Luca Cordes, 444900
Lisa Evers, 423114

Experimentalphysik Va (WS 2023/2024)

Übung 3

Tutorium: 1 Abgabe: 04.11.2024

Aufgabe 1: Stoßzeiten u. freie Weglängen im Drude-Modell

(a)

Mit der Drude Formel $\sigma = \frac{ne^2}{m_e}\tau$, $\sigma = \rho^{-1}$ und $n = n_A \frac{Z\rho_M}{M}$ folgt:

$$\tau = \frac{m_e M}{n_A \rho_M e^2 \rho} \to \begin{cases} \tau_{\mathrm{Ag}} = 38.1\,\mathrm{fs} \\ \tau_{\mathrm{Li}} = 8.32\,\mathrm{fs} \end{cases}$$

Die Leitungselektronen im Metall werden im Drude Modell beschrieben als ideales Gas, ihre Geschwindigkeiten folgen daher der Maxwell-Boltzmann-Verteilung, dessen Mittel gegeben ist durch:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}}$$

Damit gilt für die mittlere Weglänge:

$$\Lambda = \tau \langle v \rangle = \tau \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}} \to \begin{cases} \Lambda_{\mathrm{Ag}} = 4.10\,\mathrm{nm} \\ \Lambda_{\mathrm{Li}} = 0.900\,\mathrm{nm} \end{cases}$$

(b)

Die Massendichte von Stickstoff bei normal Bedingungen ist etwa $\rho_M = 1.25\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, die molare Masse $M = 28.0\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$.

$$\tau_{\mathrm{N_2}} = \frac{1}{n \langle v \rangle \sigma} = \frac{M}{n_A \rho_M} \frac{1}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\pi m_{\mathrm{N_2}}}{8k_B T}} = \frac{M}{n_A \rho_M} \frac{1}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\pi M}{8k_B n_A T}} = 182\,\mathrm{fs}$$
$$\Lambda_{\mathrm{N_2}} = \langle v \rangle \tau_{\mathrm{N_2}} = \frac{1}{n\sigma} = \frac{M}{n_A \rho_M} \frac{1}{\pi d^2} = 86.5\,\mathrm{nm}$$

Die (Elektronen-) Dichten in einem Metall sind deutlich höher als in alltäglichen Gasen, weshalb es nicht verwunderlich ist, dass Relaxionszeit und freie Weglänge in den beiden Metallen etwa ein bis zwei Größenordnungen kleiner sind als für Stickstoff.

Aufgabe 2: Potentialtopf-Modell für Retinal

Der eindimensionale Potentialtopf hat für ein einzelnes Teilchen die Lösungen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(k_n x\right), \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad E_n = \frac{\hbar k_n}{2m}$$

wobei das dreidimensionale Äquivalent mit einem Seperationsansatz wieder auf den eindimensionalen Potenzialtopf zurückgeführt werden kann. Die Lösung ist daher:

$$\psi_{\vec{n}}(\vec{x}) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} e^{i\vec{k}\vec{x}}, \qquad k_i = \frac{\pi n_i}{L}, \qquad E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \vec{n}^2$$

(a)

Da die Elektronen dem Pauliprinzip unterliegen, sind im Grundzustand je zwei Elektronen in den fünf niederenergetischsten Niveaus. Für das höhste, besetzte Energieniveau (3-fach entartet) gilt $\vec{n} = (2, 2, 1)$.
Der erste angeregte Zustand entspricht dem Übergang eines Elektrons mit $\vec{n} = (2, 1, 1)$ zu $\vec{n}' = (2, 2, 1)$. Die Energiedifferenz beträgt E_0, der Grundzustandsenergie.

$$E_0 = \frac{6\pi^2\hbar^2}{mL^2} = 2.30\,\mathrm{eV}$$

Die Wellenlänge des ersten Absorbtionsmaximum ist gerade so, dass die Grundenergie absorbiert wird:

$$E_0 = hf = \frac{hc}{\lambda}$$
$$\lambda = \frac{hc}{E_0} = 539\,\mathrm{nm}$$

Aufgabe 3: Fermi-Gase

Die molaren Massen von Silber und Helium-3 sind $M_{\mathrm{Ag}} = 108\,\mathrm{u}$ und $M_{\mathrm{He}} = 3.02\,\mathrm{u}$. Es gilt

$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} \qquad v_F = \frac{\hbar k_F}{m_e}$$
$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} \qquad T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

mit der Teilchendichte $n = \frac{n_A \rho}{M}$.
Damit ergeben sich die folgenden Werte:

	k_F in $\frac{1}{\mathrm{m}}$	v_F in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$	E_F in J	T_F in K
Ag	$1.2 \cdot 10^{10}$	$1.39 \cdot 10^{3}$	$8.81 \cdot 10^{-19}$	63800
^{3}He	$7.82 \cdot 10^{9}$	905	$3.73 \cdot 10^{-19}$	27000

Aufgabe 4: Thermodynamik des Fermi-Gases bei $T = 0\,\mathrm{K}$

$$N(E) = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}}, \qquad D(E) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E} = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}, \qquad E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(a)

$$\begin{aligned} U &= \int \mathrm{d}E\, E\, D(E) \\ &= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{E_F} \mathrm{d}E\, E^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{5}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{3}{5}\underbrace{\frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{3}{2}}}_{N} E_F \\ &= \frac{3}{5} E_F N \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mu &= \left.\frac{\partial U}{\partial N}\right|_{S,V} \\ &= \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{3}{5}E_F N\right) \\ &= \frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial N} N^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= E_F \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} p &= -\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{T} \\ &= -\frac{\partial}{\partial V}\frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{V}\right)^{\frac{2}{3}} N^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{2}{3}\frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{2}{3}\frac{U}{V} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K &= -V \frac{\partial p}{\partial V}\bigg|_T \\
&= -V \frac{\partial}{\partial V} \frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{5}{3} \frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{10}{9} \frac{U}{V} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} E_F
\end{aligned}
$$

(d)

Die Formel aus (c) kommt mit der angegebenen Fermi-Energie auf einen Kompressionsmodul von

$$K_{\mathrm{Na}}(E_F = 3.14\,\mathrm{eV}) = 7.63\,\mathrm{GPa}$$

und trifft damit den experimentellen Wert von $7.46\,\mathrm{GPa}$ mit einer relativen Fehler von nur $\sim 2\%$.

Aufgabe 5: Breite der Fermi-Kante für $T > 0\,\mathrm{K}$

(a)

Die im Plot eingezeichnete Kante schneidet die beiden Geraden bei ± 2, die Breite δ_E ist also

$$\delta_E = 4 k_B T + \mu \approx 4 k_B T$$

(b)

Für $300\,\mathrm{K}$ ergibt sich:

$$\delta_E = 0.103\,\mathrm{eV}, \qquad \frac{\delta}{E_F} = 2\%$$