TEORÍA DE LA COMPUTACIÓN

Grado en Ingeniería Informática

Boletín de Ejercicios nº 1

Preliminares matemáticos

Esta sección propone una serie de ejercicios de repaso sobre lógica elemental, teoría de conjuntos, relaciones y funciones, inducción matemática y cardinalidad.

1. Demuestre que la siguiente proposición no es una tautología: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$.

2. Dados dos conjuntos A y B, ¿es cierto que $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$?

3. Demuestre por inducción la siguiente proposición: $n + 3 < 5 \times (n + 1), \forall n \in \mathbb{N}$.

4. Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$, indique cuáles de las siguientes relaciones son funciones totales, cuáles son funciones parciales y cuáles no son funciones:

   a) $f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
   b) $f = \{(0, 1), (1, \frac{1}{2}), (2, 1), (3, \frac{3}{2})\}$
   c) $f = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$
   d) $f = \{(0, 0), (1, -1), (3, 2)\}$
   e) $f = \{(0, 0)\}$

5. ¿Un conjunto puede tener la misma cardinalidad que alguno de sus subconjuntos propios? Razone la respuesta.

Alfabetos, palabras y lenguajes

Esta sección propone una serie de ejercicios de repaso sobre las definiciones de alfabeto, palabra y lenguaje, y sobre las operaciones que se pueden realizar con las palabras y con los lenguajes.

6. Sea Σ un alfabeto. ¿Es cierto que Σ^* es infinito numerable? Razone la respuesta.

7. ¿Quién es $\{\epsilon\}^*$? ¿Quién es $\{\epsilon\}^+$?

8. Sean u, v y z cadenas de símbolos sobre un determinado alfabeto. Indique cuál de las siguientes relaciones es falsa:

   a) $(uv)z = u(vz)$
   b) $x\epsilon = \epsilon x$
   c) $|xy| < |x| + |y|$

9. Sea A un lenguaje sobre un alfabeto Σ. ¿Bajo qué condiciones $A^* = A^+$?

10. Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Considere ahora la siguiente definición recursiva del lenguaje A sobre el alfabeto Σ:

   i. $\epsilon \in A$.
   ii. Si $x \in A$, entonces axb y bxa pertenecen a A.
   iii. Si x e y pertenecen a A, entonces xy pertenece a A.
   iv. Ninguna otra cadena pertenece a A.

   Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

   a) Todas las cadenas de A tienen longitud par.
   b) $aabab \in A$.
   c) $A = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ tiene el mismo número de } a\text{es que de } b\text{es}\}$.
   d) Si $x \in A$, $x^* \in A$.

11. Un *palíndromo* es una cadena que se lee igual hacia adelante que hacia atrás. Por ejemplo, la cadena a es un palíndromo, al igual que la cadena *radar*. Escriba una definición recursiva del lenguaje de los palíndromos sobre cualquier alfabeto Σ (obsérvese que ϵ es un palíndromo).

12. Sean $A = \{\epsilon, ab\}$ y $B = \{cd, e\}$. ¿Cuántas cadenas hay en A^nB para cualquier n arbitrario?

Lenguajes regulares

Esta sección propone una serie de ejercicios de repaso sobre las definiciones de lenguaje regular y de expresión regular, y sobre la construcción y manejo de autómatas finitos.

13. Escriba la expresión regular que describe el lenguaje sobre $\{a, b\}$ formado por todas las cadenas que terminan en b.

14. Simplifique la expresión regular $(\epsilon \cup aa)(\epsilon \cup aa)^*(ab \cup b) \cup (ab \cup b)$.

15. Indique cuáles de las siguientes expresiones son ciertas y por qué:

   a) $baa \in a^*b^*a^*b^*$
   b) $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$
   c) $a^*b^* \cap c^*d^* = \emptyset$
   d) $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

16. Existen dos lenguajes cuyo cierre de Kleene no es infinito. Indique cuáles son.

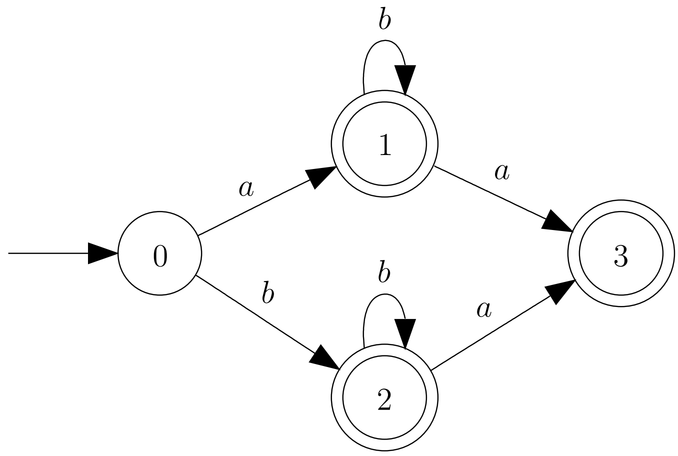
17. Sea M un autómata finito determinista. ¿Cuándo se cumple que $\epsilon \in L(M)$?

18. Sea M un autómata finito cuyo único estado de aceptación es el estado inicial. ¿Puede $L(M)$ contener exactamente tres cadenas? Razone la respuesta.

19. Construya los autómatas finitos deterministas que aceptan cada uno de estos lenguajes sobre $\{a, b\}$:

    a) $\{w \mid \text{toda } a \text{ de } w \text{ está entre dos } b\text{es}\}$
    b) $\{w \mid w \text{ contiene la subcadena } abab\}$
    c) $\{w \mid w \text{ no contiene la subcadena } abab\}$
    d) $\{w \mid w \text{ tiene un número impar de } a\text{es y un número par de } b\text{es}\}$
    e) $\{w \mid w \text{ tiene } ab \text{ y } ba \text{ como subcadenas}\}$

20. Indique cuál es la expresión regular que representa al lenguaje aceptado por el siguiente autómata:



    a) $ab^*a \cup bb^*a$
    b) $ab^*a \cup bb^*a \cup a \cup b$
    c) $(a \cup b)b^*(a \cup \epsilon)$

21. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alfabeto. El lenguaje $\{a^ib^i \mid 0 \leq i \leq 1000\}$ definido sobre Σ, ¿es regular?

    a) Sí es regular.
    b) No es regular
    c) Sería regular si el símbolo c no perteneciera a Σ.

22. Indique cuál de las siguientes relaciones es verdadera:

    a) $100 \notin 0^*(10)^*1^*$
    b) $1001 \in 0^*(1 \cup 01)^*0^*$
    c) $0101 \in (0^* \cup 1^*)(0^* \cup 1^*)(0^* \cup 1^*)$

23. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

    a) Los autómatas finitos tienen un número finito de estados.
    b) Los autómatas finitos sólo pueden aceptar lenguajes finitos.
    c) El número de lenguajes aceptados por los autómatas finitos es finito.