Name: Luca Cordes, 444900
Name: Mahmut Can Dogan, 435714

Experimentalphysik II (SS 2023/2024)

Übung 10

Tutorium: 2 Abgabe: 23.06.2023

Aufgabe 1: Barlow'sches Rad

(a)

Das Barlow'sche Rad besteht aus einem leitendem Rad, welches drehbar gelagert ist und auf einer Seite in eine leitende Flüssigkeit eingetaucht ist. Legt man nun eine Spannung zwischen Achse und Flüssigkeit an, fließt ein Strom radial durch das Rad. Wird außerdem das Rad mit einem B-Feld parallel zur Achse durchsetzt, fängt das Rad "von alleine" an zu drehen, da die Elektronen welche im Rad fließen, durch die Lorentzkraft seitwärts abgelenkt werden, und einen Teil dieser tangentialen Bewegung durch Reibung an die Atomrümpfen im Rad weitergeben.

(b)

Die Rotationsgeschwindigkeit wird wie in (a) erläutert durch die Interaktion zwischen den Elektronen und den Atomen erzeugt, folglich kann die Rotationsgeschwindigkeit bei gleichem Strom erhöht werden, indem der Widerstand im Rad erhöht wird, bzw. der Widerstand der Flüssigkeit verringert wird. (Oder trivialer Weise helfen auch: die Stromstärke erhöhen, den mechanischen Widerstand in der Lagerung verringern)

Aufgabe 2: Teilchen im Magnetfeld

(a)

$$\begin{aligned}
F_{el} &= F_Z \\
\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2} &= m\frac{v^2}{r} \\
v^2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{mr} \\
\omega_0^2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{mr^3}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
0 &= F_Z + F_{el} + F_L \\
0 &= m\frac{v^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2} - vqB \\
0 &= v^2 - \frac{vqB}{m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{mr} \\
0 &= \omega^2 - \omega\frac{qB}{mr^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{mr^3} \\
\omega(B) &= \underbrace{\frac{qB}{2mr^2}}_{\gamma} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{qB}{2mr^2}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{mr^3}}_{\omega_0}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0} \\
\omega(0) &= \omega_0 \\
\frac{\partial \omega}{\partial B}(0) &= \frac{\gamma}{B} = \frac{q}{2mr^2} \\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial B^2}(0) &= \pm \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} \\
\omega(B) &\approx \omega_0 + \frac{q}{2mr^2} B \quad \left[\pm \frac{1}{2\sqrt{\omega_0}} B^2 \right]
\end{aligned}
$$

Beobachtungen: Die Kreisfrequenz ω ist proportional zum überlagertem B-Feld, d.h. $\omega \propto B$. Interpretiert man den Aufbau als ein Elektron, dass um einen Atomkern kreist, so würde dies bedeuten, dass das Durchdringen von Materie mit einem B-Feld Energie benötigt oder Energie generiert (umgewandelt) wird, da das Elektron an kinetischer Energie gewinnt/verliert. Eine interessante Folge ist, dass die kinetische Energie ein Maximum bei einer bestimmten Raumrichtung der Winkelgeschwindigkeit hat. Es ist somit möglich, dass sich die Elektronen bei einer mit einem Magnetfeld durchsetzten Materie ordnen, d.h. ihre Winkelgeschwindigkeit parallel zueinander wird, da dies einem Minimum im Potenzial entspricht. Das durch die bewegte Ladung erzeugte B-Feld überlagert sich daher nun konstruktiv; d.h. es könnte bei genug geordneten Atomen ein messbares Magentfeld entstehen, welches sogar relativ stabil wäre, da für die "Entparallelisierung" der Winkelgeschwindigkeiten eine Arbeit geleistet werden muss. Das Resultat ähneld einem Permanentmagneten.

Aufgabe 3: Helmholtzspulen

(a)

Für eine Spule:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{s}}{r^3} \\
\vec{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{s}}{r^3} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{(z\vec{e}_z + R\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta) \times (\vec{e}_\theta \,\mathrm{d}\theta)}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\theta \frac{z\vec{e}_r - R\vec{e}_z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \oint_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta R \left(z\vec{e}_r - R\vec{e}_z \right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \left(2\pi R^2 \vec{e}_z - zR \oint_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \vec{e}_r \right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \left(2\pi R^2 \vec{e}_z - \underbrace{zR \oint_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\cos\theta, \sin\theta, 0\right)^T}_{=0} \right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Das Prinzip der Superposition ergibt nun für Überlagerung von zwei gleichgroßen Spulen:

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\
&= \frac{\mu_0 I}{2} R^2 \left(\left((z+d/2)^2 + R^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \left((z-d/2)^2 + R^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{2} R^2 \left(\left((z+d/2)^2 + R^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \left((z-d/2)^2 + R^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \vec{e}_z \\
\vec{B}(0) &= \mu_0 I R^2 \left((d/2)^2 + R^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \vec{e}_z \\
\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}(0) &= 0 \quad , \text{ da Achsensymmetrisch} \\
\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2}(0) &= \frac{3}{2} \mu_0 I R^2 \frac{(4(d/2)^2 - R^2)}{((d/2)^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} \vec{e}_z z^2 \\
\vec{B}_T(z) \approx \vec{B}(z) &\approx \frac{\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \left(1 + \frac{3}{4} \frac{(4(d/2)^2 - R^2)}{((d/2)^2 + R^2)^2} z^2 \right)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\vec{B}_T = \text{const} \implies 0 = 4(d/2)^2 - R^2 \implies d = R
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_T(0) &= \frac{\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \\
&= \frac{\mu_0 n I^* R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \\
&\approx \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 1000 \cdot 1.5 \, \mathrm{A} \cdot 10^2 \, \mathrm{cm}^2}{((10 \, \mathrm{cm}/2)^2 + 10^2 \, \mathrm{cm}^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \\
&\approx 13.5 \, \mathrm{mT} \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Hall-Effekt

(a)

Für den Hall-Effekt ist die Stärke des Stroms relevant, welche der Ladung entspricht die pro Zeiteinheit eine Fläche durchströmt. Man sieht nun, dass ein Strom von positven Ladungsträgern, der in die entgegengesetzte Richtung relativ zu den Negativen fließt, den Gesammtstrom vergrößer würde, und somit auch die Hallspannung.

(b)

$$
\begin{aligned}
0 &= F_L + F_{el} \\
&= qvB + \frac{U_H}{b} \\
&= qvB + \frac{U_H}{b} \\
U_H &= -dqvB
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j &= nqv \\
v &= \frac{j}{nq}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_H &= -\frac{bjB}{nq} \\
&= -\frac{IB}{dnq} \\
&\approx -\frac{1\,\mathrm{A}\cdot 0.1\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{mm}\cdot 1.1\cdot 10^{29}\frac{1}{\mathrm{m}^3}\cdot(-1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})} \\
&\approx 5.68\,\mathrm{nV}
\end{aligned}
$$

Man könnte die Hallspannung erhöhen und damit einfacher messbar machen, indem man bei gleicher Stromdichte die Ladungsträgerdichte verringert, da dann die Ladungsträger schneller sind und der Einfluss der Lorenzkraft somit größer. Realisieren ließe sich dies, indem man statt Kupfer z.B. einen Halbleiter verwendet.

(c)

$$
\begin{aligned}
U_H &= -\frac{bjB}{nq} \\
&= -bvB \\
v &= -\frac{U_H}{bB} \\
&\approx \frac{5.68\,\mathrm{nV}}{5\,\mathrm{mm}\cdot 0.1\,\mathrm{T}} \\
&\approx 11.4\frac{\mathrm{\mu m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{AU}{lI} \\
U &= \frac{\rho l I}{db} \\
U_{\mathrm{Cu}} &\approx \frac{1.7\cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}\cdot 6\,\mathrm{mm}\cdot 0.7\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{mm}\cdot 5\,\mathrm{mm}} \\
&\approx 14.3\,\mathrm{\mu V} \\
U_{\mathrm{Si}} &\approx \frac{4.6\cdot 10^{-2}\,\Omega\mathrm{m}\cdot 6\,\mathrm{mm}\cdot 0.7\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{mm}\cdot 5\,\mathrm{mm}} \\
&\approx 38.6\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Die beiden spezifischen Widerstände unterscheiden sich um sechs Größenordnungen, somit ist eine starke Differenz der benötigten Spannung erwartet.

Aufgabe 5: Magnetfeld eines stromdurchflossenden Leiters

(a)

$$
\mathrm{d}\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3}
$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3}$$
$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\oint_{\text{Schleife}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3} + \int_{\text{gerader Leiter}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3}\right)$$

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\text{Schleife}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3} = B_{\text{Spule}}(0) \quad \text{, siehe Nr.3 (a)}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2\frac{3}{2})}\vec{e}_z$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{1}{R}\vec{e}_z$$

$$\int_{\text{Gerader Leiter}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3} = \int_{\mathcal{L}} \frac{(R\vec{e}_y - x\vec{e}_x)\times(\,\mathrm{d}x\vec{e}_x)}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= R\vec{e}_z \int_{\mathcal{L}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{\vec{e}_z}{R^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2/R^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\overset{(1)}{=} \frac{\vec{e}_z}{R}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh u}{(\sinh^2 u+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$$
$$\overset{(2)}{=} \frac{\vec{e}_z}{R}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 u}\,\mathrm{d}u \quad \text{, mit } \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$$
$$= \frac{\vec{e}_z}{R}\tanh u\Big|_{-\infty}^{\infty}$$
$$= \frac{2}{R}\vec{e}_z$$

$$\vec{B}_{\text{ges}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{1}{R}\vec{e}_z - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{R}\vec{e}_z$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{1}{R}\vec{e}_z\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$$

(1) : Substitution: $\sinh u = \frac{x}{R} \to \mathrm{d}u\cosh u = \frac{\mathrm{d}x}{R}$

(b)

$$\int_{\text{Gerader Leiter}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3} = 0 \quad \text{, da } \vec{r} \parallel \,\mathrm{d}\vec{s}$$
$$\int_{\text{Schleife*}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3} = \int_{\text{Oben}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3} + \int_{\text{Unten}} \frac{\vec{r}\times\,\mathrm{d}\vec{s}}{r^3}$$
$$\overset{(1)}{=} 0$$
$$\vec{B}_{\text{ges}} = 0$$

(1) : Da nach der Rechtenhandregel der Beitrag zum B-Feld der von einem Leiterstückchen oben geleistet wird, von dem Leitstückchen darunter weggehoben wird, d.h. die Beträge der beiden Stücken sind gleich, jedoch zeigen sie in die genau entgegengesetzte Richtung zueinander.

Aufgabe 6: Maxwell-Gleichungen

1. Maxwellgleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\oint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\mathcal{V}} \rho \, \mathrm{d}V$$
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Diese Gleichung beschreibt, dass das elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche propotialnal ist zur Ladungen innerhalb diese. Das macht die Ladung zu Quellen des elektrischen Feldes. Außerdem impliziert dies bereits die $\frac{1}{r^2}$ Propotionalität des E-Feldes da dies der Proportionalität einer Oberfläche in 3 Dimensionen bei Skalierung entspricht.

2. Maxwellgleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\oint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}V = 0$$
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Diese Gleichung sagt aus, dass der über eine geschlossene Oberfläche summierte magentische Fluss gleich null ist, d.h. es gibt keine magnetische Ladung gibt.

3. Maxwellgleichung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{S} = -\oint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{x} = -\oint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, \mathrm{d}\vec{S}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass das entlang einer geschlossen Linie summierte E-Feld bei einem nicht veränderndem B-Feld gleich null ist. Konkret auf Schaltungen angewand entspricht dies der Knotenregel (für Stromkreise mit ausschließlich konzentrierten Bauelementen), d.h. dass die Summe aller Ströme gleich null ist. Gibt es jedoch ein zeitlich veränderndes B-Feld, so erzeugt dieses ein Wirbel-E-Feld, sodass das durch eine geschlossene Linie summierte E-Feld nun proportional zur negativen magnetischen Flussänderung innerhalb der geschlossenen Linie ist (Induktion).

4. Maxwellgleichung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \oint_{\mathcal{S}} \vec{j} \, \mathrm{d}\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \oint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{x} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \oint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, \mathrm{d}\vec{S}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass das über eine geschlosse Linie summierte B-Feld gleich dem Strom ist der zwischen der geschlossenen Linie fließt, plus die zeitliche Änderung des elektrischen Flusses zwischen der Linie.