Prof. Stahl
Thilo Birkenfeld

Experimentalphysik III
Optik und Quantenphysik

Übungsblatt 13

Zur Abgabe über *moodle* bis 23.1.2024 24:00 Uhr!

- **Aufgabe 1:** (5 Punkte) **Unschärferelationen**

Bei der parallelen Messung von zwei Messgrößen A und B mit zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ an einem quantenmechanischen System sind die minimal erreichbaren Messunsicherheiten ΔA und ΔB über die Heisenbergsche Unschärferelation verknüpft:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle \Psi | [\hat{A}, \, \hat{B}] | \Psi \rangle \, |$$

a) Mit welcher minimalen Unsicherheit kann man die Position eines Elektrons in einer Dimension Δx bestimmen wenn die Geschwindigkeit eine Messunsicherheit von $\Delta v = 14{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ hat?

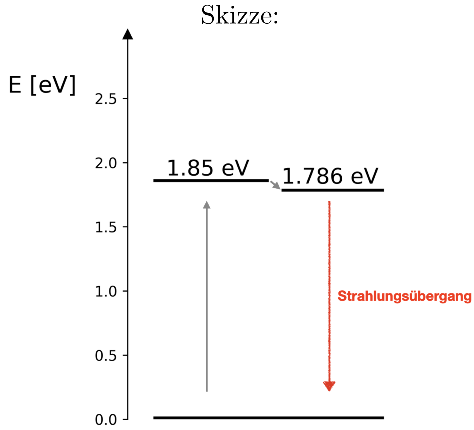
b) Vorgänge von welcher Zeitdauer Δt können Sie gerade noch auflösen wenn Sie gleichzeitig mit einer Energieauflösung von $\Delta E = 0{,}2\,\mathrm{eV}$ messen?

c) Der Gesamtdrehimpuls eines Systems von Teilchen wird mit einer Unsicherheit von $\Delta L = 9{,}13 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{J\,s}$ gemessen. Wie genau kann die z-Komponente L_z prinzipiell gemessen werden?

● **Aufgabe 2:** (5 Punkte) **Laser Energieniveau**

Wie Sie in den folgenden Vorlesungen noch genauer besprechen werden, werden in einem Laser verschiedene Energieniveaus angeregt. Eines der Energieniveaus strahlt beim Übergang auf ein niedrigeres Niveau (z.B. den Grundzustand) Licht einer bestimmten Wellenlänge aus. Der Skizze können Sie eine vereinfacht Darstellung der Energieniveaus einens Rubinlaseres (mit Cr-Ionen dotiertes Al_2O_3) entnehmen.

Skizze:



a) Welcher Wellenlänge λ entspricht der in der Skizze rot eingezeichnete Strahlungsübergang auf den Grundzustand?

b) Welcher Energieweite ΔE entspricht die Linienbreite des Lasers von $\Delta\lambda = 0{,}53\,\text{nm}$?

●● **Aufgabe 3:** (10 Punkte) **Korrelation von Spins**

Eine Elektronenquelle emittiert Paare von Elektronen mit entgegengesetztem Impuls entlang der z-Achse. Die Spins der beiden Elektronen stehen senkrecht zu deren Impuls. Sie sind zueinander antiparallel. Quantenmechanisch lassen sich die Spins der Elektronen durch einen sogenannten verschränkten Zustand beschreiben:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\right),$$

wobei $|\uparrow\rangle$ einen Spinor in positive x-Richtung und $|\downarrow\rangle$ den entsprechenden Spinor negative x-Richtung darstellt. Die Indizes 1 und 2 bezeichnen die beiden Elektronen. Es gilt

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Der Messprozess in den beiden Stern-Gerlach Apparaturen wird durch die Operatoren

$$\hat{O}_1 = \cos\alpha\hat{\sigma}_x + \sin\alpha\hat{\sigma}_y \quad \text{bzw.} \quad \hat{O}_2 = \cos\beta\hat{\sigma}_x + \sin\beta\hat{\sigma}_y$$

beschrieben mit α, β den Ausrichtungswinkeln der beiden Analysatoren.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{O}_1$ für die Messung von Elektronen in den Zuständen $|\uparrow\rangle_1$ und $|\downarrow\rangle_1$.

b) Als Messung an den Elektronenpaaren wählen wir das Produkt der Messwerte der beiden Apparaturen, d.h. $\hat{\sigma} = \hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Messung $\langle\hat{\sigma}\rangle = -\vec{a}\cdot\vec{b}$ ergibt, mit $\vec{a} = (\cos\alpha,\, \sin\alpha,\, 0)$ und $\vec{b} = (\cos\beta,\, \sin\beta,\, 0)$.

$$\text{Ansatz: } \langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\uparrow|\hat{O}_1|\uparrow\rangle_1 \cdot \langle\downarrow|\hat{O}_2|\downarrow\rangle_2 - \dots\right)$$

c) Erklären Sie die Bedeutung des Minuszeichens im Ergebnis für den Erwartungswert.

●●● **Aufgabe 4:** (10 Punkte) **Zustandsenergien endlicher Potentialtopf**

Den endlichen Potentialtopf haben Sie bereits auf dem vorrigen Übungsblatt kennen gelernt. Eine übliche Parameterisierung für das Potential lautet:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x \in [-L/2,\, L/2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{mit } V_0 < 0$$

Dies ist üblich weil so $E > 0$ für ein freies Teilchen gilt. Dann gilt für die Wellenfunktion eines Elektrons außerhalb des Topfes $\propto e^{\pm\kappa x}$ mit

$$\kappa = \sqrt{-\frac{2m_e}{\hbar^2}E}$$

und innerhalb des Topfes $\propto e^{\pm ikx}$ mit

$$k = \sqrt{\frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E - V_0\right)}$$

Damit gilt für symmetrische Lösungen:

$$\kappa = k\tan\left(\frac{L}{2}k\right)$$

und für antisymmetrische Lösungen:

$$\kappa = -k\cot\left(\frac{L}{2}k\right)$$

Lösen Sie beide Gleichungen für einen Potentialtopf mit $L = 6\,\text{Å}$ und $V_0 = -4\,\text{eV}$ entweder numerisch und oder grafisch. Vergleichen Sie die der Lösungen entsprechenden Energien mit der Näherung für einen unendlich hohen Potentialtopf:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_eL^2}n^2 - |V_0|$$

Verwenden Sie dazu gerne das *Jupyter Notebook* unter JupyerLab ("ExPhy3").