Kapitel 7

Lineare Algebra

7.1 Einleitung und erste Definitionen

Definition 7.1.1. *Eine nichtleere Menge V heißt* <u>*Vektorraum über $\mathbb{R}$*</u> *(bzw. über $\mathbb{C}$), wenn auf V eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ mit Elementen aus $\mathbb{R}$ (bzw. aus $\mathbb{C}$) erklärt sind, so dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) und $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V$ gilt:*

(G) $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} \in V$ *(Geschlossenheit)*

(A1) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ *(Kommutativität)*

(A2) $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ *(Assoziativität Add.)*

(A3) Es existiert ein Element $\underline{0} \in V$, so dass $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$. (Neutrales Element Add.)

(A4) Für jedes $\underline{a} \in V$ existiert ein $\underline{\tilde{a}} \in V$, so dass

$$\underline{a} + \underline{\tilde{a}} = \underline{0}. \quad \textit{(Inverses Element Add.)}$$

(M1) $(\alpha + \beta) \cdot \underline{a} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{a}$ *(Distributivität)*

(M2) $\alpha \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \cdot \underline{b}$ *(Distributivität)*

(M3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \underline{a}) = (\alpha\beta) \cdot \underline{a}$ *(Assoziativität Mult.)*

(M4) $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$ *(Neutrales Element Mult.)*

Die Elemente aus V heißen Vektoren, die Elemente aus $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) Skalare. Man kann zeigen, dass das Element aus (A3) eindeutig definiert ist. Man nennt es den Nullvektor. Auch $\tilde{\underline{a}}$ aus (A4) ist eindeutig definiert und statt $\tilde{\underline{a}}$ schreiben wir $-\underline{a}$.

Wenn es nicht anders angegeben wird, werden wir mit Vektoren über $\mathbb{R}$ arbeiten.

Beispiele.

1. $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. (Aber nicht über $\mathbb{C}$.)

2. Die Menge $\mathcal{P}_2$ aller Polynome von Ordnung zwei oder weniger mit reellen Koeffizienten ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Oft betrachten wir sogenannte Teilräume eines Vektorraums.

Definition 7.1.2. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Teilraum oder Unterraum von V, wenn gilt*

- $\underline{0} \in U$
- $\underline{a}, \underline{b} \in U \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} \in U$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Also ist $U \subseteq V$ ein Teilraum, wenn U den Nullvektor enthält und U abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation mit Skalaren ist.

Beispiele.

1. Sei $V = \mathbb{R}^2$. $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Teilraum.

2. Sei V der Vektorraum aller 2×2-Matrizen mit reellen Koeffizienten.

(a) Dann ist

$$U := \left\{ \underline{\underline{A}} \in V : \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix},\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Teilraum von V.

(b) Die Menge

$$W := \left\{ \underline{\underline{A}} \in V : \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R} \text{ und } ad = 0,\, bd = 0 \right\}$$

ist kein Teilraum von V, weil

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu W gehören, aber $\underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_2 \notin W$.

Definition 7.1.3. *Der Vektor $\underline{v}$ heißt eine Linearkombination der Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, wenn es Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gibt, so dass*

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Die Menge aller Linearkombinationen von $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ heißt lineare Hülle oder Spann von $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ und wird mit

$$\mathrm{Sp}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \quad \textit{oder} \quad \textit{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

bezeichnet. Die Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ heißen Erzeugendensystem für den Teilraum $Sp\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$.

Wenn V ein Vektorraum ist und $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \in V$, dann ist

$$Sp\left\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\right\}$$

ein Teilraum von V.

Beispiel. Für den Teilraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\}$ aus dem obigen Beispiel gilt

$$U = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Übung 15. Schreiben Sie $p(x) = -1 + 2x^2$ als Linearkombination von $p_1(x) = 1 + 2x - 2x^2$, $p_2(x) = -1 - x$, $p_3(x) = -3 - 4x + 4x^2$.

Definition 7.1.4. *Die Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ heißen <u>linear abhängig</u>, wenn es Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gibt, von denen mindestens einer von Null verschieden ist, so dass*

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}.$$

Dann sagt man, dass die Menge $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ <u>linear abhängig</u> ist. Wenn $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ nicht linear abhängig sind, dann heißen sie <u>linear unabhängig</u>.

Also, wenn $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ linear unabhängig sind, dann impliziert $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Beispiel. Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig. Tatsächlich überprüfen wir, dass aus

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

folgt $\alpha = \beta$ und $2\alpha = 0$, so dass $\alpha = \beta = 0$.

Mit den oben genannten Begriffen können wir jetzt eine Basis definieren.

Definition 7.1.5 (Basis)**.** *Eine Menge $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\} \subseteq V$, $n \in \mathbb{N}$, heißt Basis des Vektorraums, wenn $\mathcal{B}$ ein minimales Erzeugendensystem von V ist, d.h. $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V und $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.*

Lemma 7.1.6. *Wenn $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, dann besitzt V eine Basis.*

Beweis. Übung. □

Lemma 7.1.7 (Koordinaten)**.** *Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis davon. Es gibt genau eine Möglichkeit, einen Vektor $\underline{v} \in V$ als Linearkombination*

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{b}_n$$

zu schreiben.

Beweis. Übung. □

Definition 7.1.8. *Die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ heißen Koordinaten von $\underline{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Wir nennen*

$$\underline{v}_{[\mathcal{B}]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

den Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Beispiel. Die Vektoren

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, da aus

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Der Spann der Vektoren ist

$$Sp\,\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x,\, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Vektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in Sp\,\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ besitzt bezüglich dieser Basis die Koordinaten $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$:

$$\underline{v}_{[\mathcal{B}]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir werden jetzt sehen, dass es genau eine „richtige“ Anzahl von Vektoren für eine Basis gibt.

Lemma 7.1.9. *Sei $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. Dann ist für $m > n$ jede Sammlung von m Vektoren linear abhängig.*

Beweis. Angenommen $\left\{\underline{y}_1, \underline{y}_2, ..., \underline{y}_m\right\}$ ist linear unabhängig. Dann ist jedes $\underline{y}_j \neq \underline{0}$ für $j = 1, ..., m$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, kann $\underline{y}_1$ als

$$\underline{y}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{b}_i$$

dargestellt werden, und, da $\underline{y}_1 \neq \underline{0}$, ist ein Koeffizient von Null verschieden—zum Beispiel $\alpha_k \neq 0$. Dann kann man $\underline{b}_k$ als lineare Kombination der Vektoren aus

$$\left\{\underline{y}_1, \underline{b}_1, ..., \underline{b}_{k-1}, \underline{b}_{k+1}, ..., \underline{b}_n\right\} = \mathcal{B}_2$$

schreiben. Also wird V von $\mathcal{B}_2$ aufgespannt. Jetzt wiederholt man dies mit

$$\underline{y}_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i \underline{b}_i + \beta_k \underline{y}_1$$

usw., bis man $\underline{y}_{n+1}$ als lineare Kombination von $\underline{y}_1, ..., \underline{y}_n$ schreibt, was linearer Unabhängigkeit von $\left\{\underline{y}_1, ..., \underline{y}_m\right\}$ widerspricht. $\square$

Also besitzt jede Basis eines Vektorraums die gleiche Anzahl von Vektoren. Diese Zahl bekommt einen besonderen Namen.

Definition 7.1.10. *Wenn der nichttriviale Vektorraum V eine Basis $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ besitzt, dann heißt n die Dimension des Vektorraums. Wir schreiben*

$$\dim(V) = n.$$

Die Dimension des trivialen Vektorraums $\{\underline{0}\}$ definieren wir als 0.

Definition 7.1.11. *Wenn ein Vektorraum V Dimension $n \in \mathbb{N}$ besitzt, dann heißt er endlich-dimensional.*

Lemma 7.1.12. *Sei V ein Vektorraum mit Dimension n. Wenn $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq V$ linear unabhängig ist, dann bildet $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ eine Basis von V.*

Beweis. Sei $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ linear unabhängig. Sei $\underline{v} \in V$ ein beliebiger Vektor. Nach Lemma 7.1.9 ist

$$\{\underline{v}, \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$$

linear abhängig. Also gibt es Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$, wobei nicht alle Null sind und

$$\alpha_0 \underline{v} + \alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}.$$

Da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ linear unabhängig sind, kann α_0 nicht gleich Null sein. Also gilt

$$\underline{v} = -\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_n \underline{v}_n).$$

Da $\underline{v}$ beliebig ist, haben wir gezeigt, dass $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Da $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ auch linear unabhängig ist, ist $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ eine Basis. □

Bemerkung. *Es lohnt sich, eine gute/geeignete Basis zu finden. Zum Beispiel die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch*

$$\underline{x} \mapsto \textit{Projektion von } \underline{x} \textit{ auf die Richtung } \underline{v} \in \mathbb{R}^2$$

nimmt eine besonders einfache Form an, wenn $\underline{x}$ bezüglich einer geeigneten Basis dargestellt wird. Wir nehmen die Basis

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}, \underline{w}\},$$

wobei $\underline{w}$ orthogonal zu $\underline{v}$ ist. Wenn $\underline{x}$ auf die Basis bezogen wird,

$$\underline{x}_{[\mathcal{B}]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

dann ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *die Projektion von* $\underline{x}$.

Übung 16.

1. Finden Sie einen Vektor $\underline{v}$, so dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Schreiben Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

2. Ergänzen Sie $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. Wie kann man $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich dieser Basis darstellen?

Jetzt zeigen wir, dass jede linear unabhängige Sammlung von Vektoren eines endlichdimensionalen Vektorraums zu einer Basis ergänzt werden kann.

Lemma 7.1.13. *Sei V ein Vektorraum mit* $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ *und* $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$ *linear unabhängig. Dann kann* $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$ *zu einer Basis ergänzt werden, das heißt, es gibt $n - m$ Vektoren $\underline{x}_i$, so dass*

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{n-m}\}$$

eine Basis von V ist.

Beweis. Nach Lemma 7.1.9 ist $m \leq n$. Wenn $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$ V aufspannt, dann ist $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$ eine Basis von V. Wenn nicht, dann gibt es ein $\underline{x}_1 \in V$, so dass $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m, \underline{x}_1\}$ linear unabhängig ist. Entweder gilt $Sp\,\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m, \underline{x}_1\} = V$ oder es existiert $\underline{x}_2$, so dass $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m, \underline{x}_1, \underline{x}_2\}$ linear unabhängig ist. Nach Lemma 7.1.9 endet dieser Prozess in $n - m$ Schritten. □

7.2 Lineare Abbildungen

Definition 7.2.1. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Die Abbildung $L\colon V \longrightarrow W$ heißt linear, wenn gilt*

$$L(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2) = \alpha_1 L(\underline{v}_1) + \alpha_2 L(\underline{v}_2) \qquad \text{für alle } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V.$$

Beispiele.

1. $V = W = \mathbb{R}^2$, $L =$Drehung eines Vektors um θ Grad.
2. $V = W =$Polynome in x vom Grad $< n$, $L = \frac{d}{dx}$.
3. $V = W = \mathbb{R}^n$, $L =$skalare Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zu einer linearen Abbildung sind zwei wichtige Teilräume assoziiert.

Definition 7.2.2. *Sei $L\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Das Bild von L ist*

$$\{\underline{w} \in W : \underline{w} = L(\underline{v}) \text{ für ein } \underline{v} \in V\};$$

dies ist ein Teilraum von W. Die Dimension des Bildes heißt Rang von L.

Der Kern (oder Nullraum) von L ist

$$\{\underline{v} \in V : L(\underline{v}) = \underline{0}\};$$

dies ist ein Teilraum von V. Die Dimension des Kerns heißt Defekt von L.

Für Bild und Kern einer linearen Abbildung L werden wir B_L und K_L schreiben.

Bemerkung. *Eine lineare Abbildung ist injektiv genau dann, wenn* $\mathrm{Kern}(L) = \{\underline{0}\}$.

Beispiel. In dem obigen Beispiel

$$V = W = \text{Polynome in } x \text{ vom Grad} < n,\ L = \frac{d}{dx},$$

ist der Kern von L die Menge der konstanten Funktionen.

Übung 17. Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass Bild(L) ein Teilraum von W ist und Kern(L) ein Teilraum von V ist.

Sehr wichtig für lineare Abbildungen ist die folgende Aussage, die wir aber nicht beweisen werden.

Satz 7.2.3. *Sei $L\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Es gilt*

$$\dim(B_L) + \dim(K_L) = \dim(V).$$

Als Folgerung erhält man zum Beispiel für eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $m < n$, dass es ein $\underline{v} \neq \underline{0}$ in $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$L\underline{v} = \underline{0}.$$

Oder für $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei $K_L = \{\underline{0}\}$, dass es für jeden Vektor $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Gleichung

$$L\underline{x} = \underline{b}$$

gibt. (Übung.)

Definition 7.2.4. *Wenn eine lineare Abbildung $L\colon V \longrightarrow W$ bijektiv ist, dann heißt sie* <u>*invertierbar*</u>*. Man schreibt*

$$L^{-1}$$

für die Umkehrfunktion.

Als Folgerung von Satz 7.2.3 merkt man, dass wenn V, W endlich-dimensional sind und

L invertierbar ist, dann gilt

$$\dim(V) = \dim(W).$$

Man kann „neue Abbildungen aus alten“ definieren: Seien L_1, L_2 lineare Abbildungen von V nach W. Dann ist

$$(L_1 + L_2) : V \to W$$

durch

$$(L_1 + L_2)(\underline{v}) := L_1(\underline{v}) + L_2(\underline{v})$$

definiert. Seien $L_1 : V \to W$ und $L_2 : W \to X$ lineare Abbildungen. Dann ist

$$L_2 \circ L_1 : V \to X$$

durch

$$(L_2 \circ L_1)(\underline{v}) = L_2(L_1(\underline{v}))$$

definiert. Verkettung ist **assoziativ** ($L_3 \circ (L_2 \circ L_1) = (L_3 \circ L_2) \circ L_1$) und **distributiv** ($(L_3 + L_2) \circ L_1 = L_3 \circ L_1 + L_2 \circ L_1$ und $L_3 \circ (L_2 + L_1) = L_3 \circ L_2 + L_3 \circ L_1$), aber im Allgemeinen **nicht kommutativ** ($L_2 \circ L_1 \neq L_1 \circ L_2$)! Weil sie assoziativ und distributiv ist, wird die Zusammensetzung zweier linearer Abbildungen oft wie Multiplikation geschrieben:

$$L_2 \circ L_1 = L_2 L_1.$$

(Aber nochmals die Warnung, dass $L_2 L_1 \neq L_1 L_2$.)

Beispiel. $V = W = X =$Polynome in x, $L_1 = \frac{d}{dx}$, $L_2 =$Multiplikation mit x. Dann ist

$$L_1(\alpha p_1 + \beta p_2) = \frac{d}{dx}(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)) = \alpha p_1'(x) + \beta p_2'(x) = \alpha L_1(p_1) + \beta L_1(p_2),$$
$$L_2(\alpha p_1 + \beta p_2) = x(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha x p_1(x) + \beta x p_2(x) = \alpha L_2(p_1) + \beta L_2(p_2),$$

aber $L_1 \circ L_2(x) = \frac{d}{dx} x^2 = 2x \neq x = L_2 \circ L_1(x)$.

Ein wichtiges Beispiel einer linearen Abbildung ist eine Projektion.

Definition 7.2.5. *Eine lineare Abbildung $P : V \to V$ heißt Projektion, falls gilt*

$$P^2 = P. \tag{7.2.1}$$

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und

$$P(x_1, ..., x_n) = (0, 0, x_3, x_4, ..., x_n).$$

Dann ist P linear:

$$\begin{aligned} P(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) &= (0, 0, \alpha x_3 + \beta y_3, ..., \alpha x_n + \beta y_n) \\ &= \alpha(0, 0, x_3, ..., x_n) + \beta(0, 0, y_3, ..., y_n) \\ &= \alpha P(\underline{x}) + \beta P(\underline{y}) \end{aligned}$$

und P erfüllt (7.2.1):

$$\begin{aligned} P^2(\underline{x}) = P(P\underline{x}) &= P((0, 0, x_3, ..., x_n)) \\ &= (0, 0, x_3, ..., x_n) \\ &= P\underline{x}. \end{aligned}$$

Übung 18. Sei $V =$ stetige Funktionen auf $[-1,1]$ und

$$(Pf)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

(der gerade Teil von f). Zeigen Sie, dass P eine Projektion auf V ist.

7.3 Matrizen

Wir stellen lineare Abbildungen oft durch Matrizen dar.

Satz 7.3.1. *Für $\{l_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ ist die Abbildung $\tilde{L}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, die durch $\tilde{L}(\underline{x}) = \underline{w}$ mit*

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_j \tag{7.3.1}$$

gegeben ist, eine lineare Abbildung. Andererseits kann jede lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in der Form (7.3.1) mit geeigneten Zahlen l_{ij} dargestellt werden.

Beweis. Sei $\tilde{L}$ durch (7.3.1) definiert. Dann ist

$$[\tilde{L}(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y})]_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}(\alpha x_j + \beta y_j) = [\alpha\tilde{L}(\underline{x}) + \beta\tilde{L}(\underline{y})]_i$$

für jedes $i = 1, ..., m$. Andererseits sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine gegebene lineare Abbildung. Sei $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor, der

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{e}_j$$

bezüglich der Standardbasis $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^{n}$ (mit $\underline{e}_j = (0,0,...,0,\underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}},0,...,0)$) dargestellt ist. Da L linear ist, gilt

$$L(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(\underline{e}_j). \tag{7.3.2}$$

Man definiere l_{ij} durch die i-te Komponente von $L\underline{e}_j$:

$$l_{ij} := (L\underline{e}_j)_i.$$

Nach (7.3.2) gilt

$$[L(\underline{x})]_i = \sum_{j=1}^{n} x_j [L(\underline{e}_j)]_i = \sum_{j=1}^{n} x_j l_{ij}. \tag{7.3.3}$$

Da dies für jedes $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt, ist L durch die Zahlen $\{l_{ij}\}_{i,j}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ festgelegt. $\square$

Definition 7.3.2. *Sei $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Die Matrix $\underline{\underline{L}}$ von L ist*

$$\underline{\underline{L}} = (l_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei $l_{ij} = (L\underline{e}_j)_i$. Die Zahlen l_{ij} heißen Koeffizienten der Matrix. $(l_{i1}, \dots, l_{in})$ heißt die i-te Reihe und

$$\begin{pmatrix} l_{1j} \\ \vdots \\ l_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{heißt die } j\text{-te Spalte.}$$

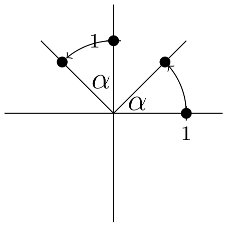
Wir nennen $\underline{\underline{L}}$ eine $m \times n$-Matrix und schreiben $\underline{\underline{L}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Bemerkung. *Der Raum der $m \times n$-Matrizen bildet einen Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.*

Beispiel. Wir betrachten jetzt ein paar Abbildungen und ihre Matrixdarstellungen.

1. $V = W = \mathbb{R}^2$, L sei die Drehung um den Winkel α. Dann ist

$$L(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad L(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix},$$

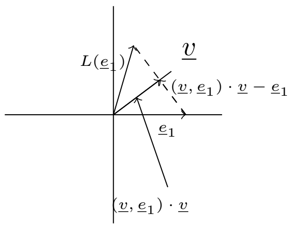


so dass die Matrix der Abbildung

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ist.

2. $V = W = \mathbb{R}^2$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $\|v\| = 1$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. L sei die Spiegelung an der Geraden $\{t\underline{v}, t \in \mathbb{R}\}$.



Es gilt

$$L(\underline{e}_1) = 2(\underline{v}, \underline{e}_1)\underline{v} - \underline{e}_1 = 2v_1\underline{v} - \underline{e}_1,$$

$$L(\underline{e}_2) = 2(\underline{v}, \underline{e}_2)\underline{v} - \underline{e}_2 = 2v_2\underline{v} - \underline{e}_2,$$

so dass

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 2v_1^2 - 1 & 2v_1v_2 \\ 2v_2v_1 & 2v_2^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{7.3.4}$$

3. Finden Sie eine Matrixdarstellung für $\frac{d}{dx}$ auf dem Vektorraum aller Polynome Grades 2 und kleiner.

Die Form (7.3.4) ist nicht besonders schön, weil die Standardbasis der Abbildung nicht gut passt. Wir werden gleich eine schönere Darstellung identifizieren. Zuerst schauen wir uns Matrixaddition und -multiplikation an.

Doch wie stellt man Addition und Multiplikation linearer Abbildungen durch ihre Matrizen dar? Man merkt Folgendes:

Seien A, $B : V \to W$ lineare Abbildungen mit zugehörigen Matrizen $(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$, $(\underline{\underline{B}})_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Dann ist $A + B$ durch die Matrix

$$(\underline{\underline{A + B}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$$

dargestellt. Seien $A : V \to W$ und $B : W \to X$ lineare Abbildungen, wobei $\dim(V) = l$, $\dim(W) = n$, $\dim(X) = m$. Seien die zu A bzw. B gehörigen Matrizen

$$(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}, \quad i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., l,$$
$$(\underline{\underline{B}})_{ki} = b_{ki}, \quad k = 1, ..., m,\ i = 1, ..., n.$$

Dann ist BA durch die Matrix

$$(\underline{\underline{BA}})_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}, \quad k = 1, ..., m,\ j = 1, ..., l$$

dargestellt. Insbesondere gilt für Matrix-Vektor-Multiplikation für $\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$(\underline{\underline{B}}\,\underline{v})_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j.$$

Also ist der m-Vektor $\underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ im Spann der Spalten von $\underline{\underline{B}}$. Wenn wir $\underline{\underline{B}}$ als Sammlung von

Spaltenvektoren $\underline{B}_j$ schreiben:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_2 & \dots & \underline{B}_m \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = v_1\underline{B}_1 + v_2\underline{B}_2 + \dots + v_m\underline{B}_m.$$

Bemerkung. *Da im Abschnitt 7.2 gemerkt wurde, dass die Zusammensetzung linearer Abbildungen im Allgemeinen nicht kommutativ ist, ist Matrixmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ. Beispiel:*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen ergibt:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem impliziert $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}}$ nicht, dass $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ ist. Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 7.3.3. *Sei $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $\{\underline{v}_j\}_{j=1}^n$, $\{\underline{w}_i\}_{i=1}^m$ Basen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Die Matrix von L bezüglich dieser Basen ist $(\tilde{l}_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, wobei $\tilde{l}_{ij}$ durch*

$$L(\underline{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{l}_{ij}\underline{w}_i$$

definiert ist.

Beispiel. Jetzt schauen wir uns die Spiegelung an der Geraden $\{t\underline{v}, t \in \mathbb{R}\}$ nochmals an. Für die Basis von $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}, \underline{w}\}, \quad \text{wobei } (\underline{v}, \underline{w}) = 0,$$

gilt

$$L(\underline{v}) = \underline{v}, \quad L(\underline{w}) = -\underline{w}.$$

Also ist L bezüglich $\mathcal{B}$ durch

$$\underline{\underline{\tilde{L}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Da diagonale Matrizen besonders einfach sind, sehen wir wieder, dass eine geeignete Wahl der Basis hilfreich sein kann.

Bemerkung. *Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{\underline{w}_1, ..., \underline{w}_m\}$ in Definition 7.3.3 sind die Koeffizienten $\tilde{l}_{ij}$ eindeutig bestimmt.*

Es sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Es sei $\underline{\underline{L}}$ die Matrix bezogen auf die Standardbasen $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ im $\mathbb{R}^n$ und $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m\}$ im $\mathbb{R}^m$. Also $L(e_i) = e_j$ und damit $\underline{\underline{L}}_{ij} = l_{ij} = L(e_i)_j$. Ebenso ist $\underline{\underline{\tilde{L}}}_{ij} = \tilde{l}_{ij} = L(\underline{v}_i)_j$ wobei der Index j die Komponente in Richtung w_j beschreibt.

Wie sind die Matrizen $\underline{\underline{L}}$ und $\underline{\underline{\tilde{L}}}$ von L bezüglich der Basen $\mathcal{B}^V$, $\mathcal{B}^W$ miteinander verbunden? Wenn wir B und C durch

$$B : \underline{v}_j \mapsto \underline{e}_j, \quad C : \underline{w}_i \mapsto \underline{e}_i$$

definieren, dann gilt

$$\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\tilde{L}}}\,\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{L}}.$$

Definition 7.3.4. *Seien $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen, die*

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{\tilde{L}}}\,\underline{\underline{B}}^{-1}$$

erfüllen für eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix $\underline{\underline{B}}$. Dann werden $\underline{\underline{L}}$ und $\underline{\underline{\tilde{L}}}$ ähnlich genannt.

Wir werden später Eigenschaften ähnlicher Matrizen genauer anschauen. Da (wie oben gemerkt) sie die gleiche lineare Abbildung darstellen, würde man erwarten, dass ihre „grundliegenden“ Eigenschaften gleich sind.

7.4 Lineare Gleichungssysteme

Sehr oft möchte man ein System der Form

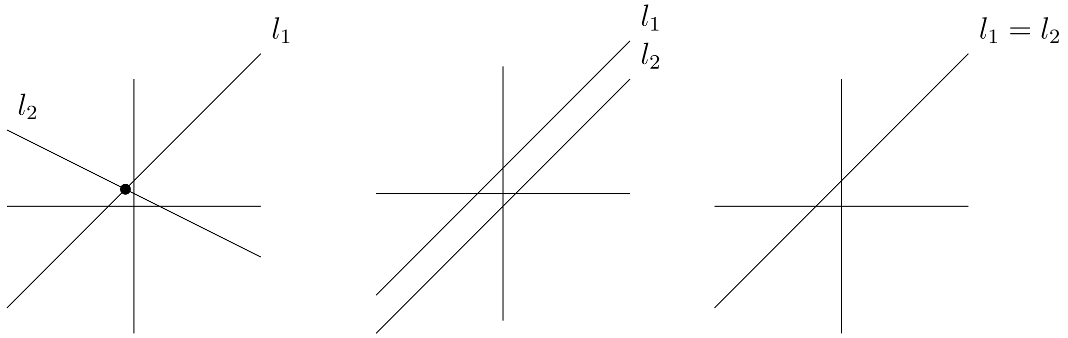
$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \tag{7.4.1}$$

für gegebene $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ nach $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ lösen. Ein System der Form (7.4.1) heißt ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, ..., x_n$. Die Zahlen $a_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ij}$ heißen Koeffizienten. Wenn $\underline{b} = \underline{0}$ gilt, dann heißt das System homogen. Ansonsten heißt es inhomogen. Wenn $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung in (7.4.1) löst, so heißt $\underline{x}$ eine Lösung. Wichtige Fragen sind

1. Gibt es eine Lösung zu (7.4.1)? Äquivalent ist: Ist $\underline{b} \in \mathrm{Bild}(\underline{\underline{A}})$?
2. Ist die Lösung zu (7.4.1) eindeutig bestimmt? Äquivalent ist: Ist $\underline{\underline{A}}$ injektiv?
3. Was ist die Lösung? Äquivalent ist: Welches $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Urbild von $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ unter $\underline{\underline{A}}$? Angewandter ausgedrückt: Wie berechnet man die Lösung?

Aktuelle angewandte Frage: Wie approximiert man schnell die Lösung, wenn $\underline{\underline{A}}$ sehr groß ist?

Sie wissen aus der Schule, dass es für $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ drei Möglichkeiten gibt: Das lineare Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.



(a) Eine eindeutige Lösung (b) Keine Lösung (c) Unendlich viele Lösungen

Das Gleiche ist im Allgemeinen wahr. Um dies zu besprechen, übersetzen wir Satz 7.2.3 für Matrizen. Zunächst definieren wir:

Definition 7.4.1. *Sei $\underline{\underline{A}}$ eine $(m \times n)$-Matrix. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren heißt Zeilenrang von $\underline{\underline{A}}$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren heißt Spaltenrang von $\underline{\underline{A}}$. Bild, Kern, und Defekt einer Matrix werden als Bild, Kern, und Defekt der durch $\underline{\underline{A}}$ bestimmten linearen Abbildung definiert. (Sehen Sie Definition 7.2.2.) Bild und Kern werden mit $B_{\underline{\underline{A}}}$ und $K_{\underline{\underline{A}}}$ gekürzt. Die Dimension des Bildes wird Rang von $\underline{\underline{A}}$ genannt.*

Man kann zeigen, dass diese drei Zahlen gleich sind:

Satz 7.4.2. *Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Es gilt*

$$\textit{Zeilenrang von } \underline{\underline{A}} = \textit{Spaltenrang von } \underline{\underline{A}} = \textit{Rang von } \underline{\underline{A}}.$$

Jetzt kehren wir zum System $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ zurück. Aus Satz 7.2.3 erhalten wir:

$$\mathrm{Rang}(\underline{\underline{A}}) + \dim(K_{\underline{\underline{A}}}) = n.$$

Satz 7.4.3 (Lösungen von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$). *Seien $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt Folgendes:*

(i) *Wenn Rang($\underline{\underline{A}}$) $= m$, dann existiert mindestens eine Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$.*

(ii) *Wenn Rang($\underline{\underline{A}}$) $= n$, dann existiert höchstens eine Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$.*

(iii) *Eine Lösung $\underline{x}$ von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ ist eindeutig bestimmt genau dann, wenn*

$$K_{\underline{\underline{A}}} = \{\underline{0}\}.$$

Ansonsten gibt es unendlich viele Lösungen

$$\underline{x} + \alpha \underline{w}, \quad \textit{wobei } \underline{w} \in K_{\underline{\underline{A}}}.$$

Wenn $m < n$, kann es insbesondere keine eindeutig bestimmte Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ geben weil

$$\mathrm{Rang}(\underline{\underline{A}}) \le m \quad \text{und} \quad \mathrm{Rang}(\underline{\underline{A}}) + \dim(K_{\underline{\underline{A}}}) = n \quad \Rightarrow \quad \dim(K_{\underline{\underline{A}}}) > 0.$$

Das lineare Gleichungssystem heißt unterbestimmt.

Wenn $m > n$, dann existieren Vektoren $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, für die es keine Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ gibt (weil Rang($\underline{\underline{A}}$) $\le n < m$). Das lineare Gleichungssystem heißt überbestimmt.

Der Algorithmus, durch den wir $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ lösen liest sich wie folgt:

- Rang($\underline{\underline{A}}$) $= \dim B_L$ bestimmen und eine Basis von $B_{\underline{\underline{A}}}$ finden,
- Defekt($\underline{\underline{A}}$) $= K_{\underline{\underline{A}}}$ bestimmen und eine Basis von $K_{\underline{\underline{A}}}$ finden,

- die Umkehrung einer Matrix berechnen

heißt das Gaußsche Eliminationsverfahren. Wir lernen diese Methode durch Beispiele kennen.

Beispiele.

1. Lösung(en) von

$$x_1 + x_2 = 3,$$
$$x_1 - x_2 = 1.$$

Wir bauen die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Wir nennen die erste Reihe R_1 und die zweite Reihe R_2 und ersetzen „die zweite Reihe durch die zweite Reihe minus (Eins mal) die erste Reihe“:

$$R_2 \to R_2 - 1 \cdot R_1.$$

Durch diese Operation erhalten wir die geänderte (erweiterte) Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right). \tag{7.4.2}$$

Was uns wichtig ist, ist, dass wir jetzt eine Matrix in „oberer Dreiecksform“ haben, das heißt, die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

hat Nullen unter der Diagonalen. Jetzt, da die Matrix (7.4.2) diese Form erreicht hat, lösen wir durch sogenannte Rückwärtselimination (das heißt, wir lösen durch Einsetzen):

$$\begin{aligned} -2x_2 &= -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1, \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= 3 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot x_1 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Lösung(en) von

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Hier ist die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Zunächst erhalten wir zwei Nullen unter der Eins in Reihe 1, Spalte 1, indem wir

$$R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1 \quad \text{und} \quad R_3 \to R_3 - R_1$$

ersetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

(Hier war uns wichtig, dass $a_{11} \neq 0$ war. Das Element a_{11} wird hier das „Pivotelement“ gennant.) Jetzt brauchen wir nur eine Null in Reihe 3, Spalte 2, also ersetzen wir

$$R_3 \to R_3 - 1 \cdot R_2$$

und wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

Rückwärtselimination liefert

$$\begin{aligned} 3x_3 &= -3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1, \\ -1 \cdot x_2 - 3x_3 &= 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot x_2 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3 Lösung(en) von

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Die erweiterte Matrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1, \quad R_3 \to R_3 + 3 \cdot R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die letzte Gleichung ist trivial ($\underline{0}^T \underline{x} = 0$), und die ersten zwei Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned} 5x_2 + 5x_3 = 5 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - 1 \cdot x_3 = -2 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 2(1 - x_3) + x_3 - 2 = -x_3. \end{aligned}$$

Hier bleibt x_3 als freier Parameter, und Lösungen haben die Form

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -c \\ 1 - c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Der Kern der Abbildung ist in diesem Beispiel

$$Sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

4 Lösung(en) von

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1,\\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1{,}1. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -2 & 1{,}1 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1, \quad R_3 \to R_3 + 3 \cdot R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & 5 & 5 & 5\\ 0 & -5 & -5 & -4{,}9 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & 5 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 \end{array}\right).$$

Die letzte Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0,1$$

kann nicht erfüllt werden. Dieses System besitzt keine Lösung. (Und Rang($\underline{\underline{A}}$) < 3.)

Als wir das Gaußsche Eliminationsverfahren angewendet haben, haben wir das System

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \tag{7.4.3}$$

(durch Addition von Reihen usw.) in ein neues System

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{x} = \underline{\tilde{b}} \tag{7.4.4}$$

verändert und behauptet, dass die Lösungen zu (7.4.3) und (7.4.4) gleich sind. Frage: Welche Eigenschaften von $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ sind gleich und welche Eigenschaften von $\underline{\underline{A}}$ wurden durch das Verfahren verändert? Der Gaußsche Algorithmus basiert auf den Operationen

(i) zwei Zeilen vertauschen,

(ii) eine Zeile mit einem reellen $\alpha \neq 0$ multiplizieren,

(iii) die i-te Zeile durch die Summe der Zeilen i und j ersetzen.

Wenn $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ aus $\underline{\underline{A}}$ durch den Gaußalgorithmus konstruiert wird, dann sagen wir, dass $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ und $\underline{\underline{A}}$ <u>reihenäquivalent</u> sind. Wenn $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ reihenäquivalent sind, dann haben sie den gleichen Zeilenspann und dadurch den gleichen Zeilenrang. Da Zeilenrang gleich Rang ist, haben sie auch den gleichen Rang. Wenn die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{b} \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\tilde{A}}} & \underline{\tilde{b}} \end{pmatrix}$$

reihenäquivalent sind, dann ist die Lösung oder Lösungsmenge von

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

gleich der Lösung/Lösungsmenge von

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{x} = \underline{\tilde{b}}.$$

7.5 Matrixinverse

Man kann das Gaußsche Eliminationsverfahren benutzen, um die Inverse einer Matrix zu berechnen.

Definition 7.5.1. *Sei $\underline{\underline{A}}$ eine $(n \times n)$-Matrix. $\underline{\underline{A}}$ heißt* <u>*invertierbar*</u> *oder* <u>*nichtsingulär*</u>*, wenn es eine $(n \times n)$-Matrix B gibt, so dass*

$$\underline{\underline{BA}} = \underline{\underline{AB}} = I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann heißt $\underline{\underline{B}}$ die Inverse von $\underline{\underline{A}}$ und man schreibt dafür

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}.$$

Wenn $\underline{\underline{A}}$ nicht invertierbar ist, so heißt $\underline{\underline{A}}$ <u>*singulär*</u>*.*

Was immer $\underline{\underline{A}}$ bewirkt, wird von $\underline{\underline{A}}^{-1}$ rückgängig gemacht. Nicht alle Matrizen haben eine Inverse. $\underline{\underline{A}}$ besitzt eine Inverse genau dann, wenn die assoziierte lineare Abbildung bijektiv ist, also genau dann, wenn

$$\mathrm{Rang}(\underline{\underline{A}}) = n \quad \text{und} \quad Kern(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{0}\}\,.$$

Nach Satz 7.2.3 gilt dies genau dann, wenn

$$Kern(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{0}\}\,.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 7.5.2. *Eine $(n \times n)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist nichtsingulär genau dann, wenn $Kern(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{0}\}$.*

Bemerkung. *Wenn $\underline{\underline{A}}$ invertierbar ist, dann ist*

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

äquivalent zu

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}.$$

Allerdings löst man ein lineares System so gut wie nie durch diese Vorgehensweise!

Beispiele.

1 Eine Diagonalmatrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn keines der Diagonalelemente Null ist. Dann ist

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

(2) Eine 2×2-Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Dann ist

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(3) Wenn $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ invertierbar sind, so ist $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ invertierbar und es gilt

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1},$$

denn

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} &= \underline{\underline{B}}^{-1}(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}})\underline{\underline{B}} \\ &= \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{B}} \\ &= \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{B}} \\ &= \underline{\underline{I}}. \end{aligned}$$

(Wenn man zuerst Socken und dann Schuhe anzieht, dann muss man zuerst die <u>Schuhe</u> wieder ausziehen.)

Es ist fast immer unpraktisch, die Inverse zu berechnen! Allerdings schauen wir uns an, wie man die Inverse durch das sogenannte Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren berechnen kann. Man möchte die Gleichung

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

spaltenweise lösen. Als Beispiel betrachten wir eine 3×3-Matrix $\underline{\underline{A}}$ und wir bezeichnen die Spalten der gesuchten Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mit

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{pmatrix} .$$

Man möchte

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

lösen - also muss man drei Gleichungssysteme lösen. Um eine $n \times n$-Matrix zu invertieren, muss man n Gleichungssysteme lösen!

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Im Gauß-Jordan-Verfahren bearbeitet man die erweiterte Matrix, bis die ursprüngliche Matrix $\underline{\underline{A}}$ in die Einheitsmatrix verändert wird. Aus der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

erhalten wir die obere Dreiecksmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right),$$

und dann gehen wir weiter:

$$\begin{aligned} R_2 \to \frac{3}{4}R_3 + R_2 \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \\ R_1 \to \frac{2}{3}R_2 + R_1 \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \\ R_1 \to \frac{1}{2}R_1, \quad R_2 \to \frac{2}{3}R_2, \quad R_3 \to \frac{3}{4}R_3 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{matrix}}_{\underline{\underline{A}}^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right). \end{aligned}$$