Kap. 8:

Kompressibilität, Schall und thermische Ausdehnung in 1D

RWTH

8. Kompressibilität, Schall u. thermische Ausdehnung in 1D (1)

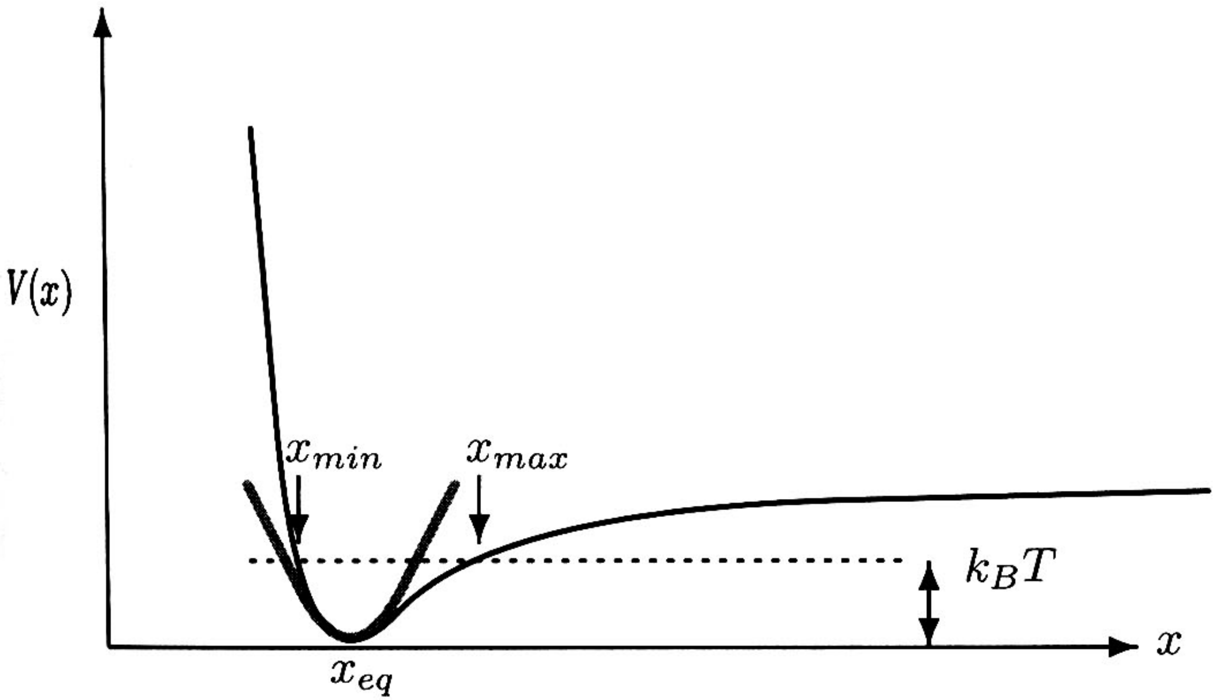


Fig. 8.1 Potential between neighboring atoms (thin black). The thick light gray curve is a quadratic approximation to the minimum (it may look crooked but in fact the thick gray curve is symmetric and the thin black curve is asymmetric). The equilibrium position is x_{eq}. At finite temperature T, the system can oscillate between x_{max} and x_{min} which are not symmetric around the minimum. Thus as T increases the *average* position moves out to larger distance and the system expands.

Rechnung: Taylorentwicklung

Kompressibilität

(1) → Taylorentwicklung des interatomaren Potentials um Gleichgewichtsabstand x_0

$$V(x) \approx V(x_0) + \underbrace{0}_{\text{Entwicklung um Minimum}} + \underbrace{\frac{D_2}{2}(x-x_0)^2}_{\text{harmonische Näherung}} + \underbrace{\frac{D_3}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots}_{\text{anharmonische Terme}}$$

harmonische Näherung ↓ lineares Kraftgesetz (Hooke)

Kompressibilität $\beta := \frac{-\Delta V / V}{\Delta p}$ (Responsefunktion)

$\Rightarrow$ thermodyn. Definition $\beta := -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_{T=\text{const.}}$ oder $S = \text{const.}$

isotherme / adiabatische Kompressibilität

Hier vereinfacht: 1D, $T=0$, $S=0$:

$$\beta_{1D} = -\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial F}\Big|_{L=L_{eq}}$$

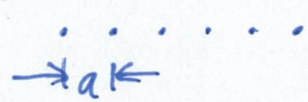
$$\beta_{1D} = -\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial F}\Big|_{x=x_{eq}}$$

$$= +\frac{1}{x}\frac{1}{D}\Big|_{x=x_{eq}} = \frac{1}{Da}$$

Hookesches Gesetz $F(x) = -Dx$

$$x(F) = -\frac{1}{D}F$$

$$\frac{\partial x}{\partial F} = -\frac{1}{D}$$



8. Schallgeschwindigkeit (2)

Die Ausbreitung von mechanischen Wellen (Schallwellen) benötigt
eine **Trägheitseigenschaft** („Masse“, zur Speicherung von kinetischer Energie) und
eine **elastische Eigenschaft** („Rückstellkraft“, Speicherung von potentieller Energie).

Die Schallgeschwindigkeit v ist in verschiedenen Materialien grundsätzlich von der Form

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastische Eigenschaft}}{\text{Trägheitseigenschaft}}}$$

Bsp.: **Schallwellen auf einer gespannten Saite**

F: Spannkraft zur Spannung der Saite

ρ_{lin}: Lineare Massendichte der Saite (kg/m)

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\rho_{lin}}}}$$

$$1\,\frac{m}{s} = 1\sqrt{\frac{kg\,\frac{m}{s^2}}{kg/m}}$$

Ohne Spannkraft kann sich keine Seilwelle ausbreiten.
Auslenkung bewirkt eine elastische Dehnung, wobei benachbarte Seilstücke aufgrund der Spannkraft aneinander ziehen.

v hängt nicht von der Frequenz f ab, nur von F und ρ_{lin}.

Wellenlänge: $\lambda = v / f$

Vgl.: Stimmen einer Geige

8. Kompressibilität und Schallgeschwindigkeit (3)

Schallwellen in Fluiden:

Hier steckt die potentielle Energie in der Druckänderung in kleinen Volumenelementen.

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastische Eigenschaft}}{\text{Trägheitseigenschaft}}}$$

Ein Maß für die Volumenänderung unter Druck liefert der **Kompressionsmodul K**:

$$\boxed{K = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}}$$

***Minus**:*
Δp und ΔV haben immer verschiedene Vorzeichen.

Ausbreitungsgeschwindigkeit v:

ρ: Massendichte (kg/m^3)

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}}$$

Sonderfall ideales Gas:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma\, k_B\, T}{m}}}$$

In **Festkörpern** ist der Ausdruck im Allgemeinen komplizierter ... *(Scherspannungen).*

Für Dehnungswellen auf einem elastischen Stab muss K durch den **Elastizitätsmodul E** ersetzt werden ($E \approx K$).

$$\boxed{E = \frac{\Delta F / A}{\Delta l / l}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Rechnungen:
- **Ideales Gas**
- **1D-Kristall**

RWTH

Kompressibilität und Schallgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\beta \rho}}$$

Sonderfälle:

a) ideales Gas: $K = -V \frac{\partial p}{\partial V}\Big|_T$ $\quad p = nRT/V$

$$= +V \frac{nRT}{V^2}\Big|_T = p \quad \text{(isothermer K-Modul)}$$

$\underline{\underline{K = \gamma p}}$ f. adiabat. V.

$\rho = N \frac{m}{V}$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p V}{N m}} = \sqrt{\frac{\gamma N k_B T}{N m}} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}}$$

$\gamma = c_p / c_V$
(Adiabaten-Koeff.)

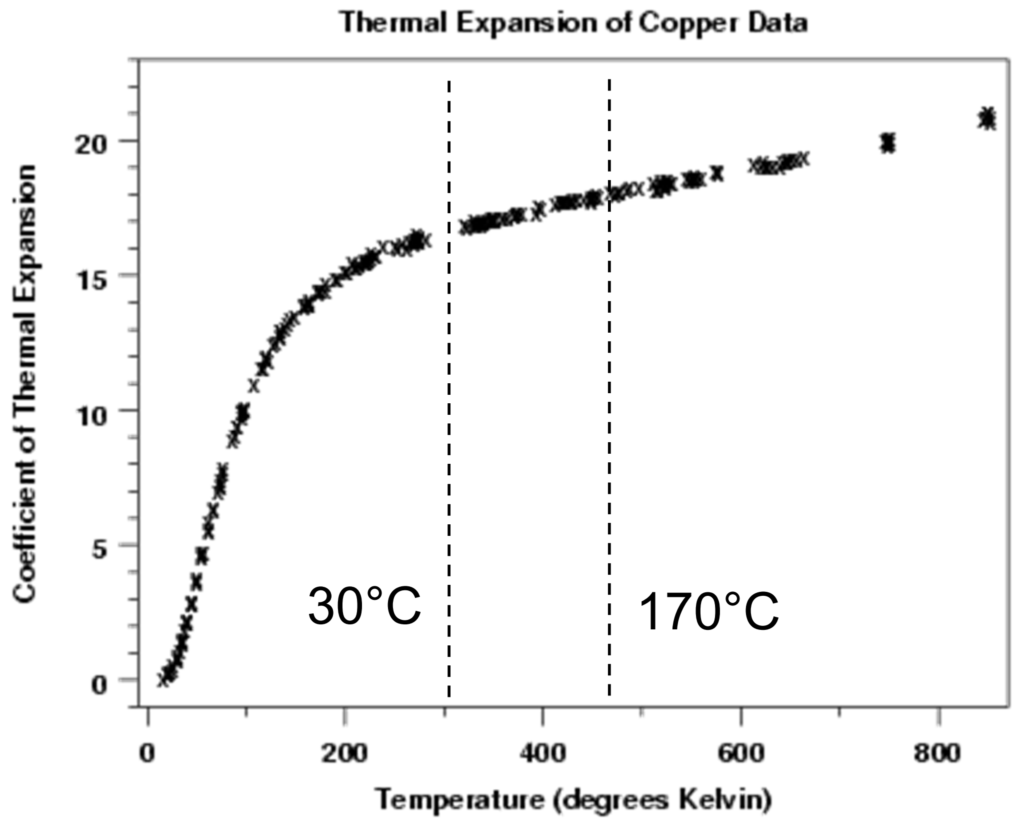
b) 1 D-Kristall („lineare Kette"):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\beta \rho}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{Da}\,\frac{m}{a}}} = \sqrt{\frac{D a^2}{m}}$$

8. Thermische Ausdehnung (4)

Signifikante Temperaturabhängigkeit von Responsefunktionen und zugehörigen Materialkonstanten:

- Thermische Ausdehnung
- Elastische Moduli
- Bruchfestigkeit
- …



Film:
08-09 Elasticity at Low Temperatures

Rechnung:
Thermische Ausdehnung

Thermische Ausdehnung

Vorauss.: Anharmonizität $D_3 \neq 0$

Quantenmechanik

$$\langle x(T)\rangle = \frac{\sum_n \langle n|x|n\rangle e^{-E_n/k_BT}}{\sum_n e^{-E_n/k_BT}}$$

Klassische Mechanik

$$\langle x(T)\rangle = \frac{\int dx\, x\, e^{-V(x)/k_BT}}{\int dx\, e^{-V(x)/k_BT}}$$

$$e^{-\frac{V(x)}{k_BT}} = e^{-\frac{1}{k_BT}\left(V(x_{eq}) + \frac{D_2}{2}(x-x_{eq})^2 + \frac{D_3}{6}(x-x_{eq})^3 + \dots\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{k_BT}\left(\text{const.} + \frac{D_2}{2}(x-x_{eq})^2\right)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{k_BT}\frac{D_3}{6}(x-x_{eq})^3}}_{\approx \left[1 - \frac{D_3}{6}\frac{(x-x_{eq})^3}{k_BT}\right]} \cdot \underbrace{e^{\dots}}_{\approx 1}$$

Normierung des Pot. nicht von Belang, da konst. Faktor sowohl im Zähler als auch Nenner vor das Integral gezogen werden kann.

s. Übung!

Ziel: $l(T) = l_0(1+\alpha\,\Delta T)$

$$\downarrow$$

$\alpha(T)$

$\alpha = O(10^{-5}\,K^{-1})$