I. Physikalisches Institut — RWTH Aachen University

Prof. Dr. Stefan Schael
Dr. Henning Gast

Experimentalphysik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Übung 02

Aufgabe 1 *Mandelstam-Variablen* (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die elastische Streuung von identischen Teilchen $A + A \to A + A$ gilt:

$$
\begin{aligned}
s &= 4(\vec{p}^{\,2} + m^2) \\
t &= -2\vec{p}^{\,2}(1 - \cos\theta) \\
u &= -2\vec{p}^{\,2}(1 + \cos\theta).
\end{aligned}
$$

Dabei sind $\vec{p}$ der Impuls des einfallenden Teilchens im Schwerpunktsystem, m die Masse des Teilchens und θ der Streuwinkel.

Aufgabe 2 *Linearbeschleuniger und Zyklotron* (4+4=8 Punkte)

Protonen sollen auf eine kinetische Energie von $E_{\text{kin}} = 20\,\text{MeV}$ beschleunigt werden. Dazu steht eine hochfrequente Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin\omega t$ mit $U_0 = 200\,\text{kV}$ und $\omega/2\pi = f = 20\,\text{MHz}$ zur Verfügung.

a. Wie viele Driftröhren werden für einen Linearbeschleuniger benötigt? Wie groß müssen die Rohrlängen L_k des Linearbeschleunigers sein? Wie lang ist der gesamte Beschleuniger?

b. Wie viele Umläufe werden in einem Zyklotron benötigt? Wie stark muss das Magnetfeld B sein? Welchen Durchmesser hat das Zyklotron?

Hinweise: Die Beschleunigung soll jeweils auf den Maxima des Absolutwerts der Wechselspannung stattfinden. Rechnen Sie nicht-relativistisch ($E_{\text{kin}} \ll m_p$!).

Aufgabe 3 *Luminosität* (1+1+1=3 Punkte)

a. Berechnen Sie die instantane Luminosität in $1/(\text{cm}^2\,\text{s})$ und $1/(\text{nb}\,\text{s})$ des LHC (Umfang 26,695 km) mit den Parametern:

$$n_B = 2808, \quad N_1 = N_2 = 115 \cdot 10^9, \quad \sigma_x = \sigma_y = 15\,\mu\text{m}.$$

b. Berechnen Sie die integrierte Luminosität in 1/fb über eine Betriebszeit von 6 Monaten mit jeweils durchschnittlich 30 Tagen unter der Annahme, dass die mittlere Effizienz des Beschleunigers etwa 25 % beträgt.

c. Der Produktionswirkungsquerschnitt für das Higgs-Boson beträgt bei LHC $\sigma(pp \to H + X) \simeq 20\,\mathrm{pb}$. Wie viele Higgs-Bosonen werden an einem der Wechselwirkungspunkte des LHCs in 6 Monaten produziert?

Aufgabe 4 *Ionisationsverluste* (5+2+2=9 Punkte)

a. Plotten Sie (z.B. mit `matplotlib`) den Ionisationsverlust (in MeV) von Myonen, Pionen, Kaonen, Protonen und α-Teilchen in 1 cm dickem Polystyrene-Szintillator ($[\mathrm{C_6H_5CHCH_2}]_n$) als Funktion des Impulses. Wählen Sie eine geeignete Auftragung!
Der spezifische Energieverlust ist in erster Näherung und für nicht zu hohe Impulse gegeben durch

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = K\rho z^2 \frac{Z}{A}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{2m_e c^2\beta^2\gamma^2 W_{\max}}{I^2} - \beta^2\right)$$

Hierbei ist $K = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0{,}307\,\mathrm{MeV\,g^{-1}\,cm^2}$ und

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2\beta^2\gamma^2}{1 + 2\gamma m_e/M + (m_e/M)^2}$$

ist der maximale Energieübertrag eines Teilchens der Masse M auf ein Elektron. Die Dichte von Polystyrene beträgt $\rho = 1{,}06\,\mathrm{g/cm^3}$ und $\langle Z/A\rangle = 0{,}537\,68$, die mittlere Anregungsenergie ist $I = 68{,}7\,\mathrm{eV}$.

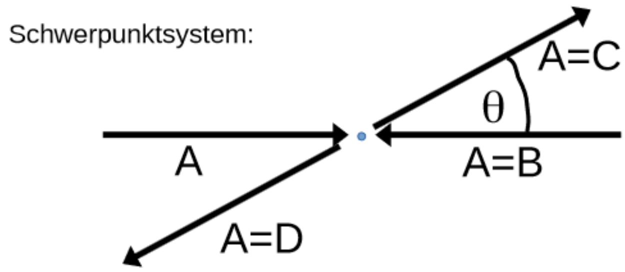
b. Bei welchem Impuls ist der mittlere Energieverlust von Pionen und Kaonen gleich?

c. Welche Energie deponiert ein minimalionisierendes Teilchen im Mittel in 1 cm Szintillator?

Prof. Dr. Stefan Schael
Dr. Henning Gast

Physik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Musterlösung zu Übung 2, Aufgabe 1



Die Mandelstam-Variablen sind definiert als

$$s = (p_A + p_B)^2,$$
$$t = (p_A - p_C)^2,$$
$$u = (p_A - p_D)^2.$$

Im Schwerpunktsystem lassen sich die Viererimpulse für die identischen Teilchen direkt angeben:

$$p_A = \begin{pmatrix} E_A \\ \vec{p}_A \end{pmatrix}, \quad p_B = \begin{pmatrix} E_A \\ -\vec{p}_A \end{pmatrix}, \quad p_C = \begin{pmatrix} E_A \\ \vec{p}_C \end{pmatrix}, \quad p_D = \begin{pmatrix} E_A \\ -\vec{p}_C \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt)

Dabei ist (vgl. Skizze)

$$\vec{p}_A \cdot \vec{p}_C = \cos(\theta) \cdot |\vec{p}_A|\,|\vec{p}_C| \quad \text{mit} \quad |\vec{p}_A| = |\vec{p}_C| \equiv |\vec{p}|.$$

(1 Punkt)

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
s &= \begin{pmatrix} E_A + E_A \\ \vec{p}_A - \vec{p}_A \end{pmatrix}^2 = (2E_A)^2 = 4E_A^2 = 4(\vec{p}^{\,2} + m^2),\\
t &= \begin{pmatrix} E_A - E_A \\ \vec{p}_A - \vec{p}_C \end{pmatrix}^2 = -\left(\vec{p}_A^{\,2} + \vec{p}_C^{\,2} - 2\vec{p}_A\vec{p}_C\right)\\
&= -2\left(\vec{p}^{\,2} - \vec{p}_A\vec{p}_C\right)\\
&= -2\left(\vec{p}^{\,2} - \vec{p}^{\,2}\cos\theta\right)\\
&= -2\vec{p}^{\,2}(1 - \cos\theta),\\
u &= \begin{pmatrix} E_A - E_A \\ \vec{p}_A - \vec{p}_D \end{pmatrix}^2 = -\left(2\vec{p}^{\,2} - 2\vec{p}_A\vec{p}_D\right) = \ldots = -2\vec{p}^{\,2}(1 + \cos\theta).
\end{aligned}$$

(jeweils 1 Punkt)

Loesung_Beschleuniger

September 10, 2024

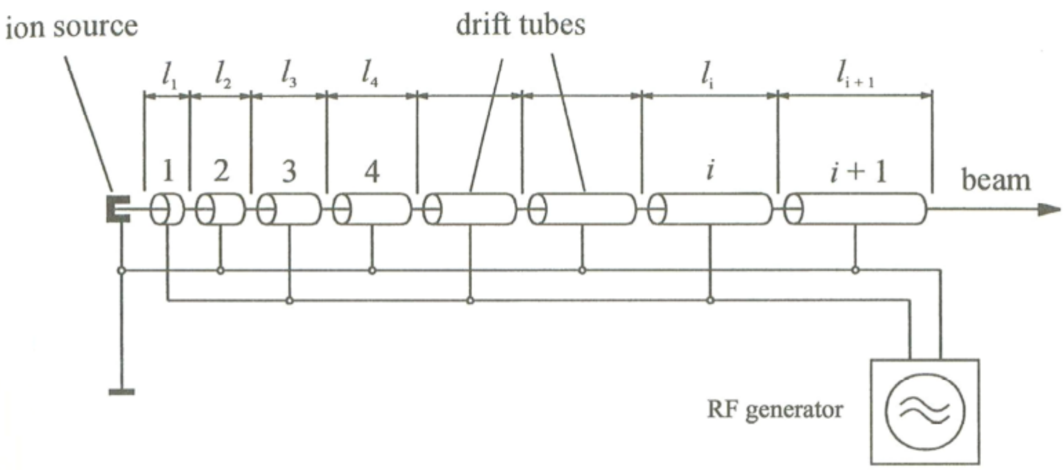
1 Musterlösung zur 2. Übung, Aufgabe 2

```
import numpy as np
from astropy import constants as const
from astropy import units as u
```

1.1 Allgemeine Definitionen

```
Ekin = 20.*u.MeV
U0   = 200.*u.kV
f    = 20.*u.MHz
```

1.2 a) Linearbeschleuniger



Die Anzahl der benötigten Driftröhren beim Linearbeschleuniger ist gegeben durch

$$n = \frac{E_{\mathrm{kin}}}{U_0}.$$

```
# Anzahl der Umläufe
n = Ekin/U0/const.e.si
```

```
n
```

$6.2415091 \times 10^{17}\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{C\,kV}}$

```
n = n.decompose()
n
```

100

(*1 Punkt*)

Die Länge der k-ten Röhre ergibt sich aus der Driftzeit T und der Teilchengeschwindigkeit. Die Driftzeit muss zur Frequenz f der zur Beschleunigung eingesetzten Wechselspannung passen, $T = 1/f$, die Geschwindigkeit v_k ergibt sich nicht-relativistisch ($E_{\mathrm{kin}} \ll m_p$) aus der Energiebetrachtung

$$\frac{1}{2} m_p v_k^2 = k e U_0$$

zu

$$v_k = \sqrt{\frac{2}{m_p} k e U_0}.$$

Damit die Beschleunigungsspannung in Phase mit der Teilchenbewegung ist, muss gelten:

$$L_k = v_k \frac{T}{2}.$$

Damit folgt:

$$L_k = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{2}{m_p} e U_0} \cdot \frac{1}{2f}.$$

```
L1 = np.sqrt(2/const.m_p*const.e.si*U0)/2/f
L1.decompose().round(3)
```

0.155 m

(*2 Punkte*)

Die Gesamtlänge des Linearbeschleunigers beträgt also

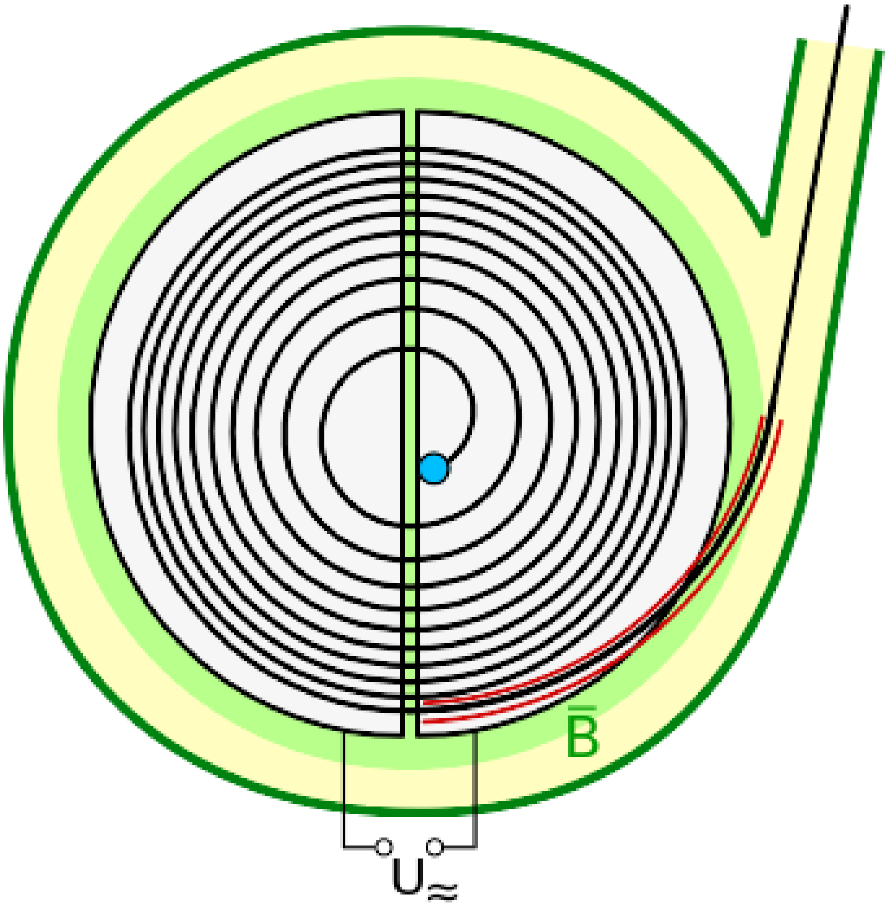
$$L = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{m_p} e U_0} \cdot \frac{1}{2f}.$$

```
(np.sum([np.sqrt(k) for k in range(1, int(n)+1)]) * L1.decompose()).round(3)
```

103.908 m

(*1 Punkt*)

1.3 b) Zyklotron



Beim Zyklotron findet an jedem Übergang zwischen den beiden Dosen eine Beschleunigung statt, deshalb ist

$$n = \frac{E_{\mathrm{kin}}}{2U_0}.$$

```
# Anzahl der Umläufe
n = (Ekin/U0/const.e.si / 2).decompose()
n
```

50

(*1 Punkt*)

Das Gleichgewicht von Zentripetalkraft und Lorentzkraft,

$$m\omega^2 r = qvB = qr\omega B,$$

führt zur Zyklotronfrequenz

$$\omega = \frac{q}{m}B.$$

Dabei sind m die Teilchenmasse, ω die Kreisfrequenz, q die Teilchenladung, v die Geschwindigkeit des Teilchens und B das Magnetfeld. Daraus ergibt sich das benötigte Magnetfeld zu

$$B = \frac{m_p}{e} 2\pi f.$$

```
# Magnetfeld
B = const.m_p/const.e.si * 2*np.pi*f
B.to('T').round(3)
```

1.312 T

(*1 Punkt*)

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt für den Radius r

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

und daraus

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{mv}{q\frac{m}{e}2\pi f} = \frac{v}{2\pi f} \quad \text{mit} \quad v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m_p}}.$$

Der Durchmesser beträgt $D = 2r$.

```
# Durchmesser
v = np.sqrt(2*Ekin/const.m_p)
r = v / 2/np.pi/f
D = 2*r
D.decompose().round(3)
```

0.985 m

(*2 Punkte*)

Loesung_Luminositaet

September 10, 2024

1 Musterlösung zur 2. Übung, Aufgabe 3

```
import numpy as np
from astropy import constants as const
from astropy import units as u
```

1.1 a)

```
U_Ring = 26.695*u.km
```

```
# Die Protonen fliegen mit 99.99% der Lichtgeschwindigkeit.
t_Umlauf = (U_Ring/const.c).to('us')
t_Umlauf
```

89.044935 s

```
f = (1/t_Umlauf).to("Hz")
f
```

11230.285 Hz

LHC: Strahlparameter

```
sigma_x = 15.*u.um
sigma_y = 15.*u.um

nProtonsPerBunch = 115e9
nBunches         = 2808
```

Formel für die instantane Luminosität:

```
(nBunches * f * nProtonsPerBunch**2 / (4*np.pi * sigma_x * sigma_y)).to("1/
↪(cm**2*s)")
```

$1.4749971 \times 10^{34} \; \frac{1}{\mathrm{s\,cm^2}}$

```
L_inst = (nBunches * f * nProtonsPerBunch**2/(4*np.pi*sigma_x*sigma_y)).to("1/
↪(nbarn*s)")
```

```
L_inst
```

14.749971 $\frac{1}{\mathrm{nbarn\,s}}$

(*1 Punkt*)

1.2 b)

Integrierte Luminosität nach 6 Monaten:

```
epsilon     = 0.25
t_Operation = 6*30*u.d*epsilon
L_int       = (L_inst*t_Operation).to("1/fbarn")
L_int
```

57.347889 $\frac{1}{\mathrm{fbarn}}$

(*1 Punkt*)

1.3 c)

Anzahl der Higgs-Bosonen in 6 Monaten:

```
sigma = 20*u.pbarn
(sigma*L_int).to('')
```

1146957.8

(*1 Punkt*)

```
# Vorlesung 3, Folie 13
L_peak = 2.e34 / (u.cm**2*u.s)
(L_peak*6*30*u.d).to("1/fbarn")
```

311.04 $\frac{1}{\mathrm{fbarn}}$

```
L_peak.to("1/(nbarn*s)")
```

20 $\frac{1}{\mathrm{nbarn\,s}}$

Loesung_Ionisationsverluste

September 10, 2024

1 Musterlösung zur 2. Übung, Aufgabe 4

1.1 a)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.constants
import scipy.optimize
```

Zunächst definieren wir eine Funktion für die Bethe-Bloch-Formel. Am Ende hängt der Energieverlust nur vom Impuls p, der Teilchenmasse m und der Ladung z des einfliegenden Teilchens ab. Dabei verwenden wir die bekannten Formeln $\beta = p/E$, $E^2 = p^2 + m^2$ und $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$, und wir geben alle vorkommenden Größen in MeV an.

```
def dEdx(p, m, z):
    rho = 1.06
    K = 0.307
    ZperA = 0.53768
    me = scipy.constants.physical_constants['electron mass energy equivalent in␣
 ↪MeV'][0]
    Ion = 68.7e-6   # MeV
    betaSqr = p**2 / (p**2 + m**2)
    gammaSqr = 1. / (1. - betaSqr)
    gamma = np.sqrt(gammaSqr)
    Wmax = 2*me*betaSqr*gammaSqr / (1.+2.*gamma*me/m+(me/m)**2)
    return K * rho * z**2 * ZperA / betaSqr * (0.5*np.log(2.
 ↪*me*betaSqr*gammaSqr*Wmax/Ion**2) - betaSqr)
```

Definition der relevanten Teilchenmassen:

```
mMyon = scipy.constants.physical_constants['muon mass energy equivalent in␣
 ↪MeV'][0]
mPion = 139.57
mKaon = 493.68
mProt = scipy.constants.physical_constants['proton mass energy equivalent in␣
 ↪MeV'][0]
mAlph = scipy.constants.physical_constants['alpha particle mass energy␣
 ↪equivalent in MeV'][0]
```

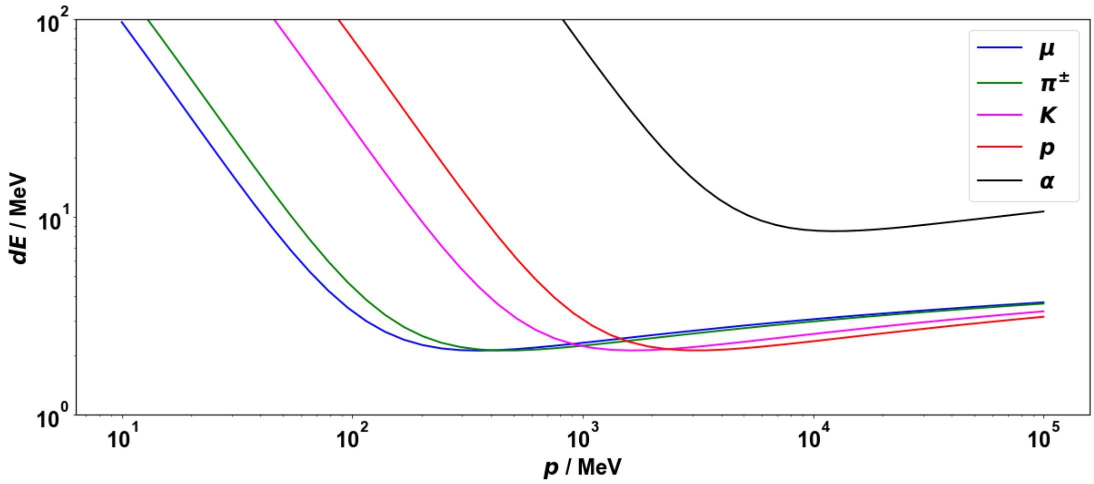
Einige Einstellungen für gut lesbare Achsenbeschriftungen:

```
plt.rcParams['font.size'] = 24.0
plt.rcParams['font.family'] = 'sans-serif'
plt.rcParams['font.sans-serif'] = 'Arial'
plt.rcParams['font.weight'] = 'bold'
plt.rcParams['axes.labelsize'] = 'medium'
plt.rcParams['axes.labelweight'] = 'bold'
plt.rcParams['axes.linewidth'] = 1.2
plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2.0
```

Jetzt plotten wir die Ionisationsverluste in 1cm Szintillator.

```
x = 1.0
logp = np.logspace(1., 5.)
plt.figure(figsize=(20,8))
plt.loglog(logp, x*dEdx(logp, mMyon, 1), color='blue', label=r'$\mu$')
plt.loglog(logp, x*dEdx(logp, mPion, 1), color='green', label=r'$\pi^{\pm}$')
plt.loglog(logp, x*dEdx(logp, mKaon, 1), color='magenta', label=r'$K$')
plt.loglog(logp, x*dEdx(logp, mProt, 1), color='red', label=r'$p$')
logp2 = np.logspace(2., 5.)  # nummerische Artefakte vermeiden
plt.loglog(logp2, x*dEdx(logp2, mAlph, 2), color='black', label=r'$\alpha$')
plt.ylim(1., 100.)
plt.xlabel('$p$ / MeV')
plt.ylabel('$dE$ / MeV')
plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f49218d9940>
```



(3 Punkte für korrekten Plot einschl. Legende o.ä.)

(*1 Punkt für korrekte Achsenbeschriftungen*)

(*1 Punkt für sinnvolle Darstellung*)

1.2 b)

Wir setzen die Ionisationsverluste für Pionen und Kaonen gleich und geben einen an dem Plot abgeschätzten Startwert für die nummerische Lösung an.

```
scipy.optimize.fsolve(lambda x: dEdx(x, mPion, 1)-dEdx(x, mKaon, 1), 1.e3)
```

```
array([981.83663136])
```

(*2 Punkte*)

1.3 c)

Wir minimieren die Bethe-Bloch-Formel, z.B. für Myonen, mit einem oben abgelesenen Startwert. Die eingesetzte Wegstrecke beträgt 1cm.

```
scipy.optimize.minimize(lambda x: dEdx(x, mMyon, 1)*1.0, 3.e2)
```

```
      fun: 2.1134521395452035
 hess_inv: array([[159275.50055819]])
      jac: array([-4.97698784e-06])
  message: 'Optimization terminated successfully.'
     nfev: 24
      nit: 4
     njev: 12
   status: 0
  success: True
        x: array([350.83823985])
```

Interessant für uns ist hier vor allem der Funktionswert am Minimum: 2,1 MeV.

(*2 Punkte*)