beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Anwendungen.

1. $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ impliziert, dass $f \equiv c$ auf (a,b) für ein $c \in \mathbb{R}$.

2. Zeigen Sie, dass das Polynom

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$$

genau eine Nullstelle besitzt.

Es gilt $p(0) = 1$, $p(-1) = -2 + 3 - 6 + 1 = -4$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Nullstelle x_1. Wenn es eine zweite Nullstelle x_2 gibt, dann existiert ein ξ zwischen x_1 und x_2, so dass

$$|p'(\xi)| = \left| \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = 0.$$

Aber

$$p'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = 6(x^2 + x + 1)$$

besitzt keine Nullstelle. Also existiert keine zweite Nullstelle x_2 von p.

3. Sei f auf $(0,2)$ differenzierbar und auf $[0,2]$ stetig mit $f(0) = -3$ und $f'(x) \le 5$. Was ist der größte Wert, den $f(2)$ annehmen kann? Antwort: 7.

④ Abschätzungen zeigen, wie zum Beispiel

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \text{ für } x > 0 \quad \text{oder} \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Satz 5.5.2 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) sind, dann existiert ein $c \in (a, b)$, so dass*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Beweis. Man definiere

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

Es gilt $h(a) = h(b)$. Außerdem ist h auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Also existiert ein $c \in (a, b)$, so dass

$$h'(c) = 0.$$

□

Man kann Satz 5.5.2 benutzen, um die berühmte Regel von l'Hôspital zu beweisen.

Satz 5.5.3 (l'Hôspitalsche Regel). *Sei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ und I ein Intervall, das a enthält oder als Endpunkt hat. Seien f, g differenzierbar auf $I \setminus \{a\}$ und $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \setminus \{a\}$. Angenommen*

- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} g(x) = 0$ oder
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} g(x) = \pm\infty$ und in allen dieser Fälle
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B$, wobei $B \in \mathbb{R}$ oder $B = \pm\infty$,

dann gilt

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = B.$$

Seien Sie bitte vorsichtig, dass Sie die l'Hôspitalsche Regel nur anwenden, wenn die Annahmen erfüllt werden! Betrachten Sie zum Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{5}{10+2x}.$$

In diesem Beispiel ist für $f(x) := 5$, $g(x) := 10+2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiele. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

① $$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^2}$$

② $$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\exp(x)}{x}$$

③ $$\lim_{x\downarrow 0} x\,\log(x).$$

Tip: Betrachte bei 1) zunächst den Quotienten $\exp(x)/x$, bei 3) den Quotienten $x\,\log(x) = \log(x)/(1/x)$.

5.6 Optimierungsprobleme, Monotonie und Konvexität

Eine andere (sehr wichtige) Anwendung des Mittelwertsatzes sind Optimierungsprobleme.

Definition 5.6.1. *Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a,b)$. Wenn*

$$f(x_0) \geq f(x)$$

für alle x in einer Umgebung von x_0, dann sagen wir, dass f in x_0 ein lokales Maximum besitzt und dass x_0 ein lokales Maximum von f ist. Wir nennen $f(x_0)$ den lokalen Maximalwert. Analog für lokales Minimum. Wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum hat, dann sagen wir, dass x_0 ein lokales Extremum von f ist.

Definition 5.6.2. *Wenn f in x_0 differenzierbar ist und*

$$f'(x_0) = 0,$$

dann heißt x_0 ein stationärer oder kritischer Punkt von f.

Lemma 5.6.3. *Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar. Wenn f in x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist*

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass x_0 ein lokales Maximum ist. Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge mit

$$x_n \neq x_0, \quad x_n \to x_0 \text{ für } n \to \infty.$$

Dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}. \tag{5.6.1}$$

Wenn $x_n > x_0$ für alle n, dann ist

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leq 0 \text{ für alle } n \text{ groß genug,}$$

so dass aus (5.6.1) und dem Vergleichskriterium

$$f'(x_0) \leq 0 \tag{5.6.2}$$

folgt. Wenn $x_n < x_0$ für alle n, dann gilt

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0 \text{ für alle } n \text{ groß genug,}$$

aus dem folgt

$$f'(x_0) \geq 0. \tag{5.6.3}$$

Aus (5.6.2) und (5.6.3) schließen wir

$$f'(x_0) = 0.$$

□

Bemerkung. *Die Umkehrung gilt nicht! Es ist möglich, dass f in x_0 differenzierbar ist und*

$$f'(x_0) = 0,$$

obwohl f kein Extremum in x_0 hat. Beispiel: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Also ist $f'(x_0) = 0$ eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass die differenzierbare Funktion f in x_0 ein lokales Extremum hat.

Bemerkung. *Wie das Beispiel*

$$f(x) = |x|$$

zeigt, kann ein Punkt x_0 (hier $x_0 = 0$) ein lokales Extremum sein, ohne dass

$$f'(x_0) = 0.$$

Wenn wir alle lokalen Extrema einer Funktion suchen, werden wir folgendes Korollar zu Lemma 5.6.3 anwenden:

Wenn x_0 ein lokales Extremum von f ist, dann gilt entweder $f'(x_0) = 0$ oder $f'(x_0)$ existiert nicht.

Lemma 5.6.4. *Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit*

$$f'(x_0) = 0 \quad \textit{für alle } x \in (a,b). \tag{5.6.4}$$

Dann ist f konstant auf (a,b), das heißt, es existiert $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = c \quad \textit{für alle } x \in (a,b).$$

Beweis. Wenn f nicht konstant wäre, dann würde es x, $y \in (a,b)$ geben mit $x < y$ und $f(x) \neq f(y)$. Nach dem Mittelwertsatz gäbe es ein $\xi \in (x,y)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (5.6.4). □

Zunächst bemerken wir, dass es eine Verbindung zwischen Monotonie von f und dem Vorzeichen von f' gibt.

Satz 5.6.5. *Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.*

(i) *f ist genau dann monoton wachsend bzw. monoton fallend, wenn*

$$f'(x) \geq 0 \quad \textit{für alle } x \in (a,b) \qquad \textit{bzw.} \qquad f'(x) \leq 0 \quad \textit{für alle } x \in (a,b).$$

(ii) *Wenn*

$$f'(x) > 0 \quad \textit{für alle } x \in (a,b) \qquad \textit{bzw.} \qquad f'(x) < 0 \quad \textit{für alle } x \in (a,b),$$

dann ist f streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend.

Bemerkung. *Der Satz benötigt Differenzierbarkeit. Die Funktionen*

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

erfüllen $f'(x) = 1 \quad \forall\, x \in (0,2) \setminus \{1\}$, $g'(x) = 1 \quad \forall\, x \in (0,2) \setminus \{1\}$ und f ist monoton, während g nicht monoton ist.

Bemerkung. *In* (ii) *gilt die Umkehrung nicht. $f(x) = x^3$ ist streng monoton auf $\mathbb{R}$, aber*

$$f'(0) = 0.$$

Partieller Beweis von Satz 5.6.5. Wir zeigen:

$$f \text{ monoton wachsend} \qquad \text{impliziert} \qquad f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a,b).$$

Sei $x_0 \in (a,b)$. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \tag{5.6.5}$$

für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \neq x_0$, die gegen x_0 konvergiert. Insbesondere können wir x_n monoton fallend wählen; dies hat den Vorteil, dass der Differenzenquotient ein Vorzeichen hat:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.6.6}$$

Aus (5.6.5) und (5.6.6) folgt

$$f'(x_0) \geq 0.$$

Da x_0 beliebig war, ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Der Beweis zu *(ii)* und die andere Richtung in *(i)* werden in den Übungen besprochen. □

Beispiel. Zeigen Sie, dass $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ streng monoton wachsend ist. Dies folgt aus

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

und Satz 5.6.5 *(ii)*.

Satz 5.6.6. *Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b) \setminus \{x_0\}$ differenzierbar. Wenn für ein $\delta > 0$ gilt*

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{auf } (x_0 - \delta, x_0), \qquad f'(x) \leq 0 \quad \text{auf } (x_0, x_0 + \delta), \tag{5.6.7}$$

dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum, analog für Minimum. Umgekehrt, wenn

$$f'(x) > 0 \quad \text{auf } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}, \qquad \text{oder} \qquad f'(x) < 0 \quad \text{auf } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\},$$

dann ist x_0 kein lokales Extremum.

Beweis. Übung. Wie nutzt man Stetigkeit im Beweis? □

Bemerkung. *Wenn f in x_0 differenzierbar ist und (5.6.7) gilt, dann folgt $f'(x_0) = 0$. Mit dem Satz kann man allerdings auch Funktionen wie*

$$f(x) = |x| \quad \text{oder} \quad g(x) = \sqrt{|x|}$$

betrachten.

Wenn f so glatt ist, dass zwei Ableitungen von f existieren und stetig sind, dann können wir kritische Punkte durch das Vorzeichen von $f''(x_0)$ analysieren—wenn dies ein Vorzeichen hat.

Satz 5.6.7. *Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in (a,b)$ ein kritischer Punkt von f. Es gilt:*

(i) *Falls $f''(x_0) < 0$ ist, dann ist x_0 ein lokales Maximum von f.*

(ii) *Falls $f''(x_0) > 0$ ist, dann ist x_0 ein lokales Minimum von f.*

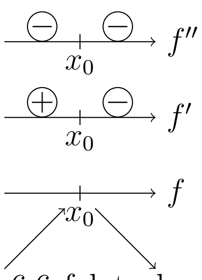
Was sagt der Satz, wenn $f''(x_0) = 0$? Nichts! [KEINE AUSSAGE, WENN $f''(x_0) = 0$.] Was passiert, wenn $f''(x_0) = 0$? Alles ist möglich. Betrachten Sie $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = -x^4$, $f_3(x) = x^3$. (Wir besprechen diese Situation wieder, wenn wir über die Taylorformel sprechen.)

Beweis von Satz 5.6.7. zu *(i)*: Da f'' stetig ist und $f''(x_0) < 0$, gilt

$$f''(x_0) < 0 \text{ in einer Umgebung } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ von } x_0.$$

Also ist f' streng monoton fallend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Aus $f'(x_0) = 0$ folgt

$$f'(x) > 0 \quad \text{auf } (x_0 - \varepsilon, x_0), \qquad f'(x) < 0 \quad \text{auf } (x_0, x_0 + \varepsilon)$$



Skizze zu dem Beweis von Satz 5.6.7, die Umkreisten $+, -$ geben das Vorzeichen der Funktion in dem Bereich an.

Aus Satz 5.6.6 folgt, dass x_0 eine lokale Maximalstelle von f ist. Der Beweis von *(ii)* erfolgt analog. $\square$

Definition 5.6.8 (Konvex). *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann heißt f konvex, falls gilt*

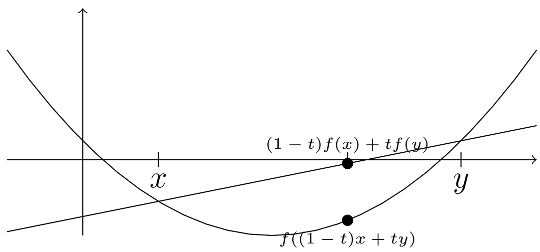
$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{für alle } x, y \in [a, b] \text{ und jedes } t \in (0, 1). \tag{5.6.8}$$

Falls (5.6.8) mit echter Ungleichheit gilt, so heißt f strikt konvex. Analog heißt f konkav, falls gilt

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{für alle } x, y \in [a, b] \text{ und jedes } t \in (0, 1).$$

Analog definiert man strikt konkav.

Manchmal drückt man es so aus: Wenn f konvex ist, dann sitzt der Graph von f unter dem der Sekanten. Definition 5.6.8 macht deutlich, was hiermit gemeint wird.



Satz 5.6.9. *Sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.*

(i) *Wenn f auf (a, b) differenzierbar ist, dann ist f genau dann konvex, wenn f' auf (a, b) monoton wachsend ist.*

(ii) *Wenn f auf (a, b) zweimal differenzierbar ist, dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$.*

Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 0 \end{cases}$$

ist konvex aber nicht zweimal differenzierbar.

Da das Vorzeichen von f'' von Bedeutung ist, interessieren wir uns für Punkte, in denen das Vorzeichen sich ändert.

Definition 5.6.10. *Sei $f \in C^2((a,b))$. Ein Punkt $x_0 \in (a,b)$ heißt ein Wendepunkt von f, wenn für ein $\delta > 0$ gilt*

$$f''(x) > 0 \quad \textit{auf } (x_0 - \delta, x_0) \qquad \textit{und} \qquad f''(x) < 0 \quad \textit{auf } (x_0, x_0 + \delta)$$

oder umgekehrt.

Bemerkung. *Da $f \in C^2$ angenommen wurde, gilt in einem Wendepunkt x_0 nach Stetigkeit der zweiten Ableitung, dass $f''(x_0) = 0$. (Achtung! Das ist nicht die Definition von Wendepunkt! Der Punkt $x = 0$ ist KEIN Wendepunkt der Funktion x^4!)*

Beispiele.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ besitzt einen Wendepunkt in $x = 0$.
2. Wie schon bemerkt, ist $x = 0$ ein kritischer Punkt der Funktion x^3. Jetzt sehen wir, dass der Ursprung auch ein Wendepunkt der Funktion ist.

Wenn man den Graphen einer Funktion zeichnet, ist es nützlich, alle Extrempunkte und Wendepunkte zu identifizieren und Informationen über das Vorzeichen von f' und f'' zu benutzen. Wenn $f \in C^2$, dann kann man Informationen über das Vorzeichen von f'' auf einer punktierten Umgebung von einem kritischen x_0 benutzen, um den kritischen Punkt auszusortieren (wenn zum Beispiel $f''(x_0) = 0$).

5.7 Randextrema

Bis jetzt haben wir lokale Extrema nur für Funktionen auf offenen Intervallen definiert. Für eine Funktion f mit $D(f) = [a,b]$ oder $D(f) = [a,b)$ oder $D(f) = (a,b]$, kann f auch ein lokales Extremum in einem Endpunkt des Intervalls haben. Um Randextrema zu definieren, geben wir diese Verallgemeinerung von Definition 5.6.1 an.

Definition 6.6.1'. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein lokales Maximum von f, falls es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in U \cap I.$$

Wir nennen $f(x_0)$ einen lokalen Maximalwert von f. Analog für lokales Minimum. Wenn x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f ist, dann nennen wir x_0 ein lokales Extremum von f.

Bemerken Sie, dass eine differenzierbare Funktion f ein lokales Extremum in einem Endpunkt x_0 haben kann, ohne dass $f'(x_0) = 0$. Für eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ erhält man nur

- a ein lokales Minimum $\Rightarrow$ $f'(a) \geq 0$,
- a ein lokales Maximum $\Rightarrow$ $f'(a) \leq 0$,
- b ein lokales Minimum $\Rightarrow$ $f'(b) \leq 0$,
- b ein lokales Maximum $\Rightarrow$ $f'(b) \geq 0$.

5.8 Globale Optimierung

In der lokalen Optimierung suchen wir alle kritischen Punkte und bestimmen, ob sie ein Minimum, ein Maximum oder keins von beiden sind. In der globalen Optimierung fragen wir: In welchem Punkt ist f am kleinsten (oder am größten)? Welche Perspektive wichtiger ist, hängt von der Anwendung ab. In diesem Abschnitt schauen wir uns kurz globale Optimierungsprobleme an.

Definition 5.8.1. *Sei f eine reelle Funktion. Ein Punkt $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ heißt ein globales Minimum von f, wenn*

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathcal{D}(f).$$

Wir nennen $f(x_0)$ den (globalen) Minimalwert von f. Analog für globales Maximum.

Wenn wir die globalen Minima von f finden möchten, müssen wir nicht nur die kritischen Punkte von f, sondern auch die Funktionswerte in diesen Punkten betrachten. Wenn $\mathcal{D}(f)$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist, dann reicht es aus, die Funktionswerte in allen kritischen Punkten und die Funktionswerte in a und b zu betrachten.

5.9 Ableitung der Umkehrfunktion

Erinnern Sie sich daran, dass wir zu einer Bijektion f die Umkehrfunktion f^{-1} assoziiert haben. Man könnte sich denken, dass es eine Verbindung zwischen der Ableitung von f und der Ableitung von f^{-1} gibt.

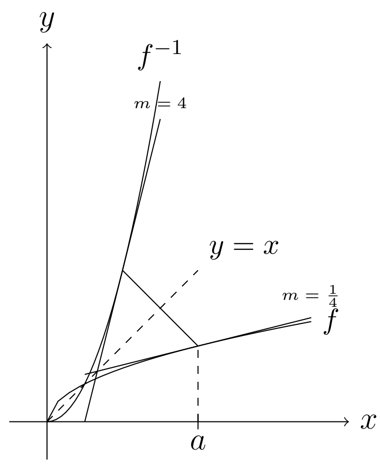


Abbildung 5.5: Die Tangente in $(a, f(a))$ hat die Steigung $m = \frac{1}{4}$. Der Graph von f^{-1} hat in $x = f(a)$ die Steigung $m = 4$.

Diese Verbindung wird im folgenden Satz deutlich gemacht.

Satz 5.9.1. *Sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bijektion. Angenommen f ist in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar,* *und es gilt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \tag{5.9.1}$$

Gleichung (5.9.1) ist oft nützlich, wenn man Ableitungen ausrechnen muss.

Beispiel. Zu $f(x) = \exp(x) = y$ ist die Umkehrfunktion $g(y) = \log(y) = x$ assoziiert. Nach (5.9.1) gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}.$$

Beispiel. Zu $f(x) = \sin(x)$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Umkehrfunktion $g(y) = \arcsin(y) = x$ (für $y \in [-1, 1]$) assoziiert. Nach (5.9.1) gilt

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{für } y \in (-1, 1). \end{aligned}$$

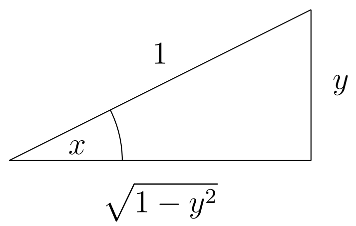


Abbildung 5.6: Mithilfe des Einheitskreises lassen sich Ausdrücke wie $\cos(\arcsin(y))$ vereinfachen.