

Übung 1

Ausgabe: 14.10.2024

Abgabe: keine (Präsenzübung)

Besprechung: 14.10.2024

1. Aufgabe: Dispersion von Materiewellen

Die zu einer Dispersionsrelation $\omega(k)$ gehörenden Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten sind definiert als

$$v_{Phase} := \frac{\omega}{k},$$

$$v_{Gruppe} := \frac{d\omega}{dk}.$$

Nur im Fall einer linearen Dispersion sind beide Geschwindigkeiten identisch.

Betrachten Sie Materiewellen, für welche die de-Broglie-Beziehung $\lambda = \frac{h}{p}$ gilt, und berechnen Sie für freie Teilchen

- a) die Phasengeschwindigkeit,
- b) die Gruppengeschwindigkeit.

Ist das Ergebnis physikalisch plausibel?

Anleitung: Verwenden Sie die relativistischen Ausdrücke für Energie und Impuls ($E = \gamma m_0 c^2$, $p = \gamma m_0 v$ mit der Ruhemasse m_0 und $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$).

2. Aufgabe: Mittlere Energie harmonischer Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht

Berechnen Sie die mittlere thermische Energie eines harmonischen Oszillators der Kreisfrequenz ω mit Hilfe des statistischen Erwartungswertes

$$\langle E(\omega, T) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n E_n.$$

Anleitung: Verwenden Sie die normierten Wahrscheinlichkeiten P_n (s. Vorlesung), und summieren Sie die Reihen auf.

3. Aufgabe: Bose-Einstein-Statistik

Für viele Festkörper ist $\omega_1 = 6 \cdot 10^8$ Hz eine niedrige Kreisfrequenz für Schallwellen und $\omega_2 = 6 \cdot 10^{13}$ Hz eine hohe Kreisfrequenz. Man bestimme für Schwingungszustände mit diesen Kreisfrequenzen:

- a) die Temperatur, bei der der jeweilige Zustand im thermischen Mittel genau einfach besetzt ist,
- b) den relativen Temperaturanstieg $\frac{\Delta T}{T}$, der nötig ist, um die Besetzung des Zustandes von 1 auf 2 zu verdoppeln,
- c) die Besetzungszahl sowie die Energie der obigen Schwingungszustände bei 50 und 300 K.