Name: Luca Cordes, 444900

Experimentalphysik III (WS 2023/2024)

Übung 13

Tutorium: 8 Abgabe: 23.01.2024

Aufgabe 1: Unschärferelationen

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \psi \middle| [\hat{A}, \hat{B}] \middle| \psi \right\rangle \right|$$

(a)

$$\begin{aligned}
\Delta p \cdot \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2} \\
\Delta x &\geq \frac{\hbar}{2 m_e \Delta v} \\
&\approx \frac{1.06 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg} \cdot 14.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\
&\approx 4.01 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Delta E \cdot \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2} \\
\Delta t &\geq \frac{\hbar}{2 \Delta E} \\
&\approx \frac{1.06 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{2 \cdot 0.2\ \mathrm{eV}} \\
&\approx 1.65 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
L &= \|L\| \\
&= \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \\
\Delta L &= \frac{\sum_i L_i \Delta L_i}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}} \\
&= \frac{\vec{L} \cdot \Delta \vec{L}}{\|\vec{L}\|} \\
&= \vec{e}_L \cdot \Delta \vec{L} \\
&\geq \Delta L_z
\end{aligned}$$

Die z-Komponente des Drehimpulses kann im Prinzip beliebig genau gemessen werden.

Aufgabe 2: Laser Energieniveau

(a)

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{Ph}} &= \frac{hc}{\lambda} \\
\lambda &= \frac{hc}{E_{\mathrm{Ph}}} \\
&\approx \frac{6.63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.79\,\mathrm{eV}} \\
&\approx 693\,\mathrm{nm}\ , \text{ rotes Licht}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{hc}{\lambda} \\
\overset{\substack{\text{Gauß'sche}\\ \text{Fehlerfortpflanzung}}}{\Longrightarrow} \quad \Delta E &= \frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda\ , \quad \begin{cases} \text{kein Minus, da Unsicher-} \\ \text{heiten per Def. positiv} \end{cases} \\
&= \frac{hcE^2}{(hc)^2}\Delta\lambda \\
&= \frac{E^2}{hc}\Delta\lambda \\
&\approx \frac{1.79^2\,\mathrm{eV}^2}{6.63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \cdot 0.53\,\mathrm{nm} 1.60 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \\
&\approx 2.19 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Korrelation von Spins

(a)

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{O}_1 \right\rangle &= \left\langle \uparrow_1 \right| \hat{O}_1 \left| \uparrow_1 \right\rangle \\
&= \int \mathrm{d}\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int \mathrm{d}\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int \mathrm{d}\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\left\langle \hat{O}_2 \right\rangle = \cdots = 0\ , \text{ analog zu oben}
$$

(b)

(c)

Das Minuszeichen entspricht der Tatsache, dass es bekannt ist, dass die Spins beiden Elektronen antiparallel sind. Obwohl die gemessenen Drehimpulse zufällig verteilt sind, gibt einen die Messung des einen Elektron somit durch die Korrelation Informationen über die noch ausstehende Messung des anderen Elektron. Wenn der eine Spin immer entgegengesetzt des anderen ist, dann ergibt positiv mal negativ immer ein negatives Produkt.

Aufgabe 4: Zustandsenergien endlicher Potenzialtopf

Python Code:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import (MultipleLocator, AutoMinorLocator)
import scipy.constants as pcs
from scipy.optimize import fsolve

me = 9.109383e-31 # kg
f = 2*me/(pcs.hbar**2)

V0 = -4*pcs.e # J (-4 eV)
L = 6e-10 # m (6 Angstrom)

E_n = [np.pi**2 / L**2 / f * n**2 - np.abs(V0) for n in range(1,5)]

def func(E, *args):
    symmetric = args[0]
    if E>=0 or E<=V0:
        return 1e10
    k_E = np.sqrt(f * (E - V0))
    kappa_E = np.sqrt(-f * E)
    kappa_k = (1 if symmetric else -1)*k_E*np.tan(L/2*k_E)**(1 if symmetric else -1)
    return (kappa_E - kappa_k)

roots =  [fsolve(func, V0*0.8, True),
          fsolve(func, V0*0.5, False)]

print(f"Energieniveaus des unendlichen Potenzialkasten: \n\t{E_n = }\n ")
print(f"Energieniveaus des endlichen Potenzialkasten: \n\tE_n = {roots}")
print("""\nEs fällt auf, dass es im endlichen Potenzialkasten nur endlich viele
erlaubte Energieniveaus gibt, anders als im unendlichen Potenzialkasten.
Außerdem ist das niedrigste Energieniveau im endlichen Potenzialkasten niedriger.""")

# Ausgabe des Programms:

# Energieniveaus des unendlichen Potenzialkasten:
#         E_n = [-4.735187684281048e-19, 2.85368870875805 35e-20, 8.652963129470561e-19,
↪  2.036759509150322e-18]
#
# Energieniveaus des endlichen Potenzialkasten:
#         E_n = [array([-5.4680873e-19]), array([-2.82871858e-19])]
#
# Es fällt auf, dass es im endlichen Potenzialkasten nur endlich viele
# erlaubte Energieniveaus gibt, anders als im unendlichen Potenzialkasten.
# Außerdem ist das niedrigste Energieniveau im endlichen Potenzialkasten niedriger.
```