III. Physikalisches Institut B, RWTH Aachen
Prof. Dr. Christopher Wiebusch, Dr. Philipp Soldin

Übungen zur Physik IV - SS 2024
Atome Moleküle Kerne

Übung 3

Ausgabedatum: 24.04.2024 Abgabedatum: 02.05.2024 (10:00 Uhr) Tag der Besprechung: 06.05.2024

Verständnisfragen

Kapitel 2.1

1. Beschreiben Sie die Schritte der Lösung der Schrödingergleichung des H-Atoms!
   - Separation der Schwerpunktsbewegung.
   - Lösung des Winkelteils.
   - Lösung des Radialteils.
2. Was sind assoziierte Legendre Polynome, Kugelflächenfunktionen, Laguerre Polynome. Welche Eigenschaften haben sie?
3. Erläutern Sie die Lösung des Wasserstoffproblems:
   - Was sind die Lösungsfunktionen?
   - Erläutern Sie die Quantenzahlen
   - Welche Energieniveaus ergeben sich?
4. Mit welchen Änderungen gilt die Lösung für ein $^4He^+$ Ion bzw. Deuterium ^2H ?
5. Wie sehen die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von Elektron-orbitalen für unterschiedliche Quantenzahlen aus?

Kapitel 2.2

6. Warum nennt man l Drehimpuls Quantenzahl und m magnetische Quantenzahl?
7. Welche Drehimpulswerte sind für das Wasserstoffatom gleichzeitig scharf messbar? Welche Werte ergeben sich?
8. Was bedeutet der Begriff *Entartung* und wie stark sind die Energieniveaus von Wasserstoff entartet?
9. Erläutern Sie das Stern-Gerlach Experiment und die Schlussfolgerungen die daraus gezogen werden?
10. Warum verwendet das Stern-Gerlach Experiment neutrale Silber Atome in einem inhomogenen B-Feld?
11. Welche magnetischen Momente ergeben sich für den Bahndrehimpuls und den Spin des Elektrons?
12. Welche potentielle Energie hat ein magnetisches Moment in einem B-Feld?
13. Was ist das Bohrsche Magneton?
14. Was ist das gyromagnetische Verhältnis und was ist der Landé Faktor?
15. Erläutern Sie die *Elektronen-Spin-Resonanz (ESR)*!
16. Was ist der Spin des Photons?
17. Erläutern Sie das *Beth-Experiment*!

18. Warum koppeln Bahndrehimpuls und Spin zu einem Gesamtdrehimpuls?
19. Welche Regeln gelten für die Addition von Drehimpulsen?

Übungsaufgaben

Aufgabe 1 ★ ★ ★ ☆ ☆ **(15 + 5 + 5 = 25 Punkte)**
TUNNELEFFEKT

(a) Ein zeitlich konstanter Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E < E_0$ bewege sich in positive x-Richtung auf eine Potentialbarriere zu (siehe Abbildung). Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T, und zeigen Sie, dass

$$T = \frac{1 - E/E_0}{1 - E/E_0 + \frac{E_0}{4E}\sinh^2(\alpha a)}\ , \text{ mit } \alpha = \sqrt{2m(E_0 - E)}/\hbar, \tag{1}$$

gilt. Dabei gibt die Transmission T an mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen die Potentialbarriere durchfliegt während, $R = (1 - T)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Teilchen reflektiert wird.

Hinweis: Stellen Sie die Schrödingergleichung in den Gebieten I, II und III auf und lösen Sie sie durch den Ansatz

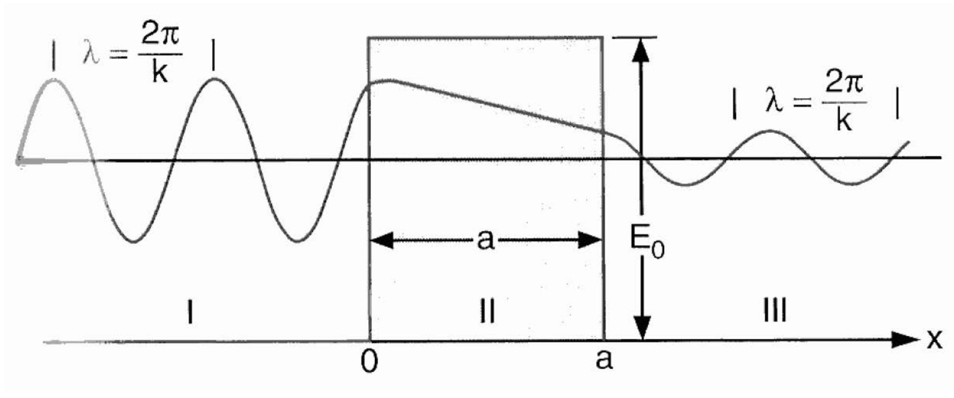
$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x) & \text{für} \quad x < 0, \\ \psi_{II}(x) = C\exp(ik_2x) + D\exp(-ik_2x) & \text{für} \quad 0 < x < a, \\ \psi_{III}(x) = A'\exp(ik_1x) & \text{für} \quad x > a. \end{cases} \tag{2}$$

Benutzen Sie die Stetigkeitsbedingungen bei $x = 0$ und $x = a$ und zeigen Sie zunächst

$$A = \left[\cos(k_2a) - i\frac{k_2^2 + k_1^2}{2k_1K_2}\sin(k_2a)\right]e^{ik_1a}A', \tag{3}$$

$$B = i\frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1k_2}\sin(k_2a)e^{ik_1a}A'. \tag{4}$$

Bestimmen Sie dann T und R.



(b) Berechnen Sie R und T für ein Elektron der Energie 4 eV, das auf eine Potenzialbarriere der Energie $E_0 = 5\,\text{eV}$ und der Breite $a = 1\,\text{Å}$ trifft.

(c) Unter welchen Voraussetzungen gilt unser Ansatz, die stationäre Schrödingergleichung zu verwenden?

Aufgabe 2 ★ ★ ☆ ☆ ☆ (10 + 5 = 15 Punkte)
Kugelflächenfunktionen

(a) Zeigen Sie für $l = 0, 1, 2$ durch explizites Einsetzen der Kugelflächenfunktionen, dass

$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_l^m(\vartheta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \tag{5}$$

gilt.

(b) Außerdem, dass allgemein

$$Y_l^m(\pi - \vartheta, \phi + \pi) = (-1)^l \, Y_l^m(\vartheta, \phi) \tag{6}$$

gilt.

Aufgabe 3 ★ ★ ★ ★ ☆ (15 + 15 + 10 = 40 Punkte)
Das Wasserstoffatom

Betrachten Sie das Wasserstoffatom im Zustand $n = 2, l = 1$.

(a) Zeigen Sie durch explizites Einsetzen der Wellenfunktionen, dass die Summe

$$\sum_{m=-l}^{l} \left|\psi_{n,l,m}\right|^2 \tag{7}$$

kugelsymmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie für $m = 0$ durch explizites Einsetzen der Operatoren und Wellenfunktionen die Eigenwerte der Operatoren $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{L}_z$, und $\hat{H}$.

(c) Benutzen Sie das Ergebnis aus a, und berechnen Sie den radial wahrscheinlichsten und mittleren Abstand des Elektrons vom Atomkern.

Hinweis:

$$\int_0^\infty r^k \exp(-\alpha r)\,\mathrm{d}r = \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \tag{8}$$

Aufgabe 4 ★ ★ ☆ ☆ ☆ (20 Punkte)
Wasserstoffähnliche Spektren

Mit Hilfe eines Spektrometers werden zwei Proben untersucht und deren Spektrum vermessen. Folgende höchstenergetischen Übergänge (zwischen zwei gebundenen Übergängen) werden gefunden:

Probe 1	Probe 2
λ [nm]	λ [nm]
30.4	243.0
25.6	205.0
24.3	194.4
23.4	189.8

Die atomaren Grundbausteine der Proben sind wasserstoffähnlich, d.h. sie bestehen aus zwei Körpern, wobei einer dieser Körper ein Elektron ist. Um was handelt es sich bei dem zweiten Körper?

Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie die reduzierte Masse μ und die Ladung Z variieren.