Name: Luca Cordes, 444900

Experimentalphysik III (WS 2023/2024)

Übung 10

Tutorium: 8 Abgabe: 19.12.2023

Aufgabe 1: Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - i \cdot i & -0 \cdot i - i \cdot 0 \\ 0 \cdot i + 0 \cdot i & -i \cdot i + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

(b) $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i\sigma_k$ mit i, j, k zyklisch:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot i & -0 \cdot i + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot i & -i \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sigma_2 \sigma_1 &= -\begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - i \cdot 1 & 1 \cdot 0 - 0 \cdot i \\ i \cdot 1 + 1 \cdot 0 & i \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_j &= -\sigma_j\sigma_i = i\sigma_k \\
\sigma_i\sigma_j\sigma_j &= i\sigma_k\sigma_j \\
\sigma_i &= i\sigma_k\sigma_j \\
-\sigma_k\sigma_j &= i\sigma_i \\
\implies \sigma_j\sigma_k &= -\sigma_k\sigma_j = i\sigma_i
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollst. Induktion folgt die Gleichung für alle zyklischen i, j, k.

(c) Kommutator

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_j + \sigma_i\sigma_j = 2i\sigma_k$$

Aufgabe 2: Normierung von Wellenfunktionen

(a) $\psi(x) = N \sin \frac{n\pi x}{L}$, $0 \leq x \leq L$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
1 &= N^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{N^2}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{N^2}{2} \left(x - \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L}\right) \Bigg|_0^L \\
&= \frac{N^2}{2} \left(L - \frac{L}{2n\pi} \sin(2n\pi)\right) \\
&= \frac{LN^2}{2} \\
N &= \sqrt{\frac{2}{L}}
\end{aligned}$$

(b) $\psi = Ne^{-|\vec{r}|/a}$, $a > 0$:

$$\begin{aligned}
1 &= N \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, e^{-r/a} \cdot r^2 \sin\theta \\
&= 4\pi N \int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^2 e^{-r/a} \\
&= 4\pi N \left(-ar^2 e^{-r/a} + 2a \int \mathrm{d}r \, re^{-r/a}\right) \Bigg|_0^\infty \\
&= 8\pi a N \int_0^\infty \mathrm{d}r \, re^{-r/a} \\
&= 8\pi a N \left(-ar \, e^{-r/a} + a \int \mathrm{d}r \, e^{-r/a}\right) \Bigg|_0^\infty \\
&= 8\pi a N \left(-ar \, e^{-r/a} - a^2 e^{-r/a}\right) \Bigg|_0^\infty \\
&= 8\pi a^3 N \\
N &= \frac{1}{8\pi a^3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Der Raum der quadratintegrablem Funktionen

(a) Subadditivität:

Allgemein erfüllt *jede* durch ein Skalarprodukt induzierte Norm die Dreicksungleichung. Dies kann mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, welche jedes Skalarprodukt erfüllt, bewiesen werden:

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w|v+w\rangle \\
&= \langle v|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle + \langle w|w\rangle \\
&= \|v\|^2 + \langle v|w\rangle + \overline{\langle v|w\rangle} + \|w\|^2 \\
&= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\,\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2
\end{aligned}$$

Damit gilt für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$:

$$\|\alpha f + \beta g\| \leq \|\alpha f\| + \|\beta g\| = \alpha\,\|f\| + \beta\,\|g\| < \infty$$

(b) Schwarz-Ungleichung:

"Parallelkomponente" von $|f\rangle$ zu $|g\rangle$:

$$\underbrace{\frac{\langle f|g\rangle}{\langle g|g\rangle}}_{z\in\mathbb{C}}\,|g\rangle = z\,|g\rangle$$

Damit ist $|\xi\rangle = |f\rangle - z\,|g\rangle$ orthogonal, d.h.:

$$\langle g|\xi\rangle = 0 \quad \text{und} \quad |f\rangle = z\,|g\rangle + |\xi\rangle$$

Hieraus lässt sich nun die Ungleichung ableiten:

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \|zg+\xi\|^2 \\
&= \langle zg+\xi|zg+\xi\rangle \\
&= |z|^2\,\langle g|g\rangle + \langle\xi|\xi\rangle + \underbrace{\bar{z}\,\langle g|\xi\rangle + z\,\langle g|\xi\rangle}_{=0} \\
&\geq |z|^2\,\langle g|g\rangle \\
&= \left|\frac{\langle f|g\rangle}{\langle g|g\rangle}\right|^2 \langle g|g\rangle \\
\implies \quad \|f\|^2 &= \frac{|\langle f|g\rangle|^2}{\|g\|^2}
\end{aligned}$$