

# Experimentalphysik I - Mechanik und Relativitätstheorie

Jannis Zeller

Wintersemester 2015/2016

Letzte Änderung: 15. Mai 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung - Allgemeines</b>	<b>4</b>
1.1	Gegenstand der Forschung . . . . .	4
1.2	Das SI-Einheitensystem . . . . .	4
1.3	baccab-Regel . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Newtonsche Mechanik - Dynamik von Massepunkten</b>	<b>4</b>
2.1	Die Newtonschen Axiome . . . . .	4
2.2	Das Superpositionsprinzip . . . . .	4
2.3	schwere und träge Masse . . . . .	5
2.4	verschiedene Kräfte und Felder . . . . .	5
2.5	Die Gravitation . . . . .	5
2.6	Reibungskräfte . . . . .	5
2.7	Arbeit und Energie . . . . .	5
2.7.1	Leistung . . . . .	6
2.7.2	Feldstärke . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Erhaltungssätze</b>	<b>6</b>
3.1	Massenerhaltung . . . . .	6
3.2	Impulserhaltung . . . . .	6
3.3	Energieerhaltung . . . . .	7
3.4	Anwendung der Erhaltungssätze . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Schwingungen</b>	<b>7</b>
4.1	ungedämpfte harmonische Schwingung . . . . .	7
4.1.1	Überlagerung von Schwingungen (analog für Wellen) . . . . .	7
4.1.2	zweidimensionale harmonische Systeme . . . . .	8
4.1.3	Gekoppelte Oszilatoren . . . . .	8
4.2	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	8
4.3	Erzwungene Schwingungen und Resonanz . . . . .	8

<b>5</b>	<b>Wellen</b>	<b>9</b>
5.1	Intensität von Wellen . . . . .	9
5.2	Überlagerung von Wellen . . . . .	10
5.2.1	Stehende Wellen in einer Dimension . . . . .	10
5.3	Dopplereffekt . . . . .	10
5.4	Wellenausbreitung . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Rotationsbewegungen</b>	<b>11</b>
6.1	Die Keplerschen Gesetze . . . . .	11
6.1.1	1. Keplersches Gesetz - Bahnkurve . . . . .	11
6.1.2	2. Keplersches Gesetz - Flächensatz . . . . .	11
6.1.3	3. Keplersches Gesetz - Perioden und Halbachsen . . . . .	12
6.2	Scheinkräfte im Beschleunigten Bezugssystem . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Dynamik starrer Körper</b>	<b>12</b>
7.1	Bewegungsgleichungen . . . . .	12
7.2	Größen der Bewegung . . . . .	13
7.2.1	Drehmoment . . . . .	13
7.2.2	Trägheitsmoment und -tensor . . . . .	13
7.2.3	Rotationsenergie . . . . .	14
7.3	Komplizierte Rotationsbewegungen . . . . .	14
7.3.1	Präzession . . . . .	14
7.3.2	Der kräftefreie Symmetrische Kreisel . . . . .	14
7.3.3	Der Symmetrische Kreisel im Schwerfeld . . . . .	15
7.4	Technische Anwendungen . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Deformierbare Medien</b>	<b>16</b>
8.1	Deformierbare feste Körper . . . . .	16
8.1.1	Dehnung und Stauchung - Zug und Druck . . . . .	16
8.1.2	Scherung . . . . .	17
8.1.3	Torsion und Biegung . . . . .	17
8.2	Hydro- und Aerostatik . . . . .	18
8.2.1	Flüssigkeitsoberflächen . . . . .	18
8.2.2	Statischer Druck . . . . .	18
8.3	Hydro- und Aerodynamik . . . . .	19
8.3.1	Neue Begriffe . . . . .	19
8.3.2	Kontinuitätsgleichung . . . . .	19
8.3.3	Bernoulli Gleichung . . . . .	19
8.3.4	Aerodynamischer Auftrieb . . . . .	19
8.3.5	Laminare Strömung . . . . .	20
8.4	Grenzflächen von Flüssigkeiten . . . . .	20
8.4.1	Kohäsion . . . . .	20
8.4.2	Adhäsion . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>21</b>
9.1	Michelson-Morley Experiment . . . . .	21
9.2	Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	22
9.3	Die Einsteinschen Postulate . . . . .	22

9.4	Die Lorentztransformation . . . . .	22
9.4.1	Vierervektoren . . . . .	22
9.4.2	Minkowski Diagramme . . . . .	23
9.4.3	Längenkontraktion und Zeitdilatation . . . . .	24
9.4.4	Doppler Effekt für Licht . . . . .	24
9.5	Vierergeschwindigkeiten und Additionstheorem . . . . .	24
9.6	Impuls Energie und Masse . . . . .	24
9.7	Aussehen relativistisch bewegter Objekte . . . . .	25
<b>10</b>	<b>Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>25</b>
10.1	Auswirkungen und Tests . . . . .	26

# 1 Einführung - Allgemeines

## 1.1 Gegenstand der Forschung

Gegenstände der Forschung sind die Struktur der Materie, ihre Wechselwirkung (Kräfte) und das Universum selbst. Die Mathematik ist dabei ein Werkzeug, aber es ist eigentlich sehr überraschend, dass etwas vom Mensch geschaffene so gut geeignet ist um die Natur zu beschreiben.

## 1.2 Das SI-Einheitensystem

Zeit	$t$	$[t] = 1s$	Temperatur	$T$	$[T] = 1K$
Länge	$l$	$[l] = 1m$	Stoffmenge	$n$	$[n] = 1mol$
Masse	$m$	$[m] = 1kg$	Lichtstärke		$[LS] = 1cd$
Stromstärke	$I$	$[I] = 1A$			

## 1.3 baccab-Regel

Eine wichtige Rechenregel:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

# 2 Newtonsche Mechanik - Dynamik von Massepunkten

## 2.1 Die Newtonschen Axiome

### erstes Newtonsches Axiom - Trägheitsprinzip

In einem Inertialsystem (also ruhend oder mit konstanter Geschwindigkeit bewegt) bleibt ein Körper so lange in Ruhe ( $\mathbf{v} = \text{const}$ ) bis er eine Kraft erfährt.

### zweites Newtonsches Axiom - Aktionsprinzip

Wirkt eine Kraft  $\mathbf{F}$  auf den Körper, so erfährt er eine Beschleunigung:  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}/m$ .

### drittes Newtonsches Axiom - Reaktionsprinzip

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft aus, so wirkt von B nach A eine Gegenkraft:  $F_{AB} = -F_{BA}$ .

## 2.2 Das Superpositionsprinzip

Kräfte superponieren, das heißt sie überlagern sich, sodass gilt:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

## 2.3 schwere und träge Masse

Die schwere Masse ist die Masse, auf die Gravitationskräfte wirken. Die träge Masse ist die aus dem zweiten Newtonschen Axiom. Die physikalischen Bedeutung von schwerer und träger Masse ist *nicht identisch!* Numerisch stimmen sie allerdings nach dem Äquivalenzprinzip unabhängig von den äußeren Umständen überein.

## 2.4 verschiedene Kräfte und Felder

	Quelle	Feldteilchen	Reichweite
Gravitation	schw. Masse	Graviton $m = 0$	$\infty$
Elektromagnetismus	elektische Ladung	Photon $m = 0$	$\infty$
schwache Kraft	schwache Ladung	$m = 100 m_p$	$10^{-18}m$
starke Kraft	'Farbeladung'	Gluon $m = 0$	$10^{-15}m$

## 2.5 Die Gravitation

Die Gravitationskraft besitzt das Kraftfeld und das Potential:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \cdot \frac{M m}{r^2} \cdot \mathbf{e}_r, \quad V = G \cdot \frac{M m}{r}$$

Es gilt hierbei:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}|\mathbf{x}| = \nabla|\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Die Gravitationskonstante  $G$  kann man zu ungefähr  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  bestimmen.

## 2.6 Reibungskräfte

Makroskopische Reibungskräfte sind Folgen von vielen mikroskopischen Impulsübertragungen, die insgesamt eine Gesamtänderung des Impulses und somit eine Kraft erzeugen:  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ . Hier ist  $\mathbf{F}_N$  die Normalkraft (senkrechte Komponente) des Körpers zur Fläche, an der er reibt.

<b>Gleitreibung</b>	$\mathbf{F}_{GR} = -\mu_G  \mathbf{F}_N  \mathbf{e}_v$	
<b>Haftreibung</b>	$\mathbf{F}_{HR} \leq \mu_H  \mathbf{F}_N $	$\mu_H > \mu_G$ , $\tan(\alpha) = \mu_H$
<b>Rollreibung</b>	$\mathbf{F}_{RR} = -\mu_R  \mathbf{F}_N  \mathbf{e}_v$	mit $\mu_R \propto 1/r$
<b>Stokessche Reibung</b>	$\mathbf{F}_{SR} = -\kappa \mathbf{v}$	Kugel: $\kappa = 6\pi r \eta$ , $\eta$ ist Viskosität
<b>Newtonsche Reibung</b>	$\mathbf{F}_{NR} = -\xi \mathbf{v}^2 \mathbf{e}_V$	$\xi = \frac{1}{2} c_w A \rho$

## 2.7 Arbeit und Energie

Die Arbeit ist als das Wegintegral über die Kraft definiert:

$$W_{AB} = - \int_{K_{AB}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Dieses Integral kann man auf verschiedene Weisen lösen (siehe Theo 0). Existiert ein Potential  $V$  für die Kraft  $\mathbf{F}$  (Test mittels:  $\nabla \times (\nabla V) = \nabla \times \mathbf{F} = 0$ ), so gilt:

$$W_{AB} = V(\mathbf{x}_B) - V(\mathbf{x}_A)$$

$W_{AB}$  ist dann eine Differenz von potenziellen Energien. Man kann man auch die kinetische Energie definieren:

$$|E_{kin}| = \int \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} d\mathbf{x} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{x} = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2.$$

#### 2.7.1 Leistung

Man definiert die Leistung als zeitliche Änderung der Arbeit:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Wenn ein Potential existiert kann man auch schreiben:

$$P = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla W \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

#### 2.7.2 Feldstärke

Zu einer Feldkraft kann man auch immer eine Feldstärke definieren, die dann die Einheit einer Beschleunigung hat:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}}{\mu} = -G \cdot \underbrace{\frac{M}{r^2}}_{\text{Gravitation}} \cdot \mathbf{e}_r$$

Man kann Potentiale analog zu den Kräften auch für Feldstärken definieren, dann haben sie aber nicht mehr die Einheit von Energie.  $\mu$  beschreibt hier einfach die für die Kraft spezifische Größe, also z.B. Masse oder Ladung.

## 3 Erhaltungssätze

### 3.1 Massenerhaltung

In der klassischen Mechanik (nicht Relativitätstheorie!) gilt:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i = \text{const}$$

### 3.2 Impulserhaltung

In abgeschlossenen Systemen (keine äußeren Kräfte) gilt wegen des dritten Newtonschen Axioms Gesamtimpulserhaltung:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} + \sum_{i \neq k} \mathbf{F}_{ki} = 0 \quad (3.1)$$

Mit **Schwerpunktsvektor**  $\mathbf{X} = \sum m_i \mathbf{x}_i / M$  folgt dann der **Schwerpunktsatz**:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{1}{M} \sum m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{P}}{M} = \text{const};$$

Der Schwerpunkt führt eine Trägheitsbahn aus.

### 3.3 Energieerhaltung

In einem Abgeschlossenen System mit konservativen äußeren Kräften ist die Gesamtenergie erhalten.

### 3.4 Anwendung der Erhaltungssätze

- Fluchtgeschwindigkeit
- **Stöße:**  $m = m_1 + m_2$ 
  - a) inelastisch:  $m \cdot v' = (m_1 v_1 + m_2 v_2)$
  - b) (voll) elastisch:  $m \cdot v'_i = (m_i - m_k) v_i + 2 m_k v_k$
- Ballistisches Pendel
- Rakete:  $d(mv) + (-dm)(v - v_g) \Rightarrow v = v_g \ln(m_0/m)$

## 4 Schwingungen

Eine Schwingung erfüllt zwei Bedingungen: erstens muss die Newtonsche Bewegungsgleichung erfüllt sein und zweitens muss der Vorgang periodisch sein, d.h.  $q(t+T) = q(t)$  für eine Periodendauer  $T$ .

### 4.1 ungedämpfte harmonische Schwingung

Die Differentialgleichung lautet:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

mit der Lösung:

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow q(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

Wobei die Zusammenhänge  $A^2 = A_1^2 + A_2^2$ , sowie  $\phi = \arctan(A_2/A_1)$  gelten.

#### 4.1.1 Überlagerung von Schwingungen (analog für Wellen)

Mittels verschiedener Additionstheoreme kann man die Summen von Schwingungen umschreiben. Dabei gibt es verschiedene Fälle, wie z.B. gleiche Amplituden, gleiche Frequenzen... Bei Wellen spricht man von einer *stehenden Welle*, wenn man die Bewegung so umschreiben kann, dass zeitlicher und räumlicher Anteil separat in der Gleichung auftreten. Bei der Überlagerung von Schwingungen gleicher Phase und Amplitude kommt es zu einer **Schwebung**, d.h. die Lösungsfunktion hat die Form:

$$q = A \cdot (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = 2A \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)}_{\text{Schwebung}} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right)$$

### 4.1.2 zweidimensionale harmonische Systeme

Bei zweidimensionalen schwingenden Systemen führt die  $y$ -Komponente der Bewegung eine andere Bewegung aus als die  $x$ -Komponente. Man kann oftmals durch Betrachtung von

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

mit  $a$  der Amplitude in  $x$  und  $b$  in  $y$ , die Zeitkomponente eliminieren und erhält eine Gleichung für eine Figur. Diese Figuren können beliebig kompliziert werden und heißen **Lissajous-Figuren**.

### 4.1.3 Gekoppelte Oszilatoren

Man definiert sich das Problem als Matrix-Vektor Produkt  $\ddot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q}$  und kann dann diese Matrix diagonalisieren und die Eigenmoden der Bewegung finden. Dabei macht man den Ansatz  $q_i = q_{i0} \exp(i\omega t + \phi_i)$ . Dann ist das Eigenwertproblem:

$$-\omega^2 \mathbf{q}_0 = A\mathbf{q}_0$$

Im Allgemeinen liegt dann auch hier meist eine Schwebung vor, mit

$$\omega_{schweb} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

## 4.2 Gedämpfte Schwingungen

Bei gedämpften Schwingungen kann z.B. die Stokessche Reibung in die Bewegung mit einbezogen werden. Die Differentialgleichung lautet dann, mit ausgekürzter Masse (also z.B.  $2\gamma = \kappa/m$ ):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = 0$$

Man löst diese DGL dann mit dem Ansatz:  $x = x_0 \exp(i\lambda t)$ , denn dann ist:

$$\lambda_{\pm} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - \gamma := \pm \omega_e - \gamma$$

Wie z.B. auch beim elektromagnetischen realen Schwingkreis gibt es dann verschiedene Fälle für verschiedene Beziehungen von  $\gamma$  und  $\omega_0$ :

<b>Schwingfall:</b>	$\omega_0^2 > \gamma^2$	$q = q_0 e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t + \delta\right)$
<b>Kirechfall:</b>	$\gamma^2 > \omega_0^2$	$q = q_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega_e t} + q_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_e t}$
<b>Aperiodischer Grenzfall:</b>	$\gamma^2 = \omega_0^2$	$q = q_0 (1 - \gamma t) e^{-\gamma t}$

## 4.3 Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Die Allgemeinste hier betrachtete Schwingungs-DGL ist, mit treibender Kraft  $F(t)$ :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma \dot{x} = \frac{F(t)}{m}.$$



Es ergibt sich bei dieser Form oft ein Einschwingvorgang, nachdem das System dann in eine stabile Schwingung mit Frequenz des Erregers übergeht. Die Erregungsfrequenz, bei der die Amplitude Maximal wird ist z.B. bei treibender Kraft  $F(t) = F_0 \cos(\omega_E t + \phi)$ :

$$\omega_E^R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Das ist (überraschender Weise) *nicht* einfach die Eigenfrequenz  $\omega_0$ !

## 5 Wellen

Die Differentialgleichung der Welle ist eine *partielle Differentialgleichung*:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Dabei ist  $v$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Man kann diese Gleichung lösen:

$$\Phi(x, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \delta)$$

Mit  $-kx$  läuft die Welle in der Zeit in Positive  $x$ -Richtung. Es sind:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad c = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

In drei Dimensionen betrachtet gibt es sog. Phasenflächen, auf denen  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const.}$

### Schallwelle

Man kann die Differentialgleichung einer Schallwelle (kompliziert...) herleiten und erhält:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Wobei in Luft bekannter Maßen gilt:  $v_s = \sqrt{p_0/\rho_0} \approx 340 \text{ m/s}$ . In Festkörpern wird  $p_0$  durch  $E$ , das Elastizitätsmodul, ersetzt.

### 5.1 Intensität von Wellen

Die Intensität  $I$  einer Welle definiert man über die transportierte Energie. Wellen übertragen diese Energie kontinuierlich auf eine Zielfläche. Es ist:

$$I = \frac{P}{t}, \quad \text{mit Leistung } P$$

Aufgrund von Energieerhaltung muss die Intensität einer Welle abnehmen, wenn die Übertragungsfläche sich vergrößert, z.B. bei Kugelwellen.

## 5.2 Überlagerung von Wellen

Nach dem Superpositionsprinzip überlagern sich Wellenbewegungen, was zu konstruktiver und destruktiver **Interferenz** führen kann. Im Allgemeinen entstehen auch hier Schwebungen, die sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Raum bewegen. Es entstehen auch **stehende Wellen**, bei denen die Einhüllende der Schwebung zeitunabhängig ist, die Welle also (zumindest) in einer Komponente stationär ist. Stehende Wellen kann man nur durch Überlagerung von kohärenten Wellen erzeugen, also von Wellen gleicher Frequenz mit konstanter Phasenverschiebung. Die Gleichung einer stehenden Welle ist:

$$\Phi = 2A \cos\left(kz - \frac{\Delta\delta}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\delta}{2}\right)$$

Zwischen der Phasendifferenz  $\Delta\delta$  und dem räumlichen **Gangunterschied**  $\Delta s$  besteht der Zusammenhang:

$$\Delta\delta = k\Delta s$$

### 5.2.1 Stehende Wellen in einer Dimension

Man kann die Kohärenzbedingung besonders gut erfüllen, wenn man eine Welle einfach mit ihrer eigenen Reflexion überlagert. Dabei unterscheidet man Reflexion an festen Enden mit Phasensprung von  $\Delta\delta = \pi$  und an losen Enden ohne Phasensprung. Man kann dann die Wellenlänge einer solchen stehenden Welle einfach durch Betrachtung von überhaupt möglichen Bauch- und Knotenpunkten ableiten:

- gleiche Enden:  $\lambda_n = 2l/n$
- unterschiedliche Enden:  $\lambda_n = 4l/(2n - 1)$

Hier ist  $\lambda_1$  die Grundschiwingung.

## 5.3 Dopplereffekt

Der Dopplereffekt entsteht dadurch, dass Wellen durch die Bewegung eines Senders gestaucht werden, oder ein Empfänger sich durch eine Welle bewegt.  $c$  meint hier nicht die Lichtgeschwindigkeit, sondern i.A. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

### bewegte Quelle:

$$\text{Herleitungsansatz: } \lambda = \lambda_0 - v_Q T, \quad c = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{c}{v_Q}}$$

Man sieht: Steigt die Geschwindigkeit der Welle bis auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit an, oder noch darüber, ist diese Formel nicht mehr anwendbar. Es kommt hier beim Schall zu einem sog. Überschallknall und einem darauf folgenden Machschen Kegel.

### bewegter Beobachter:

$$\text{Herleitungsansatz: } c = v_B + c_0, \quad \lambda = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$$

beide Effekte:

$$\text{Herleitungsansatz: } f = \frac{c + v_B}{\lambda_0 - v_Q T} \Rightarrow \omega = \omega_0 \cdot \frac{c - v_B}{c + v_Q}$$

## 5.4 Wellenausbreitung

- **Newton - Korpuskeltheorie:** Licht besteht aus kleinen Korpuskeln, die Gravitation erfahren und sich deshalb an Materie brechen.
- **Das Huygensche Prinzip (1680):** Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle, die wieder zu einer neuen Front verschmelzen.
- **Reflexionsgesetz:** Einfallswinkel = Ausfallswinkel
- **Snelliussche Brechungsgesetz:**

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const}$$

# 6 Rotationsbewegungen

## 6.1 Die Keplerschen Gesetze

### 6.1.1 1. Keplersches Gesetz - Bahnkurve

*Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.*

Die Bahn ist dabei gebunden (d.h. eine Ellipse oder ein Kreis), wenn die Gesamtenergie:

$$E = \frac{m}{2}v^2 - G\frac{mM}{r} < 0$$

ist. Bei  $0 \leq E$  gibt es Parabeln und Hyperbeln.

### 6.1.2 2. Keplersches Gesetz - Flächensatz

*Der Radiusvektor  $\mathbf{r}$  zwischen Sonne und Planet überschreitet in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Dem zugrunde liegt die Drehimpulserhaltung (Beweis für Zentralkraft: siehe Theorie):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mrv \sin \angle(r, v)$$

Somit ist:

$$dA \approx \frac{r}{2} \sin(\alpha) v dt \quad (\text{Kreissegment als Dreieck genähert}) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} L = \text{const.}$$

### 6.1.3 3. Keplersches Gesetz - Perioden und Halbachsen

Die Perioden  $T$  und großen Halbachsen  $a$  erfüllen:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}.$$

Beweis durch Gleichsetzen von  $F_G$  und  $F_z$ :

$$\frac{mMG}{r^2} = m\omega^2 r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}$$

## 6.2 Scheinkräfte im Beschleunigten Bezugssystem

In einem Beschleunigten Bezugssystem kann man mittels einer Koordinatentransformation herleiten (siehe Theorie):

$$m\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{K} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{y}}}_{\text{Coriolis-Kraft}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{y} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y})}_{\text{Zentrifugalkraft}} - m\mathbf{a}$$

wobei  $\mathbf{K}$  einfach die Kraft die wirkt in neuen Koordinaten ist.

## 7 Dynamik starrer Körper

Im Allgemeinen unterscheidet man bei Bewegungen starrer Körper zwischen Rotation und Translation. Mit Rotation ist dabei natürlich jetzt nicht mehr die Translation im Kreis gemeint. Eine Translation eines starren Körpers kann man immer mittels seines Schwerpunktes beschreiben. Der Schwerpunkt ist:

$$\mathbf{X} = \frac{\int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV}{\int \rho(\mathbf{x}) dV}.$$

Man findet Analogien zu den Größen der Translation auch für die Rotation:

Größe	Translation	Rotation
Strecke/Winkel	$l$	$\varphi$
(Winkel)Geschwindigkeit	$\mathbf{v}$	$\boldsymbol{\omega}$
Masse/Trägheitsmoment	$m$	$I$
Kraft/Drehmoment	$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$	$\mathbf{M} = I \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$
(Dreh)Impuls	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega}$
Kinetische Energie	$E = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$	$E = \frac{I}{2} \boldsymbol{\omega}^2 = \frac{\mathbf{L}^2}{2I}$

### 7.1 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen, die die Bewegung des starren Körpers Beschreiben sind Der Drehimpuls- (rot) und der Impulssatz (tra):

$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{L}} = I \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}$$

Man unterscheiden zwischen stabilen, labilen, metastabilen und indifferenten Bewegungen oder Zuständen.

## 7.2 Größen der Bewegung

### 7.2.1 Drehmoment

Das Drehmoment ist immer auf einen Drehpunkt bezogen. Ausgehend von diesem Drehpunkt (im Koordinatenursprung) ist dann:

$$\mathbf{M} = \mathbf{X} \times \mathbf{F}$$

### 7.2.2 Trägheitsmoment und -tensor

Mithilfe der Definition des Drehmomentes kann man, da  $\mathbf{M} = \mathbf{X} \times \mathbf{F} = r_{\perp} \cdot F$  und  $\mathbf{v} = \mathbf{X} \times \boldsymbol{\omega} = r_{\perp} \cdot \omega$  folgern:

$$a = \dot{v} = r_{\perp} \dot{\omega} = \frac{F}{m} \quad \Leftrightarrow \quad F = m r_{\perp} \dot{\omega}$$

Und somit gilt für das Drehmoment (betragsmäßig)  $M = m r_{\perp}^2 \dot{\omega}$ , bzw. allgemeiner:

$$M = \int \rho r_{\perp}^2 dV \dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad I = \int \rho r_{\perp}^2 dV$$

Das Drehmoment ist immer nur auf eine Achse senkrecht zur Drehrichtung (also parallel zu  $\omega$  bezogen!). Allgemeiner ist der Trägheitstensor (Theorie):

$$\Theta_{ik} = \int \rho (\mathbf{y}^2 \delta_{ik} - y_i y_k) dV$$

### Der Steinersche Satz

Man kann zeigen, dass man das Trägheitsmoment und den Trägheitstensor bei einer Verschiebung zu einer neuen Drehachse (parallel zur alten!) einfach beschreiben kann durch:

$$I = I_S + M \mathbf{a}^2, \quad \Theta_{ik} = \Theta_{ik}^S + M (\mathbf{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$$

mit  $I_S$  bzw.  $\Theta^S$  bezüglich zu einer Achse durch den Schwerpunkt und Verschiebungsvektor  $\mathbf{a}$  senkrecht zur Drehachse.

### Kreiseltypen

Da der Trägheitstensor diagonal ist kann man ihn immer diagonalisieren. Mit dem Vergleich der Hauptträgheitsmomente unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Kreiseltypen:

- *antisymmetrischer* Kreisel:  $I_a \neq I_b \neq I_c$
- *Symmetrischer* Kreisel: Zwei der Hauptträgheitsmomente sind gleich. Das dritte beschreibt dann die Rotation um eine Achse, die auch die Symmetrieachse oder Figurenachse des Körpers ist.
- *sphärischer* Kreisel:  $I_a = I_b = I_c$

Es sind nur Rotationen „um“ das Kleinste und das Größte Trägheitsmoment *stabil*!

### 7.2.3 Rotationsenergie

Man kann die Rotationsenergie leicht herleiten:

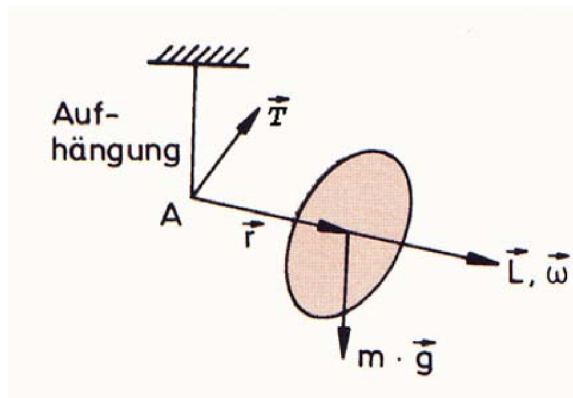
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int v^2 \rho \, dV = \frac{1}{2} \int (\omega r_{\perp})^2 \rho \, dV = \frac{1}{2} I \omega^2$$

## 7.3 Komplizierte Rotationsbewegungen

Da im Allgemeinen gilt:  $\mathbf{L} = \Theta \boldsymbol{\omega}$  sind  $\mathbf{L}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  und die Figurenachse nicht mehr zwingend parallel. Es treten dann verschiedene Effekte auf:

### 7.3.1 Präzession

Eine Präzession ist eine „Bewegung“ des Drehimpulsvektors. Dieser kann (natürlich nur wenn ein äußeres Drehmoment existiert) selbst eine Rotationsbewegung ausführen! Wenn der Kreisel im Schwerfeld im Schwerpunkt unterstützt wird, gibt es kein Drehmoment!



Dieser Kreisel wird beginnen um die Aufhängung zu rotieren, da das Drehmoment  $\mathbf{M} = m \mathbf{r} \times \mathbf{g}$  (in der Abbildung auch  $\mathbf{T}$ ) ja in diese Richtung zeigt. man kann sich fragen, woher kommt die Energie für diese Rotation überhaupt? Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass die Konstruktion im Moment, in dem man sie loslässt, tatsächlich etwas absackt. Dadurch ergibt sich auch eine kleine Änderung  $\Delta \mathbf{L}$  die nach unten zeigt und dann durch die Präzession kompensiert wird. Wenn man so möchte ändert sich hier die Lageenergie.

### 7.3.2 Der kräftefreie Symmetrische Kreisel

Es gibt hier kein äußeres Drehmoment (kräftefrei), somit ist der Drehimpuls eine konstante und es gibt *keine Präzession*! Die Figurenachse und instantane Drehachse ( $\boldsymbol{\omega}$ ) können dann um den Drehimpuls rotieren, man spricht bei der Rotation der Figurenachse von einer **Nutation**, oder einer Nick-Bewegung. Diese beiden Rotationen können beliebig voneinander ablaufen, nur der Umlaufsinn muss der gleiche sein. Der durch den Umlauf der Rotationsachse erzeugte Kegel heißt **Rastpolkegel** und kann mittels einer Farbscheibe sichtbar gemacht werden. Sehr häufig sind Figurenachse und Drehachse allerdings identisch, einfach durch Symmetrieeigenschaften des Körpers.

### 7.3.3 Der Symmetrische Kreisel im Schwerfeld

Hier ist, mit  $|\mathbf{L}| = L$ :

$$\mathbf{L} = L \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \cos(\omega_P t) \\ \sin(\alpha) \sin(\omega_P t) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

also auch

$$|\dot{\mathbf{L}}| = L\omega_P \sin(\alpha) = |\mathbf{M}| = \sin(\alpha)rmg.$$

Da Drehimpuls und Rotationsachse hier übereinstimmen ist  $L = I\omega$  und somit:

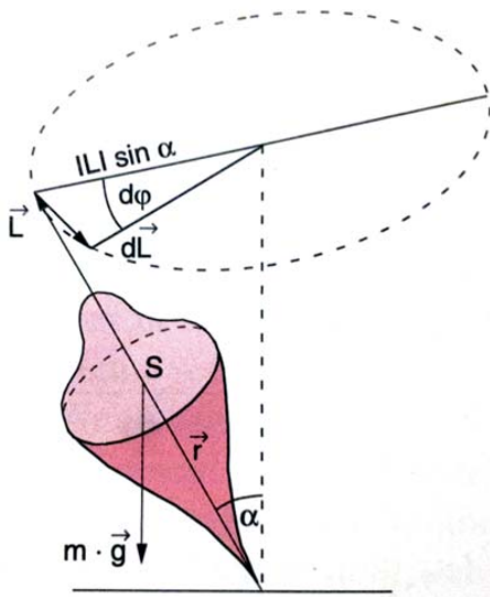
$$\omega_P = \frac{rmg}{I\omega}.$$

Die Präzessionsgeschwindigkeit ist als *unabhängig vom Neigungswinkel!*

**Antisymmetrische Kreisel** machen sehr merkwürdige und unerwartete Bewegungen die man nicht mehr einfach beschreiben kann!

## 7.4 Technische Anwendungen

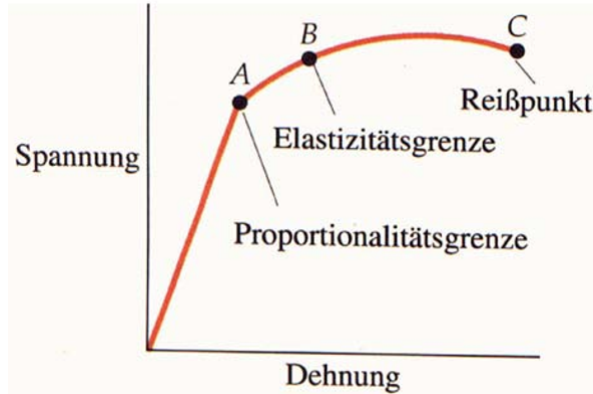
Kreisel, bzw. auch allgemein Rotationsbewegungen kommen natürlich sehr häufig in der Natur vor. Praktisch sind Rotationen besonders zur Fortbewegung. Man nutzt sie aber auch z.B. in einem Flaschenzug. Ein **Gyroskop**, als Rotationssensor arbeitet mittels Drehimpulserhaltung. Dabei wird ein Kreisel in einer *Kardanischen Aufhängung* (zwei-Ring Aufhängung) gedreht, sodass er sich nicht mitbewegen muss. Ähnlich funktioniert ein Kreiselkompass, der sich in Nord-Süd-Richtung ausrichtet, weil die Erdanziehung es leichter hat, seine Aufhängung zu Rotieren, als gegen seinen Drehimpuls zu wirken, hier kommt es zu Präzession.



## 8 Deformierbare Medien

### 8.1 Deformierbare feste Körper

#### 8.1.1 Dehnung und Stauchung - Zug und Druck



Die Verformung ist reversibel bis zur Elastizitätsgrenze. Im linearen Bereich gilt das **Hookesche Gesetz**, die Längenänderung ist proportional zum Zug:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Mithilfe der Zugspannung  $\sigma$ , die numerisch identisch ist mit dem Druck, aber logischer Weise in die Andere Richtung zeigt (Newton 3) kann man schreiben:

$$\sigma = \frac{|\mathbf{F}|}{A}, \quad \mathbf{F} \parallel \mathbf{A} \quad (\text{Flächenvektor ist senkrecht zur Fläche!})$$

Dann ist mit dem Elastizitätsmodul  $E$ , was eine Materialkonstante ist:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{EA}$$

#### Querkontraktion

Es tritt bei Dehnung eine sog. Querkontraktion auf, d.h. die Querschnittsfläche ändert sich, um quasi das Material zur Verfügung zu stellen, um das sich das Objekt verlängert. Dieses Verhalten wird durch die **Poissonsahl**  $\mu$  quantisiert. Mit Durchmesser  $D$  ist:

$$\mu = -\frac{dD/D}{dL/L} > 0$$

Für einen zylindrischen Körper ( $V = \frac{\pi}{4} D^2 L$ ) kann man dann in erster Ordnung schreiben (Fehlerrechnung):

$$\Delta V = \frac{dV}{dL} \Delta L + \frac{dV}{dD} \Delta D \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \epsilon \cdot (1 - 2\mu)$$

Somit machen auch nur Poissonzahlen zwischen 0 und 0.5 Sinn.



### 8.1.2 Scherung

Analog zur Zugspannung definiert man die Scherspannung  $\tau$ , nur mit Anderer Kraftorientierung:

$$\tau = \frac{F}{A}, \quad F \perp A$$

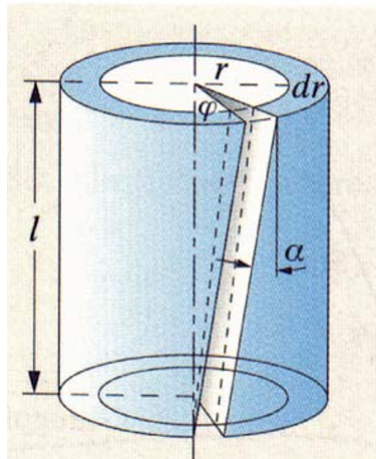
Bei kleinen Scherungen gilt ebenfalls das Hooksche Gesetz mit dem Torsionsmodul  $G$  (für  $G$  gilt:  $E = 2G(1 + \mu)$ ):

$$\text{Scherwinkel } \Theta = \frac{\tau}{G}$$

Im Gegensatz zur Dehnung oder Stauchung ist eine Scherung *volumenerhaltend*

### 8.1.3 Torsion und Biegung

**1) Torsion** Die Torsion kann man als Scherung im Kreis auffassen.



Es ergibt sich auch der Darstellung (für kleine Torsionswinkel  $\varphi$ ):

$$\alpha = \frac{\varphi \cdot r}{l}$$

Das benötigte Drehmoment um einen Zylindermandel der Dicke  $dr$  zu verdrehen ist also:

$$dT = dF \cdot r = \tau \cdot r dA = G\alpha \cdot 2\pi r^2 dr$$

und somit für einen Vollzylinder (auch Draht u.Ä.):

$$T = \int_0^R 2\pi G \varphi \frac{r^3}{l} dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l} \cdot \varphi$$

**2) Biegung** Man unterteilt das betrachtete Objekt zur Herleitung in verschiedene Fasern. Nur die mittlere ändert ihr Länge nicht. Über dieser liegt Zug, darunter Stauchung vor, wenn der Balken nach unten gebogen wird. Man kann (kompliziert) herleiten, dass für die Biegestrecke  $S$  gilt:

$$S = 4F_0 \frac{L^3}{Ed^3b} \cdot \quad (\text{Breite } b \text{ und Kraft } F_0 \text{ am Ende des Balkens})$$

## 8.2 Hydro- und Aerostatik

### 8.2.1 Flüssigkeitsoberflächen

Kräfte stehen hier senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit. So kann man die Kurve des Rotationsparaboloids herleiten:

$$\frac{dz}{dr} = \tan(\alpha) = \frac{F_F}{F_G} = \frac{\omega^2 r}{g} \Rightarrow z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2$$

### 8.2.2 Statischer Druck

**Hydraulische Presse** Verbindet man zwei Kammern, die mit einem inkompressiblen Medium gefüllt sind dann herrscht logischer Weise überall im Medium der Selbe Druck. Also:

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}.$$

**Schweredruck** Der Schweredruck ist einfach der Druck, der durch die Schwerkraft erzeugt wird:

$$F = mg = \rho H A g \Rightarrow p = \rho H g$$

Dass der Schweredruck im Gleichgewicht nicht von der Querschnittsfläche Abhängt nennt man auch **Hydrostatisches Paradoxon**. Den Schweredruck kann man verwenden, um eine **Dichtewaage** zu konstruieren (U-Rohr...).

**Beispiel - Atmosphärendruck** Man kann für den Schweredruck einer dünnen Luftscheibe ansetzen:  $dp = -\rho g dh$ . Wegen der allgemeinen Gas-Gleichung gilt, bei *konstanter Temperatur*:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \Rightarrow dp = -p \frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

Dann kann man diese Gleichung einfach integrieren und erhält die **Barometrische Höhenformel** (für  $T = \text{const}$ ) mit Skalenhöhe  $h_B = p_0/(\rho_0 g)$ :

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{h}{h_B}\right)$$

**Toricelli Röhre** Bei einer Toricelli Röhre handelt es sich um ein U-Rohr, dass auf der einen Seite mit Quecksilber gefüllt ist und auf der anderen Seite offen. Zwischen Quecksilber und Röhrenende herrscht Vakuum. Man kann so den Außendruck über die Höhe messen, die das Quecksilber aufsteigt. Dann ist der Schweredruck des Quecksilbers gleich dem Außendruck. Man Verwendet ein Dichtes Material wie Quecksilber da  $h \propto 1/\rho$ .

**(statischer) Auftrieb** Nach dem Archimedischen Prinzip Erfährt ein Körper des Volumens  $V_K$  und Dichte  $\rho_K$  in eine Flüssigkeit der Dichte  $\rho_F$  die Kraft

$$\mathbf{F}_A^K = -\mathbf{F}_G^f = V_K \rho_F g.$$

Die Gesamtkraft ist dann

$$\mathbf{F} = V g (\rho_K - \rho_F).$$

## 8.3 Hydro- und Aerodynamik

### 8.3.1 Neue Begriffe

- *Stromlinien* Bahnkurve eines Probevolumens  $dV$  im Fluss
- *Strömungsfeld*  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  Geschwindigkeits-Richtungsfeld
- *Stromdichte*  $\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v}$ ,  $[\mathbf{j}] = 1/(m^2 s)$
- *laminare Strömung* wirbelfrei, hohe innere Reibung, wenig Reibung mit Kontaktflächen,  $|\mathbf{v}|$  ist klein
- *turbulente Strömung* das genaue Gegenteil

### 8.3.2 Kontinuitätsgleichung

Aus der Massenerhaltung folgt, dass für ein Abgeschlossenes Volumen gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{j} d\mathbf{A} = 0$$

Damit folgt z.B. für ein sich verjüngendes Rohr:  $v_2/v_1 = A_1/A_2$ .

### 8.3.3 Bernoulli Gleichung

Aus der Energieerhaltung kann man für inkompressible Flüssigkeiten die Bernoulli Gleichung herleiten:

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = p_0$$

Dabei ist  $p_0$  des *Gesamtdruck*,  $p$  der *statische Druck* und  $p_0 - p$  der *dynamische oder Staudruck*. Der Staudruck wirkt anschaulich nur *in Richtung der Bewegung*. Damit kann man z.B. auch Geschwindigkeiten messen (Prandtl'sches Staurohr). Entgegen der Erwartung nimmt der *statische Druck* in einem Rohr, „unter dem“ eine Strömung fließt ab! Das ist das **Hydro- / Aerostatische Paradoxon**. Einen ähnlichen Effekt erhält man auch wenn man Luft mit hohem Druck zwischen zwei Plättchen durch pumpt.

### 8.3.4 Aerodynamischer Auftrieb



Links sieht man schematisch eine Flugzeugtragfläche. Damit die Strömung weitergehen kann muss die Luft an der Oberseite schneller strömen, so entsteht nach Bernoulli ein Unterdruck. Rechts ist der Magnus-Effekt veranschaulicht, der rotierende Ball nimmt das Fluid mit und erzeugt so einen Unterdruck in Richtung seiner Rotation.

### 8.3.5 Laminare Strömung

Man findet experimentell, dass für die innere Reibung von laminarer Strömung gilt:

$$\mathbf{F}_R = -\eta A \frac{dv}{dz}.$$

Man findet zudem durch Betrachtung des Kräftegleichgewichts (also Druck und innerer Reibung mit nächstem Zylinder) auf einen infinitesimalen Zylinder(mantel) in einem Rohr das **Hagen Poiseuille Gesetz**. Man erhält im ersten Schritt durch das Kräftegleichgewicht ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil  $v(r)$ , welches man dann weiterverwendet:

$$\frac{V}{t} = \int v(r) dA = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi r \cdot v(r)$$

Für den Volumenstrom in laminaren Strömungen in Zylindern gilt dann:

$$I = \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8\eta} R^4 \nabla p \quad \underbrace{\quad}_{1D} \quad \frac{\pi}{8\eta} R^4 \frac{\Delta p}{L}$$

Ein Konzept zur quantitativen Unterteilung von laminaren und turbulenten Strömungen in Abhängigkeit der Fließgeschwindigkeit ist die sog. *Reynolds-Zahl*. Mit  $W_R$  der Reibungsarbeit ist:

$$Re = \frac{2E_{kin}}{W_R}.$$

## 8.4 Grenzflächen von Flüssigkeiten

### 8.4.1 Kohäsion

Die Anziehung der Moleküle untereinander verursacht innere Kräfte, sog. Kohäsion. Da zur Ausdehnung also gegen die Kräfte Arbeit verrichtet werden muss minimiert sich die Oberfläche. An der Oberfläche sind Kohäsionskräfte zudem besonders stark, innen wird ein Teilchen ja in alle Richtungen gezogen. Man führt die *spezifische Oberflächenenergie*  $\sigma$ , also die Energie die gebraucht wird um die Oberfläche um  $\Delta A$  zu vergrößern, ein:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Man beachte: Eine Seifenhaut hat *zwei* Oberflächen!

**Seifenblase** Dem Drang die Oberfläche zu minimieren wirkt der Innere Überdruck entgegen. Es ist im Gleichgewicht  $\Delta W_O = \Delta W_p$ :

$$\Delta W_O = 2\sigma\Delta A = 16\pi\sigma r\Delta r, \quad \Delta W_p = p\Delta V = 4\pi pr^2\Delta r \quad \Rightarrow \quad p = 4\frac{\sigma}{r}$$

### 8.4.2 Adhäsion

Adhäsion ist die Spannung die sich zwischen zwei Verschiedenen Materialien aufbaut. Zur Vergrößerung der Oberfläche zwischen Stoff  $i$  und  $k$  wird die spezifische Arbeit  $\sigma_{ik}$  benötigt. So kann man z.B. den Winkel einer Flüssigkeit in einem Gefäß bestimmen und mit diesem dann auch die Steighöhe in einer Kapillarröhre, wobei  $h \propto 1/r$ .

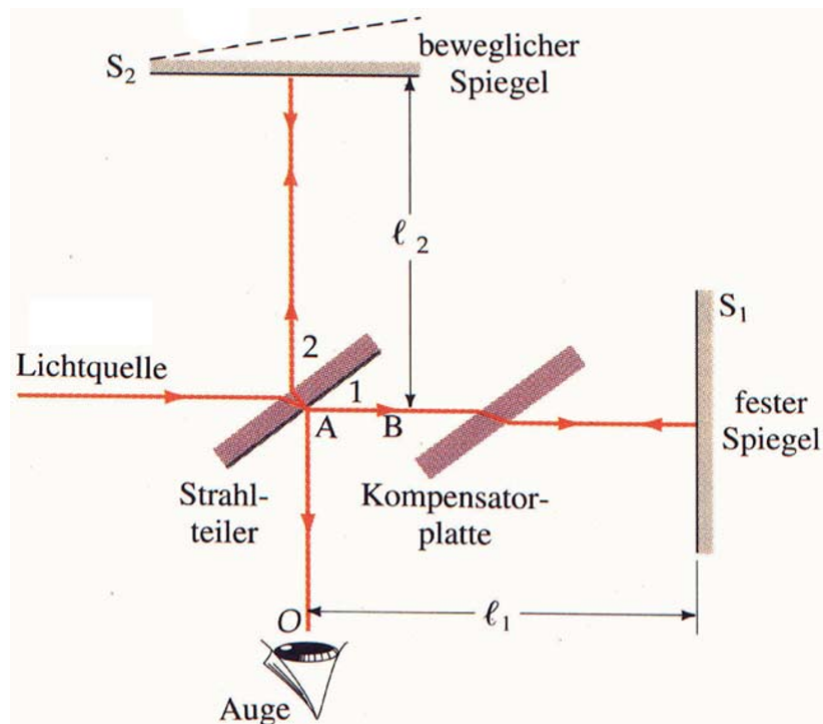
## 9 Spezielle Relativitätstheorie

In weiten Teilen der Mechanik funktioniert das Gallileische Relativitätsprinzip sehr gut. Gallilei ging davon aus, dass man zwischen zwei Inertialsystemen mittels der Gallileitransformation wechseln kann.

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{b}, \quad t' = \pm t + \lambda$$

Man hat aber festgestellt, dass ein solcher Wechsel nicht für alle Phänomene die richtigen Beschreibungen liefert, so z.B. für Elektromagnetische Felder. Da man ein ähnliches Problem beim Schall dadurch lösen konnte, das Konzept eines Mediums, durch den sich der Schall bewegt einzuführen, hat man zunächst die **Äthertheorie** entwickelt, die ein solches Konzept auch für Licht vorstellt. Dabei wird angenommen, dass das die Lichtgeschwindigkeit nur im Äthersystem immer einen konstanten Wert hat.

### 9.1 Michelson-Morley Experiment



Mithilfe dieses Experimentes kann man die Äthertheorie überprüfen. Addiert sich nämlich auf die Lichtgeschwindigkeit die Relativgeschwindigkeit des Äthers hinzu so sagt die Theorie voraus, dass Strahl 1 und 2 bei verschiedenen Orientierungen verschiedene Gangunterschiede und Interferenzmuster zeigen würden, wobei:

$$\Delta t = l \cdot \frac{v^2}{c^3} + \mathcal{O}(v^4)$$

Bei der geometrischen Berechnung muss man auch die diagonalen Laufwege des Strahls 2 berücksichtigen! Da man allerdings keine Änderungen im Interferenzmuster erkennen konnte, hatte man die Äthertheorie im wesentlichen widerlegt. Immer

noch gibt es aber die Hypothese, der Äther könnte zur Erde ruhen. Um dies zu überprüfen hat **Fizeau** getestet, ob Licht, das durch einen Wasserstrahl geleitet wird eine veränderte Laufzeit hat. Das Experiment ergab tatsächlich einen Mitführungskoeffizient von

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2},$$

was aber später durch das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem erklärt wurde.

## 9.2 Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit

Dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist konnte man schon 1676 feststellen, indem man die Umlaufzeitdifferenzen der Jupitermonde verglichen hat. Erste Messungen der Lichtgeschwindigkeit sind mit der Zahnrad- oder Drehspiegelmethode möglich gewesen.

## 9.3 Die Einsteinschen Postulate

Zur Entwicklung seiner Relativitätstheorie postulierte Einstein:

- 1) Relativitätsprinzip: Physikalische Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich. (forminvariant unter Lorentztrafo)
- 2) Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$  ist eine universelle Naturkonstante. Sie ist unabhängig von der Geschwindigkeit von Sender und Empfänger.

Diese Postulate sind sozusagen Vermutungen, die bisher von allen Experimenten gestützt werden. Man kann sie ähnlich verstehen wie auch die Newtonschen Axiome, die ja auch einfach postuliert wurden.

## 9.4 Die Lorentztransformation

### 9.4.1 Vierervektoren

Man definiert sich zur besseren Betrachtungsweise einen Vierervektor der Form:

$$\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$$

Die erste Komponente ist also sozusagen eine *Zeitkomponente*, die anderen die *normalen Ortskoordinaten*. Den Raum dieser Vektoren nennt man den Minkovski Raum. Die Gallileitransformation für diese Vektoren hat dann die Form:

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/c & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz einer Linearen Transformation, die die Lichtgeschwindigkeit bei Transformation invariant lässt und niemals Geschwindigkeiten größergleich der Lichtgeschwindigkeit erzeugt liefert die Lorentztransformation:

$$M_L = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Das **Skalarprodukt** zweier Vierervektoren oder jetzt auch **Ereignisvektoren** definiert man als:

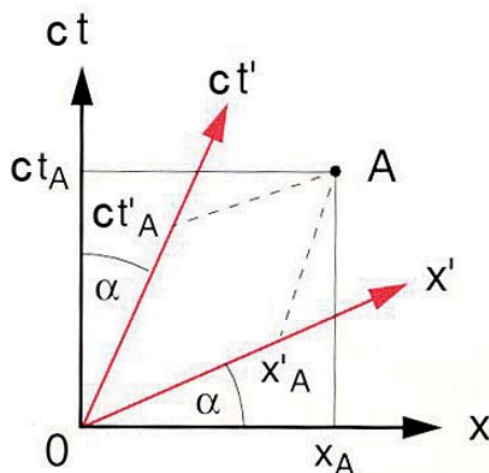
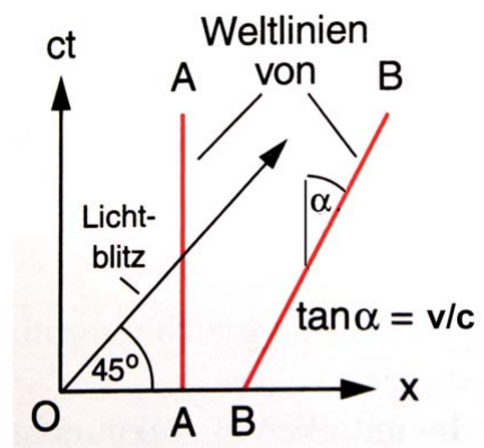
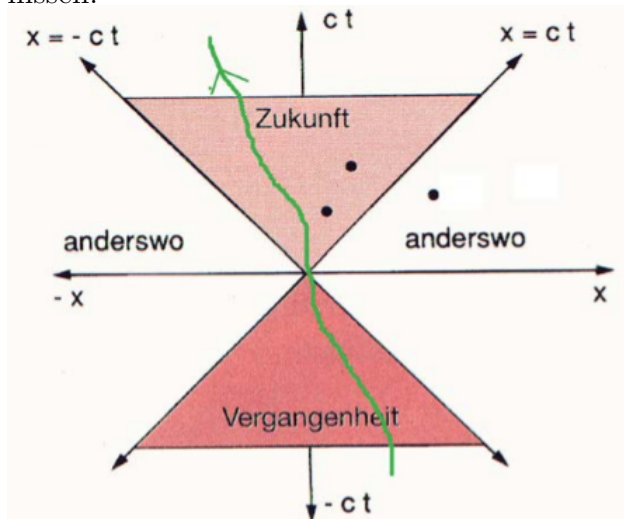
$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

Diese Größe ist gegenüber Lorentztransformation invariant! Man nennt das Quadrat der Differenz zweier Vierervektoren auch den *Abstand* (in Raum und Zeit):

$$\Delta \underline{x}^2 = \Delta x_0^2 - \Delta \underline{x}^2$$

#### 9.4.2 Minkowski Diagramme

Man kann jetzt einfach die  $x_0$ -Zeitkomponente gegen die  $x$ -Ortskomponente auftragen. In einem solchen Diagramm erkennt man dann leicht die mögliche kausale Beeinflussung von zwei Ereignissen (bei Informationsübertragung mit  $c$ ) erkennen. Ist  $\Delta \underline{x}^2 < 0$  so ist die räumliche Entfernung zu groß und man spricht von **raumartigen** Ereignissen. Ist  $\Delta \underline{x}^2 > 0$  so spricht man von **zeitartigen** Ereignissen, welche sich kausal beeinflussen können. Ist  $\Delta \underline{x}^2 = 0$  so spricht man von **lichtartigen** Ereignissen.



Man erkennt hier wie man in einem Minkowski Diagramm leicht zwischen zwei Inertialsystemen  $S$  und  $S'$  wechseln kann. Rechte Winkel bleiben dabei i.A. nicht erhalten!

### 9.4.3 Längenkontraktion und Zeitdilatation

Eine Längenmessung nimmt man vor, indem man *gleichzeitig* Anfangs- und Endpunkt eines Objektes misst. In seinem eigenen Ruhesystem  $S'$  hat ein Stab z.B. die Länge  $L_0 = L' = \Delta x'$ . Nach Lorentztransformation gilt dann im ruhenden System  $S$ , zu dem der Stab sich relativ mit  $\beta$  bewegt:

$$L' = L_0 = \Delta x' = \gamma \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0$$

Der bewegte Stab erscheint also kürzer. Einen Ähnlichen Effekt gibt es für die Zeit: für schnell bewegte Objekte vergeht die Zeit langsamer. Zwei Zeitsignale (Uhrenticks) werden in  $S'$  am gleichen Ort ausgesandt, die Uhr ist nicht bewegt, also  $T' = T_0 = \Delta t'$ . Man nennt  $T_0$  auch die Eigenzeit. Dann folgt aus der Lorentztransformation wieder  $T = \gamma T_0 \geq T_0$ . Zeitdifferenzen der fliegenden Uhr, betrachtet aus dem nicht bewegten System sind also größer!

### 9.4.4 Doppler Effekt für Licht

**longitudinal:** Nichtrelativistisch gibt es einen Laufzeitunterschied von einer Quelle zum Empfänger von  $T_E = (1+\beta)T_Q$ , der dann mit Zeitdilatation den Dopplereffekt ergibt:

$$f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{1}{\gamma(1+\beta)T_Q} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_Q$$

## 9.5 Vierergeschwindigkeiten und Additionstheorem

Die gewöhnliche Geschwindigkeit kann man mittels der Kettenregel und der Lorentztransformation über (Beispiel für erste Komponente mit Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme  $v$ )

$$w'_1 = \frac{dx'_1}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt} \gamma(x_1 - \beta x_0) \cdot \frac{d}{dt} \frac{\gamma}{c} (x'_0 + \beta x'_1) = \gamma^2 (w_1 - \beta c) \cdot \left(1 + \frac{\beta w'_1}{c}\right)$$

erhalten. Jetzt muss nur noch nach  $w'_1$  aufgelöst werden. Insgesamt ergibt sich:

$$w'_1 = \frac{w_1 - \beta c}{1 - \beta w_1/c}, \quad w'_{2,3} = \frac{1}{\gamma} \frac{w_{2,3}}{1 - \beta w_1/c}$$

Man sieht, dass es sich hier nicht einfach um Lorentztransformationen handelt. Man kann aber einen Vierergeschwindigkeitsvektor konstruieren, der Lorentz-transformiert:

$$\underline{u} = g \cdot (c, w_1, w_2, w_3) \quad \text{mit} \quad g = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{w}^2/c^2}}$$

## 9.6 Impuls Energie und Masse

Man definiert damit auch einen Viererimpuls:

$$\underline{p} = g \cdot m_0 (c, \mathbf{w})$$



Man findet dann die Kinetische Energie mittels:

$$E_{kin} = \int F dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} dx = \int \frac{dx}{dt} dp = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{w}^2/c^2}} - 1 \right)$$

Betrachtet man wieder einfach nur zwei Systeme, wobei der Körper in einem System ruht kann man auch wieder schreiben:

$$\underline{p} = \gamma \cdot m_0(c, \mathbf{v}), \quad \text{sowie} \quad E_{kin} = m_0 c^2 (\gamma - 1).$$

Es folgt somit:

$$p_0 = \gamma m_0 c = \frac{1}{c} (E - m_0 c^2) \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

Außerdem besteht ein Zusammenhang zwischen Viererimpuls und Energie:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

## 9.7 Aussehen relativistisch bewegter Objekte

Durch die schnelle Bewegung eines Objektes kann es nicht nur zu Änderung der Länge kommen. Durch geometrische Betrachtungen und Überlegungen, wann wo noch Licht reflektiert werden kann erhält man zusätzlich noch Drehungen, Krümmungen, sowie Farbänderung durch den Dopplereffekt.

# 10 Allgemeine Relativitätstheorie

Die Allgemeine Relativitätstheorie verbindet die Spezielle Relativitätstheorie mit der Gravitation. Eine Grundlage ist das Einsteinsche Äquivalenzprinzip:

**Einsteinsches Äquivalenzprinzip:** Beschleunigte Bezugssysteme einerseits und Inertialsysteme mit Gravitationsfeldern andererseits sind lokal ununterscheidbar.

Ein Grund dafür, ist dass auch Gravitationskräfte sich nur mit  $v \leq c$  ausbreiten können! In der AR erfahren auch masselose Teilchen wie Photonen aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie eine Gravitationskraft. Das führt aber zu Problemen, da man eigentlich einen Lichtstrahl als „gerade“ definiert, erfährt er jetzt aber Gravitation ist er das nicht mehr. Daher ist das Konzept der AR die *Raumkrümmung*. Schwere Körper krümmen also den Raum gemäß einer neuen Metrik, der Minkowski-Metrik. Das *Einsteinsche Gravitationsgesetz* hat dann die Form:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G \cdot T_{\mu\nu} \quad \tilde{G}_{muv} \propto g$$

Mit Einstein Tensor  $g$  und Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$ . **Die Masse gibt also vor, wie der Raum sich verhält, der dann die Bewegung vor gibt.** Zeitweise trat noch eine Kosmologische Konstante  $\Lambda$  auf, die die Expansion des Universums erklären sollte. Heute ist diese Theorie wieder sehr aktuell.

## 10.1 Auswirkungen und Tests

- **Schwarze Löcher**

Mit dem Ansatz einer Fluchtgeschwindigkeit, die Maximal  $c$  betragen kann, kann man den **Schwarzschildradius** für eine Masse herleiten:

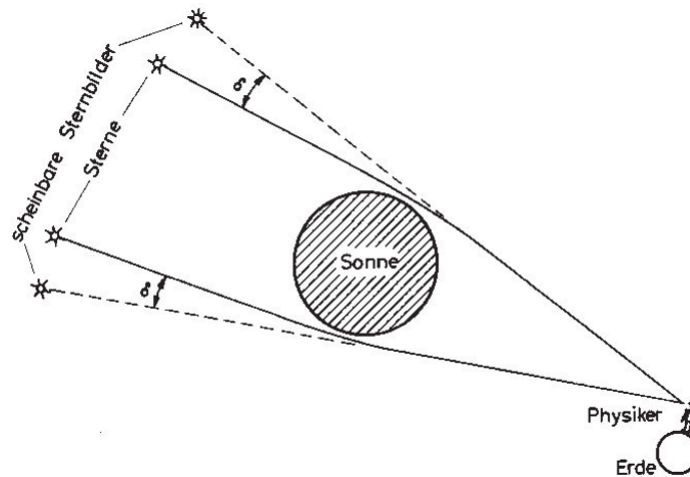
$$r_s = \frac{2G}{c^2} M.$$

- **Frequenzverschiebung**

Im Gravitationsfeld verlieren / gewinnen Schwingungen an Energie und ihre Frequenz verschiebt sich. Dadurch gehen Uhren im Gravitationsfeld langsamer:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{mgh}{mc^2} = \frac{gh}{c^2}$$

- **Lichtablenkung im Gravitationsfeld**



- **Gravitationswellen**

Bewegte schwere Massen können wie elektrische Ladungen anscheinend Wellen, die die gravitative Wechselwirkung verursachen, sog. Gravitationswellen aussenden. Man kann diese dann mit einem Interferometer messen.