I.PI I. Physikalisches Institut | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Prof. Dr. Stefan Schael
Dr. Henning Gast

Experimentalphysik Vb (Teilchen- und Astrophysik)

Übung 06

Aufgabe 1 *Lokale Eichinvarianz der Schrödingergleichung* (7 Punkte)

Zeigen Sie für den eindimensionalen Fall, dass die mit den kovarianten Ableitungen geschriebene Schrödingergleichung lokal eichinvariant ist: Es sei eine Wellenfunktion $\Psi(t,x)$ gegeben, die die neue Schrödingergleichung

$$\frac{1}{2m}(\mathrm{i}D_x)^2\Psi = \mathrm{i}D_0\Psi$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass dann auch die lokal gedrehte Wellenfunktion

$$\Psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q\alpha(t,x)}\Psi$$

die neue Schrödingergleichung erfüllt. Dabei sind

$$D_x = -\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}QA \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}QV,$$

wobei A und V zwei Felder sind, die sich gemäß

$$A' = A + \partial\alpha/\partial x \quad \text{und} \quad V' = V - \partial\alpha/\partial t$$

transformieren. Kommentieren Sie Ihre Lösung!

Sie können den Beweis per Hand führen oder das Computeralgebrasystem `sympy` benutzen. Geben Sie in diesem Fall im Moodle als Lösung zu dieser Aufgabe bitte Ihr (kommentiertes) jupyter notebook sowohl als `ipynb`-Datei als auch als `pdf`-Export ab.

Tipps: In `sympy` können Sie mit `Function` abstrakte Funktionen mehrerer Veränderlicher definieren, mit `Derivative` erzeugen Sie abstrakt die (partielle) Ableitung einer Funktion. Die Ausführung der Produktregel in den auftretenden Ausdrücken können Sie mit `doit` erzwingen. Zum Aufstellen der kovarianten Ableitungen eignen sich gewöhnliche `python`-Funktionen, die man dann später auf `sympy`-Ausdrücke anwendet.

Aufgabe 2 *Eichinvarianz und Photonmasse* (2+1=3 Punkte)

Aus den Maxwell-Gleichungen folgt in kovarianter Schreibweise die Wellengleichung für das Photonfeld A^μ zu

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu$$

mit der Stromdichte j^μ. Dabei wird die Summenkonvention verwendet. Klassisch ergeben sich das magnetische und das elektrische Feld aus A^μ zu $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \partial \vec{A} / \partial t$.

a. Zeigen Sie, dass diese Wellengleichung invariant unter der folgenden lokalen Eichtransformation ist:

$$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \alpha.$$

b. Zeigen Sie, dass hingegen die Wellengleichung eines massiven Vektorfelds,

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2) A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu,$$

nicht eichinvariant ist.

Für massive Vektorteilchen gibt es also keine lokale Eichinvarianz.

Aufgabe 3 *Higgs-Fabrik* (1+1+4+3=9 Punkte)

Um die Eigenschaften des Higgs-Bosons präzise zu vermessen, soll ein e^+e^--Collider gebaut werden.

a. Welche Vorteile hat ein e^+e^--Collider im Vergleich zu einem $p\bar{p}$-Collider?

b. Der dominante Produktionsprozess des Higgs-Bosons ist die sogenannte Higgs-Strahlung, bei der ein Z-Boson ein Higgs-Boson abstrahlt. Welche Schwerpunktsenergie muss der e^+e^--Collider mindestens haben, damit Z- und Higgs-Teilchen reell erzeugt werden können?

c. Das Higgs-Boson zerfällt am häufigsten in die schwersten Fermionen, die reell erzeugt werden können. Zeichnen Sie den kompletten Feynmangraphen der Produktion und dieses Zerfalls. Beschreiben Sie die experimentelle Signatur in einem Teilchendetektor wie CMS.

d. Drücken Sie den Viererimpuls p_H des Higgs-Bosons durch die Viererimpulse von e^+, e^- und Z aus. Leiten Sie eine Gleichung ab, die die Higgs-Masse m_H als Funktion der e^+e^--Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$, Z-Masse m_Z und Energie E_Z des Z-Bosons darstellt. Beschreiben Sie eine Methode, mit der man die Higgs-Masse messen kann, ohne die Zerfallsteilchen des Higgs-Bosons zu rekonstruieren.

Aufgabe 4 *Neutrinooszillationen* (4+2=6 Punkte)

Betrachten Sie wie in der Vorlesung die Eigenzustände $|\nu_\mu\rangle$ und $|\nu_\tau\rangle$ der schwachen Wechselwirkung, die mit den Masseneigenzuständen $|\nu_2\rangle$ und $|\nu_3\rangle$ über eine Mischungsmatrix verknüpft sind:

$$\begin{pmatrix} |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix}.$$

a. Zeigen Sie explizit, dass die Wahrscheinlichkeit, ein bei $t = 0$ erzeugtes Myonneutrino nach der Zeit t wieder als Myonneutrino zu messen, gegeben ist durch

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\mu}(t) = 1 - \sin^2(2\theta)\,\sin^2\left(\frac{E_3 - E_2}{2}t\right).$$

b. Stellen Sie $P_{\nu_\mu \to \nu_\mu}(L)$ und $P_{\nu_\mu \to \nu_\tau}(L)$ für $\Delta m^2_{23} = 0{,}0025\,\mathrm{eV}^2$, $E = 1\,\mathrm{GeV}$ und $\theta = 45°$ im Bereich bis $L = 10\,000\,\mathrm{km}$ in einem gemeinsamen Plot mit logarithmischer L-Achse grafisch dar.