Experimentalphysik III - Formelblatt

Elektromagnetische Optik

Maxwell Medien SI:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Medien: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r\,, \quad \mu = ...$:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

Wellen:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Vakuum

Phasen und Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \qquad v_{gt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Wellenfunktion

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}\sin(\omega t - kz + \delta_x) \\ E_{0y}\sin(\omega t - kz + \delta_y) \end{pmatrix} \qquad \text{eben/monochr.:} \quad \boldsymbol{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

$-kz$ = positive z-Richtung

Polarisationsformen: **linear, zirkular** $(\delta_x - \delta_y = \pm\pi/2)$**, elliptisch**

Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$:

$$|\boldsymbol{E}| = c_0|\boldsymbol{B}| \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

Energiedichte

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\boldsymbol{E}^2 + c_0^2\boldsymbol{B}^2) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2$$

Intensität

$$I = \frac{W}{A_\perp t} = c\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 \qquad \text{Mittelung:} \quad \langle I \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0^2$$

Pointing-Vektor:

$$|\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}| = I$$

Strahlungsdurck und statistischer Impuls:

$$p_{st} = w \qquad \pi_{st} = \frac{p_{st}}{c}$$

Isotrope Medien

Phasendifferenz nach durchlaufen eines Mediums

$$\Delta\varphi = 2\pi(n-1)\frac{\Delta z}{\lambda_0}$$

meistens gilt für n: $\quad n = \sqrt{\varepsilon_r}$

$\boldsymbol{D}$-Feld und Polarisationsvektor (Nichtleiter), Polarisierbarkeit:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad \alpha = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

Komplexer Brechungsindex, Formel in (Nicht)Leiter, Näherung

$$n = n' - i\kappa \qquad n_{NL}^2 = 1 + \frac{N\alpha}{\varepsilon_0} \qquad n_L^2 = \varepsilon_r - \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} i \qquad (n^2-1) \underset{n\approx 1}{\approx} 2(n-1)$$

Lösung der Wellengleichung mit komplexem Brechungsindex:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(t) \cdot e^{-\kappa k_0 z} \qquad \Rightarrow \qquad I = I_0 \cdot e^{-Az} \quad A = 2\kappa k_0 \qquad \delta = 1/A$$

Wellen an Grenzflächen

Snelliussches Brechungsgesetz

$$\alpha = \alpha' \qquad \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

Brechung zum Lot am optisch dichteren Medium

Reflexions- und Transmissionskoeffizient:

Quotient der Amplituden/Feldstärken

Reflexions- und Transmissionsvermögen, Leistung und Intensität:

$$R = \frac{P_r}{P_e} \qquad T = \frac{P_g}{P_e} \qquad P = IA_\perp = \int \boldsymbol{S}\, d\boldsymbol{A}$$

Summe Refl. und Transm., R bei senkr. Einfall, Intensität:

$$T + P = 1 \qquad R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad I_t = TI_0 \ \ / \ \ I_r = RI_0$$

Brewster Winkel: keine Reflexion in p-pol

$$\alpha_B + \beta = \pi/2 \qquad \tan(\alpha_B) = \frac{n_2}{n_1}$$

Phasensprünge

Reflexion	s-pol	p-pol
opt. dichteres Medium	π	0 unterhalb α_B π oberhalb α_B
opt. dünneres Medium	0	π unterhalb α_B 0 oberhalb α_B

Totalreflexion

$$\text{nur am optisch dünneren Medium} \quad \beta \geq \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha_T) = \frac{n_2}{n_1}$$

Doppelbrechung

$$n_a > n_o \quad \text{optisch positiv} \qquad \text{Polarisationsrichtung } n_o \perp \text{optische Achse}$$

Polarisation

lineare Polarisation, Malussches Gesetz:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2(\theta)$$

Erzeugung, Doppelbrechungsplättchen Phasendifferenz:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d\Delta n$$

λ-Plättchen für linear polarisiertes Licht

$$\lambda/2 \quad \text{Spiegelung an optischer Achse} \qquad \lambda/4 \quad \text{zirkular}$$

Unpolarisiertes Licht durch Linearpolarisator

$$I = \frac{1}{2} I_0$$

Wellenoptik

Huygens-Fresnel-Prinzip

Lichtwellenfront sind Ausgangspunkte von Elementarwellen, die sich verhalten wie Kugelwellen und sich überlagern zu einer neuen Wellenfront.

Interferenz

Phasengleiche, Amplitudengleiche ebene Wellen:

$$\Delta\varphi = \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_1 - \varphi_2 \qquad \Rightarrow \qquad \langle I \rangle = 4\langle I_0 \rangle \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Phasendifferenz von Welle mit sich Selbst:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s(+Sprung) = k\Delta s \qquad \text{max: } \Delta s = m\lambda \qquad \text{min: } \Delta s = (m+1/2)\,\lambda$$

Doppelspalt

$$\Delta r = \frac{ay}{s} \qquad a\sin\theta_{max} = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$$

Dünne Schicht (zweistrahl)

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$$

Beugung am Einzelspalt, Kreisförmiger Öffnung

$$\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{b}n \qquad \sin\theta_{max} = \frac{\lambda}{b}\cdot(m+1/2) \qquad \sin\theta_{min,Kreis} = 0,61\frac{\lambda}{r}$$

Gitter (N Spalte), Nebenminimum, Auflösungsvermögen, Bragg (Glanzwinkel)

$$d\sin\theta_{nmin} = m\lambda + \frac{\lambda}{N} \qquad A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \qquad d\sin\theta_{max} = m\lambda \qquad 2d\sin(\alpha) = m\lambda$$

Fresnel / Fraunhofer

- **Fraunhofer Beugung:** Abstand zum Schirm groß gegen Hindernis → Strahlen annähernd parallel → Beugungsbild nur Richtungsabhängig
- **Fresnel Beugung:** Summation über Zonen mit Konstanter Phasendifferenz → Beugungsbild abstandsabhängig

Fresnelzonen, m-te Zonen Platte

$$E(\mathbf{P}) \approx \frac{E_0}{R+r_0}e^{ik(R+r_0)} \qquad \rho_m \underset{r_0>>m\lambda}{\approx} \sqrt{r_0 m\lambda}$$

Interferenzen sind Ausblendung einzelner Zonen

Babinetsches Prinzip

Aufteilung der Gesamtfläche in dijunkte Anteile (komplementär), dann ist die Intensität an Orten, die vorher Dunkel waren, gleich:

$$E(\sigma) = E(\sigma_1) + E(\sigma_2)$$

Fresnel - Fourier mit Apertur $\tau(x,y)$

$$E_p \propto \int_{\mathbb{R}^2} \tau(x,y)\exp\left(\frac{ik}{z_0}(x'x + y'y)\right)dx\,dy$$

Kohärenz

$$\Delta s_c = c\cdot\Delta t_c$$

Geometrische Optik

Fermatsches Prinzip

$$\delta\int n(s)ds = 0 \qquad \textit{oft:} \ \frac{dt}{ds} = 0$$

Grundaxiome der Geometrischen Optik (4)

- In optisch homogenen Medium sind Lichtstrahlen Geraden.
- An der Grenzfläche zwischen zwei Medien werden Lichtstrahlen gebrochen und reflektiert und gehorchen dabei dem Reflexions und Brechungsgesetz.
- Mehrere Strahlenbündel beeinflussen sich nicht gegenseitig.
- Lichtstrahlen sind umkehrbar.

Spiegel

Sphärischer Hohlspiegel, paraxiale Strahlen:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} \approx \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

Abbildungsmaßstab

$$\Gamma = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$$

Linsen

Linsengleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) := \frac{1}{f}$$

Abbildungsmaßstab

$$\Gamma = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f-g}$$

Bildkonstruktion (3)

- Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen.
- Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen.
- Hauptstrahlen bleiben Hauptstrahlen (durch Mittelpunkt).

Linsensysteme

(2 Linsen), neue Brennweite, bezogen auf?:

Bildseitige Hauptebene: $f' = \dfrac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \qquad \underset{d \to 0}{\longrightarrow} \qquad \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}$

Berechnung der Bildweite an 2. Linse, Gesamtabbildungsmaßstab:

Abbildung an beiden durchrechnen. $\qquad \Gamma = \dfrac{b_1}{g_1}\dfrac{b_2}{g_2}$

Matrixoptik

Vektor, Translation, Brechung, Trafomatrix (dünne) Linse in Luft

$$\begin{pmatrix} r_i \\ n\,\alpha_i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{R} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Näherung?

paraxiale Strahlen

Anwendungen

Optische Instrumente

Abbildungsgleichung des Auges, Deutliche Sichtweite, kleinster Sehwinkel

$$\frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{b} = 1 \qquad s_0 = 25cm \qquad \varepsilon_{min} = 0,02^\circ$$

Winkelvergrößerung allgemein

$$V = \frac{Winkel\ mit\ Instrument}{WinkelohneInstrument} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Lupe, Art des Bildes, wo mit dem Auge?, Winkelvergrößerung

$$imagin\ddot{a}r\ wenn\ n\ddot{a}her\ als\ Bildweite \qquad V = \frac{s_0}{f}$$

Mikroskop, Abbildungsmaßstab des Objektivs, Okularvergrößerung:

$$\Gamma_{ob} \approx \frac{t}{f_{ob}} \quad Tubusl\ddot{a}nge\ t \qquad V = \Gamma_{ob} V_{ok} = \frac{t s_0}{f_{ob} f_{ok}}$$

Teleskop, Winkelvergrößerung

$$V = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

Auflösungsvermögen

Rayleigh-Kriterium, Numerische Apertur

Punke auflösbar, wenn erstes Minimum des einen mit dem Zentralen Maximum des anderen zusammenfällt

$$\Delta x = \frac{0,66\lambda_0}{n \sin\alpha}$$

Kleinster auflösbarer Winkel bei Lochblende, Durchmesser D

$$\delta_{min} = 1,2\frac{\lambda}{D}$$

nicht für Mikroskop, da Kompizierters Abbe-Kriterium

Lichtstärke

Blendenzahl, Proportionalität der Intensität zu F

$$F = \frac{f}{D} \qquad I \propto \frac{1}{F^2}$$

Kamera Intensität, Schärfentiefe

$$I \propto \frac{t \cdot ISO}{F^2} \qquad \Delta g \propto \frac{c}{\frac{a}{F} \pm 1} \tag{0.1}$$

Quantenphysik

Quantelung

$$E_n = nh\nu \qquad bzw. \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

Temperaturstrahlung

Zustandsdichte, Rayleight-Jeans-Gesetz

$$dZ = 8\pi \frac{V\nu^2}{c^3} d\nu \qquad P\,d\nu = \frac{\nu^2}{c^2} kT\,d\nu$$

Wiensches Verschiebungsgesetz, Stefan-Boltzmann/Kirchhoffsches Gesetz

$$\lambda_{max} = \frac{0,29cm \cdot K}{T} \qquad P = \varepsilon\sigma A T^4$$

Teilleistung aus gegebener Gesamtleistung (Kugelabstrahlung) selektieren:

$$P = \int_A \boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{A} \qquad P_{sel} = \frac{\Omega_{sel}}{\Omega} P \qquad \Omega = \frac{A}{r^2}$$

Plancksche Strahlungsformel, was macht der Körper?

$$\textit{Absorbtion, induzierte/spontane Emission} \qquad P(\nu) = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Photoeffekt

$$U_{max} = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_A}{e} \qquad W_A = h\nu_{grenz}$$

Compton-Effekt

$$\textit{rel. Impuls und Energieerhaltung:} \qquad \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

Photon

Masse vs. Ruhemasse, Impuls, Energie, Geschw., Anzahldichte, Intensität

$$E_\gamma = h\nu \quad p_\gamma = \frac{h}{\lambda} \quad v = c \quad m_0 = 0 \quad m\gamma = \frac{E_\gamma}{c^2} \quad I = nh\nu c \quad n = \frac{w}{h\nu}$$

Relativistische kinetische Energie, Impuls:

$$E_{kr} = (\gamma - 1)m_0 c^2 \qquad p_r = \gamma m v$$

Materiewellen

ω, $\boldsymbol{k}$, v_{ph}

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad \omega = \frac{E}{\hbar} \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{p}}{\hbar} \qquad v_{ph} = \frac{E}{p}$$

Wellenpaket mit Abkürzung u

$$\psi(x,t) = 2c(k_0) \cdot \frac{\sin(u\frac{\Delta k}{2})}{u} \exp\left(i(w_0 t - k_0 x)\right) \qquad u = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} (t - x)$$

daraus folgende Unschärfe

$$\Delta x = \frac{4\pi}{\Delta k} > \lambda$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$$W(x,t)dx = |\psi(x,t)|^2 dx\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Unschärferelation, Impuls und Energie:

$$\textit{Unschärfe am geringsten für Gaußsche } k \qquad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Schrödingergleichung zeitabh., zeitunabh.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\boldsymbol{x},t) + V(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x})$$