Übung 3

Ausgabe: 28.10.2024 Abgabe: 04.11.2024 Besprechung: 11.11.2024

Verständnisfragen und Vorlesungswiederholung:

(keine schriftliche Beantwortung; mündliche Diskussion in der Übung)

1. Erläutern Sie das Drude-Modell der Elektronentheorie der Metalle!
2. Welche Näherungsannahmen werden im Sommerfeld-Modell zur Beschreibung freier Elektronen in Metallen gemacht?
3. Wie lautet die Dispersionsrelation freier Elektronen?
4. Definieren Sie die Begriffe Fermi-Kugel, -Energie, -Temperatur und -Wellenvektor.
5. Begründen Sie physikalisch, warum in freien Elektronengasen die spezifische Wärmekapazität proportional zur Temperatur ist.

1. Aufgabe: Stoßzeiten u. freie Weglängen im Drude-Modell (4 P)

Für die Metalle Silber und Lithium gelten folgende Daten bzgl. des spezifischen Widerstandes ρ bei Raumtemperatur ($T = 300$ K), der Massendichte ρ_M sowie der molaren Masse M:

	ρ/ (Ω m)	ρ_M / (g cm^{-3})	M / (g mol^{-1})
Ag	1,59·10^{-8}	10,5	107,8
Li	9,28·10^{-8}	0,53	6,94

a) Nehmen Sie an, dass beide Metalle monovalent sind (= ein freies Elektron pro Atom). Berechnen Sie jeweils die Stoßzeit τ und die mittlere freie Weglänge $\Lambda = \langle v \rangle \tau$ im Rahmen des Drude-Modells. (2 P)

b) Aus der kinetischen Gastheorie ist folgender Ausdruck für die Stoßzeit zwischen Molekülen bekannt:
$$\tau = \frac{1}{n \langle v \rangle \sigma},$$
wobei n die Dichte des Gases ist, $\langle v \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit und σ der Wirkungsquerschnitt der Moleküle. Berechnen Sie auf dieser Grundlage die Stoßzeit und mittlere freie Weglänge für Stickstoff-Moleküle bei Raumtemperatur, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem für Elektronen aus dem vorigen Aufgabenteil. Gehen Sie dabei von einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma = \pi d^2$ aus, wobei d der Moleküldurchmesser ist ($d = 0,37$ nm für N_2). (2 P)

Hinweis
Verwenden Sie für die mittlere Geschwindigkeit folgende Beziehung aus der kinetischen Gastheorie:
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k_B T}{m}}.$$

2. Aufgabe: Potentialtopf-Modell für Retinal (3 P)

Retinal ist der Farbstoff des Sehpigments Rhodopsin und besitzt zehn Elektronen. Modellieren Sie seine optischen Eigenschaften unter Verwendung eines einfachen Potentialtopf-Modells:

a) Behandeln Sie das Elektronensystem näherungsweise als freie Elektronen in einem eindimensionalen Potentialkasten der Länge L = 1,4 nm mit unendlich hohen Wänden und geben Sie die erlaubten Wellenfunktionen an. (1 P)

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Energien und berechnen Sie die Wellenlänge des Lichtes, bei der der Farbstoff ein erstes Absorptionsmaximum aufweist. (2 P)

3. Aufgabe: Fermi-Gase (4 P)

Berechnen Sie die Fermi-Energie, die Fermi-Wellenzahl, die Fermi-Geschwindigkeit und die Fermi-Temperatur folgender Materialien:

a) Silber (Dichte $\rho = 10{,}5$ g/cm^3), (2 P)

b) ^{3}He (Dichte $\rho = 0{,}081$ g/cm^3), welches u.a. zur Erzeugung sehr tiefer Temperaturen im mK-Bereich verwendet wird. (2 P)

4. Aufgabe: Thermodynamik des Fermi-Gases bei T = 0 K (5 P)

Bei $T = 0$ K ist die innere Energie U eines Fermi-Gases gegeben durch $U = \int_0^{E_F} dE\, E\, D(E)$. Betrachten Sie ein dreidimensionales Fermi-Gas aus N Elektronen:

a) Zeigen Sie, dass $U = \frac{3}{5} E_F N$ gilt. (1 P)

b) Berechnen Sie das chemische Potential $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$. (1 P)

c) Berechnen Sie mit Hilfe thermodynamischer Beziehungen Druck p sowie Kompressionsmodul K des Fermi-Gases. (2 P)

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit experimentellen Daten für Na ($E_F = 3{,}14$ eV, $K = 7{,}46$ GPa. (1 P)

Hinweis: $p = -\frac{\partial U}{\partial V}$ *sowie* $K = -V\frac{\partial p}{\partial V}$

5. Aufgabe: Breite der Fermi-Kante für T $>$ 0 K (4 P)

Für $T > 0$ K ist die Fermi-Verteilung $n(E)$ keine Stufenfunktion mehr; stattdessen wird die Fermi-Kante ausgeschmiert (s. Abb.).

a) Quantifizieren Sie die Breite der Verschmierung, indem Sie die blau eingezeichnete Wendetangente an $n(E)$ betrachten. Als Maß für die Breite kann der Bereich zwischen den Schnittpunkten der Wendetangente mit den Geraden $n = 1$ und $n = 0$ angesehen werden. Geben Sie die Breite in Vielfachen von $k_B T$ an! (3 P)

b) Um wieviel Prozent ist nach dieser Definition bei Raumtemperatur ($T = 300$ K) die Fermi-Kante eines typischen Fermi-Gases mit E_F =5 eV verschmiert? (1 P)