magneten befindet sich eine Glasplatte, auf der die Atome aufgefangen werden.

- (a) In welchem mittleren Abstand in z -Richtung beobachtet man die beiden Atomstrahlen auf der Glasplatte (siehe Abbildung)?

Hinweis: Bei Kalium trägt nur der Spin des Elektrons im $4^2s_{1/2}$ Zustand bei.

Für die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen beim Austritt aus dem Ofen gilt:

$$\begin{aligned}\langle E_T \rangle &= \langle E_{\text{kin}} \rangle \\ \frac{3}{2}k_B T &= \frac{1}{2}m \langle v_x^2 \rangle \\ \langle v_x^2 \rangle &= 3k_B/mT \\ \langle v_x \rangle &\approx \sqrt{3k_B/mT} \\ &\approx 522 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \text{mit } m = 39 \cdot 10^{-3}/n_A\end{aligned}$$

Sind die Teilchen ins B-Feld eingetreten, wirkt auf sie die Kraft:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}V \\ &= -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ &= \mu_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Bei verlassen des B-Feldes ergeben sich damit folgende Position und Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}v_z &= at \\ &= \frac{F_z l}{mv_x} \\ &= \frac{\mu_z l}{mv_x} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \\ &\approx 2.25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ z' &= \frac{1}{2}at^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{F}{m} \left(\frac{l}{v_x} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu_z l^2}{m v_x^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \\
&\approx 1.38 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Auf der Strecke zwischen B-Feld und Schirm, wirken keine Kräfte und die Teilchen bewegen sich geradlinig gleichförmig. Damit ergibt sich der mittlere Abstand auf der Glasplatte z'' als:

$$\begin{aligned}
z'' &= z' + v_z t \\
&= z' + d \frac{v_z}{v_x} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu_z l^2}{m v_x^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} + d \frac{v_z}{v_x} \\
&= \frac{1}{2} \frac{g_s \mu_B \cdot l^2}{m v_x^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} + d \frac{v_z}{v_x} \\
&\approx 1.38 \text{ mm}
\end{aligned}$$

- (b) Entwickeln Sie ein python-Skript oder Jupyter-Notebook mit einer Monte Carlo Simulation des Stern-Gerlach Experiments mit der Sie den Auftreffort einzelner Kalium-Atome darstellen können. Würfeln Sie dazu zunächst die inertialen Teilchengeschwindigkeiten, die einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit der gegebenen Temperatur folgen. Nutzen Sie diese dann, um die Verteilung der Kalium-Atome am Schirm als Histogramm darzustellen. Nehmen Sie an, dass das Experiment unter perfekten Laborbedingungen stattfindet, das Experiment also durch die gegebenen Parameter und die Abbildung vollständig beschrieben wird. Es darf angenommen werden, dass Teilchen aus dem Kollimator an immer exakt der gleichen Position und mit exakt gleicher Flugrichtung austreten. Sie können ebenfalls einen Gangunterschied im Magnetfeld vernachlässigen. Vergleichen Sie die Verteilung mit Ihrer Erwartung aus Aufgabenteil (a).

Tipp: Verwenden Sie zum generieren von Zufallszahlen in ihrer Monte Carlo Simulation geeignete Pseudozufallszahlengeneratoren wie z.B. `numpy.random.uniform` in Python.

Python-Code

```

import numpy as np
import scipy.constants as c
import scipy.stats as stats
from scipy.special import erf
from scipy.interpolate import interp1d
import matplotlib.pyplot as plt

T = 190 + 273.14
pB = 82
l, d = 0.1, 0.32
mu_s = c.value("Bohr magneton")
m = 39e-3 / c.N_A

N = 100000

# Wahrscheinlichkeits Verteilungen
def MB_CDF(v, m, T): # Maxwell-Boltzmann kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung
    a = np.sqrt(c.k * T / m)
    return erf(v/(np.sqrt(2)*a)) - np.sqrt(2/np.pi) * v * np.exp(-v**2 / (2*a**2))/a

```

```

v = np.arange(0, 2000, 0.1)
cdf = MB_CDF(v, m, T)
inv_cdf = interp1d(cdf, v)

random_v_x = inv_cdf(stats.uniform.rvs(size=N))
v_z = mu_s * 1 / (m * random_v_x) * pB
z = 1/2 * (mu_s * 1**2) / (m * random_v_x**2) * pB + d * v_z / random_v_x

# Plotten
fig, [ax1, ax2] = plt.subplots(1, 2, figsize=(8,4))

ax1.hist(random_v_x, bins=500, density=True)
ax1.set_xlim(0, max(random_v_x))
ax1.set_xlabel("v in [m/s]")
ax1.set_ylabel("Wahrscheinlichkeitsdichte")

ax2.hist(z_:=z[z<2e-2], bins=1000, density=True)
ax2.set_xlim(0, max(z_))
ax2.set_xlabel("z in [m]")
ax2.set_ylabel("Wahrscheinlichkeitsdichte")

plt.tight_layout()
plt.savefig("5.svg")

n, edges = np.histogram(z_, 1000)
print(f"<z''> = {np.mean(z):.3}")
print(f"z'' mir h"o"chster Wahrscheinlichkeit = {edges[np.argmax(n)]:.3}")

# returns:
# <z''> = 0.0046
# z'' mir h"o"chster Wahrscheinlichkeit = 0.0009

```

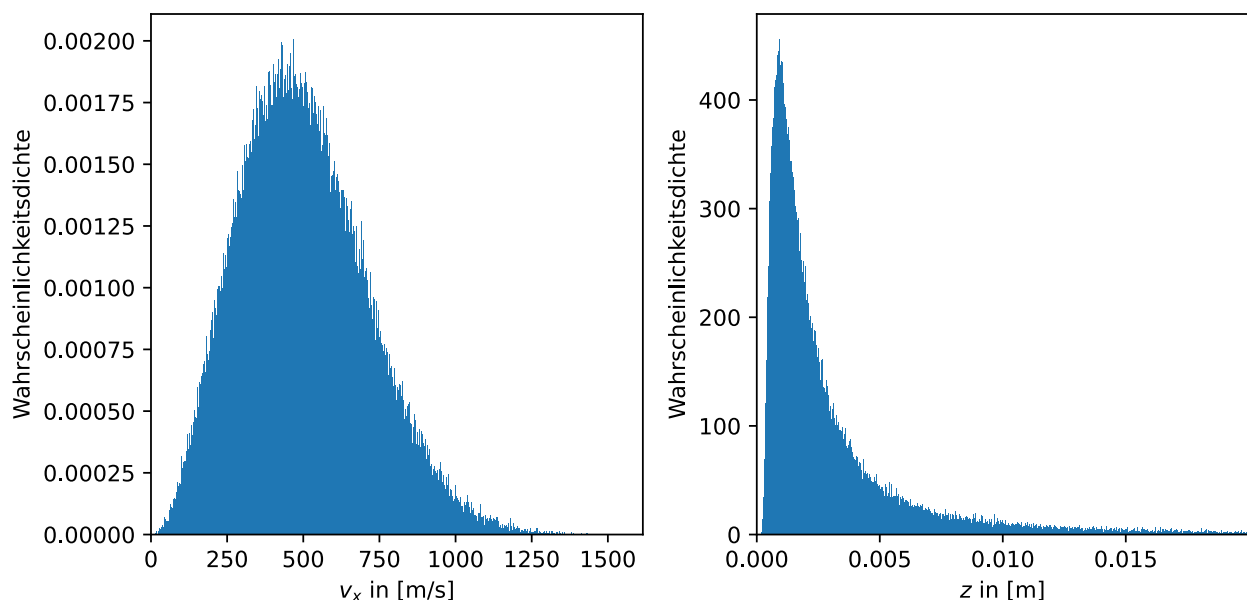


Abbildung 1: resultierender Plot

Wie man sieht, trifft der errechnete Wert für z'' gut den Wert h"o"chster Wahrscheinlichkeit. Jedoch ist der mittlere Wert für z'' etwa um ein vierfaches gr"o"ßer, da die Verteilung $p(z'')$ für $z'' \rightarrow \infty$ nur langsam abf"allt.

Aufgabe 2: Mögliche Übergänge beim normalen Zeeman-Effekt

- (a) Schreiben Sie alle möglichen Dipolübergänge zwischen dem d -Niveau in ein p -Niveau in der Standardnomenklatur auf.

.....
 Prinzipiell gibt es folgende Übergänge (mit $|l, m_l\rangle$ und (\dots) als verschiedene separate Möglichkeiten):

$$|3, \pm(0, 1, 2, 3)\rangle \rightarrow |2, \pm(0, 1, 2)\rangle$$

Physikalisch sind jedoch nur die, welche die Auswahlregel $\Delta m = 0, \pm 1$ erfüllen. Damit bleiben:

$$|3, \pm 3\rangle \rightarrow |2, \pm 2\rangle$$

$$|3, \pm 2\rangle \rightarrow |2, \pm(1, 2)\rangle$$

$$|3, \pm 1\rangle \rightarrow |2, \pm(0, 1, 2)\rangle$$

$$|3, 0\rangle \rightarrow |2, \pm(0, 1)\rangle$$

In der Standardnomenklatur:

$$d_{\pm 3} \rightarrow p_{\pm 2}$$

$$d_{\pm 2} \rightarrow p_{\pm(1,2)}$$

$$d_{\pm 1} \rightarrow p_{\pm(0,1,2)}$$

$$d_0 \rightarrow p_{\pm(0,1)}$$

- (b) Wie viele der Übergänge aus (a) unterscheiden sich energetisch? Schreiben Sie auf, welche der Übergänge aus (a) zur gleichen Spektrallinie führen.
 Hinweis: Die Auswahlregel für die elektrischen Übergänge lautet $\Delta m = +1, 0, -1$.

.....
 Die Spektrallinie zum Übergang $d \rightarrow p$ spaltet sich durch den Zeeman-Effekt in drei Energieniveaus $E_{-1,0,1}$ auf, welche den drei Möglichkeiten $\Delta m = -1, 0, 1$ entsprechen:

$$E_{-1} \equiv \begin{cases} d_3 \rightarrow p_2 \\ d_2 \rightarrow p_1 \\ d_1 \rightarrow p_0 \\ d_0 \rightarrow p_{-1} \\ d_{-1} \rightarrow p_{-2} \end{cases}$$

$$E_0 \equiv \begin{cases} d_{\pm 2} \rightarrow p_{\pm 2} \\ d_{\pm 1} \rightarrow p_{\pm 1} \\ d_0 \rightarrow p_0 \end{cases}$$

$$E_1 \equiv \begin{cases} d_{-3} \rightarrow p_{-2} \\ d_{-2} \rightarrow p_{-1} \\ d_{-1} \rightarrow p_0 \\ d_{-0} \rightarrow p_1 \\ d_1 \rightarrow p_2 \end{cases}$$

Aufgabe 3: Anormaler Zeeman-Effekt

Bei Natrium tritt der anomale Zeeman-Effekt auf. Die Natrium- D_2 -Linie ist der Übergang von $3^2P_{3/2}$ nach $3^2S_{1/2}$.

- (a) Betrachten Sie die Aufspaltung der D_2 -Linie in einem externen Magnetfeld B . In wieviele Niveaus spalten $3^2P_{3/2}$ bzw. $3^2S_{1/2}$ auf? Wie groß ist die Aufspaltung zwischen zwei benachbarten Zeeman-Linien in Einheiten von $\mu_B B$?
-

$3^2P_{3/2}$ spaltet sich auf in vier Niveaus auf ($m_j = \pm 3/2, \pm 1/2$), während $3^2S_{1/2}$ sich in zwei Niveaus ($m_j = \pm 1/2$) aufspaltet.

$$V_B = \mu_B B g_j m_j \\ \Rightarrow \Delta V_B = \mu_B B g_j$$

$$g_J = 1 + (g_S - 1) \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \\ \approx 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

$$g_J(3^2P_{3/2}) = 1 + \frac{3/2(3/2+1) + 1/2(1/2+1) - 1(1+1)}{2 \cdot 3/2(3/2+1)} \\ = 4/3 \\ \Rightarrow \Delta V_B(3^2P_{3/2}) = \mu_B B \cdot \frac{4}{3}$$

$$g_J(3^2S_{1/2}) = 1 + \frac{1/2(1/2+1) + 1/2(1/2+1) - 0(0+1)}{2 \cdot 1/2(1/2+1)} \\ = 2 \\ \Rightarrow \Delta V_B(3^2S_{1/2}) = \mu_B B \cdot 2$$

- (b) Fertigen Sie eine Skizze der Aufspaltung an, und zeichnen Sie die möglichen Übergänge

gemäß der Auswahlregel $\Delta J = \pm 1, \Delta m_j = 0, \pm 1$ ein.

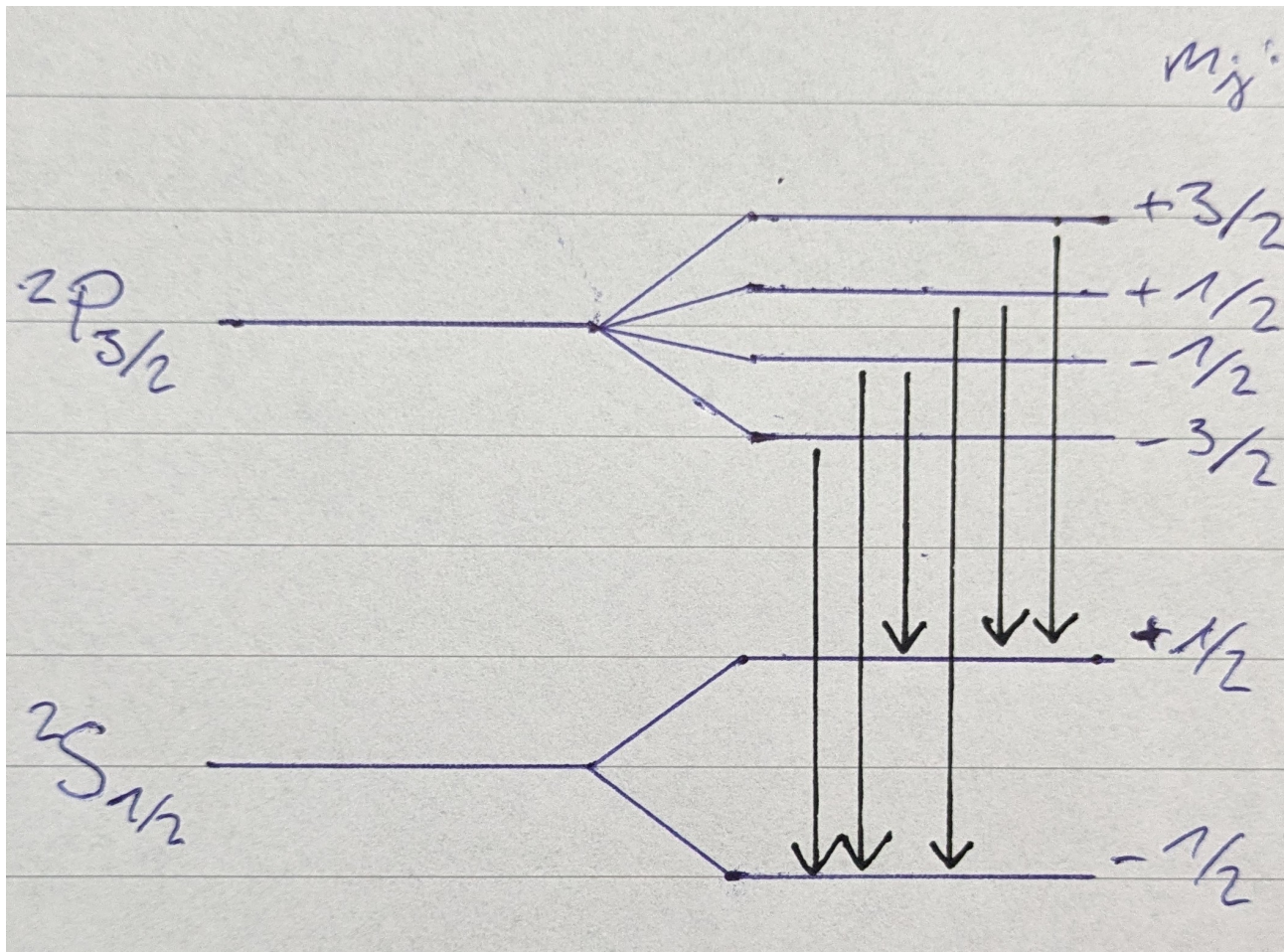


Abbildung 2: Skizze der Aufspaltung und möglicher Übergänge